التكامل

تعريف: المشتقة العكسية

تسمى الدالة F مشتقة عكسية للدالة f المعرفة على مجالها I.

إذا كان: $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

أثبت أن: $F(x) = 5 - \frac{1}{3}x^3$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = -x^2$

ثم اكتب مشتقة عكسية أخرى لها.

أثبت أن: $F(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

التكامل غير المحدد للدالّة f بالنسبة إلى x هو مجموعة كل المشتقّات العكسيّة F ، ويكتب على الصورة:

$$\int f(x)dx$$

Rules of Indefinite Integral

قواعد التكامل غير المحدد

1. $\int k\,dx = kx + C$ k عدد ثابت

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\}$ قاعدة القوى

Properties of Indefinite Integral

خواص التكامل غير المحدد

1. $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x) dx \quad , \quad k \neq 0$ خاصية الضرب بعدد ثابت

2. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ خاصية الجمع والطرح

$$\int (3x^2 - 4x - 1)dx$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int (2x-3)(x+4)dx$$

$$\int \frac{x^2+5x+4}{x+1} dx$$

$$\int \left(\frac{3x^2-x}{x}\right)^2 dx$$

$$\int \sqrt{x}\, dx$$

$$\int \sqrt[5]{x^2}\, dx$$

$$\int x\sqrt{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \frac{x^2-3x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$$

إذا كان: $F(x) = \int (2x+5)dx$ ، $F(-1) = 0$ فأوجد $F(x)$

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$$

التكامل بالتعويض

$$\int (x^3+4x^2+x)^7(3x^2+8x+1)\,dx$$

$$\int \sqrt[3]{x^2-5x+2}\quad(2x-5)\,dx$$

$$\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}\,dx$$

$$\int \sqrt[5]{(3x+7)}\,dx$$

$$\int \frac{3(\sqrt[3]{x}-5)\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\int x(2x-1)^3 dx$$

$$\int x^5 \sqrt{4-x^2}\, dx$$

أوجد: $\int x^5 \sqrt{3 + x^2}\, dx$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3 + 1}\, dx$$

تكامل الدوال المثلثية

تذكر : اشتقاق الدوال المثلثية:

1. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
2. $\int \sin kx \, dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$
3. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
4. $\int \cos kx \, dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
5. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
6. $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$
7. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$
8. $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$

$(\sin x)' =$

$(\cos x)' =$

$(\tan x)' =$

$(\cot x)' =$

$(\sec x)' =$

$(\csc x)' =$

$$\int (\cos x + \csc^2 x) dx$$

$$\int \sec x (\tan x + \sec x) dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$\int \cos 4x \, dx$

$\int \sin 5x \, dx$

$\int (x^2 + \cos 2x) dx$

$\int x \sec^2 (x^2 + 2) dx$

$\int x \csc^2 (x^2 - 1) dx$

$\int \cos^4 t \cdot \sin t \, dt$

$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$

$\int \sec^2 x \cdot \tan x \, dx$

$\int \csc^2 x \cdot \cot x \, dx$

$\int \sec^4 x \tan x \, dx$

$\int \csc^5 x \cot x \, dx$

$$\int \cos^3(2x-3)\cdot\sin(2x-3)dx$$

$$\int x^2\cdot\sin(x^3-1)dx$$

$$\int (3+\sin 2x)^5 \cos 2x\, dx$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$$

$$\int \sqrt{\tan x}\,\sec^2 x\,dx$$

$$\int \sqrt{\cot x}\,\csc^2 x\,dx$$

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}$$

$$\int \frac{dx}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}$$

الدوال الأسية واللوغاريتمية

اشتقاق الدوال الأسية

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$g(x) = e^{x^2-4}$

$f(x) = 3^x$

$f(x) = e^{\sqrt{x}}$

$f(x) = 10^x$

$h(x) = e^{\tan x}$

$f(x) = 10^{\sin x}$

$h(x) = e^{\sec x}$

$f(x) = 6^{\sqrt{x}}$

$f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$

$f(x) = 5^{\cos x}$

اشتقاق دوال اللوغاريتمات الطبيعية

a $f(x) = \ln x^2$

b $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

c $h(x) = \ln\sqrt{x}$

d $k(x) = \ln(\cos x)$

a $f(x) = \ln(2x + x^3)$

b $g(x) = \ln\frac{1}{2x+1}$

تكامل بعض الدوال الأسية واللوغاريتمية

قاعدة المشتقة	التكامل غير المحدد
$\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x}$	$\int e^{x}\,dx = e^{x}+C$
$\frac{d}{dx}e^{u} = e^{u}\frac{du}{dx} = u'e^{u}$	$\int u'e^{u}\,dx = e^{u}+C$
$\frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert+C$
$\frac{d}{dx}\ln\lvert u\rvert = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln\lvert u\rvert+C$

لاحظ أن: $\int \frac{g'(x)dx}{g(x)} = \ln\lvert g(x)\rvert+C$

$$\int e^{3x}\,dx$$

$$\int 2e^{x}\,dx$$

$$\int (2x-1)e^{x^2-x+3}\,dx$$

$$\int 2x\cdot e^{x^2+3}\,dx$$

$$\int (x^2-2)e^{x^3-6x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx$$

$$\int \frac{-5}{3x-2}\,dx$$

$$\int \frac{3}{2x+5}\,dx$$

$$\int \frac{3t^2-6t}{t^3-3t^2+8}\,dt$$

$$\int \frac{x^3+4}{x}\,dx$$

أوجد: $\int \tan x\,dx$

أوجد: $\int \cot x\,dx$

التكامل بالتجزيء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

أوجد: $\int x\cos x\,dx$

أوجد: $\int x\sin x\,dx$

$$\int 4x\,e^{-5x}\,dx$$

$$\int x\,e^{x}\,dx$$

$$\int x\, e^{x-3}\, dx$$

$$\int (x-3)e^{x-3}\, dx$$

أوجد: $\int \ln(x+1)dx$

$$\int \ln x\, dx$$

$\int x \ln x \, dx$

أوجد: $\int (x+1)\ln(x+1)dx$

$\int x^2 \sin x \, dx$

$\int x^2 \cos x \, dx$

$\int x^2 e^x \, dx$

$\int x^2 e^{x+2} \, dx$

$\int e^x \sin x \, dx$

$$\int e^{x}\cos x\,dx$$

$$\int (\ln(x))^2\,dx$$

$$\int x^2 \ln x^2 dx$$

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

لتكن الدالة f : $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 4x + 3}$

فأوجد:

a الكسور الجزئية

b $\int f(x)\,dx$

$$\int \frac{x^2 - 2}{2x^3 - 5x^2 - 3x}\,dx$$

$$\int \frac{4x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}\, dx$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}\,dx$$

