وزارة التربية

NEWKUWAIT
كويت جديدة

الرياضيات

الصف التاسع - الجزء الثاني

كتاب الطالب

لجنة تأليف كتاب الرياضيات للصف التاسع

أ. سارة مهدي براك هادي (رئيسًا)

أ. جمال عبد الناصر أحمد السبال
أ. عماد إبراهيم عبد القادر عامر
أ. جيهان عبد الشافي محمد أحمد
أ. محاسن حسين نوري عطية
أ. فهيد سعود ناصر العجمي
أ. مريم عفّاس سعود الشحومي
أ. عيد عشوي عايد الكهيدي
أ. عائشة سالم عبدالله البالول

الطبعة الأولى

١٤٤٠ - ١٤٤١ هـ

٢٠١٩ - ٢٠٢٠ م

الطبعة الأولى ٢٠١٩م

المراجعة العلمية
أ. مريم عفّاس سعود الشحومي
المتابعة الفنية
قسم إعداد وتجهيز الكتب المدرسية

الكتاب كاملًا

شاركنا بتقييم مناهجنا

ذات السلاسل - الكويت

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم (٨٤) بتاريخ ٢٢/ ١٢/ ٢٠١٩م

بسم الله الرحمن الرحيم

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

المحتويات

محتوى الجزء الثاني

الوحدة السادسة : المجموعات والدوالّ

الموضوع : وطني الكويت

الوحدة السابعة : المعادلات الخطّية والمتباينات الخطّية

الموضوع : المنحدرات

الوحدة الثامنة : هندسة المثلّث
الموضوع : العلوم الهندسية والجسور

الوحدة التاسعة : النسبة المئوية
الموضوع : التجارة

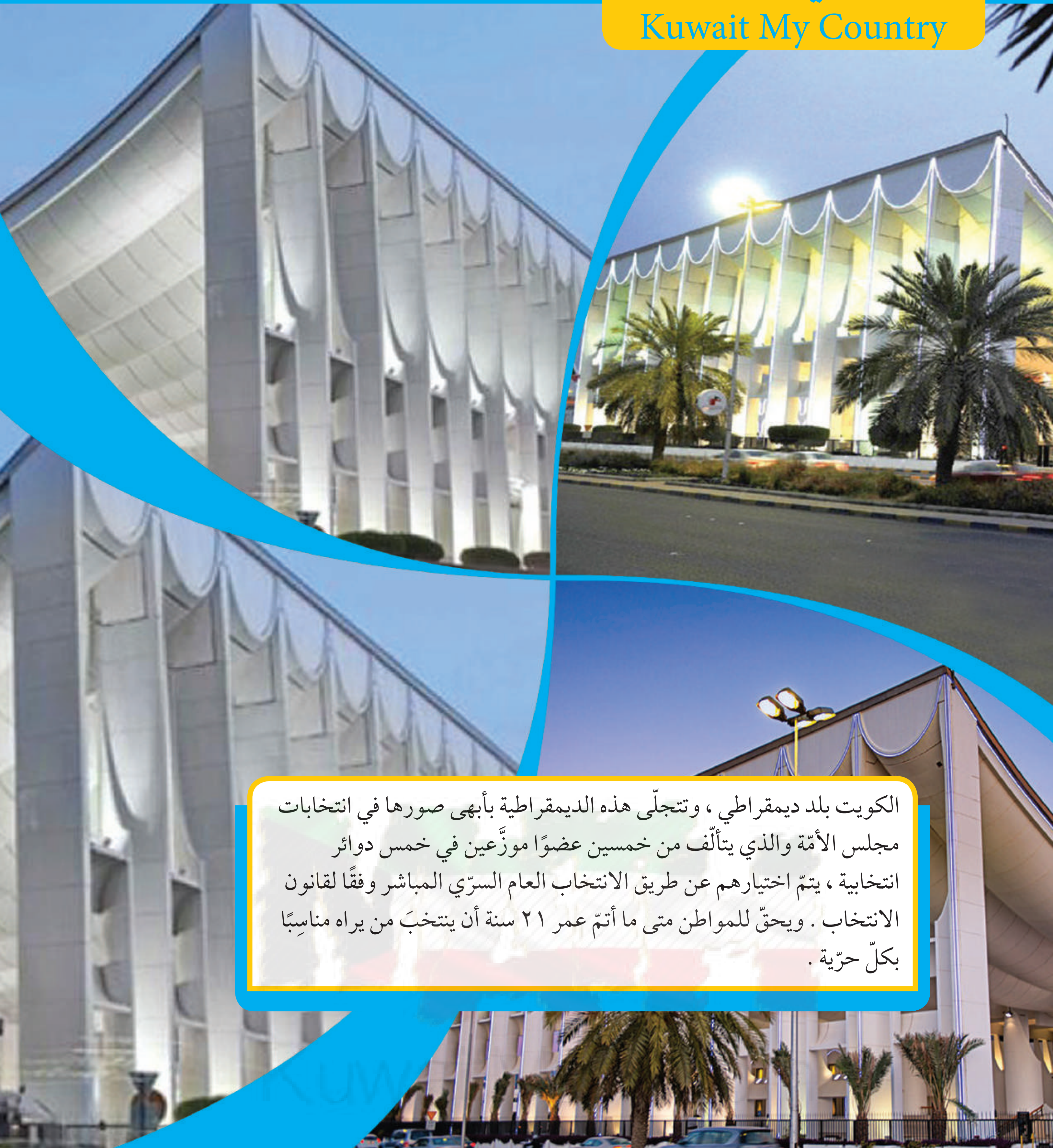
الوحدة العاشرة : الهندسة والقياس

الموضوع : تصاميم هندسية

الوحدة السادسة

المجموعات والدوالّ
Sets & Functions

وطني الكويت
Kuwait My Country



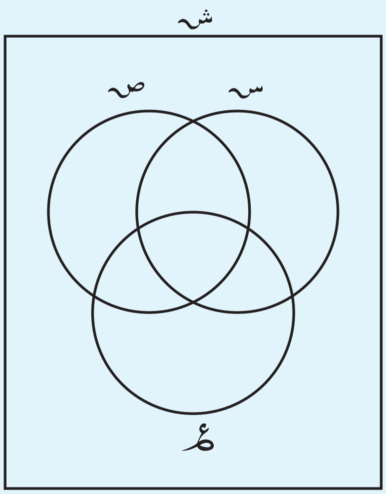
الكويت بلد ديمقراطي ، وتتجلّى هذه الديمقراطية بأبهى صورها في انتخابات مجلس الأمّة والذي يتألّف من خمسين عضوًا موزَّعين في خمس دوائر انتخابية ، يتمّ اختيارهم عن طريق الانتخاب العام السرّي المباشر وفقًا لقانون الانتخاب . ويحقّ للمواطن متى ما أتمّ عمر ٢١ سنة أن ينتخبَ من يراه مناسِبًا بكلّ حرّية .

مشروع الوحدة : (مجلس الطلبة)

تعزّز دولة الكويت روح الديمقراطية لدى المتعلّمين منذ الصغر، وذلك من خلال إجراء انتخابات داخل أروقة المدارس لاختيار أعضاء مجلس الطلبة وتحت إشراف الإدارة المدرسية ، وذلك لتهيئة النشء لممارسة حقيقية للحياة الديمقراطية.

خطّة العمل :

إذا كانت مجموعة متعلّمي فصلك (ش) وليكن عددهم ٢٠ متعلّمًا. تمّ اختيار ١٠ متعلّمين منهم لتشكيل اللجان التالية: مجموعة اللجنة الثقافية (س) ومجموعة اللجنة الرياضية (ص) ومجموعة لجنة النظام (ع).



خطوات تنفيذ المشروع :

- أُكتب مجموعة أسماء متعلّمي فصلك.
- قسِّم اللجان وفق الشروط التالية:
  - كل لجنة تتكوّن من ٥ متعلّمين.
  - متعلّم واحد فقط مشترك في جميع اللجان.
  - متعلّمان فقط على الأكثَر مشتركان في لجنتين مختلفتين.
- أُكتب مجموعة أسماء المتعلّمينَ في اللجان السابقة.
- أُكتب مجموعة أسماء المتعلّمين الذين لم يتمّ اختيارهم في أيّ من اللجان الثلاث السابقة.
- مثِّل عناصر كلّ مجموعة في شكل فن المجاورِ.

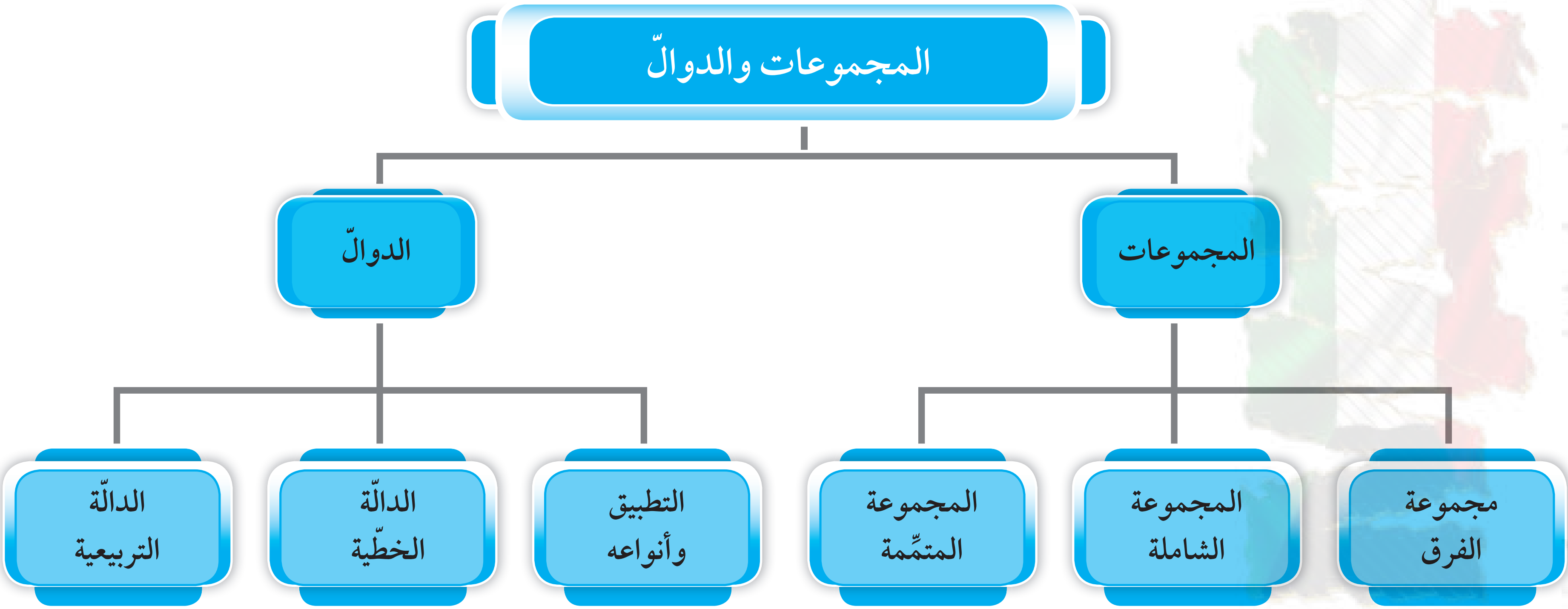
علاقات وتواصل :

- تتبادل المجموعات العمل وتتأكّد من صحّة التنفيذ .

عرض العمل :

- تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

مخطَّط تنظيمي للوحدة السادسة



اِستعِدَّ للوحدة السادسة

١ إذا كانت س = { −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { −١ ، ٠ ، ٢ } ،

ضَعِ الرمز ∈ أو ∉ أو ⊆ أو ⊈ لتحصل على عبارة صحيحة .

أ ٢ .... س	ب { ٢ } .... س	جـ { ٠ ، −١ } .... س
د ٣ .... ص	هـ { −١ ، ٠ ، ٢ } .... ص	و { ٢٠ } .... ص
ز س .... ص	ح ص .... س	ط ∅ .... ص

٢ أُكتب كلًّا من المجموعات التالية بذكر العناصر ، ثمّ حدِّد ما إذا كانت المجموعة منتهية أو غير منتهية . (حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة)

أ س = { ب : ب ∈ ص ، ب عامل من عوامل العدد ٦ }

....

....

ب ع = { جـ : جـ ∈ ص ، −٢ < جـ ≤ ٥ }

....

....

جـ ل = { ب : ب ∈ ص ، ب < −٤ }

....

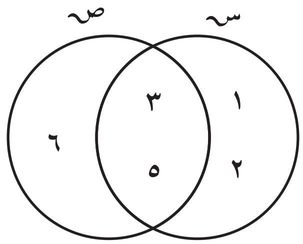
....

د م = مجموعة العوامل الأوّلية للعدد ٣٠

....

....

٣ من شكل ڤن المقابِل ، أكمِل بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



أ س = ...

ب ص = ...

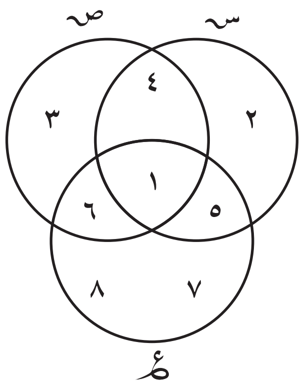
جـ س ∩ ص = ...

د س ∪ ص = ...

ثم ظلِّل المنطقة التي تمثّل س ∪ ص .

---

٤ من شكل ڤن المقابِل ، أكمِل بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



أ س = ...

ب ص = ...

جـ س ∩ ص = ...

د ع ∪ ص = ...

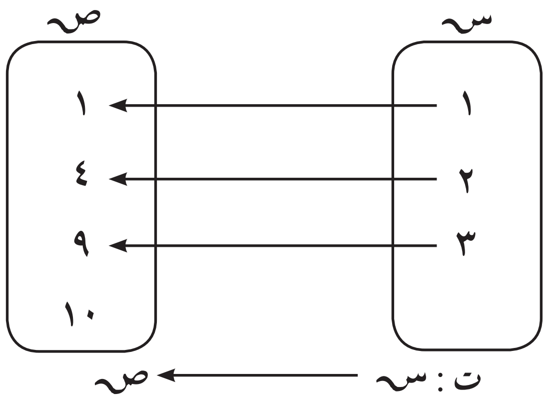
هـ س ∩ ص ∩ ع = ...

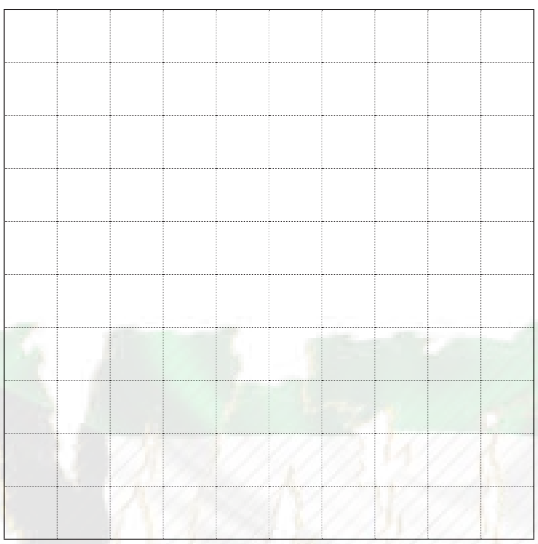
و س ∪ ص ∪ ع = ...

ثم ظلِّل المنطقة التي تمثّل (س ∩ ص ∩ ع).

٥ الشكل أدناه يمثّل المخطَّط السهمي للتطبيق ت : س ⟵ ص .

أُكتب المجال ، المجال المقابِل ، المدى ، ثمّ ارسم المخطَّط البياني للتطبيق ت .





٦ إذا كانت س = { ١ ، ٣ ، ٤ } ، ص = { ١ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } ،
وكان ت تطبيق من س إلى ص ، حيث ت (س) = ٢ س − ١

أ أوجِد مدى التطبيق ت .

ب أُكتب ت كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

جـ أُرسم مخطَّطًا سهميًّا للتطبيق ت وآخر بيانيًّا .

٦-١ مجموعة الفرق
Difference Set

سوف تتعلّم : إيجاد مجموعة الفرق بين مجموعتين .

العبارات والمفردات :
مجموعة الفرق
Difference set

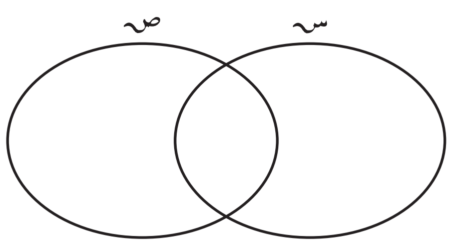
معلومات مفيدة :
تُقسَّم الدوائر الانتخابية داخل الكويت إلى ٥ دوائر، ويتم اختيار ١٠ أعضاء من كلّ دائرة لتمثيل الناخبين داخل مجلس الأمّة .

نشاط :

اِنتخب متعلّمو الصفّ التاسع مجموعة منهم لتمثيلهم داخل اللجنة الثقافية للمدرسة ، ومجموعة لتمثيلهم داخل اللجنة الرياضية للمدرسة ، وكانت نتائج المرشَّحين كالتالي :

أسماء المرشَّحين / مجموعة	أحمد	خالد	محمّد	جاسم	سعود	فيصل	يوسف	عليّ
اللجنة الثقافية س	✓	✓	✓		✓	✓		✓
اللجنة الرياضية ص	✓		✓	✓	✓		✓	

١ من خلال الجدول السابق ،
مثِّل المجموعتين باستخدام شكل ڤن .



٢ أُكتب مجموعة الأعضاء في اللجنة الثقافية وليسوا أعضاء في اللجنة الرياضية .

....

٣ أُكتب مجموعة الأعضاء في اللجنة الرياضية وليسوا أعضاء في اللجنة الثقافية .

....

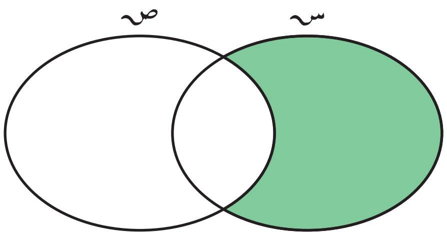
من خلال النشاط السابق :

- مجموعة الأعضاء في اللجنة الثقافية س وليسوا أعضاء في اللجنة الرياضية ص

تُسمّى **مجموعة الفرق بين مجموعتين**

وتُكتَب س – ص

وتُظلَّل كما في شكل ڤن المقابِل .



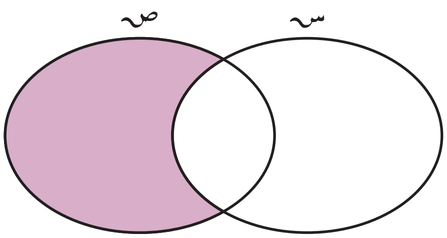
س – ص = مجموعة العناصر التي تنتمي إلى س ولا تنتمي إلى ص

- وكذلك مجموعة الأعضاء في اللجنة الرياضية ص وليسوا أعضاء في اللجنة الثقافية س

تُسمّى **مجموعة الفرق بين مجموعتين**

وتُكتَب ص – س

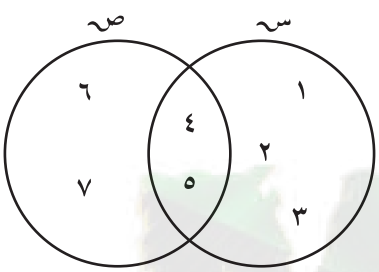
وتُظلَّل كما في شكل ڤن المقابِل .



ص – س = مجموعة العناصر التي تنتمي إلى ص ولا تنتمي إلى س

تدرّب (١) :

من شكل ڤن المقابِل ، أوجِد بذكر العناصر كلاًّ ممّا يلي :



أ) س – ص = ...

ب) ص – س = ...

جـ) ماذا تلاحظ ؟ ....

مثال :

إذا كانت س = {أ : أ ∈ ص ، أ عامل من العوامل الموجَبة للعدد ٨ } ،

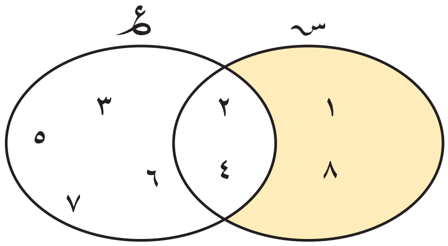
ع = {ب : ب ∈ ص ، ١ < ب ≤ ٧} ،

حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة .

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي : س ، ع ، س − ع ، ع − س .

ثمّ مثِّل كلًّا من س ، ع بشكل فن ، وظلِّل المنطقة التي تمثّل س − ع .

الحلّ :



س = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٨}

ع = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

س − ع = {١ ، ٨}

ع − س = {٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

تدرّب (٢) :

إذا كانت س = {٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦} ،

ع = {ب : ب ∈ ص ، −١ ≤ ب ≤ ٤} ،

حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة .

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي:

ع = ...

س − ع = ...

ع − س = ...

مثِّل كلًّا من س ، ع بشكل فن ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل ع − س .

تدرّب (٣) :

إذا كانت س = { ١ ، ٣ ، ٥ } ، ص = { ١ ، ٥ }

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي:

س − ص = ...

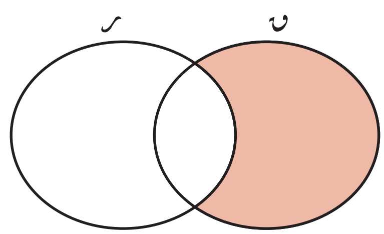
ص − س = ...

مثِّل كلًّا من س ، ص بشكل ڤن ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل س − ص .

تدرّب (٤) :

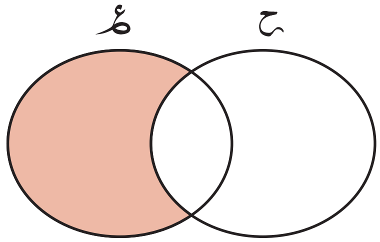
اُكتب ما يمثّله الجزء المظلَّل في كلّ من الأشكال التالية :

أ



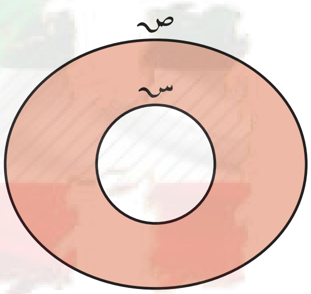
....

ب



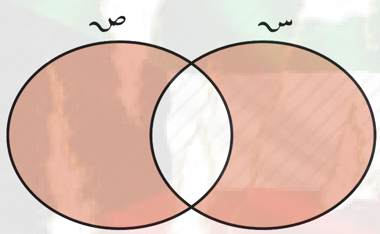
....

جـ



....

د



....

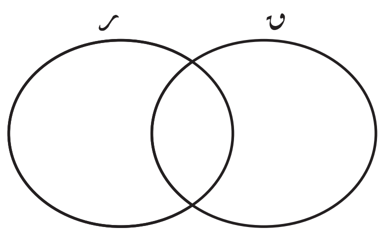
فكِّر وناقِش

إذا كانت س ⊇ ص ، فأوجِد س − ص .

تمــرَّنْ :

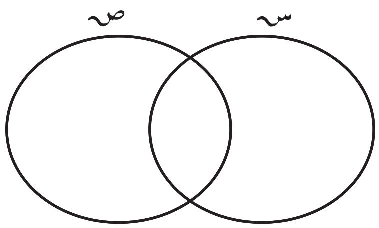
١ ظلِّل المنطقة التي تمثّل كلًّا ممّا يلي في الأشكال التالية :

أ



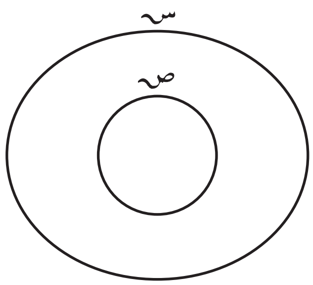
ر − ن

ب



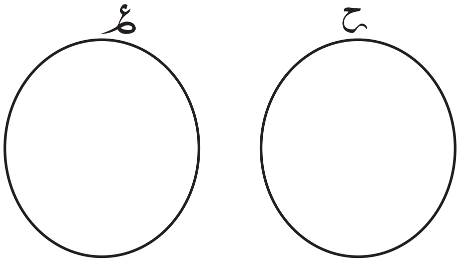
(س − ص) ∪ (ص − س)

جـ



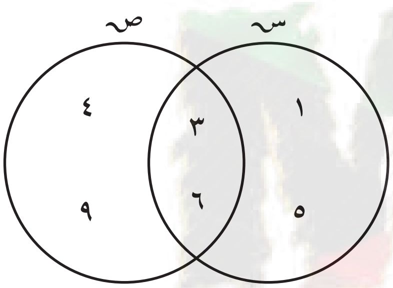
س − ص

د



ح − ع

٢ من شكل ڤن المقابِل ، أوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



س = ...