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^3 - 2x^2}\, dx$$

$$\int \frac{x^3 - 7x + 9}{x^2 - 3x + 2}\, dx$$

$$\int \frac{2x^4+3x^2-7}{x^3-6x^2+9x}\,dx$$

$$\int \frac{3x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x^2}\, dx$$

$$\int \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - 1}\, dx$$

التكامل المحدد

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_2^7 (x^3 - 2x^2 + 2)\,dx$$

Properties of the Definite Integral   خواص التكامل المحدد

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة I , $k \in \mathbb{R}$, $a, b, c \in I$ فإن:

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
3. $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$
4. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
5. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

لاحظ في خاصية 3 أنه: إذا كان $k = 1$ فإن: $\int_a^b dx = b - a$

$$\int_2^{-3} 5\,dx$$

$$\int_2^4 \frac{dx}{x-1}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \csc^2 x\right)dx$$

a $\int_{-3}^{4} |2x-4|\,dx$

b $\int_{1}^{3} |x+2|\,dx$

لتكن f دالة متصلة على $[a, b]$

6 إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in [a, b]$

فإن: $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$

7 إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall \quad x \in [a, b]$

فإن: $\int_a^b f(x)dx \leqslant 0$

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^{0} (x^2 + x)dx \leqslant 0$

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_3^5 (x^2 + x)dx \geqslant 0$

لتكن الدالتين g , f متصلتين على $[a , b]$ وكانت: $\quad f(x) \leqslant g(x) \quad \forall\, x \in [a , b]$

فإن: $\quad \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\quad \int_{-1}^{2}(x^2+1)dx \geqslant \int_{-1}^{2}(x-1)dx$

التفسير البياني للتكامل المحدد

في المستوى الإحداثي لتكن f دالة متصلة على $[a\,,b]$،

A تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات

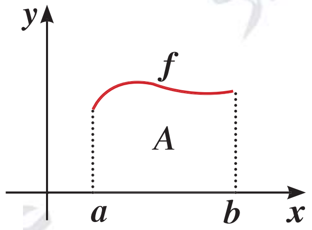
والمستقيمين $x = a \quad , \quad x = b$

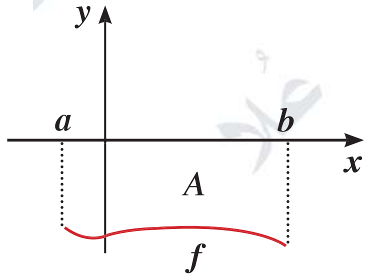
1 إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a\,,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = A$

2 إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in [a\,,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = -A$





$$\int_0^3 -\sqrt{9-x^2}\,dx$$

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

a $\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx$

b $\int_{0}^{4} -\sqrt{16 - x^2}\, dx$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \, dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos 2x \, dx$$

$$\int_{-1}^{1} \left((x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\right) dx$$

$$\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$$

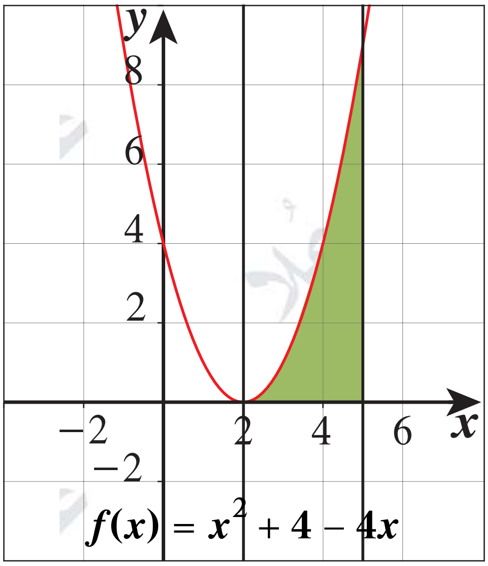
$$\int_{-2}^{0} x\, e^{-x}\, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\, dx$$

أوجد: $\int_4^7 \frac{3x^2 - 17}{x^2 - x - 6} dx$

المساحات في المستوي

أولًا: مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a,b]$



أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات

والمستقيمين $x = 5$, $x = 2$

$f(x) = x^2 + 4 - 4x$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = 4$, $x = -1$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 5x + 4$ ومحور السينات.

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 3x$ ومحور السينات.

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

$f(x) = x^3 - 9x \quad , \quad [-2\ ,\ 1]$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

$f(x) = \sin x \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{2} \ , \ \frac{\pi}{2}\right]$

$f(x) = \cos x \quad , \quad [0 \ , \ \pi]$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

$f(x) = x^3 - 4x \quad , \quad \left[-1 , \frac{3}{2}\right]$

ثانيًا: مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين في الفترة $[a , b]$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 3$

ومنحنى الدالة g : $g(x) = x^2 + 1$ والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$

علمًا بأن: $f(x) > g(x) \quad , \quad \forall x \in [-1 , 1]$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 1$

ومنحنى الدالة g : $g(x) = -x^2 - 3$ والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$

علمًا بأن المنحنيين للدالتين f , g غير متقاطعين.

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $y_2 = -2x + 5$, $y_1 = x^2 + 2$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $f(x) = -2x^2 + 2 \quad , \quad g(x) = x^2 - 1$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة g في كل مما يلي:

$$f(x) = 1 - x^3 \quad , \quad g(x) = -4x + 1$$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين:

$$f(x)=\sqrt{x} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{2}$$

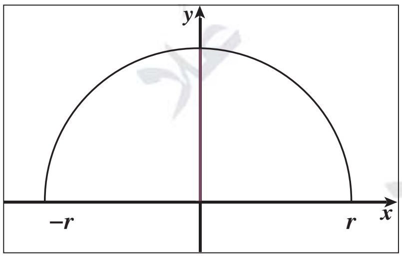
والمستقيمين $x=9$, $x=0$

حجوم الأجسام الدورانية

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$$

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ ومحور السينات في الفترة $[-1, 1]$.

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f:
$f(x) = \sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1, 5]$.

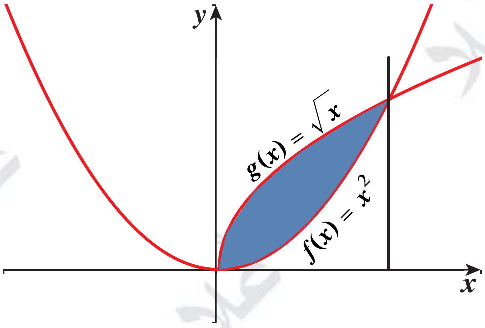


باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $r \neq 0$, $f(x) = r$ في الفترة $[0 , h]$

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين

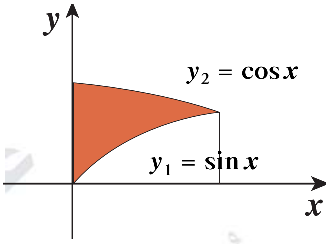
$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x}$



أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنيي الدالتين

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + 1 \quad , \quad g(x) = \frac{x}{2} + 2$$

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين. $y_1 = \sin x \;,\; y_2 = \cos x$ على الفترة $\left[0 , \frac{\pi}{4}\right]$.



أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين: $y_1 = x + 3 \ , \ y_2 = x^2 + 1$

طول قوس ومعادلة منحنى دالة

قاعدة طول القوس

إذا كانت الدالة f' متصلة على $[a, b]$ فإن طول القوس من منحنى $y = f(x)$ في $[a, b]$ هو:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$ في الفترة $[3 , 8]$

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{9}(9 + 3x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2 , 5]$

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^3}$ في الفترة $[0, 4]$

ثانيًا: إيجاد معادلة منحنى دالة باستخدام التكامل

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $3x^2 + x$ ويمر بالنقطة $(2, 2)$

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ويمر بالنقطة $(-1, -5)$

إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) هو $2x - 1$
فأوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $B(1, 0)$

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x , y) يساوي $\sqrt{5-4x}$

فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5 , 3)$

لتكن: $f''(x) = 5x - 2$

فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $P(2 , -2)$ نقطة حرجة للدالة.

المعادلات التفاضلية

تعريف (1)

المعادلات التفاضلية: هي معادلات تحتوي على دالّة مجهولة وبعض مشتقاتها.

نستخدم عادة y بدلًا من $f(x)$.

تعريف (2)

رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.

$y' - 2y = x - 1$ ، $y' = -8$ ، $y' = xy$ هي معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى.

$y'' + 2xy' - y = 0$ ، $y'' = -8$ هي معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية.

تعريف (3)

درجة المعادلة التفاضلية: هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.

$y'' + (y')^2 + y = 1$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى.

$(y')^2 = \frac{4x}{y}$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية.

تدريب:

أكمل الجدول التالي محدّدًا رتبة ودرجة كل معادلة من المعادلات التفاضلية فيه.

الدرجة	الرتبة	المعادلة التفاضلية
		$y' = 5y$
		$y'^2 = \frac{4x}{y}$
		$y'' = 5y' + xy$
		$(y'')^2 = 1 + (y')^3$
		$y''' = (y')^2 + x^3$

أثبت أن الدالة: $y = e^{x^2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$

أثبت أنّ الدالة: $y = 2e^{3x} + 1$ هي حل للمعادلة: $y' + 3 = 3y$

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى التي على الصورة $y' = f(x)$ حلها يكون على الصورة: $y = \int f(x)\,dx$

حل المعادلة: $y' = 7x^2 + 9x - 1$

حل المعادلة: $y' = 8x^3 - 3x^2 + 4$، والتي تحقق $y = 5$ عند $x = 1$

المعادلات التفاضلية على الصورة: $y'' = f(x)$

يتم حل هذه المعادلات بخطوتين: $y' = \int f(x)\,dx = F(x) + C_1$

ثم $y = \int (F(x) + C_1)\,dx$

حل المعادلة: $y'' = 3x^2 - 2x$

حل المعادلة: $y'' = -3x^2 + 6x$

المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay$ حيث $a \neq 0$ حلولها هي $y = k\,e^{ax}$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$.

أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = 4y$ إذا كان $y = 2$ عند $x = 0$

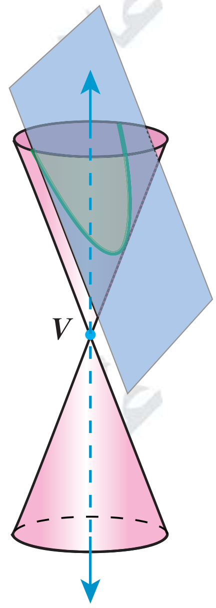
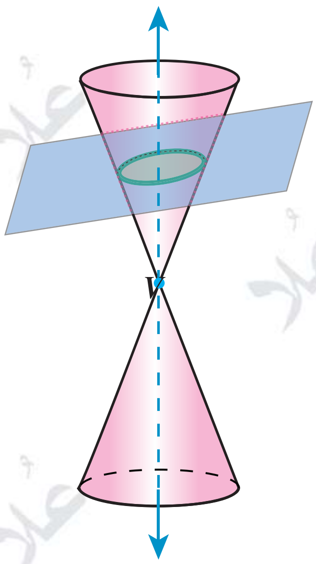
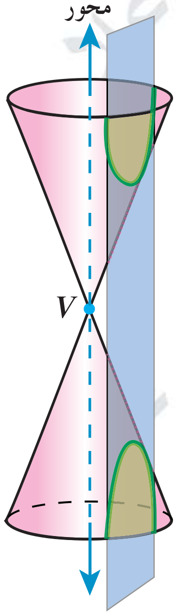
أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = -2y$ إذا كان $y = 3$ عند $x = 0$