ص = ...

س − ص = ...

ص − س = ...

٣ إذا كانت سـ = مجموعة مضاعَفات العدد ٣ الأصغر من ٩ ،
صـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ }

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

سـ = ...

سـ − صـ = ...

صـ − سـ = ...

مثِّل كلًّا من سـ ، صـ بشكل ڤن ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل صـ − سـ .

---

٤ إذا كانت ع = { أ : أ ∈ صـ ، ١ ≤ أ < ٥ } ،

حيث صـ مجموعة الأعداد الصحيحة .

ح = { ب : ب عامل من العوامل الأوّلية للعدد ٣٠ }

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

ع = ...

ح = ...

ع − ح = ...

مثِّل كلًّا من ع ، ح بشكل ڤن ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل ع − ح .

٦-٢ المجموعة الشاملة – المجموعة المتمِّمة
Overall Set – Complement of a Set

سوف تتعلّم : إيجاد المجموعة الشاملة والمجموعة المتمِّمة .

نشاط :

لتكن :

س = { أ ، ب ، جـ } ، ص = { ب ، جـ ، د } ، ع = { جـ ، د ، هـ ، ل }

١ أُكتب مجموعة ي بحيث كلّ من س ، ص ، ع مجموعة جزئية منها .

ي = ...

٢ أُكتب مجموعة أخرى م بحيث كلّ من س ، ص ، ع مجموعة جزئية منها .

م = ...

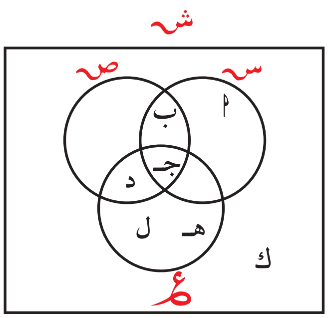
تُسمّى كلّ من ي ، م ، ... مجموعة شاملة للمجموعات س ، ص ، ع في أمثلة مختلفة

وعادةً نرمز إلى المجموعة الشاملة بالرمز ش .

لتكن ش = { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، ل ، ك }

المجموعة الشاملة لكلّ من س ، ص ، ع

وتُمثَّل بشكل ڤن المقابِل .



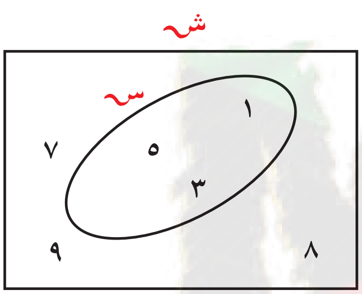
العبارات والمفردات :

المجموعة الشاملة
Overall Set

المجموعة المتمِّمة
Complement of a Set

تدرّب (١) :

من الشكل المقابِل :



أ أُكتب بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

ش = ...

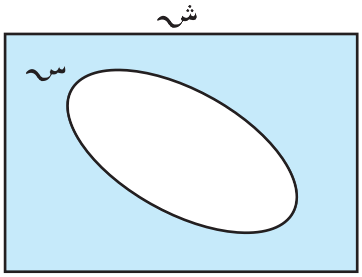
س = ...

ش – س = ...

ب أكمِل : .... ∈ (ش – س) ، .... ∉ (ش – س)

من تدرّب (١) السابق :

مجموعة العناصر التي تنتمي إلى ش ولا تنتمي إلى س هي ش − س



وتُسمّى مجموعة متمِّمة س

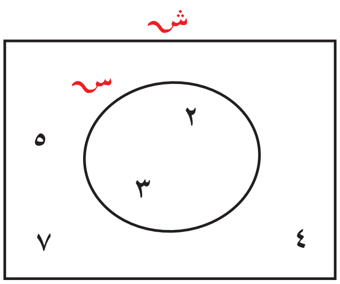
ويُرمَز لها بالرمز : $\overline{\text{س}}$ أو س′

وتُظلَّل كما في شكل ڤن المقابِل .

أي أنّ $\overline{\text{س}}$ = ش − س

تدرّب (٢) :

من الشكل المقابِل ، اُكتب بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



ش = ...

س = ...

$\overline{\text{س}}$ = ش − س

= ....

س ∩ $\overline{\text{س}}$ = ...

س ∪ $\overline{\text{س}}$ = ... = ...

$\overline{\overline{\text{س}}}$ = ش − .... = ...

= ....

ويمكن استنتاج أنّ :

س ∩ $\overline{\text{س}}$ = ∅ ، س ∪ $\overline{\text{س}}$ = ش

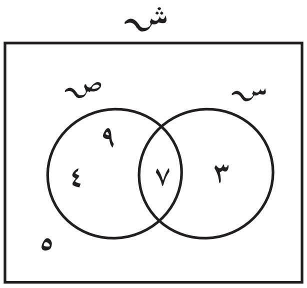
ش − $\overline{\text{س}}$ = س ، $\overline{\overline{\text{س}}}$ = س

ش ∪ س = ش ، ش ∩ س = س

ش ∪ $\overline{\text{س}}$ = ش ، ش ∩ $\overline{\text{س}}$ = $\overline{\text{س}}$

تدرّب (٣) :

من الشكل المقابِل ، أوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



ش = ...

س = ...

ص = ...

$\overline{\text{س}}$ = ...

$\overline{\text{ص}}$ = ...

$\overline{\text{س}} \cap \overline{\text{ص}}$ = ...

س $\cup$ ص = ...

$\overline{\text{س} \cup \text{ص}}$ = ...

ماذا تلاحظ؟ ....

$\overline{\text{س}} \cup \overline{\text{ص}}$ = ...

س $\cap$ ص = ...

$\overline{\text{س} \cap \text{ص}}$ = ...

ماذا تلاحظ؟ ....

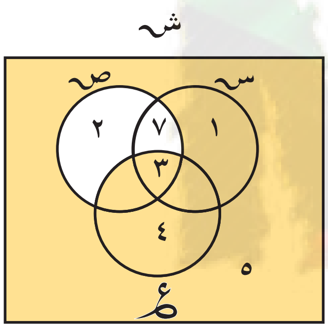
قوانين دي مورغان de Morgan :

- $\overline{\text{س} \cup \text{ص}} = \overline{\text{س}} \cap \overline{\text{ص}}$
- $\overline{\text{س} \cap \text{ص}} = \overline{\text{س}} \cup \overline{\text{ص}}$

مثال :

من شكل فِن المقابل ، أوجِد كلًّا من : ش ، س ، $\overline{\text{ص}}$ ، س − ع ،
ثمّ ظلّل المنطقة التي تمثّل ($\overline{\text{ص} - \text{ع}}$) .

الحل :



ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ }

س = { ١ ، ٣ ، ٧ }

$\overline{\text{ص}}$ = { ١ ، ٤ ، ٥ }

س − ع = { ١ ، ٧ }

معلومات مفيدة :

Augustus de Morgan

عالم رياضيات إنجليزي وُلِد في مدينة مدراس الهندية عام ١٨٠٦ م حيث كان يعمل والده ، ثمّ أكمل دراسته في بريطانيا ونبغ في علوم الرياضيات والفلسفة .

تدرّب (٤) :

إذا كانت المجموعة الشاملة شـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،

سـ = { أ : أ ∈ مجموعة الأعداد الكلّية ، ٢ ≤ أ < ٤ } ،

صـ = { ب : ب ∈ مجموعة الأعداد الكلّية ، ب عامل من عوامل العدد ٤ }

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

سـ = ...

صـ = ...

$\overline{\text{سـ}}$ = ...

$\overline{\text{صـ}}$ = ...

$\left(\overline{\text{سـ} \cap \text{صـ}}\right)$ = ...

$\left(\overline{\text{سـ} \cup \text{صـ}}\right)$ = ...

$\left(\overline{\overline{\text{سـ} \cap \text{صـ}}}\right)$ = ...

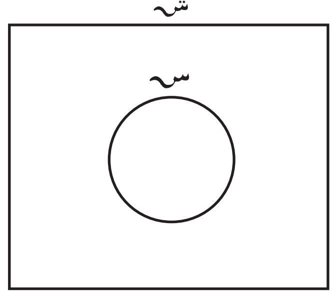
....

مثِّل كلًّا من شـ ، سـ ، صـ بشكل ڤن .

تدرّب (٥) :

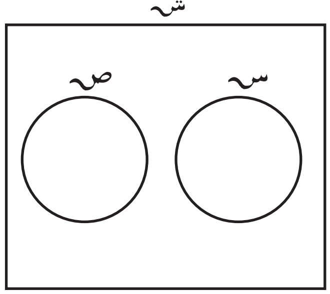
ظلِّل المنطقة التي تمثّل كلًّا ممّا يلي في الأشكال التالية :

أ



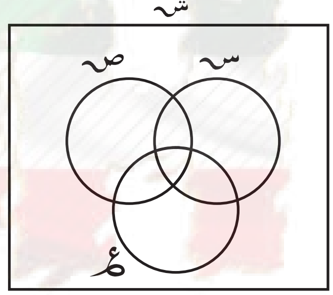
$\overline{\text{سـ}}$

ب



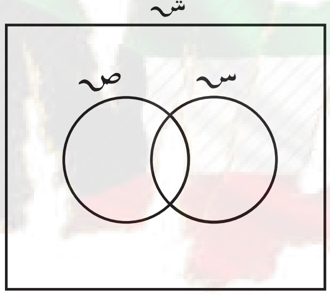
$\overline{\text{سـ} \cup \text{صـ}}$

جـ



$\left(\overline{\text{سـ} \cap \text{صـ} \cap \text{ع}}\right)$

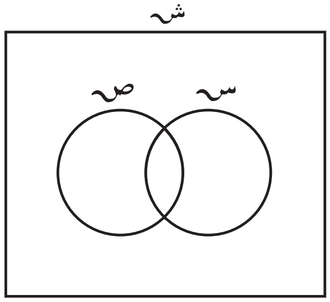
د



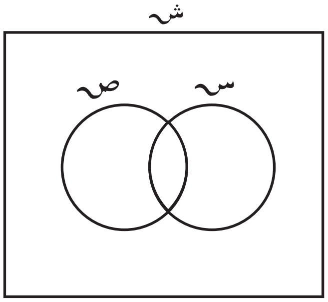
$\left(\overline{\text{سـ} - \text{صـ}}\right)$

تمـــرَّنْ :

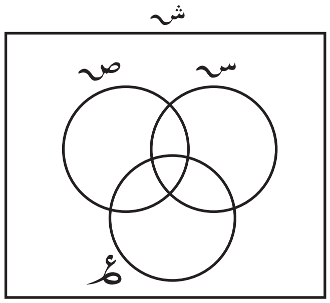
١ ظلِّل المنطقة التي تمثّل كلًّا ممّا يلي في الأشكال التالية :

أ


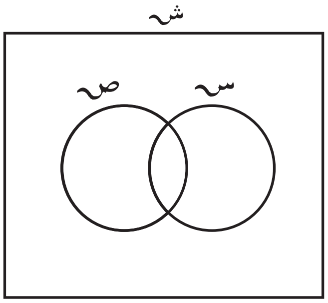
$\overline{\text{س} \cup \text{ص}}$

ب


$\overline{\text{س} \cap \text{ص}}$

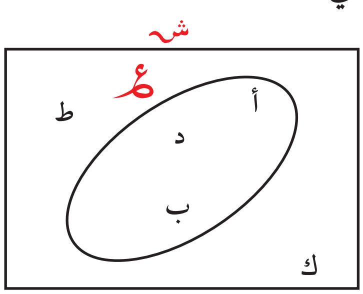
جـ


$(\overline{\text{س} \cup \text{ص} \cup \text{ع}})$

د


$(\overline{\text{ص} - \text{س}})$

٢ من شكل ڤن المقابِل ، أوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



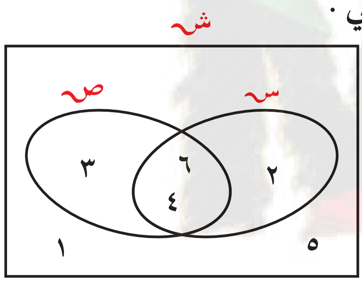
ش = ...

ع = ...

$\overline{\text{ع}}$ = ...

$\overline{\overline{\text{ع}}}$ = ...

٣ من شكل ڤن المقابِل ، أوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



أ ش = ...

س = ...

ص = ...

$\overline{\text{س}}$ = ... ، $\overline{\text{ص}}$ = ...

ب) $\overline{س \cap ص}$ (= ....

....

) $\overline{س \cup ص}$ (= ....

....

٤ إذا كانت المجموعة الشاملة ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،
م = مجموعة الأعداد الفردية الأكبر من ١ والأصغر من ٧ ،
ك = { أ : أ عدد زوجي ، ١ < أ < ٦ } ،
فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

م = ...

ك = ...

$\overline{م}$ = ...

$\overline{ك}$ = ...

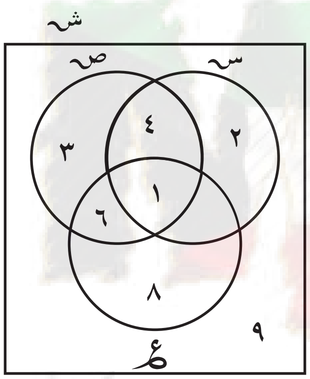
) $\overline{م \cap ك}$ (= ....

م − ك = ...

) $\overline{م - ك}$ (= ....

مثِّل كلًّا من ش ، م ، ك بشكل ڤن ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل ($\overline{م \cap ك}$) .

٥ من شكل ڤن المقابل ، أكمل بذكر العناصر كلاًّ ممّا يلي :



أ ش = ...

ب ص = ...

جـ $\overline{س}$ = ...

د ص − ع = ...

هـ) $\overline{س \cap ص}$ (= ....

ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل ($\overline{س - ع}$) .

٦-٣ التطبيق وأنواعه
Mapping and its Kind

العبارات والمفردات :

تطبيق
Mapping

المجال
Domain

المجال المقابِل
Corresponding Domain

المدى
Range

تطبيق شامل
Surjective

تطبيق متباين
Injective

تطبيق تقابل
Bijective

دالّة
Function

معلومات مفيدة :

تقيم قرية صباح الأحمد التراثية مهرجان الموروث الشعبي الخليجي في كلّ عام ، والذي يشمل العديد من الاحتفاليات الوطنية والفعّاليات من الفنون الشعبية والتراثية والثقافية والفنّية والرياضية والعديد من المسابقات والأنشطة التي تضفي جوًّا من البهجة والترفيه على زوّار القرية .

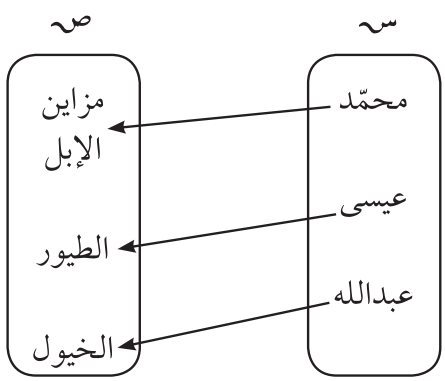
سوف تتعلّم : التطبيق (الدالّة) وأنواعه .

درست فيما سبق : أنّ العلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص هي تطبيق (دالّة) إذا ارتبط كلّ عنصر من س بعنصر واحد وواحد فقط من ص . وتُسمّى س « المجال » ، ص « المجال المقابِل » وتُسمّى مجموعة صور عناصر المجال « المدى » .

نشاط :

شارك مجموعة من الأصدقاء هم محمّد وعيسى وعبدالله في مسابقات الموروث الشعبي الخليجي على يومين متتاليين . المخطَّطات السهمية التالية تمثّل المسابقات التي اشترك فيها الأصدقاء حيث س تمثّل مجموعة الأصدقاء ، ص تمثّل مجموعة المسابقات ، **كلّ من العلاقات التالية تمثّل تطبيقًا .**

اليوم الأول



ت : س ⟵ ص

أكمِل كلًّا ممّا يلي :

في التطبيق ت : س ⟵ ص

المجال = { .... }

المجال المقابل = { ....

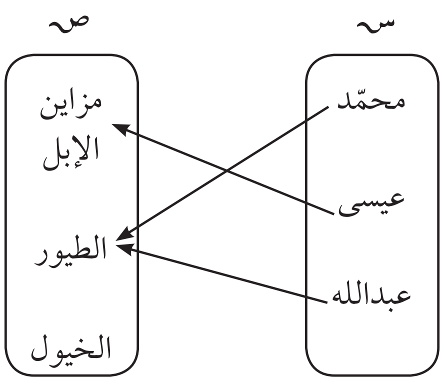
{ ....

المدى = { .... }

هل المدى يساوي المجال المقابل ؟

....

اليوم الثاني



ن : س ⟵ ص

أكمِل كلًّا ممّا يلي :

في التطبيق ن : س ⟵ ص

المجال = { .... }

المجال المقابل = { ....

{ ....

المدى = { .... }

هل المدى يساوي المجال المقابل ؟

....

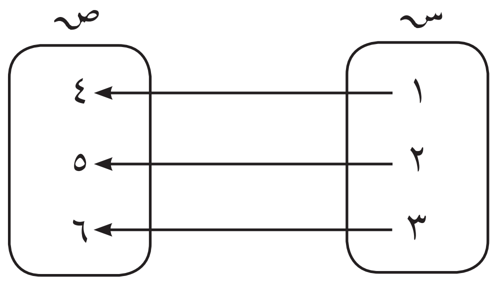
التطبيق الذي يتساوى فيه المدى والمجال المقابِل يُسمّى « تطبيق شامل » .

ممّا سبق نستنتج أنّ :

ت تطبيق شامل ، ن تطبيق ليس شاملًا .

تدرّب (١) :

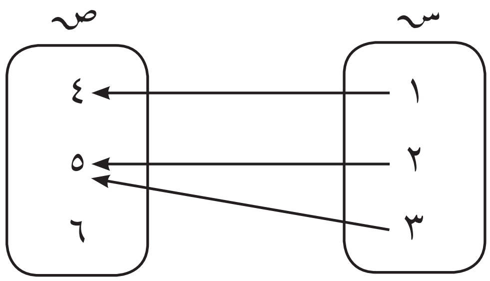
أيّ التطبيقات التالية شامل وأيّها ليس شاملًا ؟ أُذكر السبب :



ت : س ⟵ ص

ت تطبيق ....

السبب : ....



ن : س ⟵ ص

ن تطبيق ....

السبب : ....

من تدرّب (١) : أكمِل :

في التطبيق ت : س ⟵ ص

ت (١) = ...

ت (٢) = ...

ت (٣) = ...

هل صور عناصر المجال مختلفة ؟

....

في التطبيق ن : س ⟵ ص

ن (١) = ...

ن (٢) = ...

ن (٣) = ...

هل صور عناصر المجال مختلفة ؟

....

التطبيق الذي لا يرتبط فيه عنصران أو أكثر من المجال بالعنصر نفسه من المجال المقابِل يُسمّى « تطبيق متباين » .

إذًا في تدرب (١) : ت تطبيق متباين ، ن تطبيق ليس متباينًا .

التطبيق الشامل والمتباين يُسمّى « تطبيق تقابل » .

إذًا في تدرب (١) : ت تطبيق تقابل ، ن تطبيق ليس تقابلًا .

مثال (١) :

إذا كانت س = { − ١ ، ٠ ، ٣ } ، ص = { −٣ ، − ١ ، ٥ } ،

التطبيق ت : س ⟵ ص ، حيث ت (س) = ٢س − ١

أ أوجِد مدى التطبيق ت .

ب اُكتب التطبيق ت كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

جـ بيِّن نوع التطبيق ت من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

د مثِّل التطبيق ت بمخطَّط سهمي وآخر بياني .

الحلّ :

أ ت (س) = ٢س − ١

ت (−١) = ٢ × (−١) − ١ = −٣

ت (٠) = ٢ × (٠) − ١ = −١

ت (٣) = ٢ × (٣) − ١ = ٥

المدى = { −٣ ، −١ ، ٥ }

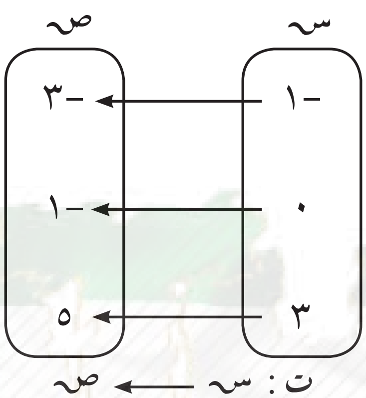
ب ت = { (−١ ، −٣) ، (٠ ، −١) ، (٣ ، ٥) }

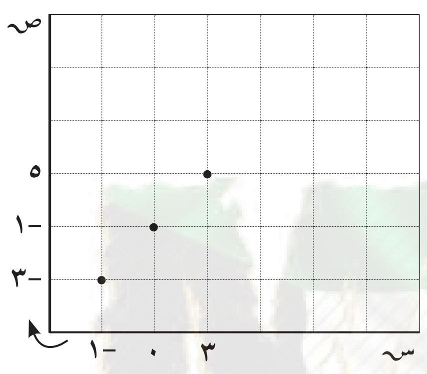
جـ ت تطبيق شامل لأنّ المدى = المجال المقابِل .

ت تطبيق متباين لأنّ ت (−١) ≠ ت (٠) ≠ ت (٣)

ت تطبيق تقابل لأنّه شامل ومتباين .

د





تدرّب (٢) :

إذا كانت سـ = {−٣ ، ٠ ، ٣} ، صـ = {−٩ ، ٠ ، ٩} ،
التطبيق ت : سـ ⟵ صـ ، حيث ت (س) = ٣ س

أ أوجِد مدى التطبيق ت .

ت (س) = ٣ س

ت (−٣) = ...

ت (٠) = ...

ت (٣) = ...

المدى = ...

ب أُكتب التطبيق ت كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

....

جـ مثِّل التطبيق ت بمخطَّط سهمي .

د بيِّن نوع التطبيق ت من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

ت تطبيق .... لأنّ : ....

ت تطبيق .... لأنّ : ....

ت تطبيق .... لأنّه : ....

تدرّب (٣) :

ليكن التطبيق ت : { −٢ ، −١ ، ٢ ، ٣ } ⟵ { ٠ ، ٣ ، ٨ } ، حيث ت (س) = س^{٢} − ١

أ أوجِد مدى التطبيق ت .

ب مثِّل التطبيق ت بمخطَّط بياني .

ج بيِّن نوع التطبيق ت من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

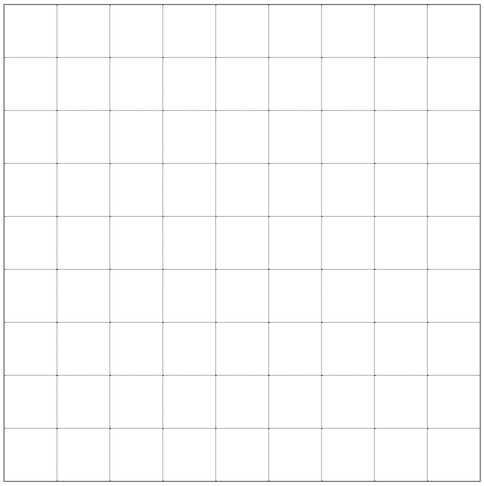
فكِّر وناقِش

إذا كان التطبيق ن : ص ⟵ ص ، حيث ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة ، ن (س) = س^{٢} ، هل التطبيق ن تطبيق متباين ؟

تدرّب (٤) :

إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، التطبيق د : سـ ⟵ سـ ،
حيث د = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ١) }

أ مثِّل التطبيق د بمخطَّط بياني .