طريقة فصل المتغيرات

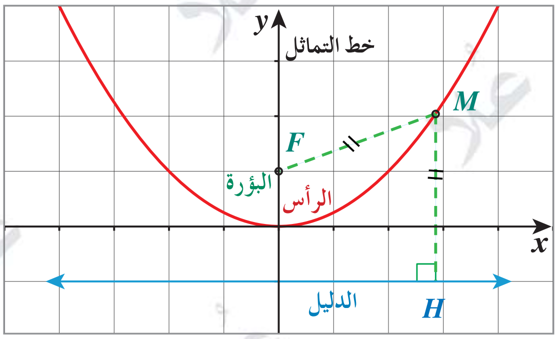
$$y' - 2xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

القطوع المخروطية

الشكل			
وضع المستوى	المستوى موازٍ لراسم ولا يحويه	المستوى ليس عموديًّا على المحور وليس موازيًا لأي راسم	المستوى موازٍ للمحور ولا يحويه
القطع الناتج	قطع مكافئ	قطع ناقص	قطع زائد

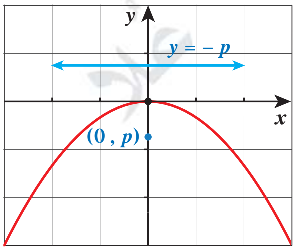
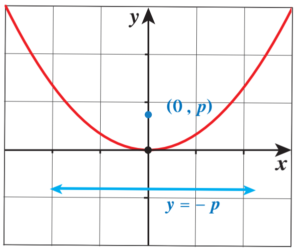
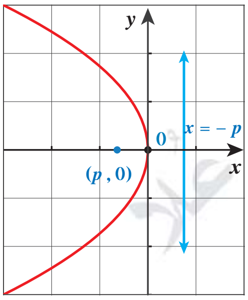
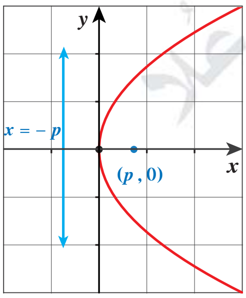
القطع المكافئ



تعريف: القطع المكافئ

القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى المتساوية البعدين عن نقطة ثابتة معطاة (البؤرة) وعن مستقيم ثابت معطى (الدليل).

قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل $(0, 0)$

الصورة العامة	$x^2 = 4py$		$y^2 = 4px$	
الفتحة	إلى أعلى أو إلى أسفل		إلى اليمين أو إلى اليسار	
البؤرة	$(0, p)$		$(p, 0)$	
الدليل	$y = -p$		$x = -p$	
محور التناظر	محور الصادات $(y - axis)$		محور السينات $(x - axis)$	
المسافة من الرأس إلى البؤرة	$\|p\|$			
المسافة من الرأس إلى الدليل				
إشارة p	$p < 0$	$p > 0$	$p < 0$	$p > 0$
الشكل				

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي:

a رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(4, 0)$

b بؤرته $F(0, -3)$ ودليله المستقيم: $y = 3$

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(-4, 0)$

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(0, 2)$ ودليله المستقيم $y = -2$

أوجد البؤرة ومعادلة الدليل لقطع مكافئ ، ثم ارسم شكلًا تقريبيًا لهذا القطع في كل مما يلي:

a المعادلة: $x^2 = -2y$

المعادلة: $\frac{1}{3}y^2 = x$

أوجد البؤرة والدليل لقطع مكافئ، ثم ارسم شكلًا تقريبيًّا لهذا القطع في كل مما يلي:

a المعادلة: $y = \frac{x^2}{4}$

المعادلة: $x = -\frac{1}{5}y^2$

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(1, 2)$ وخط تماثله $x - axis$.

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(1, 1)$ وخط تماثله $y - axis$.

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطتين $B(1,4)$, $A(-1,4)$

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $x = -3$

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $y = 1$

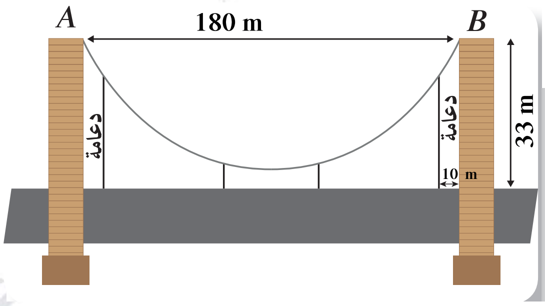
تُستخدم ميكروفونات مكافئة على جانبي ملعب لالتقاط الأصوات من داخل الملعب.
إذا كان قد تولد ميكروفون مكافئ من تدوير قطع مكافئ معادلته: $y^2 = 15x$،
فحدّد موضع البؤرة (جهاز الاستقبال الإلكتروني) لهذا القطع المكافئ.

تصنع إحدى الشركات الكشافات المكافئة لنوعيات عديدة من السيارات.
إذا كان لأحد هذه الكشافات سطح مكافئ متولد من تدوير القطع المكافئ الذي
معادلته $x^2 = 12y$، فأين سيكون موضع المصباح الكهربائي؟

تصنع إحدى الشركات مصابيح أمامية للسيارات. إذا كان أحد المصابيح على شكل
سطح مكافئ متولد من تدوير قطع مكافئ معادلته $y^2 = 12x$، فأين يجب وضع لمبة المصباح؟

ما معادلة القطع المكافئ إذا كانت اللمبة تبعد 4 (وحدات قياس) عن رأس القطع المكافئ؟

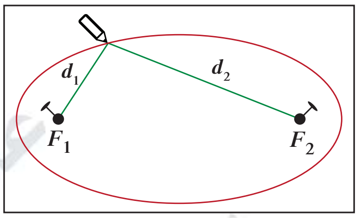
يصل سلك معدني متدلٍ بين رأسي عمودي جسر. السلك المعدني هو على صورة قطع مكافئ. يبعد العمودان عن بعضهما مسافة 180 m ويبلغ ارتفاع كل منهما 33 m، يبلغ أصغر ارتفاع للسلك عن الطريق العام 3 m، وضعت على الطريق دعامات للسلك المتدلي. أوجد طول الدعامة التي تبعد 10 m عن أي من العمودين.

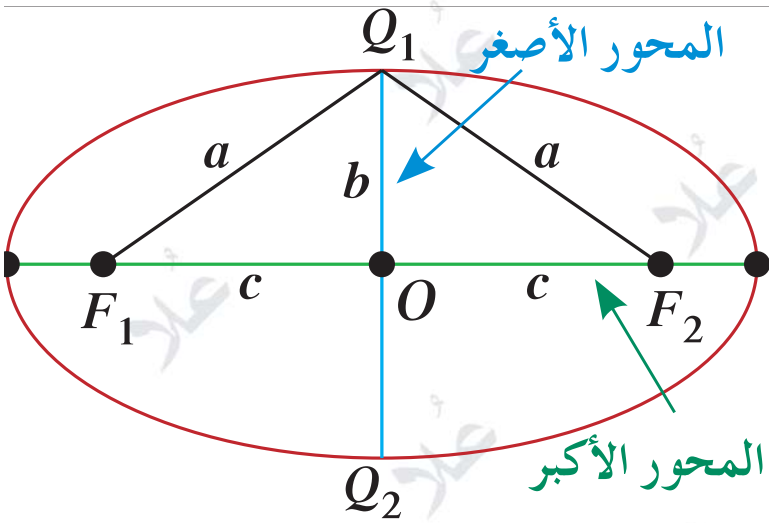


القطع الناقص

تعريف: القطع الناقص

القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابتًا.





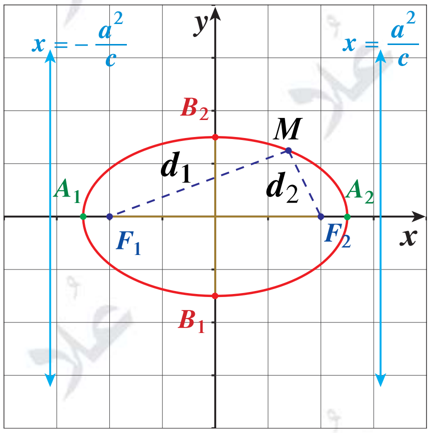
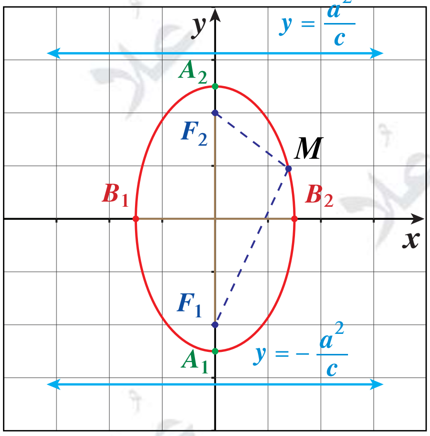
طول المحور الأكبر:

طول المحور الأصغر:

البعد بين البؤرتين:

العلاقة الأساسية:

معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ كالتالي:

	$a > b > 0$	$a > b > 0$
المعادلة	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
بيان القطع		
المحور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
الرأسان طرفا المحور الأكبر	$A_1(-a,0)\ ,\ A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)\ ,\ A_2(0,a)$
طول المحور الأكبر	$2a$	
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0,-b)\ ,\ B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)\ ,\ B_2(b,0)$
طول المحور الأصغر	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0), F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)\ ,\ F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$a^2 = b^2 + c^2$	
معادلتا الدليلين	$x = -\frac{a^2}{c}\ ,\ x = \frac{a^2}{c}$	$y = -\frac{a^2}{c}\ ,\ y = \frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه ومركزه	

إذا كانت: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{10} = 1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

إذا كانت: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: $F_1(0,-3)$, $F_2(0,3)$ وطول محوره الأصغر 4، ثم ارسم شكلًا تقريبيًّا لهذا القطع.

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$ وطول محوره الأكبر 6، وارسم شكلًا تقريبيًّا

أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$

أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $x^2 + 4y^2 = 16$

أوجد معادلة قطع ناقص إذا كان محوره الأكبر 16 cm والمسافة بين البؤرتين 10 cm.

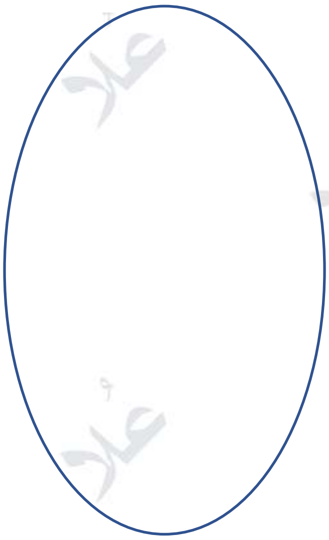
أوجد معادلة قطع ناقص إذا كان طول محوره الأكبر 12 cm والمسافة بين البؤرتين 8 cm.

أوجد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه $F(2,0)$ ويمر بالنقطة $A(2,1)$.

أوجد معادلة القطع الناقص الذي محوره الأصغر أفقي طوله 10 cm ويمر بالنقطة $A(2, 2\sqrt{6})$.

للقطع الناقص الذي يولد السطح الناقص لجهاز تفتيت الحصوات، محور أكبر نقطتاه الطرفيتان $A_1(-6,0)$, $A_2(6,0)$، ومحور الأصغر إحدى نقطتيه الطرفيتين $B_1(0,-2.5)$ ، أوجد إحداثيات البؤرتين.

يتولد المجسم الناقص لأحد أجهزة تفتيت الحصوات، من دوران قطع ناقص نقطتا طرفي محوره الأكبر $A_1(-8,0)$, $A_2(8,0)$. إذا كانت إحدى نقطتي طرفي محوره الأصغر $B_1(0,3.5)$؛ فأوجد إحداثيات البؤرتين.



لمتابعة الهمس في الصالات البيضاوية الشكل فإن الصوت الذي ينطلق من بؤرة يمكن الاستماع إليه بشكل تام في البؤرة الثانية. على افتراض أن إحدى الصالات الكبرى مبنية على شكل بيضاوي طولي محوريها 98 m و 46 m.

على أي مسافة من مصدر الصوت يجب أن يكون موقع شخص ليتمكن من سماعه بشكل واضح؟

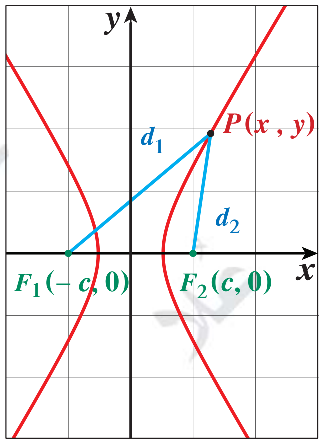
على افتراض أن الصالة بيضاوية الشكل طولي محوريها 78 m ، 36 m.