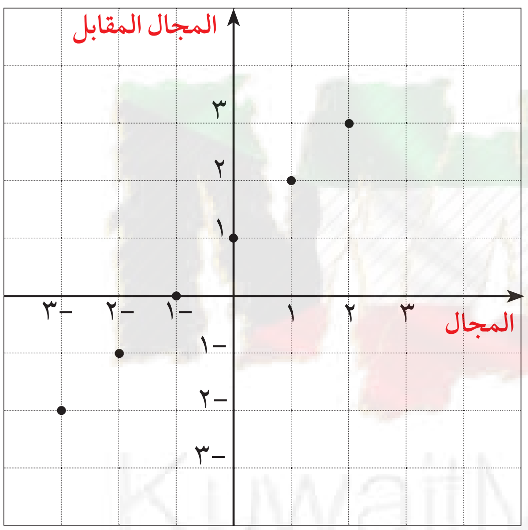


ب اُكتب مدى التطبيق .

جـ هل التطبيق د تطبيق تقابل ؟ لماذا ؟

مثال (٢) :

ليكن التطبيق ت : صـ ⟵ صـ (صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ، حيث
ت (س) = س + ١ ، مثِّل ت بمخطَّط بياني .



الحلّ :

(المجال صـ مجموعة غير منتهية
فنوجد صور بعض العناصر) .

⋮

ت (−٢) = −٢ + ١ = −١

ت (−١) = −١ + ١ = ٠

ت (٠) = ٠ + ١ = ١

ت (١) = ١ + ١ = ٢

⋮

تدرّب (٥) :

ليكن التطبيق ت : صـ$_+$ ⟵ صـ (صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ، حيث ت (س) = ٢س ، مثل ت بمخطَّط بياني .

....

....

....

....

....

فكِّر وناقِش

ليكن التطبيق ت : صـ$_+$ ⟵ صـ (صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ، حيث ت (س) = ٢س ، هل التطبيق ت تطبيق تقابل؟

تمــرَّنْ :

١ إذا كانت سـ = { −٢ ، ٠ ، ٢ } ، صـ = { −٤ ، ٢ ، ٨ } ، التطبيق ɔ : سـ ⟵ صـ ، حيث ɔ (س) = ٣ س + ٢

أ أوجِد مدى التطبيق ɔ .

....

....

....

....

....

ب أُكتب التطبيق ɔ كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

....

جـ مثِّل التطبيق ɔ بمخطَّط سهمي .

د بيِّن نوع التطبيق ن من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

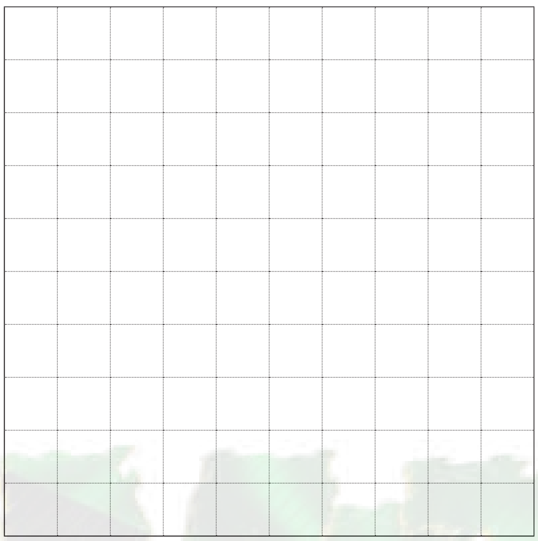
---

٢ **إذا كانت** ل = { ١ ، -١ ، ٣ } ، م = { ٢ ، ٥ ، ١٠ } ،
التطبيق هـ : ل ⟵ م ، حيث هـ (س) = س^{٢} + ١

أ أوجِد مدى التطبيق هـ .

ب أُكتب التطبيق هـ كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

جـ مثِّل التطبيق هـ بمخطَّط بياني .



د بيِّن نوع التطبيق هـ من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

٣ إذا كانت سـ = { ٠ ، ١ ، ٢ } ، صـ = { ٠ ، ١ ، ٨ } ،
التطبيق د : سـ ⟵ صـ ، حيث د (س) = $س^٣$

أ أوجِد مدى التطبيق د .

ب اُكتب التطبيق د كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

جـ مثِّل التطبيق د بمخطَّط بياني .

د بيِّن نوع التطبيق د من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

٤ إذا كانت سـ = { ١ ، ٤ ، ٩ } ، صـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،
التطبيق ت : سـ ⟵ صـ ، حيث ت (س) = $\sqrt{س}$

أ أوجِد مدى التطبيق ت .

ب مثِّل التطبيق ت بمخطَّط بياني .

جـ بيِّن نوع التطبيق ت من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

....

....

....

٥ إذا كانت س = {٤ ، ٥ ، ٦} ، التطبيق ك : س ⟵ س ،
حيث ك = {(٤ ، ٤) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ٥)}

أ أوجِد مدى التطبيق ك .

....

ب مثِّل التطبيق ك بمخطَّط بياني .

جـ بيِّن أنّ التطبيق ك تطبيق تقابل .

....

....

....

٦-٤ الدالّة الخطيّة

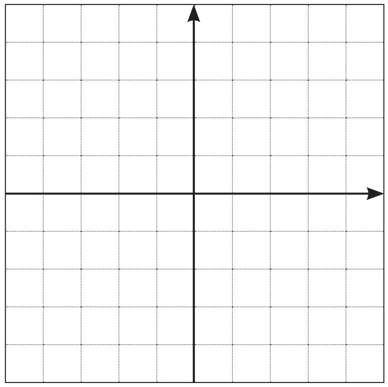
Linear Function

سوف تتعلّم : تمثيل الدوالّ الخطيّة بيانيًّا .

نشاط :

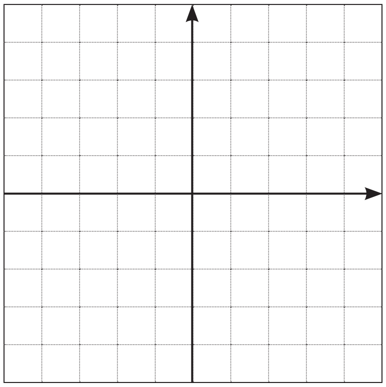
١ أُرسم المخطَّط البياني للتطبيق

ن : ص$_+$ ⟵ ح ، ن (س) = س + ١



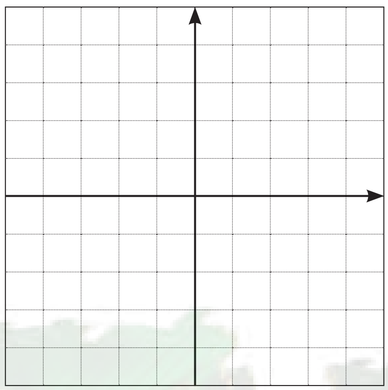
٢ أُرسم المخطَّط البياني للتطبيق

ن : ص ⟵ ح ، ن (س) = س + ١



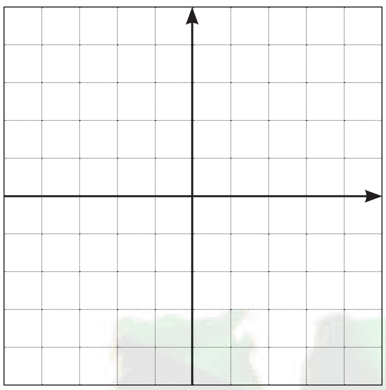
٣ أُرسم المخطَّط البياني للتطبيق

ن : ن ⟵ ح ، ن (س) = س + ١



٤ أُرسم المخطَّط البياني للتطبيق

ن : ح ⟵ ح ، ن (س) = س + ١



قارِن بين المخطَّطات البيانية الأربعة السابقة .

ماذا تلاحظ ؟

الدالّة (التطبيق) التي مجالها ومجالها المقابِل مجموعتان جزئيتان من مجموعة الأعداد الحقيقية تُسمّى « **دالّة حقيقية** » .

العبارات والمفردات :

متغيّر تابع
Dependent Variable

متغيّر مستقل
Independent Variable

دالّة خطية
Linear Function

معلومات مفيدة :

تستخدم المطابع الدوال الخطية لتحديد تكاليف أعمال الطباعة الضخمة .

اللوازم :

– ورقة رسم بياني .
– مسطرة .

الدالّة الحقيقية د : ح ⟵ ح ، د (س) = أ س + ب

حيث أ ، ب ∋ ح تُسمّى « **دالّة خطّية** » (تطبيق خطّي) .

لاحِظ أنّ :

1. د (س) = أ س + ب
تُسمّى قاعدة الاقتران ويمكن كتابتها على الصورة : ص = أ س + ب
ويكون بيانها خطًّا مستقيمًا .
2. تُسمّى س المتغيّر المستقلّ وتُسمّى ص المتغيّر التابع .
3. عندما يكون أ = ٠ تكون الدالّة ثابتة ويكون بيانها خطًّا مستقيمًا أفقيًّا (يوازي محور السينات) .

تدرّب (١) :

أكمِل الجدولين للدالّتين الخطّيتين التاليتين :

أ ص = س + ٣

ص = س + ٣					
س (المتغيّر المستقلّ)	-١	٠	١	٢	٣
ص (المتغيّر ....)					

ب ص = ٢ س

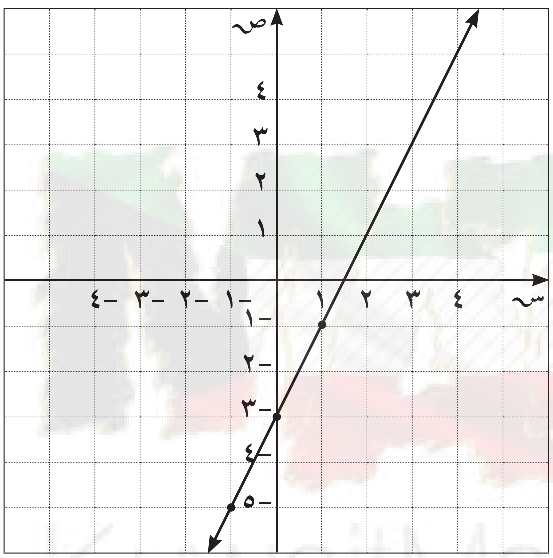
ص = ٢ س					
س					
ص					

مثال :

أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص = ٢ س – ٣

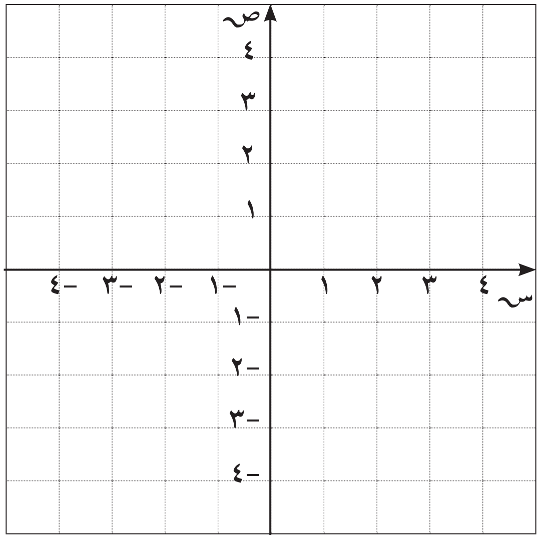
الحلّ :

ص = ٢ س – ٣			
س	-١	٠	١
ص	-٥	-٣	-١



تدرّب (٢) :

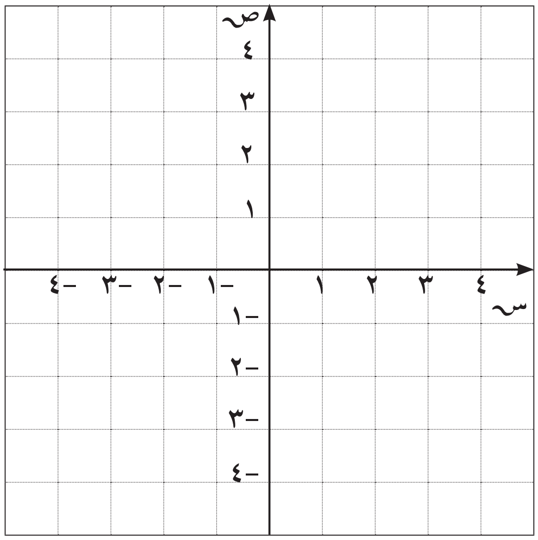
أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص = ٣ س − ١



ص = ٣ س − ١			
س			
ص			

تدرّب (٣) :

أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص = ١ − ٢ س



فكِّر وناقِش

هل بيان الدالّة ص = ٥ يوازي محور السينات ؟

أُكتب نقطتين تنتميان إلى هذا البيان .

تمـــرَّنْ :

١ أكمِل الجدولين للدالّتين الخطّيتين التاليتين :

أ ص = ٢ س − ٤

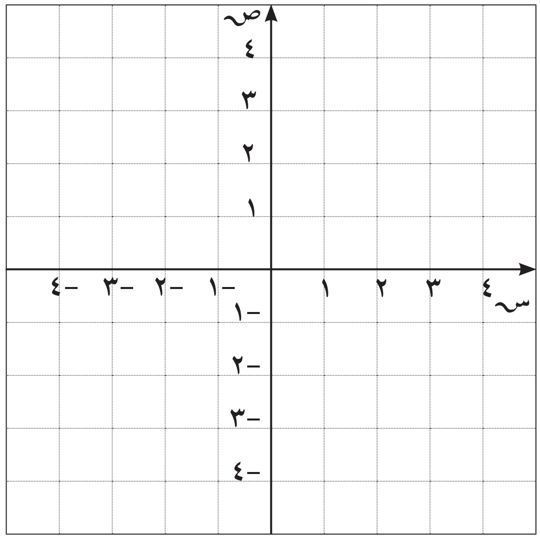
ص = ٢ س − ٤				
س	١−	٠	٢	٣
ص				

ب ص = − س + ٢

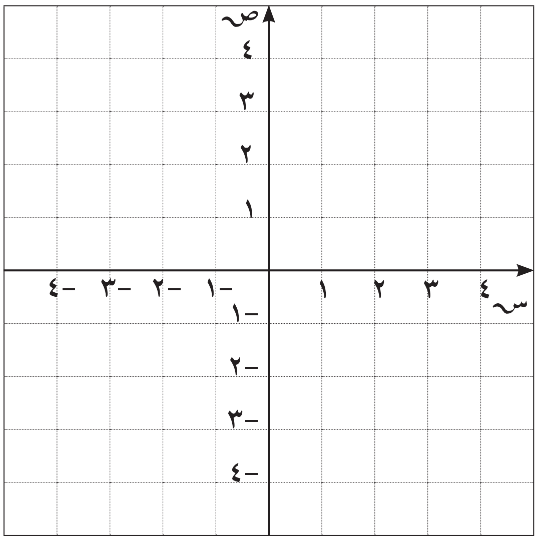
ص = − س + ٢				
س				٢−
ص				

٢ أُرسم بيانيًّا كلًّا من الدوالّ الخطّية التالية :

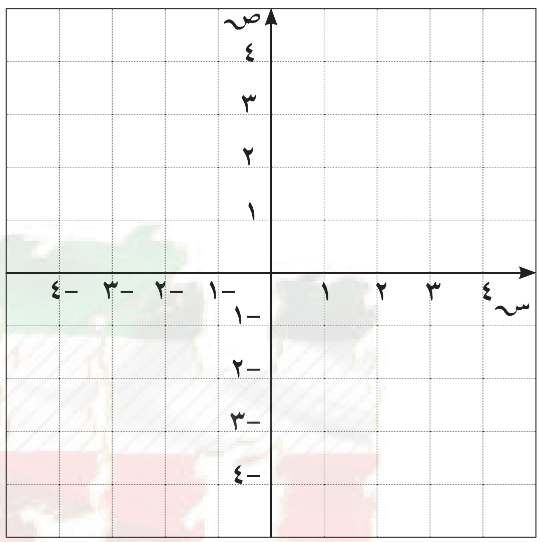
أ ص = س – ٢



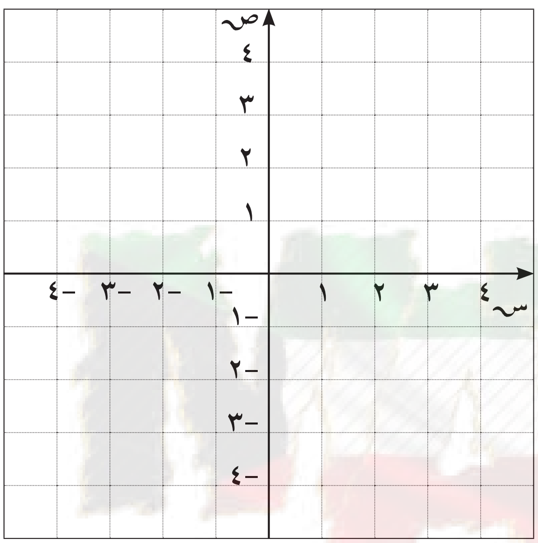
ب ص = ٢ س + ١



جـ ص = ٤ – س



د ص = ٣



٥-٦ الدالّة التربيعية
Quadratic Function

العبارات والمفردات :
دالّة تربيعية
Quadratic Function
قطع مكافِئ
Parabola

سوف تتعلّم : الدوالّ التربيعية وتمثيلها بيانيًّا .

نشاط :

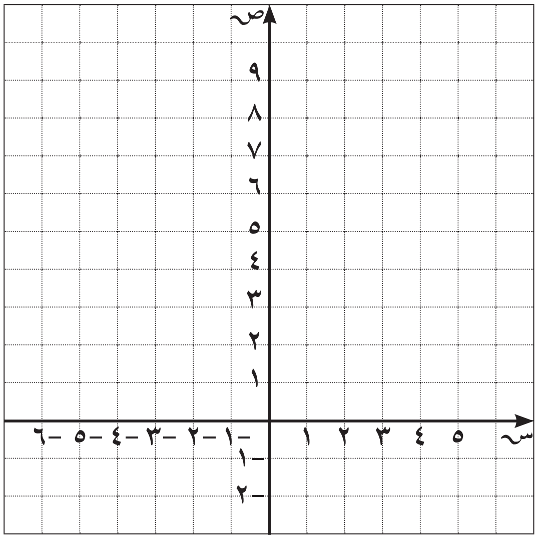
لتكن الدالّة $ن : ح \longleftarrow ح$ ، $ن(س) = س^{٢}$

١ أكمِل الجدول التالي :

س	٢−	١−	٠	١	٢
ص					

٢ عيِّن النقاط السابقة في المستوى الإحداثي المقابِل.

٣ دون استخدام المسطرة صِل بين النقاط السابقة.



الدالّة الحقيقية التي فيها القوّة الأعلى للمتغيّر المستقلّ تساوي ٢ تُسمّى « **دالّة تربيعية** » .
ويكون الرسم البياني للدالّة التربيعية منحنى على شكل ⋁ أو ⋀ ويُسمّى « **قطع مكافِئ** » .

الصورة العامّة للدالّة التربيعية هي :

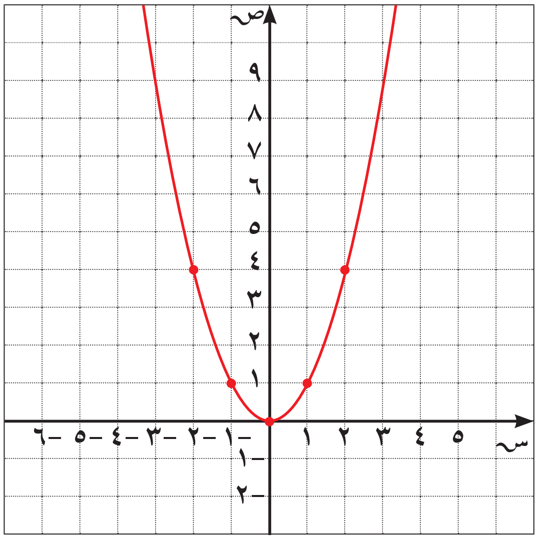
$$ص = \underbrace{أ\,س^{٢}}_{\text{حدّ من الدرجة الثانية}} + \underbrace{ب\,س}_{\text{حدّ من الدرجة الأولى}} + \underbrace{جـ}_{\text{حدّ ثابت}}$$

حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية ، $أ \neq ٠$.

سنعتبر كلّ من المجال والمجال المقابِل للدالّة التربيعية هو مجموعة الأعداد الحقيقية ، ما لم يُذكر خلاف ذلك .

تدرّب (١) :

الشكل المجاوِر يمثّل بيان الدالّة : $ص = س^{٢}$



مثِّل في نفس المستوى الاحداثي بيان كلّ ممّا يلي:

أ الدالّة : $ص = س^{٢} + ٢$

س	-٢	-١	٠	١	٢
ص					

ماذا تلاحظ ؟ ....

....

ب الدالّة : $ص = س^{٢} - ٢$

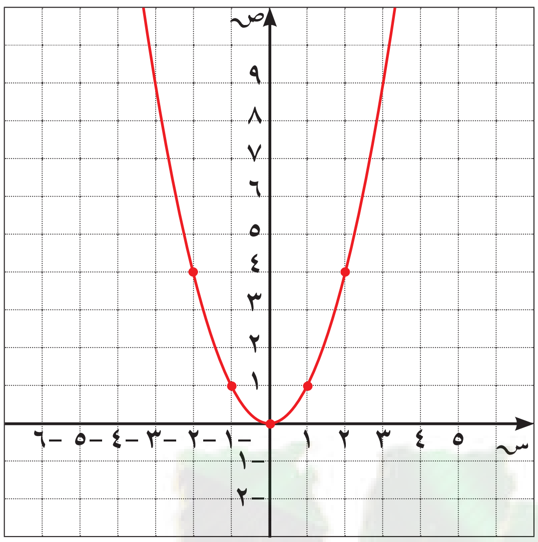
س	-٢	-١	٠	١	٢
ص					

ماذا تلاحظ ؟ ....

....

تدرّب (٢) :

الشكل المجاوِر يمثّل بيان الدالّة : $ص = س^{٢}$



مثِّل في نفس المستوى الاحداثي بيان كلّ ممّا يلي:

أ الدالّة : $ص = (س - ٢)^{٢}$

س	٤	٣	٢	١	٠
ص					

ماذا تلاحظ ؟ ....

....

ب الدالّة : $ص = (س + ٢)^{٢}$

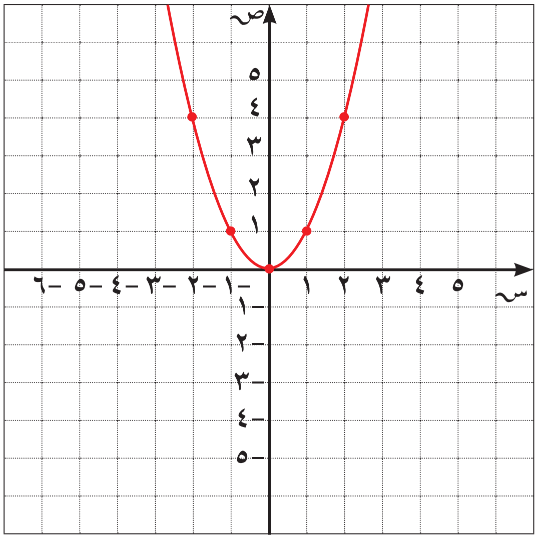
س	٠	-١	-٢	-٣	-٤
ص					

ماذا تلاحظ ؟ ....

....