على أي مسافة من مصدر الصوت يجب أن يكون موقع شخص ليتمكن من سماع الصوت المنطلق بشكل واضح؟

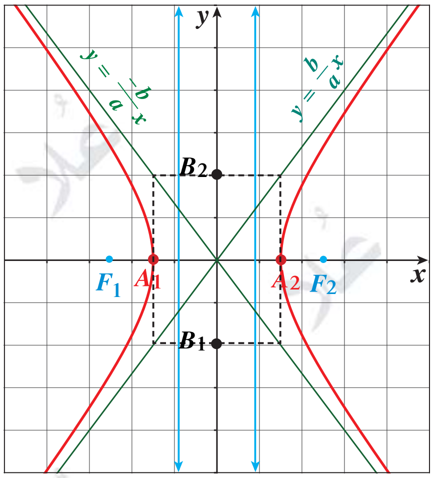
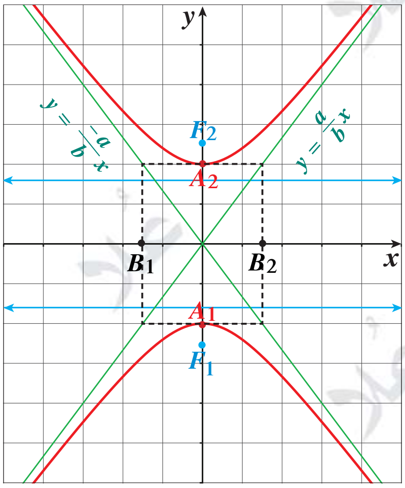
القطع الزائد

تعريف: القطع الزائد

القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوي ثابتًا.



معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل كالتالي:

المعادلة	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
بيان القطع		
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$c^2=a^2+b^2$	
معادلة الخطين المقاربين	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
معادلة الدليلين	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه ومركزه	

$9x^2 - 16y^2 = 144$

$9y^2 - 25x^2 = 225$

أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(0,-3)$, $F_2(0,3)$ ورأساه $A_1(0,-2)$, $A_2(0,2)$
ثم أوجد معادلة كلّ من خطيه المقاربين وارسم شكلًا تقريبيًّا للقطع.

أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$ ورأساه $A_1(-2,0)$, $A_2(2,0)$، ثم أوجد معادلة كلّ من خطيه المقاربين، وارسم شكلًا تقريبيًّا للقطع.

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وإحدى بؤرتيه $F(0,\sqrt{34})$ ومعادلة أحد خطيه المقاربين هي: $y = \frac{3}{5}x$

أوجد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $F(\sqrt{41}, 0)$ ومعادلة أحد خطية المقاربين $y = \frac{4}{5}x$

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0, 0)$ وأحد رأسيه $(-4, 0)$ ويمر بالنقطة $(5, -2)$.

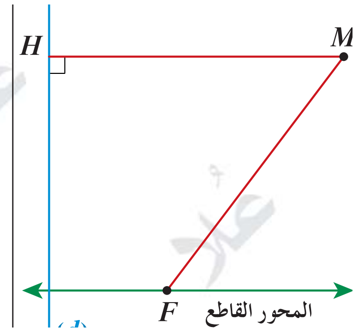
أوجد معادلة القطع الزائد الذي أحد رأسيه $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ ويمر بالنقطة $\left(-\sqrt{3}, -\frac{5}{2}\right)$

أوجد معادلة قطع زائد لمسار مركبة فضائية حول كوكب المشتري علمًا أن: $c = 778\ 547\ 200$ km ، $a = 38\ 942\ 360$ km

الاختلاف المركزي

تعريف:

القطع المخروطي هو مجموعة كل النقاط في المستوى الإحداثي حيث تكون نسبة بعد كل منها من نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) في نفس المستوى تساوي مقدارًا ثابتًا.



$e = \frac{c}{a}$

إذا $e = 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا مكافئًا**

إذا $e < 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا ناقصًا**

إذا $e > 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا زائدًا**

حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته.

1 حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته

a اختلافه المركزي $(e = 1)$ وبؤرته $F(-1,0)$

b اختلافه المركزي $\left(e = \frac{4}{5}\right)$ وإحدى بؤرتيه $F(-4\sqrt{2}\ , 0)$

c اختلافه المركزي $(e = \sqrt{3})$ ومعادلة أحد دليليه $x = \frac{1}{3}$

أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته:

b $x^2 - 25y^2 = 1$

a $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

2 أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته:

b $24y^2 = 600 + 25x^2$

a $x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$

أوجد طول المحور القاطع للقطع الزائد الذي اختلافه المركزي $(e = 2)$ وطول محوره المرافق 6 وحدات.

أوجد طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي $\left(e = \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ وطول محوره الأصغر 4 وحدات.

يمكن وضع الأقمار الاصطناعية في مدارات بيضاوية الشكل (قطع ناقص) في دورانها حول الأرض.

لنفترض أن قمرًا صناعيًّا يتحرك في مدار بيضاوي (قطع ناقص) حول الأرض حيث الاختلاف المركزي ($e = 0.04$) وطول نصف محوره الأكبر $7\,500$ km وإحدى بؤرتيه مركز الأرض.

a أوجد معادلة مدار القمر الاصطناعي.

b على افتراض أن طول نصف قطر الأرض $6\,372$ km

فأوجد أطول وأقصر بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض.

4 إذا كان القمر الاصطناعي له مدار بيضاوي (قطع ناقص) حول الأرض حيث اختلافه المركزي $e = 0.05$ وطول نصف محوره الأكبر $8\,600$ km وإحدى بؤرتيه مركز الأرض.

a أوجد معادلة مدار القمر الاصطناعي.

b إذا كان نصف قطر الأرض $6\,372$ km

فأوجد أطول وأقصر بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض.

المتغيرات العشوائية المتقطعة

المتغيّر العشوائي Random Variable

تعريف: المتغير العشوائي Random Variable

هو دالة مجالها فضاء العينة لتجربة عشوائية S ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$ ومداها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$

حيث $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$

(X هو المتغير العشوائي لتجربة عشوائية، S فضاء العينة، $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية).

تعريف: دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه $\{x_1 , x_2 , x_3 , ...\}$

فإن دالة التوزيع الاحتمالي f تعرّف كالتالي:

$$f(x_i) = P(X = x_i) \quad , \quad i = 1, 2, 3, ...$$

ويمكن تمثيلها بالجدول التالي:

x_i	x_1	x_2	.....
$f(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	.....

في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة، المتغير العشوائي X يعبّر عن:
الجذر التربيعي للعدد الظاهر على الوجه العلوي عندما يكون الجذر التربيعي عددًا كليًّا والصفر لغير ذلك.

فأوجد:

- **a** فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.
- **b** مدى المتغير العشوائي X.
- **c** احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة (S): $f(x_i) = P(X = x_i)$
- **d** دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

عند رمي حجر نرد مرة واحدة، إذا كان المتغير العشوائي X يعبّر عن:

«مربع العدد الظاهر مطروحًا منه 1 عندما يكون العدد الظاهر أصغر من 4 ، و -1 لغير ذلك».

فأوجد:

a فضاء العينة S وعدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة S.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن «عدد الصور»، فأوجد ما يلي:

a فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي X يعبّر عن «عدد الكتابات».

فأوجد ما يلي:

a فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

بيان دالة التوزيع الاحتمالي

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	-2	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.1	k	0.2

فأوجد قيمة k.

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.35	0.15	0.1	0.2	k

فأوجد قيمة k.

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: $\{0, 1, 2, 3\}$

وكان: $f(0) = 0.1 \ , \ f(1) = 0.6 \ , \ f(2) = 0.15$

فأوجد $f(3)$، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: $\{-2, -1, 0, 1\}$

وكان $f(-2) = f(-1) = 0.3 \ , \ f(1) = 0.2$

أوجد $f(0)$، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

صندوق يحتوي على 10 كرات متماثلة منها 7 كرات بيضاء و3 كرات حمراء. سحبت عشوائيًّا 3 كرات معًا من الصندوق.

إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات البيضاء،

فأوجد ما يلي:

a عدد عناصر فضاء العينة (S).

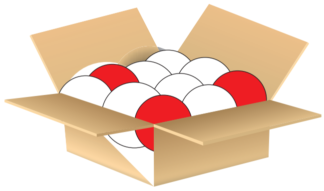
b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

صندوق يحتوي على 10 كرات متماثلة منها 7 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء. سحبت أربع كرات عشوائيًّا معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي X يمثّل عدد الكرات الحمراء.

فأوجد ما يلي:



a عدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

التوقع (الوسط) والتباين للمتغيرات العشوائية المتقطعة

يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.43	0.29	0.17	0.09	0.02

فأوجد:

a التوقع (μ).

b التباين (σ^2).

c الانحراف المعياري (σ).

يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي متقطع X.

5	4	3	2	1	x
0.3	0.1	0.3	0.1	0.2	$f(x)$

فأوجد:

a التوقع (μ).

b التباين (σ^2).

c الانحراف المعياري(σ).

دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي متقطع

تعريف:

دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a

أي أن: $F(a) = P(X \leqslant a)$

الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.43	0.29	0.17	0.09	0.02

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X.

فأوجد: $F(0)\ ,\ F(1)\ ,\ F(3.5)\ ,\ F(4)\ ,\ F(5)\ ,\ F(8)$

الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	3	4	5
$f(x)$	0.5	0.3	0.2

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X.

فأوجد: $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(4.5)$, $F(5)$, $F(7)$

الجدول التالي يبيّن بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	5
$F(x)$	0.15	0.2	0.6	1

أوجد:

a $P(1 < X \leqslant 3)$

b $P(2 \leqslant X < 5)$

c $P(X > 2)$

يبيّن الجدول التالي بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	4
$F(x)$	0.25	0.40	0.65	1

أوجد:

$P(2 < X < 4)$

$P(X > 3)$

توزيع ذات الحدين

نعلم من خلال دراستنا أن بعض التجارب العشوائية يكون لها ناتجان أو عدة نواتج يمكن اختزالها إلى ناتجين فقط أي أن فضاء العينة يصبح محتويًا على عنصرين فمثلًا:

- عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة يكون الناتج إما صورة أو كتابة.
- عند تأدية الطالب اختبارًا في مادة ما تكون النتيجة إما نجاح أو رسوب.
- عند دخول شخص اختبار الحصول على رخصة القيادة تكون النتيجة نجاح أو رسوب.

وهكذا فإننا قيد دراسة التجارب التي يكون لها ناتجان فقط وهي ما يسمى **بتجربة ذات الحدين**. والتي تتبع دالة التوزيع الاحتمالي المتقطع.

تعريف: تجربة ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة عشوائية تحقق الشروط التالية:

1. **تتكوّن التجربة من عدد n من المحاولات المستقلة والمتماثلة.**
   (المحاولات المستقلة تعني أن نتيجة كل محاولة لا تؤثر ولا تتأثر بنتائج المحاولات الأخرى).
2. **كل محاولة يكون لها ناتجان فقط مثل (نجاح أو فشل).**
3. **احتمال الحصول على أحد الناتجين يكون ثابتًا من تجربة إلى أخرى. وسوف نرمز لهذا الاحتمال بالرمز P.**
   وتسمى كل محاولة من محاولات التجربة بمحاولة برنولي Bernoulli.

احتمال النجاح في x من المحاولات يعطى بالعلاقة $n \in \mathbb{Z}^+$, $P(X = x) = f(x) = {}_nC_x \cdot P^x \cdot (1 - P)^{n-x}$

حيث n عدد المحاولات

مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X = \{0, 1, 2, ..., n\}$

x عدد مرات النجاح في n من المحاولات

P احتمال النجاح

$(1 - P)$ احتمال الفشل

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا ذو حدين ومعلمتيه هما: $n = 7 \ , \ P = 0.1$. فأوجد:

a $P(X = 0)$

b $P(1 < X \leqslant 3)$

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا ذو حدين ومعلمتيه هما:

$P = 0.6$ ، $n = 6$ فأوجد:

a $P(X = 1)$

b $P(2 < X \leqslant 4)$

التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين

التوقع: $\mu = nP$

التباين: $\sigma^2 = nP(1 - P)$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{nP(1 - P)}$

ينتج مصنع سيارات 200 سيارة يوميًا، إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة 0.01 فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد.