تدرّب (٣) :

الشكل المجاوِر يمثّل بيان الدالّة : ص = س^٢



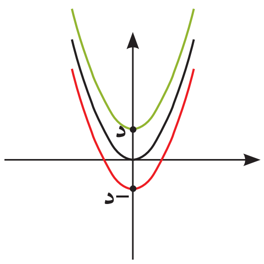
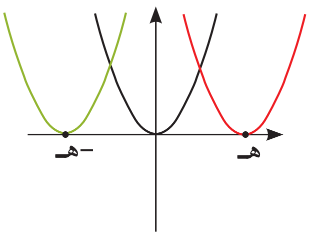
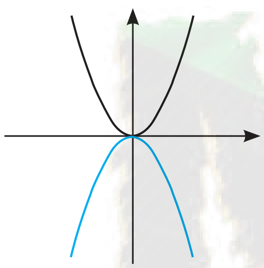
مثِّل في نفس المستوى الاحداثي

بيان الدالّة : ص = − س^٢

ص	٢	١	٠	−١	−٢
س					

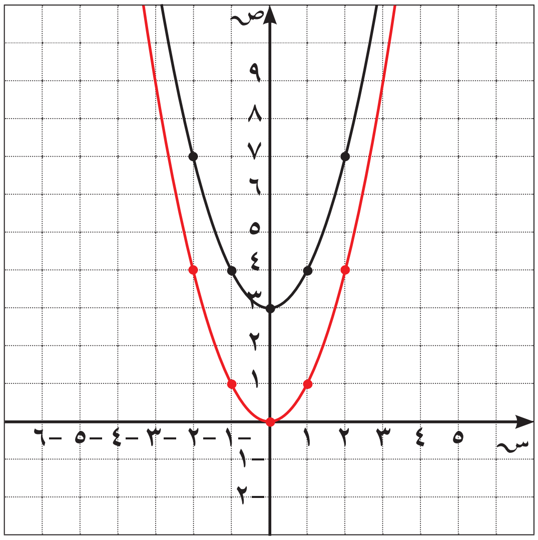
ماذا تلاحظ ؟ ....

....

الدالّة التربيعية	التحويلات الهندسية المطبَّقة على التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^٢	التمثيل البياني
ص = س^٢ + د	إزاحة رأسية د وحدة إلى الأعلى إذا كانت د موجَبة ، وإزاحة رأسية | د | وحدة إلى الأسفل إذا كانت د سالبة .	
ص = (س + هـ)^٢	إزاحة أفقية هـ وحدة إلى اليسار إذا كانت هـ موجَبة ، وإزاحة أفقية | هـ | وحدة إلى اليمين إذا كانت هـ سالبة .	
ص = −س^٢	اِنعكاس في محور السينات .	

مثال (١) :

مثِّل بيانيًّا الدالّة ص = $س^{٢}$ + ٣ مستخدمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = $س^{٢}$



الحلّ :

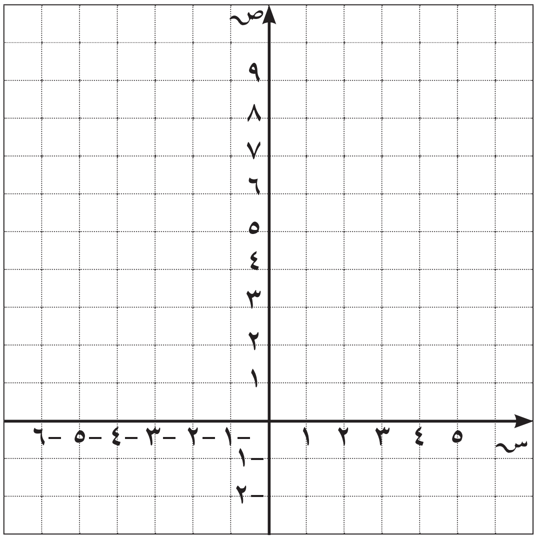
– نرسم بيان الدالّة : ص = $س^{٢}$

– بيان الدالّة ص = $س^{٢}$ + ٣

هو إزاحة رأسية لبيان الدالّة : ص = $س^{٢}$ ٣ وحدات إلى الأعلى وتُمثَّل كما في الشكل .

تدرّب (٤) :

مثِّل بيانيًّا الدالّة ص = $(س - ١)^{٢}$ مستخدمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = $س^{٢}$.



أ) أُرسم بيان الدالّة : ص = $س^{٢}$

ب) بيان الدالّة ص = $(س - ١)^{٢}$

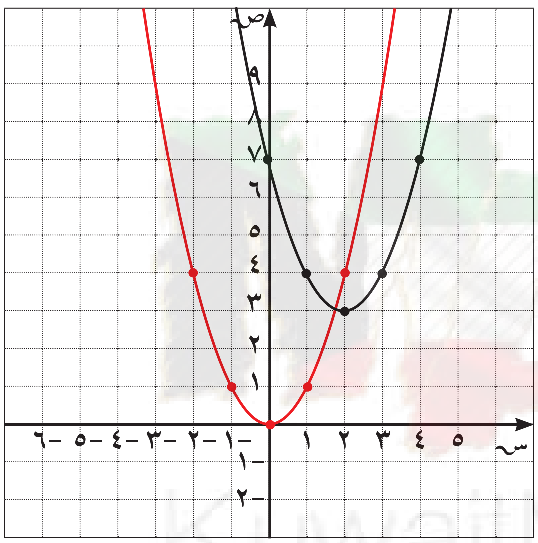
هو إزاحة .... لبيان الدالّة : ص = $س^{٢}$

....

جـ) أُرسم بيان الدالّة ص = $(س - ١)^{٢}$

مثال (٢) :

مثِّل بيانيًّا الدالّة ص = $(س - ٢)^{٢}$ + ٣ مستخدمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = $س^{٢}$



الحلّ :

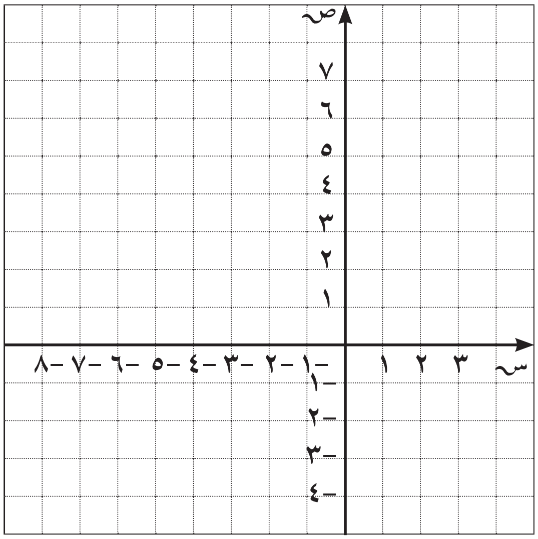
– نرسم بيان الدالّة : ص = $س^{٢}$

– بيان الدالّة ص = $(س - ٢)^{٢}$ + ٣

هو إزاحة أفقية لبيان الدالّة : ص = $س^{٢}$ وحدتان إلى اليمين ، وإزاحة رأسية ٣ وحدات إلى الأعلى .

تدرّب (٥) :

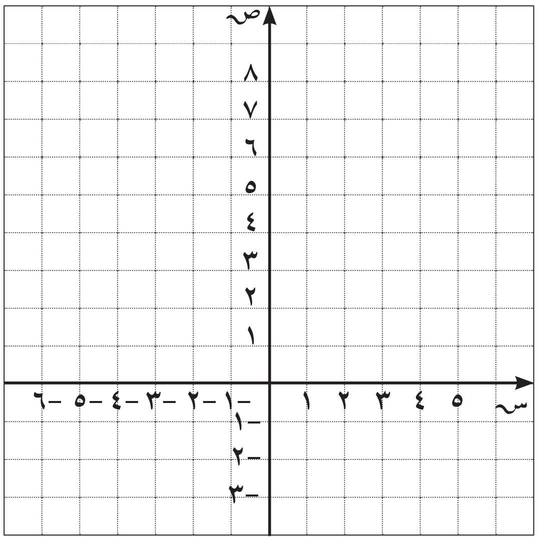
مثّل بيانيًّا الدالّة ص = (س + ٤)^{٢} − ٣ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}



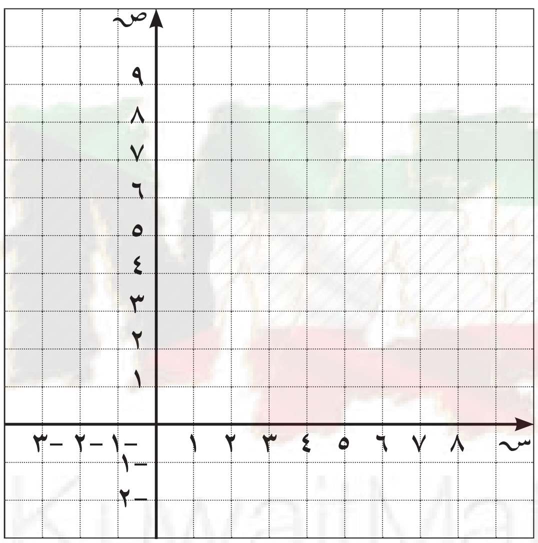
تمـــرَّنْ :

مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢} ، مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوالّ التالية :

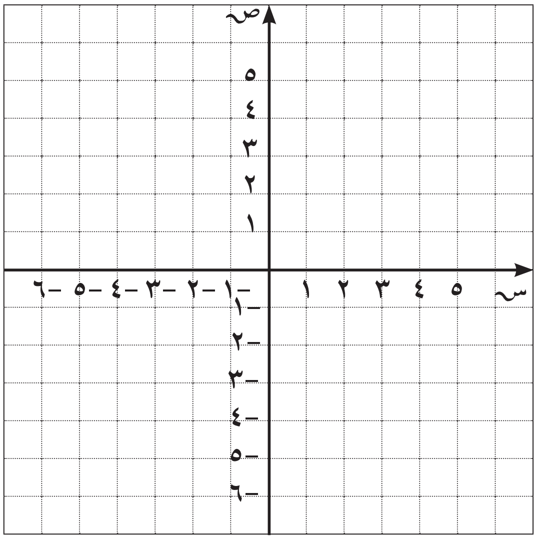
١ ص = س^{٢} − ٣



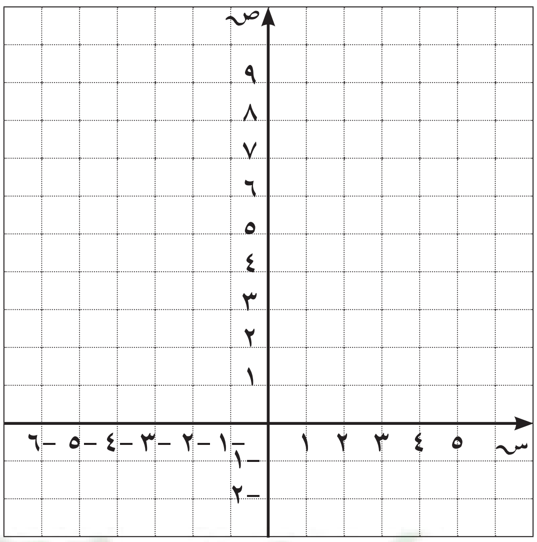
٢ ص = (س − ٤)^{٢}



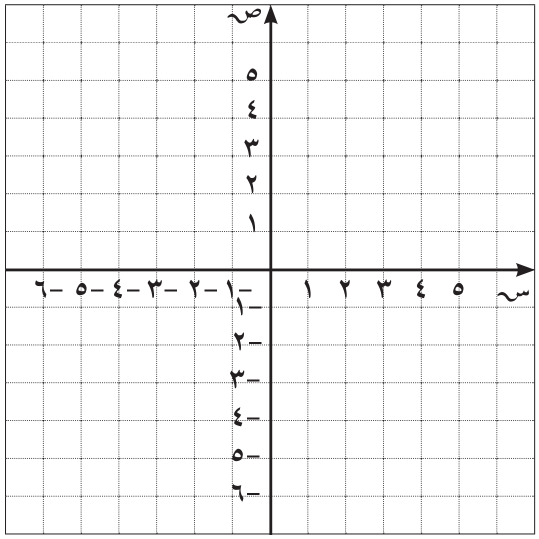
٣ $ص = -س^{٢} + ١$



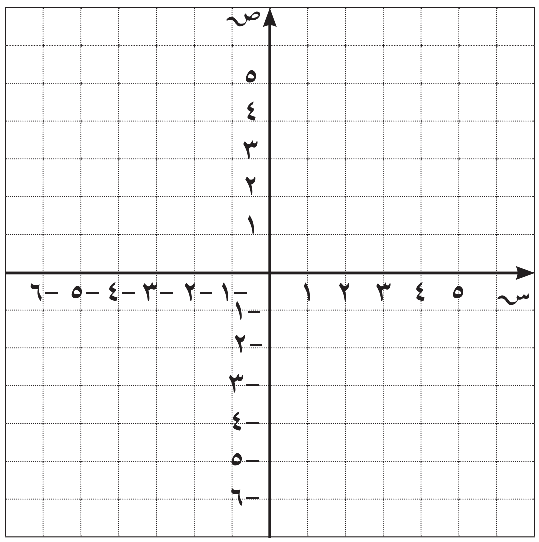
٤ $ص = (س + ٢)^{٢} + ٢$



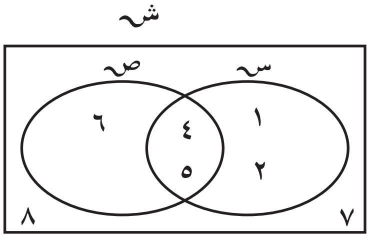
٥ ص = (س − ٢)^{٢} + ١



* ٦ ص = − (س + ١)^{٢} − ٢



أوّلًا : التمارين المقالية



١ من شكل فن المقابِل ، أكمِل بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

أ ش = ...

ب س = ...

جـ ص = ...

د س − ص = ...

هـ ص − س = ...

و $\overline{\text{س}}$ = ...

ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل (س − ص) .

---

٢ لتكن المجموعة الشاملة ش = مجموعة الأعداد الكلّية الأصغر من ٥ ،
س = { ا : ا عدد صحيح موجَب، ا ≤ ٤ } ، ع = { ٢ ، ٤ } .

أوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

أ ش = ...

ب س = ...

جـ $\overline{\text{س}}$ = ...

د $\overline{\text{ع}}$ = ...

هـ س − ع = ...

و ($\overline{\text{س}} \cap \overline{\text{ع}}$) = ...

ز ($\overline{\text{س} \cap \text{ع}}$) = ...

ح $\overline{\overline{\text{س}}}$ = ...

٣ إذا كان التطبيق د : س ⟵ ص ، حيث س = { ٢ ، ٣ ، ٥ } ،
ص = { ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ } ، د (س) = ٢س + ١

أ أوجِد مدى التطبيق د .

ب أُكتب د كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

جـ مثِّل التطبيق د بمخطَّط سهمي وآخر بياني .

د بيِّن نوع التطبيق د من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

٤ التطبيق ن : س ⟵ ع ، حيث س = { أ : أ ∈ ص ، -١ ≤ أ ≤ ١ } ،
(ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة)
ع = { ب : ب ∈ مجموعة الأعداد الكلّيّة ، ب ≤ ٢ } ، ن (س) = س^{٢}

أ أُكتب كلًّا من س ، ع بذكر العناصر .

ب أوجِد مدى التطبيق ت .

....

....

....

....

....

جـ مثِّل التطبيق ت بمخطَّط بياني .

د هل التطبيق ت تطبيق تقابل ؟ لماذا ؟

....

....

....

٥ **إذا كان التطبيق ت : س $\longrightarrow$ ص ، حيث س = { −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } ،**
ص = { −١ ، ١ ، ٧ } ، ت (س) = ٢ س^{٢} − ١ ، فبيِّن أنّ ت تطبيق تقابل .

....

....

....

....

....

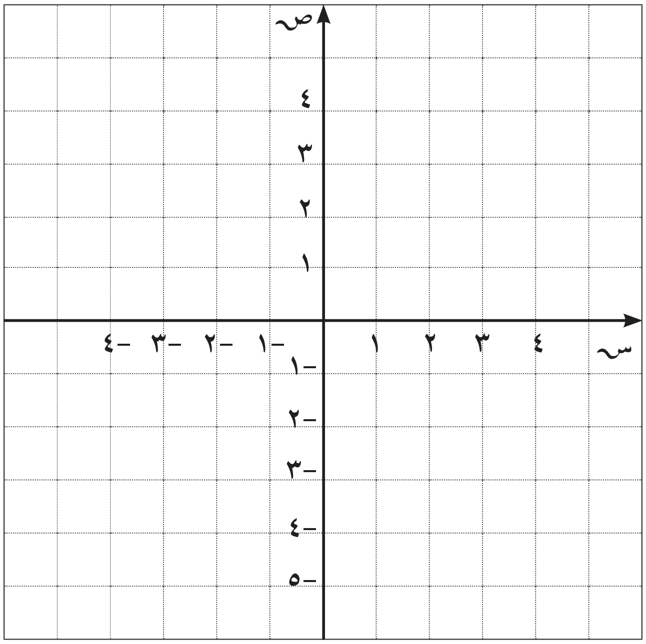
....

....

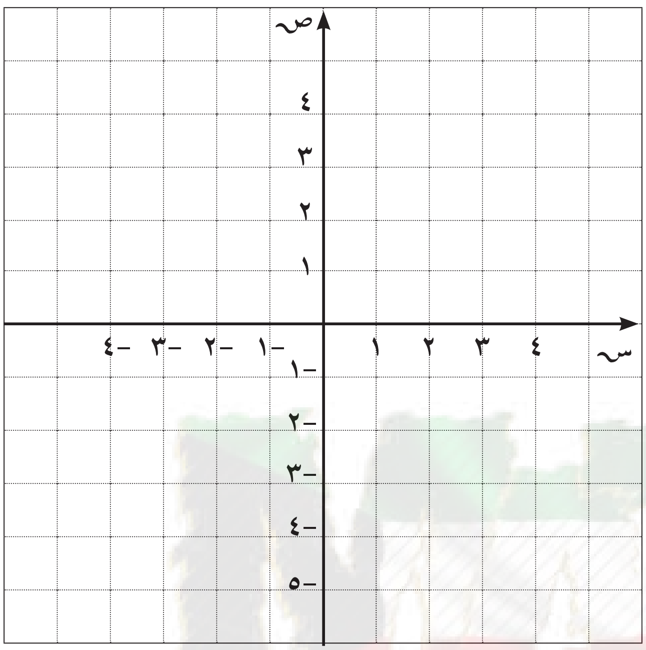
....

....

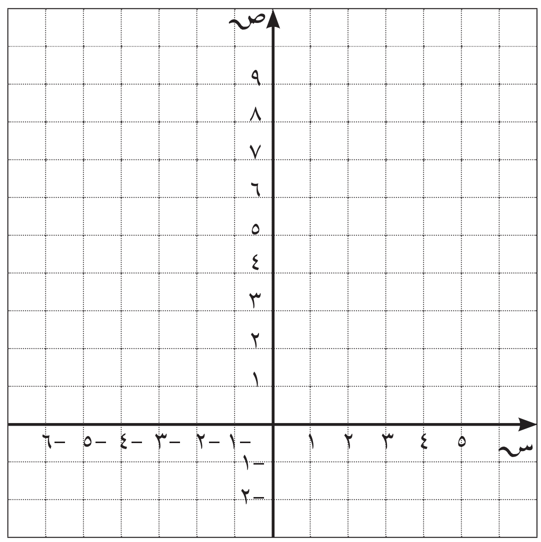
٦ أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص = ٣ س + ١



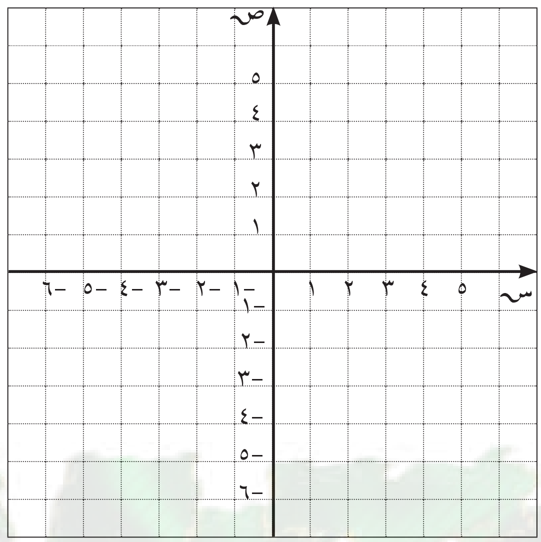
٧ أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص = -٢ س



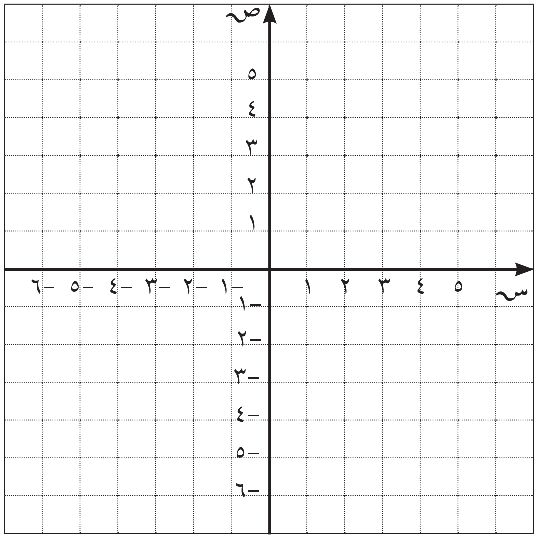
٨ مثِّل بيانيًّا : ص = س^{٢} + ٤ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}



٩ مثِّل بيانيًّا : ص = − س^{٢} − ١ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}

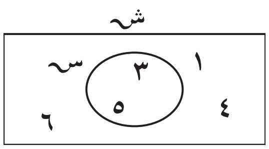


١٠ مثِّل بيانيًّا : ص = (س − ١)^{٢} − ٢ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}



ثانيًا : التمارين الموضوعية

أوّلًا : في البنود التالية ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٢ ، ٣ ، ٥ } فإنّ س − ص = { ٥ }	أ	ب
٢ إذا كانت س ∩ ص = ∅ ، فإنّ س − ص = س	أ	ب
٣ من شكل فِن المقابِل : $\overline{\text{س}}$ = { ٣ ، ٥ } 	أ	ب
٤ التطبيق ت : { ١ ، ٢ ، ٣ } ⟵ { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } هو تطبيق شامل.	أ	ب
٥ لتكن س = { −١ ، ٠ ، ١ } ، فإذا كان التطبيق ت : س ⟵ ص (ص مجموعة الأعداد الصحيحة) ، حيث ت (س) = س ، فإنّ ت تطبيق ليس شاملًا وليس متباينًا .	أ	ب

ثانيًا : لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة .

٦ إذا كانت س = { أ : أ عدد أوّلي < ٦ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، فإنّ ص − س =

(أ) { ٥ } (ب) { ١ ، ٤ } (جـ) { ٢ ، ٣ } (د) { ٢ ، ٣ ، ٥ }

---

٧ إذا كانت المجموعة الشاملة ش = مجموعة عوامل العدد ٤ ، س = { ١ ، ٢ } ، فإنّ $\overline{\text{س}}$ =

(أ) { −١ ، −٢ } (ب) { ١ ، ٢ } (جـ) { ٤ } (د) { ٤ ، −١ ، −٢ ، −٤ }

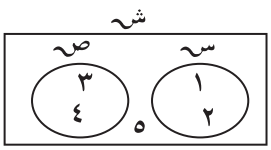
---

٨ إذا كانت المجموعة الشاملة ش = { −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } ، ع = { ١ ، ٢ } ، ل = { ١ } ،
فإنّ $\overline{\text{ع} - \text{ل}}$ =

(أ) { ١ } (ب) { ٢ } (جـ) { ١ ، ٠ ، −١ } (د) { ٢ ، ٠ ، −١ }

---

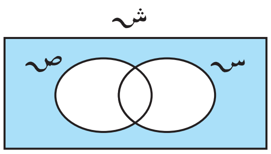
٩ من شكل ڤن المقابل : ($\overline{\text{س} \cap \text{ص}}$) =



(أ) { ١ ، ٢ ، ٥ } (ب) { ٥ } (جـ) ∅ (د) { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

---

١٠ من شكل ڤن المقابِل المنطقة المظلَّلة تمثّل :



(أ) ($\overline{\text{ص} \cap \text{س}}$) (ب) س ∪ ص
(جـ) ($\overline{\text{س}}$ ∪ س) (د) ($\overline{\text{ص} \cup \text{س}}$)

---

١١ إذا كان التطبيق ت : ص ⟵ { ٥ } ، حيث (ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ،
ت (س) = ٥ . فإنّ ت تطبيق :

(أ) شامل ومتباين (ب) ليس شاملًا وليس متباينًا
(جـ) شامل وليس متباينًا (د) متباين وليس شاملًا

١٢ التطبيق د : سـ ⟵ صـ (صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ، د (س) = $س^٢$ ،
إذا كان د تطبيقًا متباينًا ، فإنّ سـ يمكن أن تساوي :

(أ) {−١ ، ٠ ، ١}　(ب) {−٢ ، ٢ ، ٥}　(جـ) {١ ، ٢ ، ٣}　(د) {−٣ ، ١ ، ٣}

---

١٣ ليكن التطبيق ت : ح ⟵ ح ، حيث ت (س) = ٢س − ٣ . فإذا كان ت (م) = ٧ ، فإنّ م =

(أ) ٧　(ب) ٥　(جـ) ٤　(د) −٢

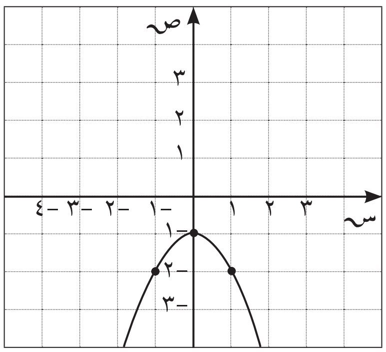
---

١٤ النقطة (٠ ، ٣) ∈ بيان الدالّة :

(أ) ص = ٢ س + ٣　(ب) ص = س
(جـ) ص = ٣ س + ١　(د) ص = ٣ س

---

١٥ الشكل المقابِل يمثّل بيان الدالّة :



(أ) ص = $س^٢$ + ١
(ب) ص = − $س^٢$ + ١
(جـ) ص = − ($س^٢$ + ١)
(د) ص = $س^٢$ − ١

---

١٦ بيان الدالّة ص = $(س − ٣)^٢$ − ٥ ، يمثّل بيان الدالّة ص = $س^٢$ تحت تأثير :

(أ) إزاحة أفقية بمقدار ٣ وحدات إلى اليسار ، وإزاحة رأسية بمقدار ٥ وحدات إلى الأسفل .
(ب) إزاحة أفقية بمقدار ٣ وحدات إلى اليمين ، وإزاحة رأسية بمقدار ٥ وحدات إلى الأسفل .
(جـ) إزاحة أفقية بمقدار ٥ وحدات إلى اليسار ، وإزاحة رأسية بمقدار ٣ وحدات إلى الأعلى .
(د) إزاحة أفقية بمقدار ٣ وحدات إلى اليمين ، وإزاحة رأسية بمقدار ٥ وحدات إلى الأعلى .

الوحدة السابعة المعادلات الخطّية والمتباينات الخطّية

Linear Equations and Linear Inequalities

المنحدرات

Slopes

سطح الكرة الأرضية يتميّز باختلاف تضاريسه ، ومن أهمّ هذه التضاريس المنحدرات .

والانحدار : هو ميل سطح الأرض عن خطّ الأفق أو الميلان الذي يربط نقطتين مختلفتين في المنسوب .

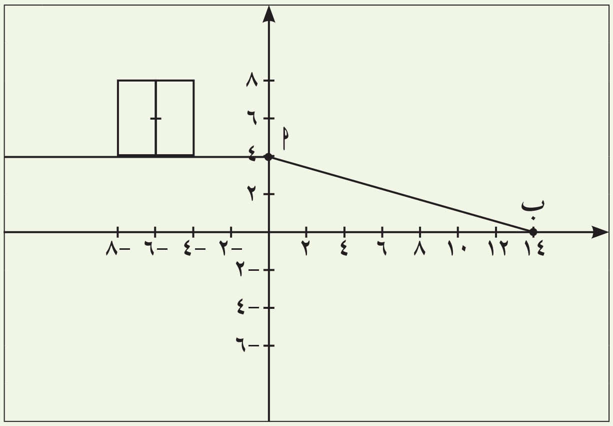
وتتّضح الأهمّية التطبيقية للمنحدرات من خلال استعمالات الأراضي المختلفة ، إذ تحدّد نسبة الانحدار مدى ملاءمة السطح للاستعمالات المختلفة والتي منها : إنشاء مدرَّجات المطارات ، سكك حديدية ، إقامة المباني ، مدّ أنابيب المياه والصرف الصحّي ، المصاطب الزراعية أو الشريطية ، شقّ الطرق والأنفاق وبناء الجسور .

مشروع الوحدة : (تصميم منحدر لذوي الاحتياجات الخاصّة)

دولة الكويت تُعَدّ من الدول الرائدة في مجال خدمة ورعاية وتأهيل ذوي الاحتياجات الخاصّة .
ومن مظاهر هذه الرعاية القوانين والشروط والمواصفات الخاصّة بتسهيل حركتهم داخل وخارج كلّ المباني لجميع مناطق الكويت ، وذلك بوضع المنحدرات المناسِبة ، وتكون ذات ميل مناسِب يسهّل حركتهم داخل وخارج المباني.

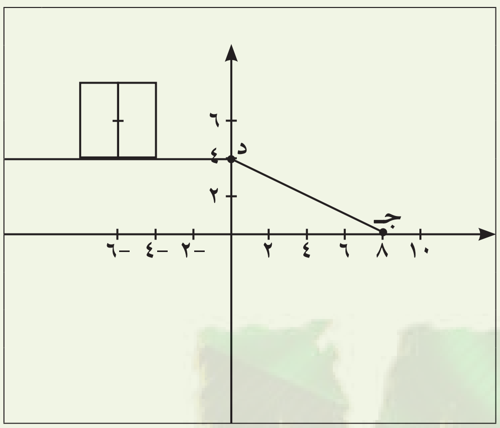
خطّة العمل :

قام مهندس بتصميم منحدرين لذوي الاحتياجات الخاصّة ، يريد اختيار الأنسب إنشاؤه لإحدى الدوائر الحكومية .
ساعِد المهندس على اختيار المنحدر المناسِب .



خطوات تنفيذ المشروع :

- اِبحث في شبكة الإنترنت عن المواصفات القياسية لمنحدر ذوي الاحتياجات الخاصّة .
- أُحسب ميل المنحدر في الشبكة الأولى والذي يمثّل $\overline{\text{أ ب}}$.
- أُحسب ميل المنحدر في الشبكة الثانية والذي يمثّل $\overline{\text{د جـ}}$.
- اِختر التصميم المناسِب .



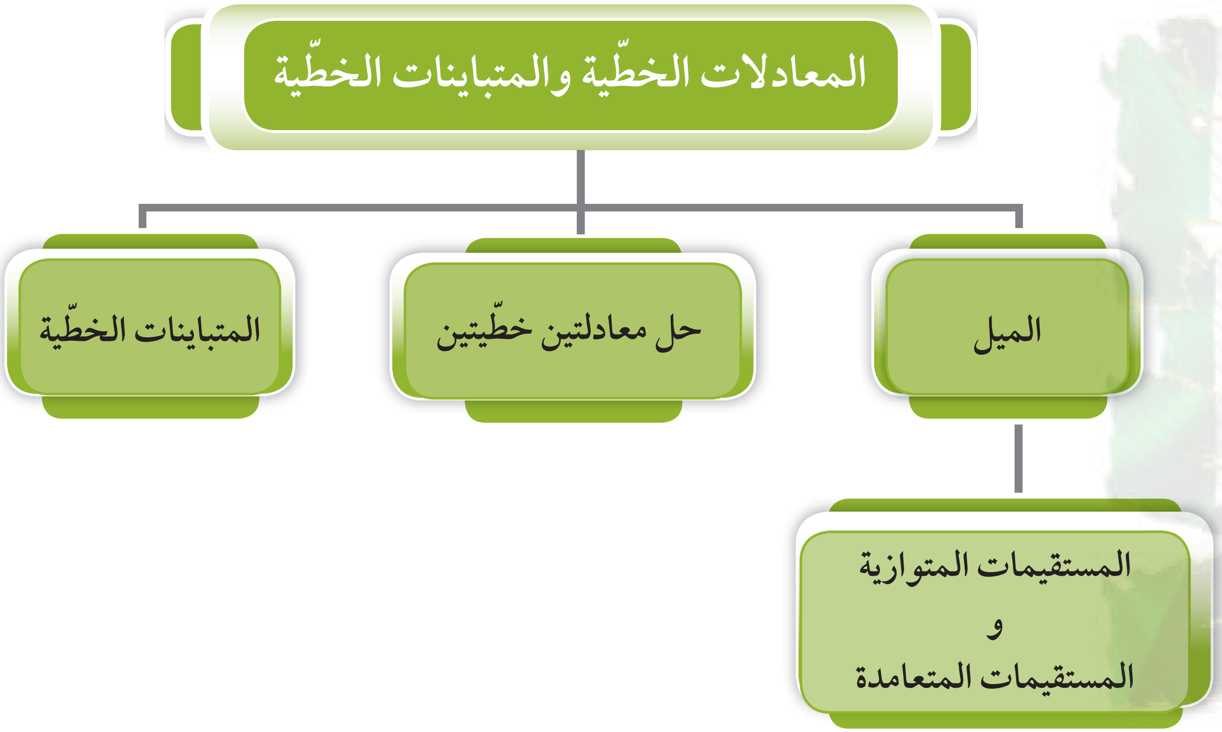
علاقات وتواصل :

- تتبادل المجموعات الأوراق وتتأكّد من صحّة التنفيذ .

عرض العمل :

- تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

مخطَّط تنظيمي للوحدة السابعة



اِستعِدَّ للوحدة السابعة

١ أوجِد ناتج ما يلي :

أ −٣ − (−٥) = ...

ب −١ − ٤ = ...

جـ ٦ − ٧ = ...

د ٠ − (−٩) = ...

٢ ضَعِ المعادلات التالية في صورة : ص = أس + ب

أ ص + س = ٣

ب س − ص = ٤

جـ ٢ ص − ٤ س − ٣ = ٠

د ٣ س + ٥ ص = ٧

٣ أوجِد قيمة ص في الحالات التالية :

أ ص = ٢ س − ٣ ، عندما س = ٠

....

....

....

....

ب ص = س − ٢ ، عندما س = −١

....

....

....

....

جـ ٢ س − ص = ٤ ، عندما س = ٣

....

....

....

....

....

د س − ٥ ص = ٧ ، عندما س = ٢

....

....

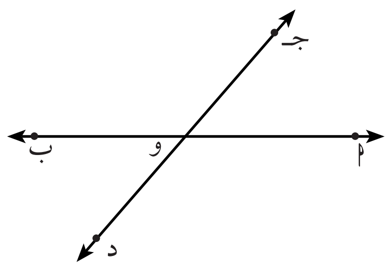
....

....

....

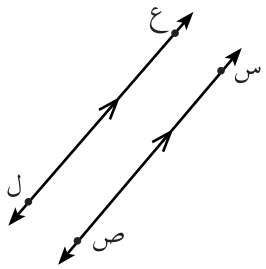
٤ أكمِل ما يلي :

أ



$\overleftrightarrow{\text{أب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـد}}$ = ...

ب



$\overleftrightarrow{\text{س ص}} \cap \overleftrightarrow{\text{ع ل}}$ = ...

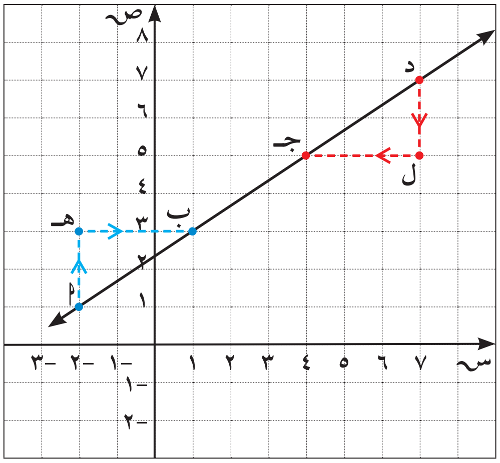
٧-١ الميل
Slope

سوف تتعلّم : كيفية إيجاد ميل خطّ مستقيم .

العبارات والمفردات :

الميل	Slope
التغيّر الرأسي	Rise
التغيّر الأفقي	Run
ميل موجَب	Positive Slope
ميل سالب	Negative Slope

نشاط (١):



١ في المستوى الإحداثي :

أ يحرّك خالد القرص الأحمر من النقطة د إلى النقطة ل **رأسيًّا إلى أسفل** ثمّ من النقطة ل إلى النقطة جـ **أفقيًّا إلى اليسار** .

أكمِل ما يلي :

التغيّر الرأسي من د إلى ل

= ٥ − ٧ = −٢ (وحدتان **إلى أسفل**)

التغير الأفقي من ل إلى جـ

= ٤ − .... = ... (............)

$\frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}} = \frac{-٢}{.....} = \frac{.....}{.....}$

ب يحرّك أحمد القرص الأزرق من النقطة ﺃ إلى النقطة هـ **رأسيًّا إلى أعلى** ثمّ من النقطة هـ إلى النقطة ب **أفقيًّا إلى اليمين** .

أكمِل ما يلي :

التغيّر الرأسي من ﺃ إلى هـ

= ٣ − ١ = ٢ (وحدتان **إلى أعلى**)

التغيّر الأفقي من هـ إلى ب

= ١ − .... = ... (............)

$\frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}} = \frac{٢}{.....}$

ماذا تلاحظ ؟ ....

$\frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}}$ يعبّر عن ميل $\overleftrightarrow{\text{ﺃد}}$

$\boxed{\text{الميل} = \frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}}}$

معلومات مفيدة :
يستخدم الرياضيون مصطلح الميل ليصفوا انحدار الأسطح وبخاصّة عند التزلّج على الجليد .

٢ أكمِل ما يلي :

أ إحداثيا النقطتين جـ ، د هما :

جـ (........ ، ....) ،

د (........ ، ....)

$$\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{........ - ....}{........ - ....}$$

$$= \frac{........}{........}$$

ب إحداثيا النقطتين ﺃ ، ب هما :

ﺃ (........ ، ....) ،

ب (........ ، ....)

$$\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{........ - ....}{........ - ....}$$

$$= \frac{........}{........}$$

ماذا تلاحظ ؟ ....

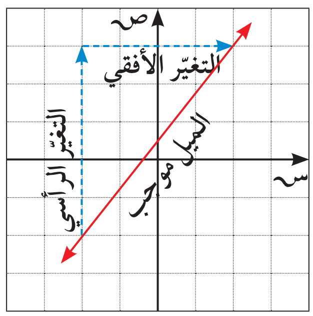
ملاحظة :

$$\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{ص_1 - ص_2}{س_1 - س_2}$$

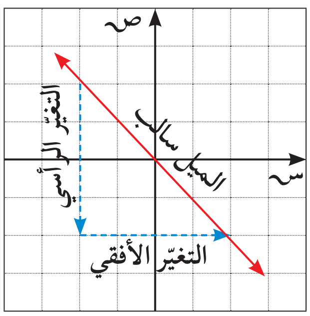
إذا كانت ﺃ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$) نقطتين في المستوى الإحداثي فإنّ :

ميل $\overleftrightarrow{ﺃب}$ = $\frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ ، س$_2$ ≠ س$_1$

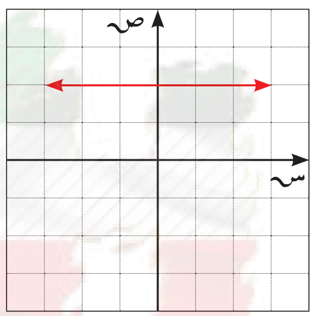
لاحظ أنّ :



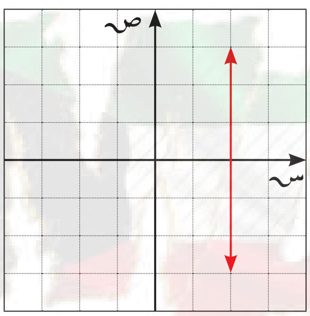
ميل المستقيم موجَب



ميل المستقيم سالب

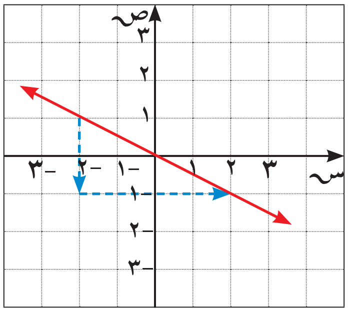


ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا



المستقيم الرأسي ليس له ميل

مثال (١) :



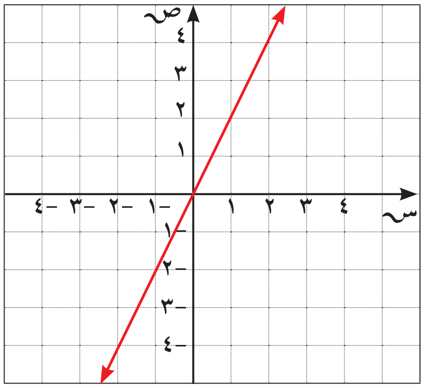
في الشكل المقابِل : أوجِد ميل المستقيم المرسوم .

الحلّ :

$$\text{الميل (م)} = \frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}}$$

$$= \frac{-٢}{٤} = -\frac{١}{٢}$$

تدرّب (١) :



أوجِد ميل المستقيم في الشكل المقابِل :

$$\text{الميل (م)} = \frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}}$$

$$= \frac{\text{..........}}{\text{..........}} = \text{....................}$$

(حاوِل إيجاد الميل بطريقة أخرى)

مثال (٢) :

أوجِد ميل المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين ﺃ (-٢ ، ١) ، ب (٥ ، ٧) .

الحلّ :

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ﺃب}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{٧ - ١}{٥ - (-٢)} = \frac{٦}{٧}$$

تدرّب (٢) :

أوجِد ميل $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ حيث : د (١ ، -١) ، هـ (٢ ، ٢) .

....

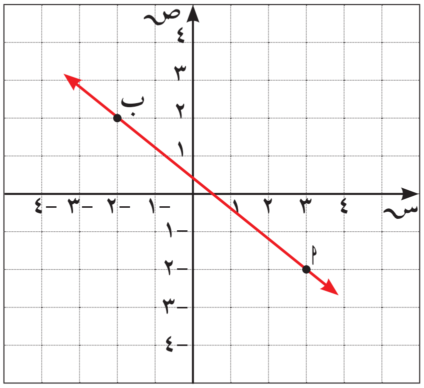
....

....

....

تدرّب (٣) :

في الشكل المقابِل : أوجِد ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ بطريقتين مختلفتين .



....

....

....

....

....

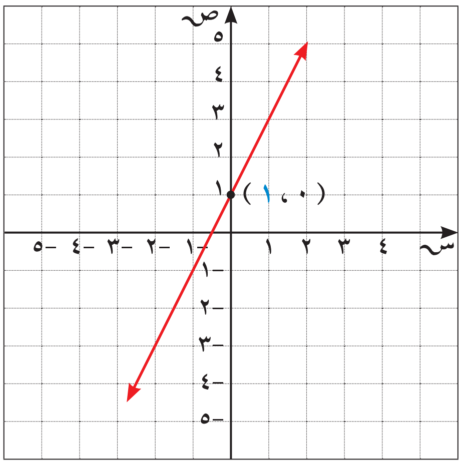
....

....

نشاط (٢) :

الشكل المقابل يمثّل بيان المستقيم الذي معادلته :

ص = ٢ س + ١



أكمِل ما يلي :

١ ميل المستقيم = ...

٢ ما العلاقة بين ميل المستقيم ومعامل س في معادلة المستقيم ؟ ....

٣ من الرسم : الجزء المقطوع من محور الصادات هو ....

٤ ما العلاقة بين الحدّ الثابت في معادلة المستقيم و الجزء المقطوع من محور الصادات ؟ ....

معلومة مفيدة :
الجزء المقطوع من محور الصادات هو الإحداثي الصادي لنقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات .

المعادلة على الصورة : ص = م س + ب تمثّل معادلة المستقيم الذي ميله م ، والجزء المقطوع من محور الصادات ب .

مثال (٣) :

أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته :

ص = ٥ س – ٣

الحلّ :

المعادلة : ص = ٥ س – ٣

على الصورة : ص = م س + ب

∴ الميل (م) = ٥

والجزء المقطوع من محور الصادات (ب) = –٣

تدرّب (٤) :

أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته :

أ ص = ٧ س + ١

....

....

....

....

....

ب ص = –٥ – ٢ س

....

....

....

....

....

جـ ٢ص = – ٩ س

....

....

....

....

....

د ٥ س = ٤ – ص

....

....

....

....

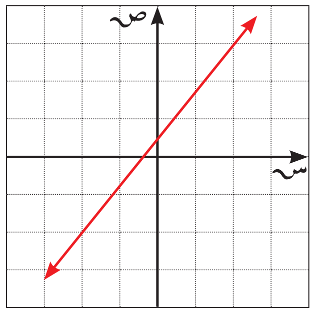
....

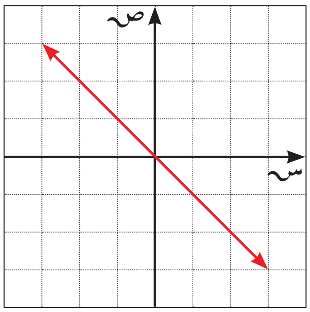
فكِّر وناقِش

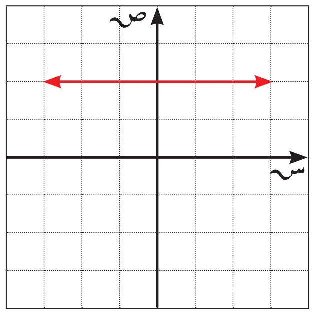
هل المستقيم الذي معادلته س = ٢ يقطع محور الصادات ؟

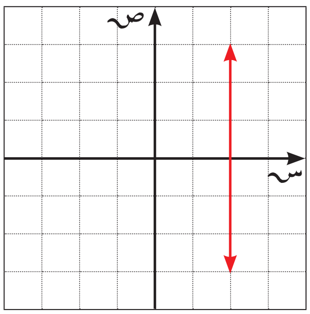
تمــرَّنْ :

١ أوجِد ميل كلّ من المستقيمات التالية إن أمكن ذلك :

أ


ب


جـ


د


----

٢ أوجِد ميل المستقيم المارّ بالنقطتين في كلّ مما يلي :

أ ﺃ (١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٤)

ب د (-١ ، ٦) ، هـ (٤ ، ٥)

جـ ل (-٤ ، ٠) ، ك (٠ ، -٣)

د م (٢ ، ٣) ، ن (-٥ ، ٣)

----

٣ أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته :

أ ص = ٣ س + ٤

ب ص = −٣ − ٧ س

جـ ص = ٥ س

د ٢ س + ص = ١

هـ ٣ ص − ٦ س + ٧ = ٠

و ٢ ص = ٣ س + ٨

ز −ص + س + ٢ = ٠

ح ص = ٩

٧-٢ المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة
Parallel Lines and Perpendicular Lines

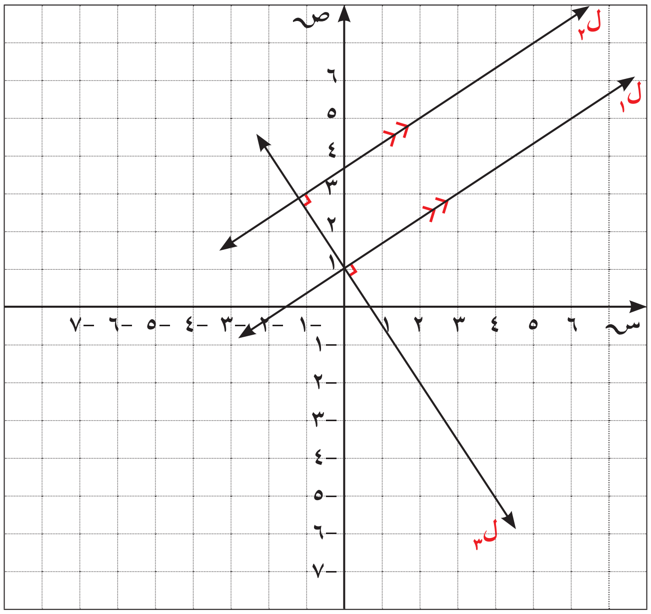
سوف تتعلّم : المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة والعلاقة بين ميلها .

العبارات والمفردات :
المستقيمات المتوازية
Parallel Lines
المستقيمات المتعامدة
Perpendicular Lines

نشاط :

في الشكل المقابِل :

إذا كان $\overleftrightarrow{ل_1} \parallel \overleftrightarrow{ل_2}$ ، $\overleftrightarrow{ل_1} \perp \overleftrightarrow{ل_3}$ ، $\overleftrightarrow{ل_2} \perp \overleftrightarrow{ل_3}$.



١ أوجِد ميل المستقيمات التالية :

أ $\overleftrightarrow{ل_1}$

....

ب $\overleftrightarrow{ل_2}$

....

جـ $\overleftrightarrow{ل_3}$

....

٢ أكمِل ما يلي :

أ $\overleftrightarrow{ل_1} \parallel$ ....

ميل $\overleftrightarrow{ل_1}$ .... ميل $\overleftrightarrow{ل_2}$

ب $\overleftrightarrow{ل_1} \perp$ ....

ميل $\overleftrightarrow{ل_1}$ × ميل $\overleftrightarrow{ل_3}$

= .... × .... = ...

جـ $\overleftrightarrow{ل_2} \perp$ ....

ميل $\overleftrightarrow{ل_2}$ × ميل $\overleftrightarrow{ل_3}$

= .... × .... = ...

ليكن $م_1$ هو ميل $\overleftrightarrow{ل_1}$ ، $م_2$ هو ميل $\overleftrightarrow{ل_2}$:

- $\overleftrightarrow{ل_1} \parallel \overleftrightarrow{ل_2} \Leftrightarrow م_1 = م_2$
- $\overleftrightarrow{ل_1} \perp \overleftrightarrow{ل_2} \Leftrightarrow م_1 \times م_2 = -1$ (أي أن : $م_1 = \frac{-1}{م_2}$)

مثال (١) :

إذا كان $\overleftrightarrow{ن}$ يمرّ بالنقطتين أ (−٣ ، ٥) ، ب (−٤ ، ٣) ،
وكانت معادلة $\overleftrightarrow{ك}$: ص = ٢ س + ٧ ، فأثبِت أنّ $\overleftrightarrow{ن} \parallel \overleftrightarrow{ك}$.

الحلّ :

$\because$ $\overleftrightarrow{ن}$ يمر بالنقطتين أ (−٣ ، ٥) ، ب (−٤ ، ٣)

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{ن} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

$= \frac{٣ - ٥}{-٤ - (-٣)} = \frac{-٢}{-١} = ٢$

$\because$ معادلة $\overleftrightarrow{ك}$: ص = ٢ س + ٧

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{ك} = ٢$

$\because$ ميل $\overleftrightarrow{ن}$ = ميل $\overleftrightarrow{ك}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ن} \parallel \overleftrightarrow{ك}$

تدرّب (١) :

إذا كان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ هو −٣ ، حدِّد أيًّا من المستقيمين التاليين يوازي $\overleftrightarrow{أب}$:

أ $\overleftrightarrow{جـ د}$ الذي يمرّ بالنقطتين :

جـ (٣ ، −١) ، د (١ ، −٧)

....

....

....

....

ب $\overleftrightarrow{ل ع}$ الذي معادلته :

٣ س + ص = ٥

....

....

....

....

مثال (٢) :

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يمرّ بالنقطتين ف (٤ ، ٦) ، ع (٦ ، ١)

وكانت معادلة $\overleftrightarrow{\text{ك}}$: ص = $\frac{٢}{٥}$ س − ٤ ، أثبِت أنّ $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp \overleftrightarrow{\text{ك}}$.

الحلّ :

∵ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يمرّ بالنقطتين ف (٤ ، ٦) ، ع (٦ ، ١)

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

= $\frac{١ - ٦}{٦ - ٤}$

= $\frac{-٥}{٢}$

∵ معادلة $\overleftrightarrow{\text{ك}}$: ص = $\frac{٢}{٥}$ س − ٤

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ = $\frac{٢}{٥}$

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ × ميل $\overleftrightarrow{\text{ك}}$

= $\frac{-٥}{٢} \times \frac{٢}{٥} = -١$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp \overleftrightarrow{\text{ك}}$

تدرّب (٢) :

إذا كان ميل $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ هو $\frac{١}{٤}$ ، حدِّد أيًّا من المستقيمين التاليين عمودي على $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$.

أ $\overleftrightarrow{\text{ع م}}$ الذي معادلته :

٢ ص − ٨ س − ٣ = ٠

....

....

....

....

....

....

ب $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ الذي يمرّ بالنقطتين :

أ (٦ ، ٩) ، ب (٧ ، ٥)

....

....

....

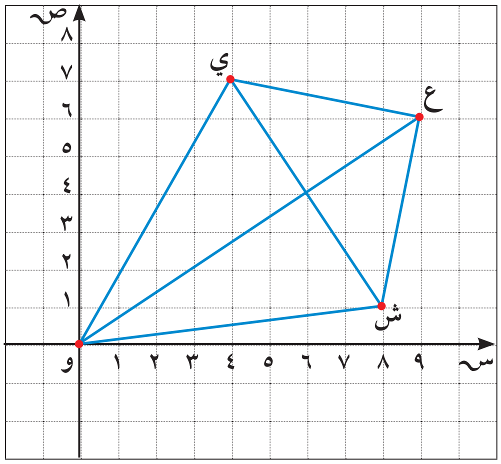
....

....

....

تدرّب (٣) :

في الشكل المقابل : ع ش و ي شكل رباعي ، أثبِت أنّ قطريه متعامدان .



مثال (٣) :

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{ل}}$: ص = ٢ س + ١

أوجد ميل $\overleftrightarrow{\text{ن}}$.

الحلّ :

$\because$ معادلة $\overleftrightarrow{\text{ل}}$: ص = ٢ س + ١

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ = ٢

$\because$ $\overleftrightarrow{\text{ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{\text{ن}} = \dfrac{-١}{\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ل}}}$

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{\text{ن}} = \dfrac{-١}{٢}$

فكِّر وناقِش

هل المستقيم الذي معادلته ص = ٥ يوازي المستقيم المارّ بالنقطتين (-٣ ، ٢) ، (١ ، ٢) ؟ ولماذا ؟

تدرّب (٤) :

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يمرّ بالنقطتين أ (٥ ، ٣) ، ب (٨ ، ٦) .

فأوجِد ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

تمـــرَّنْ :

١ أكمِل ما يلي :

ميل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$	ميل المستقيم الموازي له	ميل المستقيم العمودي عليه
٢		
$-\frac{٢}{٣}$		
		٤-
	$\frac{٢}{٥}$	

٢ إذا كان ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ هو ٤- ، فأيّ من المستقيمات التالية يوازي $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$:

أ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ الذي يمرّ بالنقطتين :

جـ (٠ ، ٦) ، د (-٤ ، ٢)

ب $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$ الذي معادلته :

ص + ٤ س - ٥ = ٠

٣ إذا كانت معادلة $\overleftrightarrow{ك}$: ص = ٤ س + ٣

ومعادلة $\overleftrightarrow{ن}$: ٤ ص − ١٦ س = ١ ، فهل المستقيمان متوازيان ؟ وضِّح ذلك .

---

٤ إذا كان $\overleftrightarrow{أ}$ يمرّ بالنقطتين (٨ ، ١) ، (٣ ، ٤)

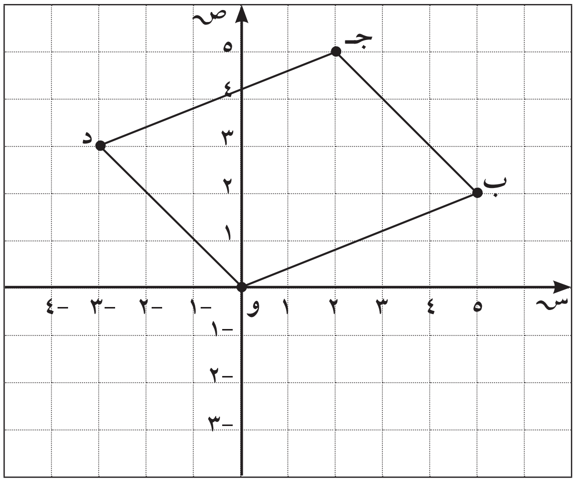
ومعادلة $\overleftrightarrow{ب}$: ١٠ س − ٦ ص = −٥ ، فهل المستقيمان متعامدان ؟ وضِّح ذلك .

٥ إذا كان $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ يمرّ بالنقطتين م (٢ ، ٦) ، ن (٧ ، ٦) ،
$\overleftrightarrow{\text{هـ ط}}$ يمرّ بالنقطتين هـ (٢ ، ١) ، ط (٥ ، ١) .
أثبِت أنّ : $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \parallel \overleftrightarrow{\text{هـ ط}}$.

---

٦ تحقَّقْ من تعامد $\overleftrightarrow{\text{ل}_1}$ الذي يمرّ بالنقطتين (٣ ، −٦) ، (٧ ، ٦)
مع $\overleftrightarrow{\text{ل}_2}$ الذي يمرّ بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (−٦ ، ٧) .

٧ في الشكل الرباعي و ب جـ د ، أثبِت أنّ : $\overline{\text{و ب}}$ // $\overline{\text{د جـ}}$.



٨ إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ك}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$ حيث معادلة $\overleftrightarrow{\text{ك}}$: ٨ س – ٢ ص = ٩ ،

أوجِد ميل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$.

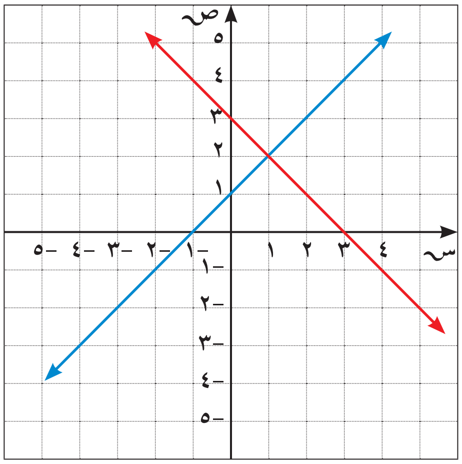
٧-٣ حل معادلتين خطّيتين (من الدرجة الأولى) في متغيّرين
Solving Linear (First degree) Equations with Two Variables

سوف تتعلّم : حل معادلتين خطّيتين من الدرجة الأولى في متغيّرين بيانيًّا آنيًّا .

العبارات والمفردات :
معادلة خطّية
Linear equation
آنية
Simultaneous

الصورة العامة للمعادلة الخطية من الدرجة الأولى في متغيرين :

أ س + ب ص + جـ = ٠ ، أ ، ب ، جـ ∈ ح ، حيث أ ، ب ، لا يساويان صفر معًا .



نشاط :

الشكل المقابِل يمثّل بيان المستقيمين :

ص = س + ١ ، ص = - س + ٣

١ أكمِل الجدول التالي :

النقطة	تنتمي إلى المستقيم ص = س + ١	تنتمي إلى المستقيم ص = - س + ٣
(-١ ، ٠)	✓	✗
(١ ، ٢)		
(٠ ، ٣)		
(٣ ، ١)		

٢ من الجدول السابق : أيّ من النقاط السابقة تنتمي إلى كلّ من المستقيمين ؟

....

٣ من الشكل السابق : في أيّ نقطة يتقاطع المستقيمان ؟ ....

تمثّل النقطة (....... ، ....) حلًّا للمعادلتين الخطّيتين :

ص = س + ١ ، ص = - س + ٣

وبالتالي تكون {(....... ، ....)} هي :

مجموعة الحلّ التي تحقّق المعادلتين في **آن واحد** .

مثال (١) :

أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين الآتيتين بيانيًّا :

ص + ٣ س − ٣ = ٠ ، ص + س = −١

الحلّ :

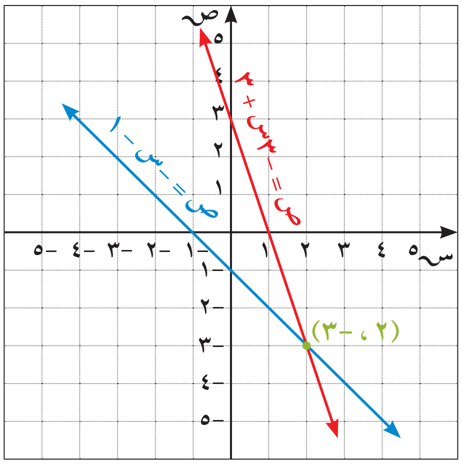
- نكتب معادلتي المستقيمين على الصورة :

ص = − ٣ س + ٣ ، ص = − س − ١

- نرسم بيان المستقيمين :

ص = − ٣ س + ٣			
س	٠	١	٢
ص	٣	٠	−٣

ص = − س − ١			
س	٠	١	٢
ص	−١	−٢	−٣



نلاحظ أنّ : المستقيمين تقاطعا في النقطة (٢ ، −٣)

∴ مجموعة الحلّ = { (٢ ، −٣) }

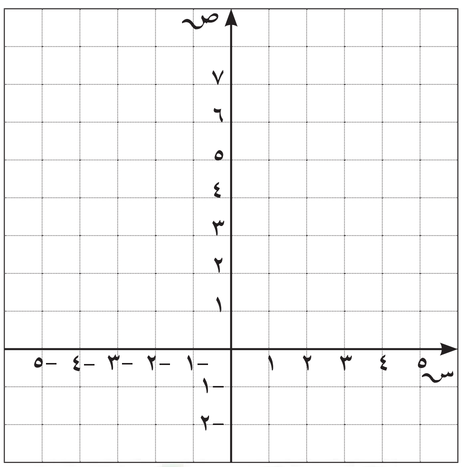
تدرّب (١) :

أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين الآتيتين بيانيًّا :

ص = س + ٢ ، ص = ٢ س − ١

ص = س + ٢			
س			
ص			

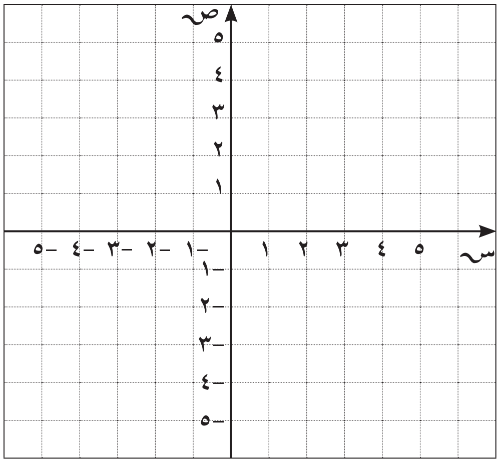
ص = ٢ س − ١			
س			
ص			



∴ مجموعة الحلّ = {(...... ، ......)}

تحقّقْ بالتعويض في كلّ من معادلتي المستقيمين .

تدرّب (٢) :



أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين الآتيتين بيانيًّا :

ص + ٢ س − ٤ = ٠ ، ص − س = −٢

ص =			
س			
ص			

ص =			
س			
ص			

∴ مجموعة الحلّ = { (........ ، ....) }

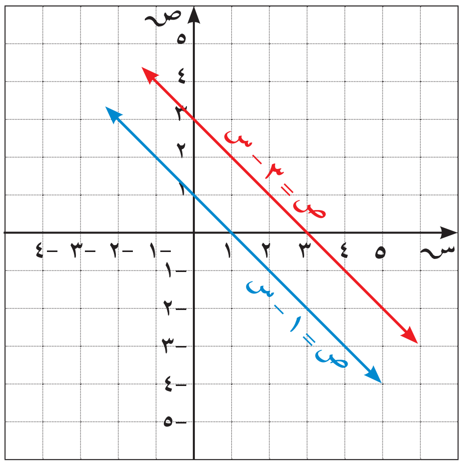
مثال (٢) :

أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين الآتيتين بيانيًّا : ص = ٣ − س ، ص = ١ − س

الحلّ :

ص = ٣ − س			
س	٠	١	٢
ص	٣	٢	١

ص = ١ − س			
س	٠	١	٢
ص	١	٠	−١

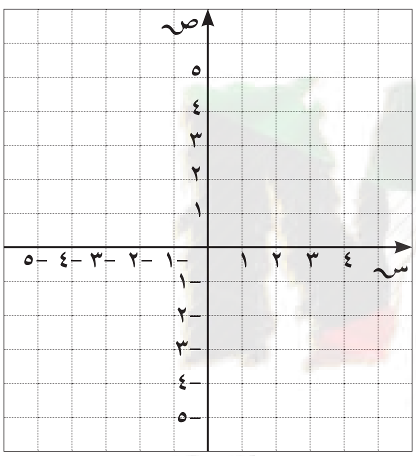


نلاحظ من الرسم أنّ المستقيمين المرسومين غير متقاطعين (متوازيين) .

∴ مجموعة الحلّ = { } أو ∅

تحقّقْ من توازي المستقيمين بإيجاد الميل لكلّ منهما .

تمـــرَّنْ :



١ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين الآتيتين بيانيًّا :

ص = ٢ س + ١ ، ص = س + ١

س			
ص			

س			
ص			

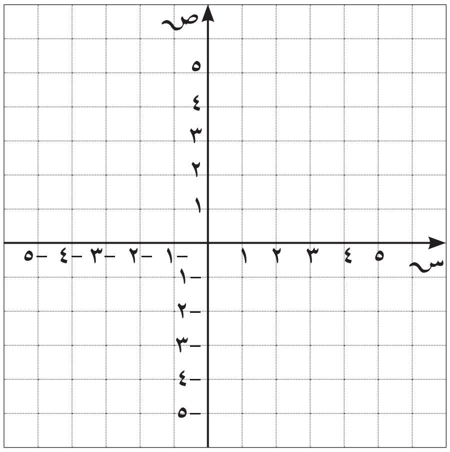
....

٢ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين الآتيتين بيانيًّا :

ص = س − ٣ ، ص = − س + ١

س			
ص			

س			
ص			

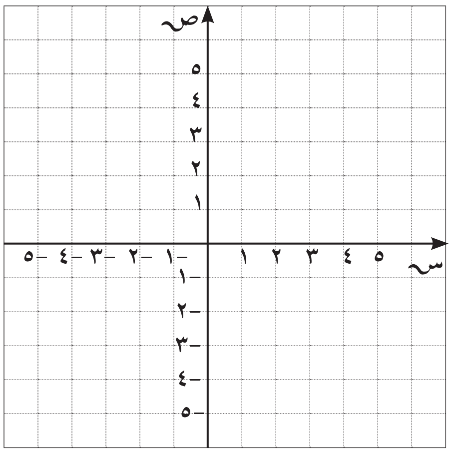


٣ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين الآتيتين بيانيًّا :

ص − ٣ س + ٤ = ٠ ، ص − س = −٤

س			
ص			

س			
ص			

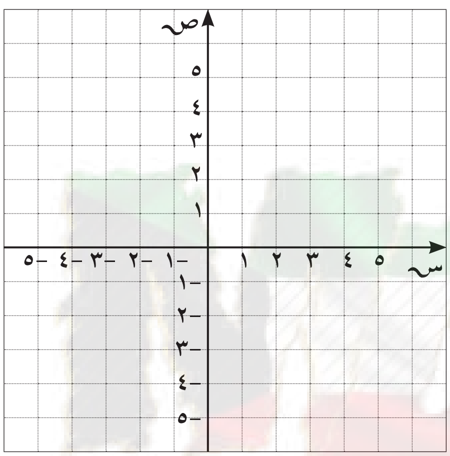


٤ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين الآتيتين بيانيًّا :

ص − ٢ س = ٠ ، ص = ٢ س + ٤

س			
ص			

س			
ص			



٧-٤ المتباينات الخطّية (منطقة الحل المشترك)
The Graph of Linear Inequalities

سوف تتعلّم : تمثيل منطقة حل متباينة ومنطقة الحل المشترك لمتباينتين من الدرجة الأولى في متغيّرين بيانيًّا .

العبارات والمفردات :

متباينة خطّية
Linear Inequality

خطّ فاصل
(خطّ الحدود)
Boundary Line

المتباينات التالية تُسمّى متباينات من الدرجة الأولى في متغيّرين :

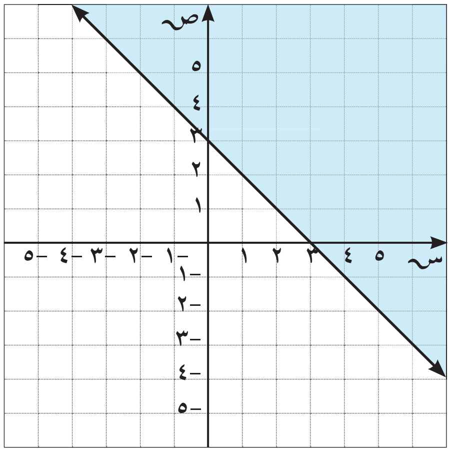
أ س + ب ص > جـ ، أ س + ب ص ≥ جـ ،

أ س + ب ص < جـ ، أ س + ب ص ≤ جـ

حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية .

نشاط (١) :

في الشكل المقابِل : بيان المستقيم س + ص = ٣ يقسم المستوى الإحداثي إلى ٣ مجموعات من النقاط .



معلومات مفيدة :

يستخدم العلماء المتباينات لوصف معدّلات الشوائب المسموح بها في عيّنات مياه الشرب .

أكمِل الجدول التالي :

النقطة	تنتمي إلى المنطقة المظلّلة	تنتمي إلى المستقيم	تنتمي إلى المنطقة غير المظلّلة
(٣ ، ٢)	✓	✗	✗
(٢ ، ١)			
(٠ ، ٠)			
(١ ، ٤)			

- جميع نقاط المستقيم تمثّل حلًّا للمعادلة س + ص = ٣ .
- جميع نقاط المنطقة المظلّلة تمثّل حلًّا للمتباينة س + ص > ٣ .
- جميع نقاط المنطقة غير المظلّلة تمثّل حلًّا للمتباينة س + ص < ٣ .

تُعرَف منطقة الحل لمتباينة الدرجة الأولى في متغيّرين على أنّها جميع النقاط (س ، ص) في المستوى الإحداثي والتي تحقّق المتباينة .

عند إيجاد منطقة الحلّ لمتباينة الدرجة الأولى في متغيّرين ، سوف نحتاج إلى رسم خطّ مستقيم يُسمّى خط الحدود (أو الخطّ الفاصل) .

إذا كانت المتباينة على الصورة :

- أ س + ب ص ≥ جـ ، أ س + ب ص ≤ جـ ،
  نرسم خطّ الحدود (متّصل) .
- أ س + ب ص > جـ ، أ س + ب ص < جـ ،
  نرسم خطّ الحدود (متقطّع) .

معلومة مفيدة :
معادلة خط الحدود للمتباينة تسمى المعادلة المناظِرة للمتباينة.

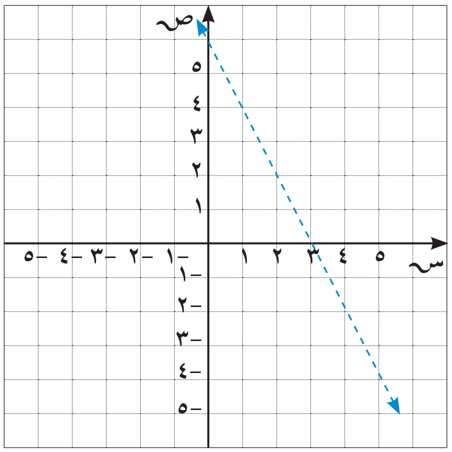
مثال (١) :

أُرسم خطّ الحدود للمتباينة : ٢ س + ص < ٦

الحلّ :

- المعادلة المناظرة (معادلة خطّ الحدود) هي :
  ٢ س + ص = ٦
- نكوّن جدولًا لقيم المعادلة المناظِرة :

ص = − ٢ س + ٦			
س	١	٢	٣
ص	٤	٢	٠



- نرسم خطّ الحدود (متقطّع) .