ينتج مصنع سيارات 350 سيارة يوميًا، إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة 0.02 فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد.

في تجربة إلقاء قطعة نقود 5 مرات. أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي X هو ظهور صورة.

في تجربة إلقاء قطعة نقود 8 مرات. أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي X هو ظهور كتابة.

المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

تعريف: المتغير العشوائي المتصل **Continuous Random Variable**

هو المتغير التي تكون مجموعة القيم الممكنة له عبارة عن فترة من الأعداد الحقيقية أي أن مدى المتغير العشوائي المتصل $X = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$ وهي مجموعة غير قابلة للعد.

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & : 1 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

a) $P(1 < X \leqslant 5)$

b) $P(X < 3)$

c) $P(X \geqslant 1.5)$

d) $P(X = 2)$

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا، فدالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & : -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

d $P(X = 0)$

c $P(-1.5 < X < 2.5)$

b $P(-1 < X < 1)$

a $P(X < 2)$

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & : 0 < x \leqslant 4 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

a) $P(0 \leqslant X \leqslant 4)$

b) $P(X \leqslant 2)$

c) $P(X > 2)$

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا، ودالة كثافة الاحتمال له هي:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & : 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$
فأوجد:

a $P(X < 1)$

b $P(X \geqslant 1)$

c $P(X = 1)$

التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتغير عشوائي متصل (مستمر)

تعريف:

دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الاحتمالي المنتظم على $[a\,,b]$ هي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & : a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

– التوقع (الوسط) للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو:

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

– التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو:

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & : 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

a أثبت أن الدالة هي دالة كثافة احتمال.

b أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

c أوجد $P(1 < X \leqslant 3)$

d أوجد التوقع والتباين للدالة f.

3 لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

a أثبت أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال.

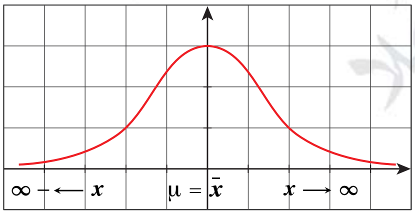
b أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

c أوجد: $P(2 < X \leqslant 3)$

d أوجد التوقع والتباين للدالة f .

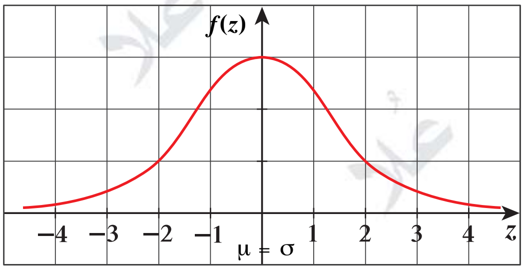
التوزيع الاحتمالي الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$ Natural Probability Distribution $N(\mu , \sigma^2)$

يعتبر التوزيع الاحتمالي الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة وقد سبق أن درسنا منحنى التوزيع الطبيعي وخواصه والتي منها:



منحنى التوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$

- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.
- يكون بيان المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره $(x = \mu)$.
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى $-\infty$ وإلى ∞ (لا يقطع محور السينات).
- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح (وحدة مساحة).
- المستقيم الرأسي $\bar{x} = \mu$ يقسم المساحة تحت المنحنى إلى قطعتين متماثلتين مساحة كل منهما تساوي نصف (نصف وحدة مساحة).



منحنى التوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$

التوزيع الطبيعي المعياري $N(0 , 1)$

إذا كان المتوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي $\mu = 0$ والانحراف المعياري $\sigma = 1$ يسمى التوزيع الطبيعي **بالتوزيع الطبيعي المعياري**.

الشكل المرسوم يمثل بيان منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

نعلم أن منحنى التوزيع الطبيعي يتحدد بكل من التوقع μ والتباين لها σ^2 ونظرًا لاختلاف قيم σ^2، μ من توزيع لآخر فإننا نقوم بتحويل أي توزيع طبيعي إلى توزيع طبيعي معياري وفق التحويل $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

وتمّ وضع جداول التوزيع الطبيعي المعياري في نهاية الوحدة للتوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$.

حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$

إذا كان للمتغير العشوائي X التوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$ أي التوزيع الذي توقعه μ وتباينه σ^2 وأردنا حساب احتمالات تتعلق بالمتغير X فإننا نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري المرفق آخر الوحدة باتباع الخطوات الموضحة التالية لإيجاد $P(a \leq X \leq b)$:

1. نوجد القيمة المعيارية المناظرة للقيمة a بالتعويض في العلاقة: $z_1 = \dfrac{a-\mu}{\sigma}$

 والقيمة المعيارية المناظرة للقيمة b بالتعويض في العلاقة: $z_2 = \dfrac{b-\mu}{\sigma}$

2. نستخدم العلاقة: $P(a < X \leqslant b) = P(z_1 < z < z_2)$

3. نستخدم أحد جدولي المساحة تحت المنحنى الطبيعي (5), (4) لحساب الطرف الأيسر من العلاقة السابقة.

حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري $P(z)$

- إذا كانت $z \geqslant a$ أو $z \leqslant a$، حيث $a \geqslant 0$ نستخدم جدول z رقم (4).
- إذا كانت $z \geqslant a$ أو $z \leqslant a$، حيث $a < 0$ نستخدم جدول z رقم (5).

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a $P(z \leqslant 2.18)$

b $P(z \geqslant 2.43)$

c $P(1.4 \leqslant z \leqslant 2.6)$

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a $P(z \leq 0.95)$

b $P(z > 0.71)$

c $P(1.45 \leqslant z \leqslant 3.26)$

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a $P(z \leqslant -0.55)$

b $P(-2.2 \leqslant z \leqslant -1.6)$

c $P(-1.3 \leqslant z \leqslant 0.28)$

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a $P(z \leq -0.12)$

b $P(-3.2 \leq z \leq -0.1)$

c $P(-5.26 \leq z \leq 0.69)$

يمثّل المتغير X درجات الطلاب في مادة الرياضيات. إذا كان توزيع هذه الدرجات يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه $\mu = 40$ وانحرافه المعياري $\sigma = 8$ فأوجد:

(a) $P(30 < X < 65)$

(b) $P(X \geq 45)$