تدرّب (١) :

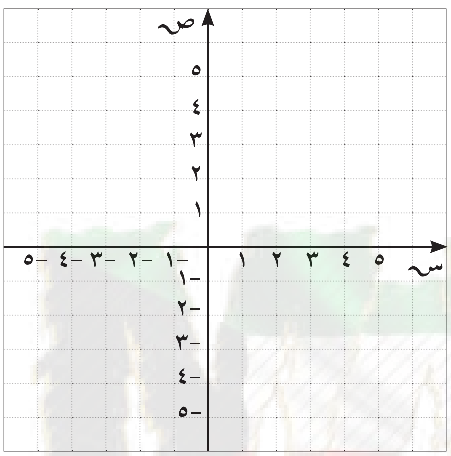
أُرسم خطّ الحدود للمتباينة : س + ص ≥ ٣

- المعادلة المناظِرة (معادلة خطّ الحدود) هي :

....

- كوِّن جدولًا لقيم المعادلة المناظِرة :

ص = − س + ٣			
س			
ص			



- أُرسم خطّ الحدود (......................) .

خطوات إيجاد منطقة الحلّ لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيّرين بيانيًّا :

(١) نرسم خطّ الحدود للمتباينة باستخدام الخط المتّصل في حالة : ≥ ، ≤
والخط المتقطّع في حالة : > ، < .

(٢) نقوم بتحديد المنطقة التي تمثّل جانب منطقة حل المتباينة ، ولتحديد هذا الجانب نختار أيّ نقطة لا تنتمي إلى خطّ الحدود ونعوّض بها في المتباينة ، إذا نتج عبارة صحيحة يكون هذا الجانب هو جانب منطقة الحل ، وإذا نتج عبارة غير صحيحة يكون الجانب الآخر هو جانب منطقة الحل .

(٣) في حالة : ≥ ، ≤ تتكوّن منطقة الحل من مجموعة نقاط خطّ الحدود اتّحاد مجموعة نقاط جانب منطقة الحل ،
وفي حالة : > ، < تتكونّ منطقة الحل من مجموعة نقاط جانب منطقة الحل فقط .

(٤) نظلّل المنطقة التي تمثّل منطقة حل المتباينة .

مثال (٢) :

مثِّل بيانيًّا منطقة حلّ المتباينة : ص ≥ ٢ س − ٣

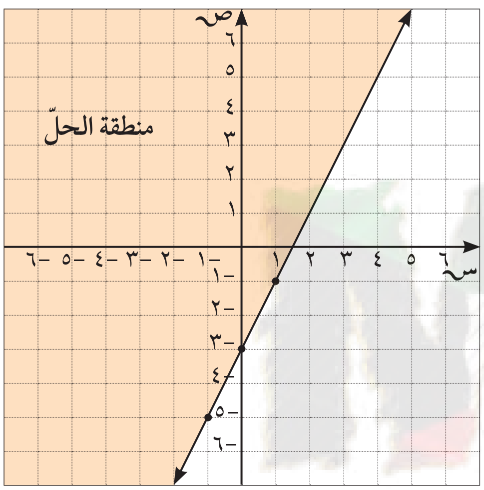
الحلّ :

ص = ٢س −٣			
س	١	٠	−١
ص	−١	−٣	−٥

- المعادلة المناظرة (معادلة خطّ الحدود) هي : ص = ٢ س − ٣
- نكوّن جدولًا لقيم المعادلة المناظرة :
- نرسم خطّ الحدود (متّصل)
- نختار نقطة لا تنتمي الى خطّ الحدود ولتكن نقطة الأصل (٠ ، ٠) ونعوّض بها في المتباينة .

ص ≥ ٢ س − ٣

٠ ≥ − ٣ عبارة صحيحة



- نظلّل المنطقة التي تنتمي إليها نقطة الأصل ، فتكون منطقة حلّ المتباينة هي جميع النقاط التي تنتمي إلى المنطقة المظلّلة وجميع نقاط خطّ الحدود .

تدرّب (٢) :

مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ للمتباينة : ص > ٢ – س

- المعادلة المناظِرة : ص = ...

- جدول القيم :

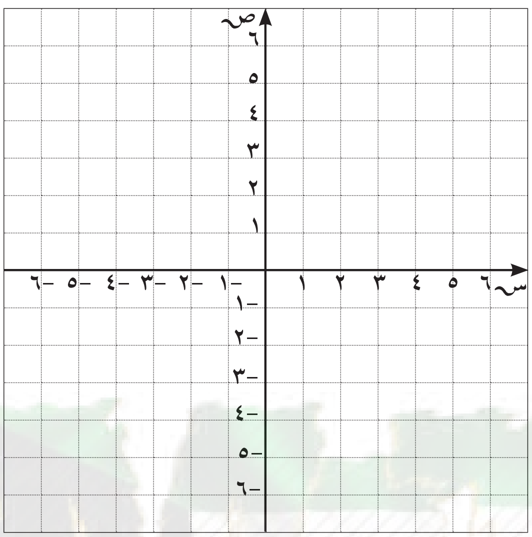
ص = ...			
س	١	٠	–١
ص			

- أُرسم خطّ الحدود (................)
- اِختر النقطة (....... ، ....) لا تنتمي إلى خطّ الحدود .

عوِّض في المتباينة ص > ٢ – س

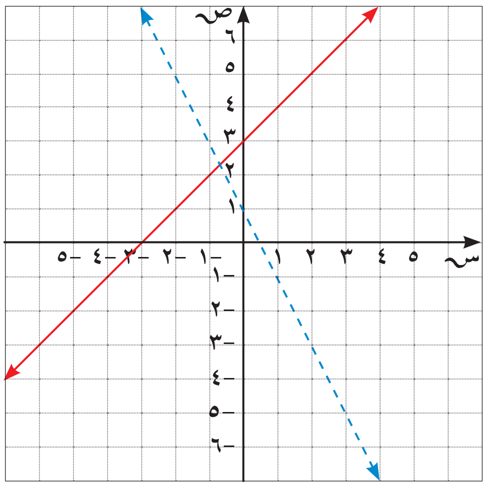
.... > .... (عبارة ....)

- ظلِّل منطقة حلّ المتباينة .



نشاط (٢):

يمثّل الشكل التالي خطّ الحدود للمتباينتين : ص ≤ س + ٣ ، ص > ١ − ٢ س



1. ظلّل منطقة الحلّ لكلّ منهما .
2. ماذا تلاحظ ؟

المنطقة التي تمثّل منطقة الحلّ هي تقاطع منطقتي الحلّ للمتباينتين (منطقة الحلّ المشترَك).

3. عيّن على الرسم منطقة الحلّ المشترَك .

خطوات إيجاد منطقة الحلّ المشترَك لمتباينتين من الدرجة الأولى في متغيّرين بيانيًّا :

(١) نرسم خطّ الحدود لكل متباينة في نفس المستوى الإحداثي .

(٢) نحدّد منطقة الحل لكل متباينة .

(٣) نوجد منطقة الحل المشترَك والتي تتكوّن من جميع النقاط (س ، ص) التي تنتمي إلى منطقة تقاطع منطقتي حل المتباينتين .

تدرّب (٣) :

مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتين :

ص < ٢ س – ١ ، ص > س – ١

• المعادلة المناظِرة

ص = ...

• جدول القيم :

ص =			
س			
ص			

• أُرسم خطّ الحدود . (...........)

• عوِّض بالنقطة (....... ، ....) .

.... > ....

عبارة ....

• المعادلة المناظِرة

ص = ...

• جدول القيم :

ص =			
س			
ص			

• أُرسم خطّ الحدود . (...........)

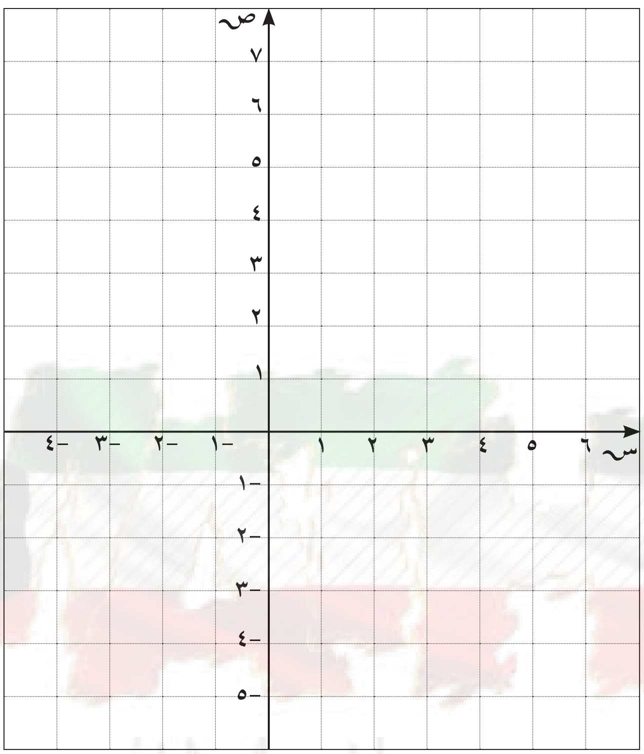
• عوِّض بالنقطة (....... ، ....) .

.... < ....

عبارة ....

• ظلِّل منطقة الحل لكل من المتباينتين .

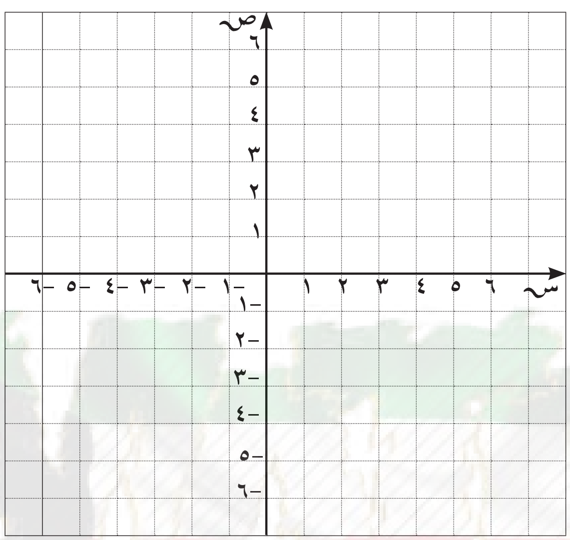
• عيّن على الرسم منطقة الحل المشترَك .



تدرّب (٤) :

مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتين :

ص < س ، ص ≥ ٢



تدرّب (٥) :

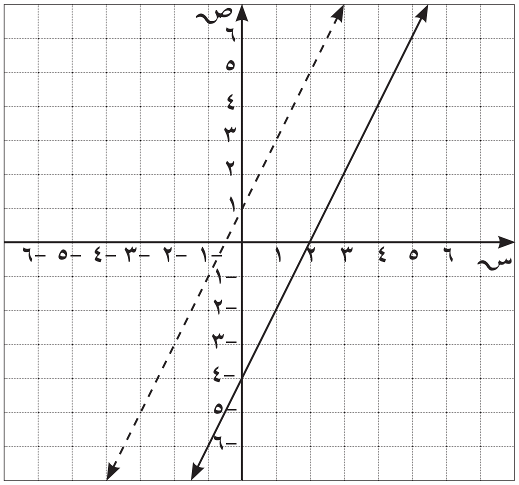
ظلِّل في الشكل المقابِل منطقة الحلّ لكلّ من المتباينتين :

ص > ٢ س + ١

ص ≥ ٢ س − ٤

ماذا تلاحظ ؟

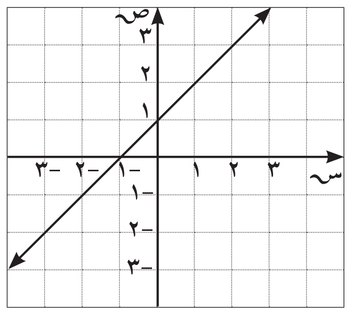
....



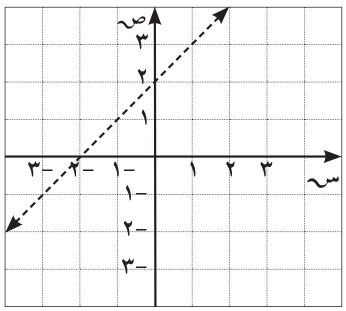
تمـــرَّنْ :

١ ظلِّل منطقة حلّ كلّ متباينة في ما يلي :

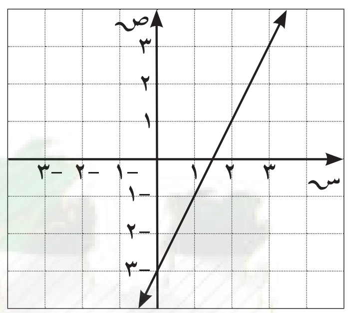
أ ص ≥ س + ١



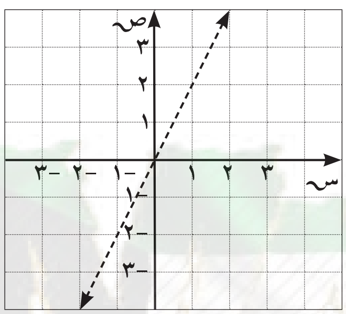
ب ص > س + ٢



جـ ص ≤ ٢ س − ٣

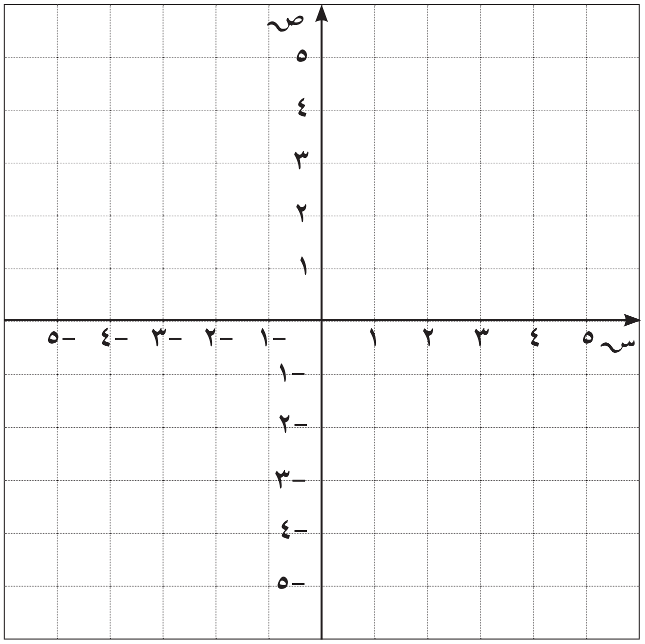


د ص < ٢ س



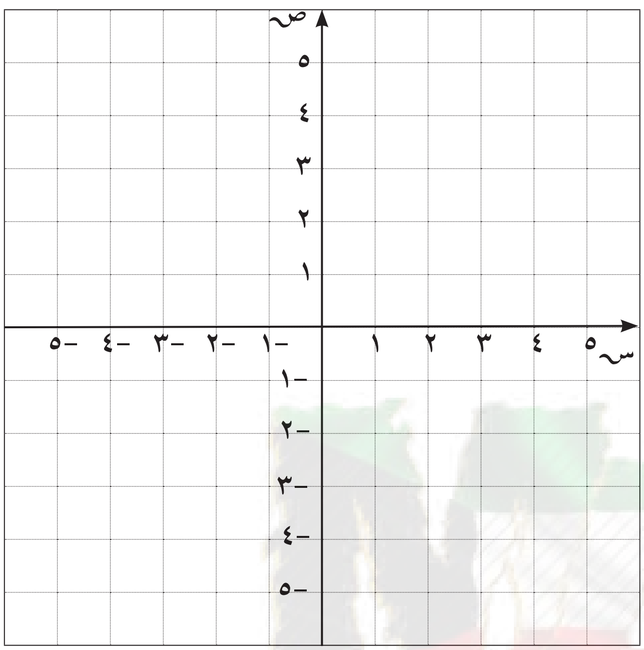
٢ مثل بيانيًّا منطقة الحل للمتباينة :

ص > ٣ س − ١



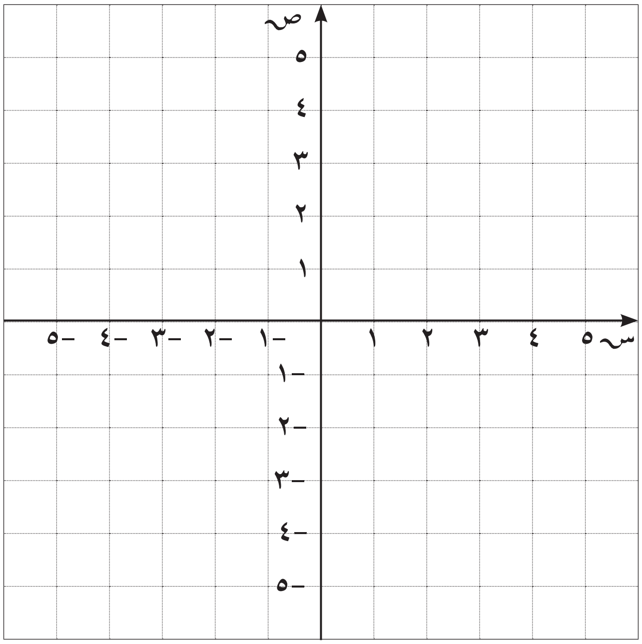
٣ مثل بيانيًّا منطقة الحل للمتباينة :

ص ≤ ٤ − س



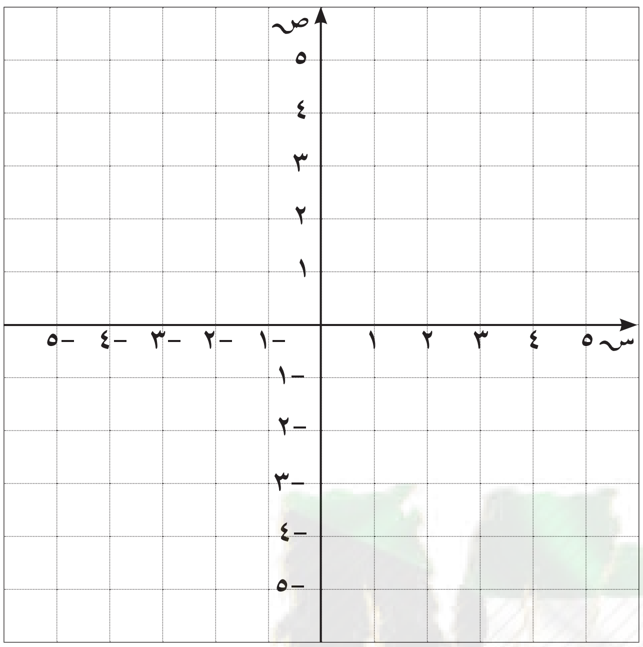
٤ مثل بيانيًّا منطقة الحل المشترك للمتباينتين :

ص > ٢ س ، ص < ١ – س



٥ مثل بيانيًّا منطقة الحل المشترك للمتباينتين :

ص > ٣ س – ٢ ، ص ≤ – ٢



٧-٥ مراجعة الوحدة السابعة
Revision Unit Seven

أوّلًا : التمارين المقالية

١ أوجِد ميل المستقيم المارّ بالنقطتين في كلّ من الحالات التالية :

أ (١ ، ٣) ، (٢ ، ٦)

ب (−٢ ، ٩) ، (٤ ، ٠)

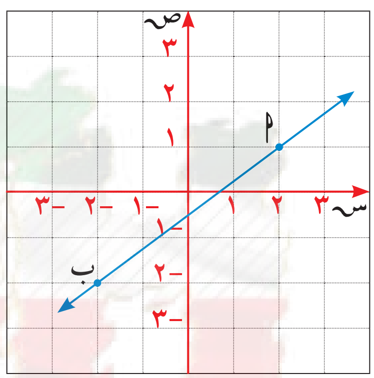
٢ أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات لكلّ من المستقيمات التالية :

أ ص = ٥ س + ٧

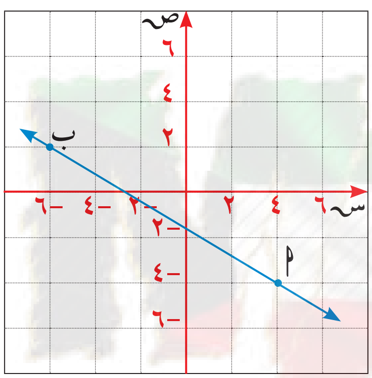
ب ٤ س + ٢ ص = ٥

٣ أوجِد ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ في كلّ ممّا يلي :

أ



ب



٤ **حدِّد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة في كلّ من الحالات التالية :**

أ $\overleftrightarrow{ل_1}$ الذي يمرّ بالنقطتين : (١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، $\overleftrightarrow{ل_2}$ الذي معادلته : ٢ ص + س = ٦

ب $\overleftrightarrow{ل_1}$ الذي يمر بالنقطتين (٣ ، ٥) ، (−١ ، ٢) ، $\overleftrightarrow{ل_2}$ الذي يمرّ بالنقطتين

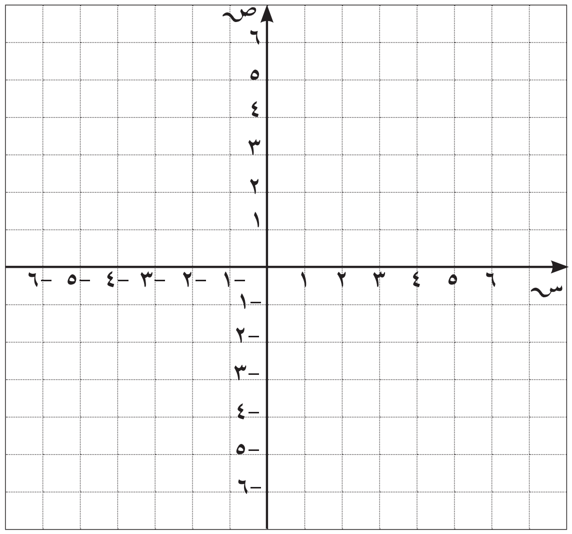
(−٢ ، ٥) ، (٢ ، ٨)

٥ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين بيانيًّا :

أ ص = س + ٣ ، ص = ٢ س + ١

ص = س + ٣			
س			
ص			

ص = ٢ س + ١			
س			
ص			

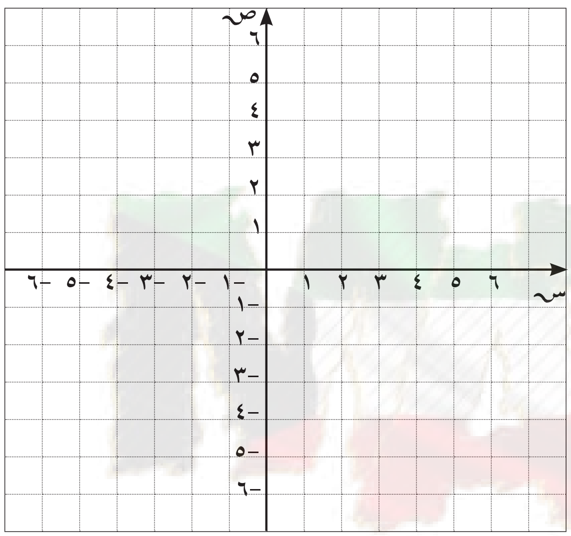


....

ب ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٣ ، ص = − $\frac{٣}{٢}$ س − ١

ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٣			
س			
ص			

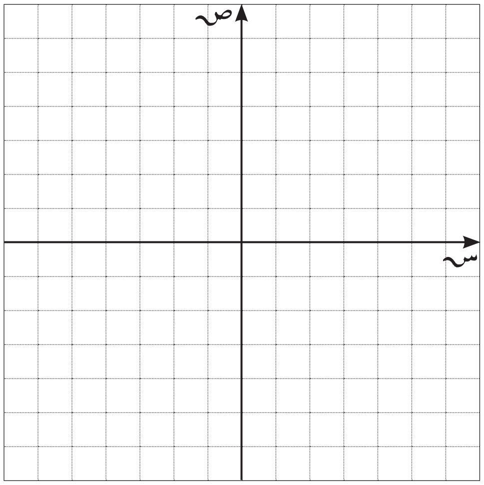
ص = − $\frac{٣}{٢}$ س − ١			
س			
ص			



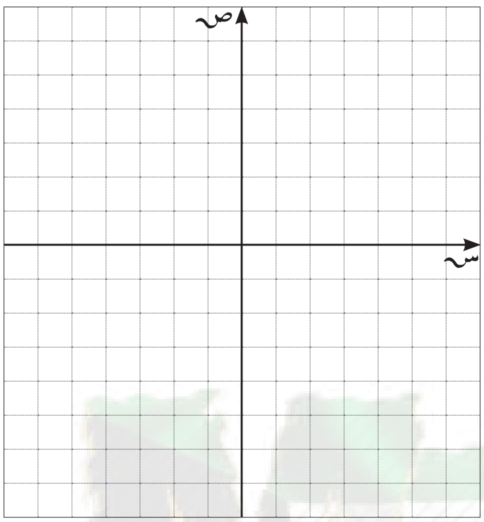
....

٦ مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتين :

أ ص ≥ س + ٢ ، ص > س − ٥



ب ص − ٤ س + ٣ ≤ ٠ ، ص ≥ − س



ثانيًا : التمارين الموضوعية

أوّلًا : في البنود التالية ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

(١) المستقيم الذي معادلته ص = ٤ ليس له ميل .	(أ)	(ب)
(٢) المستقيمان ص = ٢ س − ١ ، ٢ ص = ٢ س + ٣ متوازيان .	(أ)	(ب)
(٣) المستقيم الذي معادلته ص = ٣ والمستقيم الذي معادلته س = ٢ مستقيمان متعامدان .	(أ)	(ب)
(٤) إذا كان ميل المستقيم $\overleftrightarrow{ل_١}$ هو ٢ ، فإنّ ميل المستقيم $\overleftrightarrow{ل_٢}$ العمودي عليه هو −٢	(أ)	(ب)
(٥) النقطة (٠ ، ١) هي أحد حلول المتباينة : ص ≤ ٢ س − ١	(أ)	(ب)

ثانيًا : لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة .

(٦) الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته : ٢ ص + س + ٢ = ٠ هو :

(أ) −١ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (جـ) ١ (د) ٢

---

(٧) المستقيم المتعامد مع المستقيم : ٢ ص = ٣ س − ١ هو :

(أ) ٣ ص = ٢ س + ٥ (ب) ٢ ص = ٣ س − ٥

(جـ) ٢ ص = −٣ س + ٥ (د) ٣ ص = −٢ س − ٥

---

(٨) مجموعة حلّ المعادلتين : ص = ٣ س − ٢ ، ص = ٢ س + ٢ هي :

(أ) {(٠ ، −٢)} (ب) {(٠ ، ٢)} (جـ) {(٤ ، ١٠)} (د) ∅

---

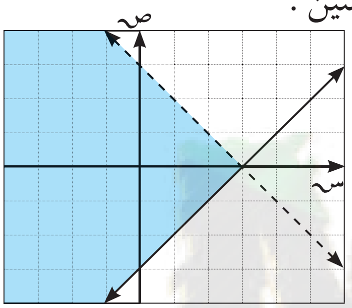
(٩) المنطقة المظلّلة في الشكل أدناه تمثّل منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتين :

(أ) س + ص ≥ ٣ ، ص ≤ س − ٣

(ب) س + ص < ٣ ، ص ≥ س − ٣

(جـ) س + ص < ٣ ، ص > س − ٣

(د) س + ص > ٣ ، ص ≤ س − ٣



---

(١٠) النقطة التي تنتمي إلى منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتين س + ص < −٢ ، ٢ س − ص < ٣ هي :

(أ) (٢ ، ١) (ب) (١ ، ١) (جـ) (٤ ، ١) (د) (٣ ، ١)

الوحدة الثامنة

هندسة المثلّث
Geometry of Triangle

العلوم الهندسية والجسور
Engineering Sciences and Bridges

يرتبط بناء الجسور بهندسة المثلّث حيث يمكن توظيفها في إقامة الدعائم والركائز القوية لجسور الطرق . وقد اهتمّت بلادنا الحبيبة الكويت بالجسور ، ومن أهمّ مظاهر هذا الاهتمام مشروع جسر الشيخ جابر الأحمد ، والذي يُعَدّ من المشاريع العملاقة المدرَجة ضمن الخطّة التنموية لدولة الكويت ، ويعتبر هذا الجسر من أطول الجسور البحرية على مستوى العالم ، حيث يربط جسر الشيخ جابر مدينة الكويت بمدينة الصبية الجديدة ، ويهدف إلى اختصار المسافة بين المدينتين .

مشروع الوحدة : (هياكل الجسور)

الجسر هو منشأ يُستخدَم للعبور من منطقة إلى أخرى بينهما عائق ، قد يكون هذا العائق مائيًّا أو أرضًا وعرة أو منطقة شديدة الانحدار، أو لحلّ مشاكل مرورية .

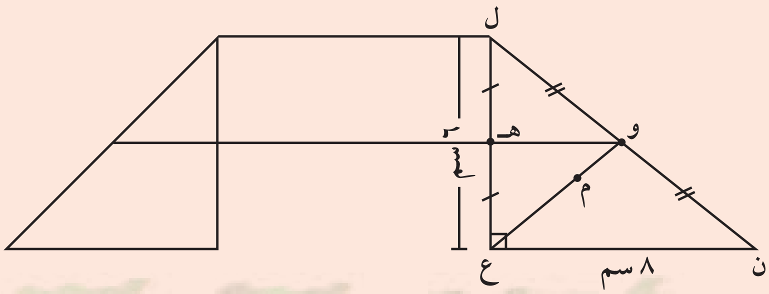
وتختلف هياكل الجسور بحسب الغرض من إنشائها ، كما أنّ لها ارتباطًا وثيقًا بهندسة المثلّث .

خطّة العمل :

- أمامك تصميم لجسر مشاة حيث يمثّل المثلّث ل ع ن إحدى دعامات هذا الجسر. ساعِد المهندس أنت وأفراد مجموعتك على استكمال بيانات التصميم.

خطوات تنفيذ المشروع :

- أوجِد المسافة التي يمكن أن ينشأ عليها درج لجسر المشاة والتي تمثّل ن و .
- أوجِد المسافة من الدعامة التي يمشي عليها المشاة قبل الدخول إلى الجسر والتي تمثّل هـ و .
- أراد المهندس معرفة المسافة بين نقطة تقاطع متوسّطات المثلّث ورأس الزاوية القائمة لقاعدة الدعامة والتي تمثّل م ع ، وذلك لتعليق لوحة إعلانية . أوجِد هذه المسافة .



علاقات وتواصل :

- تتبادل المجموعات الأوراق وتتأكّد من صحّة التنفيذ .

عرض العمل :

- تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

مخطَّط تنظيمي للوحدة الثامنة

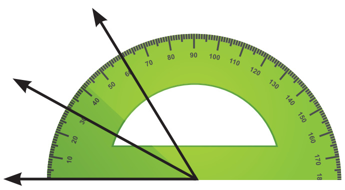
هندسة المثلّث

- القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين
- القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر
- محاور أضلاع المثلّث
- منصِّفات زوايا المثلّث
- الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث
- القطع المتوسّطة للمثلّث

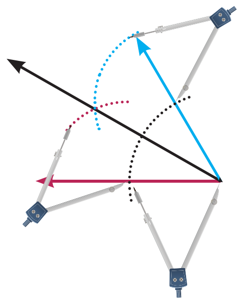
اِستعِدَّ للوحدة الثامنة

١ تنصيف زاوية :

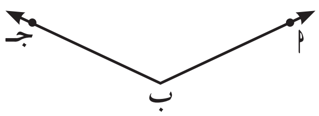
بالقياس :



بالرسم :

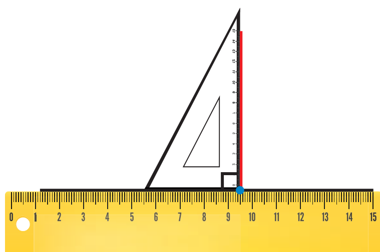


نصف الزاوية أ ب جـ :

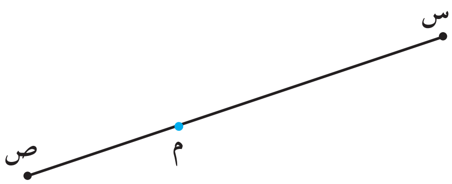


٢ رسم قطعة عمودية على أخرى :

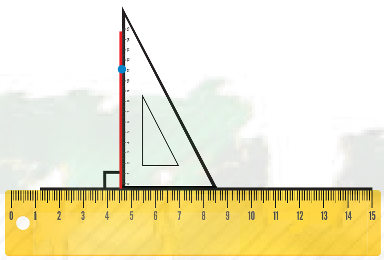
أ من نقطة تنتمي إليها



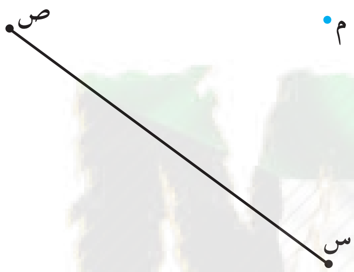
أقِم عمودًا من النقطة م على $\overline{\text{س ص}}$



ب من نقطة لا تنتمي إليها

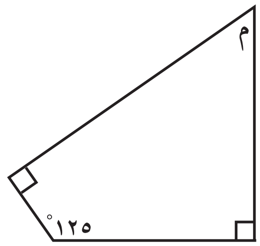


أسقِط عمودًا من النقطة م على $\overline{\text{س ص}}$



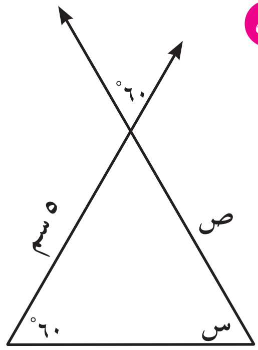
٣ أوجِد قيمة المجهول في كلّ ممّا يلي :

أ



م = ...

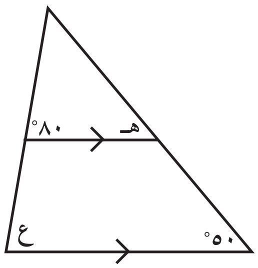
ب



س = ...

ص = ...

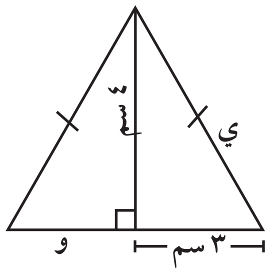
جـ



ع = ...

هـ = ...

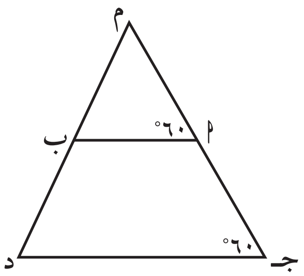
د



و = ...

ي = ...

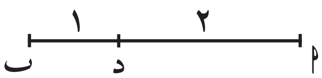
٤ في الشكل المقابل : هل $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ د}}$ ولماذا ؟



....

....

٥ في الشكل المقابِل : د تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ بنسبة ٢ : ١ من جهة أ .



أكمل ما يلي :

أ د = ... د ب ، د ب = ... أ د

أ ب = ... أ د ، أ د = ... أ ب

أ ب = ... د ب ، د ب = ... أ ب

٦ أوجد قيمة س :

٧ س = ٢ (٣ س + ١)

....

....

....

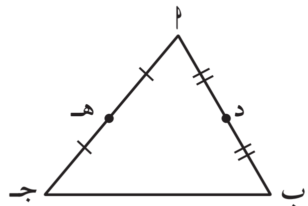
٨-١ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلّث
Midsegment of Triangle

سوف تتعلّم : توظيف القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلّث لحلّ تمارين هندسية .

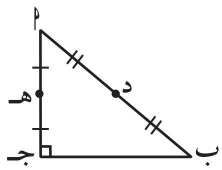
العبارات والمفردات:
مثلّث
Triangle
قطعة مستقيمة
Segment

نشاط :

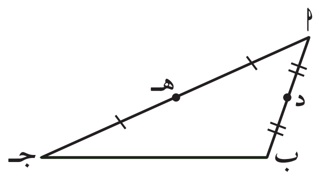
١ في كلّ من المثلّثات التالية : د منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أجـ}}$. اُرسم $\overline{\text{دهـ}}$.



مثلّث حادّ الزوايا



مثلّث قائم الزاوية



مثلّث منفرج الزاوية

معلومات مفيدة :
يستخدم مهندسو المساحة نظرية القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين لإيجاد طول بحيرة ما .

٢ أوجِد باستخدام الأدوات الهندسية كلًّا مما يلي :

د هـ = ...	د هـ = ...	د هـ = ...
ب جـ = ...	ب جـ = ...	ب جـ = ...

ماذا تلاحظ ؟ ....

ق ($\widehat{\text{أ ب جـ}}$) = ...	ق ($\widehat{\text{أ ب جـ}}$) = ...	ق ($\widehat{\text{أ ب جـ}}$) = ...
ق ($\widehat{\text{أ د هـ}}$) = ...	ق ($\widehat{\text{أ د هـ}}$) = ...	ق ($\widehat{\text{أ د هـ}}$) = ...

ق ($\widehat{\text{أ ب جـ}}$) .... ق ($\widehat{\text{أ د هـ}}$) وهما في وضع ....

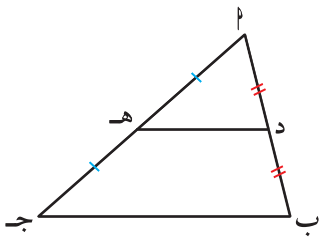
∴ .... // ....

اللوازم :
– أدوات هندسية .

نظرية :

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلّث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع .

في المثلّث أ ب جـ :



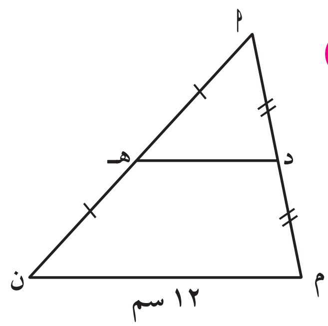
∵ د منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أجـ}}$

∴ $\overline{\text{دهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، د هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

تدرّب (١) :

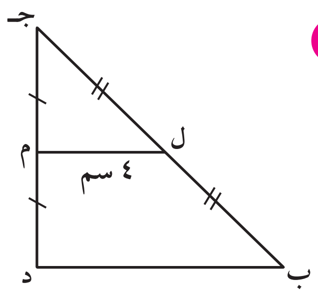
في كلّ من المثلّثات التالية أكمِل (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

أ



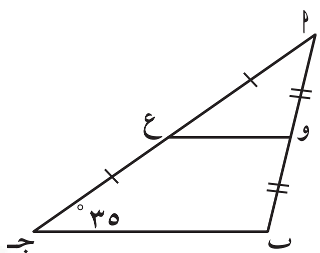
د هـ = ...

ب



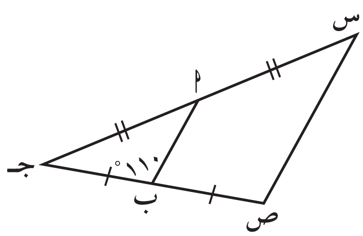
ب د = ...

جـ



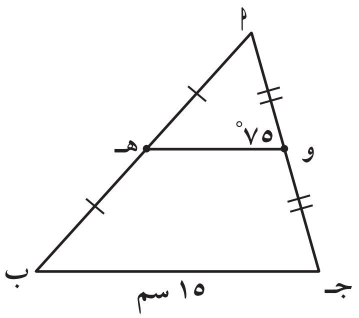
ق ($\hat{\text{أع و}}$) = ...

د



ق ($\hat{\text{ص}}$) = ...

مثال (١) :



في الشكل المقابل أ ب جـ مثلّث فيه :

أ و = و جـ ، أ هـ = هـ ب ، ب جـ = ١٥ سم ،

ق (أ $\hat{و}$ هـ) = ٧٥° .

أوجِد بالبرهان : (١) طول $\overline{و هـ}$ (٢) ق ($\hat{جـ}$) .

الحلّ :

المعطيات : أ و = و جـ ، أ هـ = هـ ب ، ب جـ = ١٥ سم ،

ق (أ $\hat{و}$ هـ) = ٧٥°

المطلوب : إيجاد (١) طول $\overline{و هـ}$ (٢) ق ($\hat{جـ}$)

البرهان : في Δ أ ب جـ :

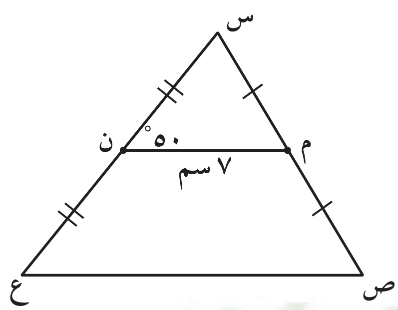
∵ و منتصف $\overline{أ جـ}$ ، هـ منتصف $\overline{أ ب}$

∴ و هـ = $\frac{١}{٢}$ جـ ب ، $\overline{و هـ}$ // $\overline{جـ ب}$

و هـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٥ = ٧ $\frac{١}{٢}$ سم

∴ ق ($\hat{جـ}$) = ق (أ $\hat{و}$ هـ) = ٧٥° (بالتناظر والتوازي)

تدرّب (٢) :



س ص ع مثلّث فيه :

م منتصف $\overline{س ص}$ ، ن منتصف $\overline{س ع}$ ،

ق (س $\hat{ن}$ م) = ٥٠° ، م ن = ٧ سم .

أوجِد بالبرهان : (١) ص ع (٢) ق ($\hat{ع}$) .

المعطَيات : ....

....

المطلوب : ....

البرهان : ....

....

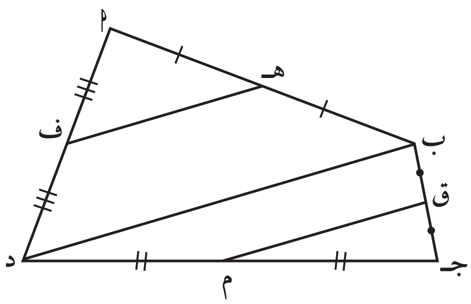
....

....

....

....

تدرّب (٣) :



في الشكل الرباعي أ ب جـ د :

إذا كان هـ ، ف ، م ، ق منتصفات الأضلاع

ب أ ، أ د ، د جـ ، جـ ب على الترتيب .

أثبِت أنّ : هـ ف // ق م

المعطَيات : ....

....

المطلوب : ....

البرهان : في المثلّث أ ب د :

∵ هـ منتصف أ ب ، ف منتصف أ د

∴ هـ ف // ب د (١)

....

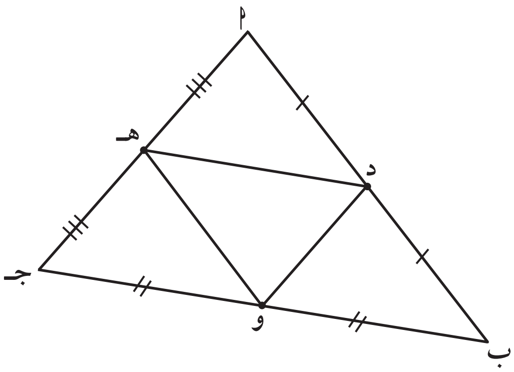
....

....

....

....

تدرّب (٤) :



أ ب جـ مثلّث فيه :

أ ب = ١٢ سم ، ب جـ = ١٤ سم ،

أ جـ = ١١ سم ، د ، هـ ، و منتصفات

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ على الترتيب .

أوجِد بالبرهان محيط المثلّث د و هـ .

المعطَيات : ....

....

المطلوب : ....

البرهان : في المثلّث أ ب جـ :

∵ د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ د و = $\frac{1}{2}$ أ جـ = $\frac{1}{2}$ ٥ سم

....

....

....

....

....

....

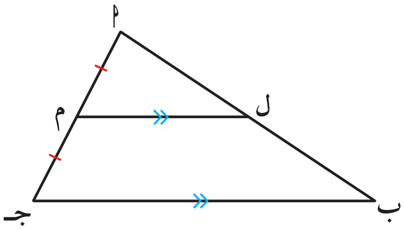
....

فكِّر وناقِش

في تدرّب (٤) ، ما العلاقة بين محيط المثلّث د و هـ ، ومحيط المثلّث أ ب جـ ؟

نظرية :

إذا رُسِم مستقيم من منتصف أحد أضلاع مثلّث موازِيًا ضلعًا آخر فيه ، فإنّه ينصّف الضلع الثالث .

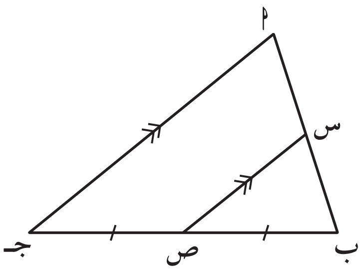


في المثلّث ٲ ب جـ :

∵ م منتصف $\overline{\text{ٲ جـ}}$ ، $\overline{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ل منتصف $\overline{\text{ٲ ب}}$

تدرّب (٥) :



ٲ ب جـ مثلّث فيه : ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

$\overline{\text{ص س}}$ // $\overline{\text{جـ ٲ}}$ ، ٲ س = ٦ سم .

أوجِد بالبرهان ب س .

المعطَيات : ....

....

المطلوب : ....

البرهان : في المثلّث ٲ ب جـ :

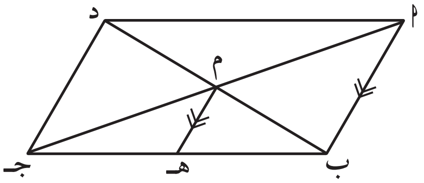
∵ ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ص س}}$ // ....

∴ س منتصف ....

∴ ب س = ٲ س = ... سم

مثال (٢) :

ﺍ ب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطريه في م ،
رسم م هـ // ﺍ ب ،
إذا كان م هـ ∩ ب جـ = { هـ } ،
فأثبت أنّ : م هـ = $\frac{١}{٢}$ ﺍ ب .



تذكَّرْ أنّ :
قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كلّ منهما الآخر.

الحلّ :

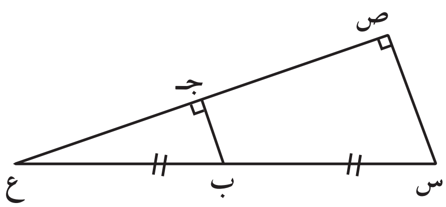
المعطَيات : ﺍ ب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطريه في م ،
م هـ // ﺍ ب ، م هـ ∩ ب جـ = { هـ }

المطلوب : أثبِت أنّ م هـ = $\frac{١}{٢}$ ﺍ ب

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع ﺍ ب جـ د
∴ م منتصف ﺍ جـ (١)
في المثلّث ﺍ ب جـ :
∵ م هـ // ﺍ ب
∴ هـ منتصف ب جـ (٢)
من (١) ، (٢)
∴ م هـ = $\frac{١}{٢}$ ﺍ ب

تدرّب (٦) :

س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ،
ب منتصف س ع ، ب جـ ⊥ ص ع .
أثبِت أنّ : ص جـ = ع جـ .



المعطَيات : ....

....

المطلوب : ....

البرهان : ....

....

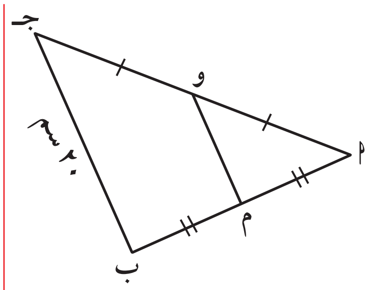
....

....

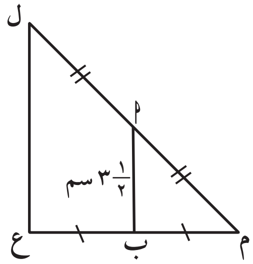
....

تمـــرَّنْ :

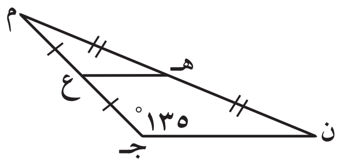
١ في كلّ من المثلّثات التالية أكمِل (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



م و = ...



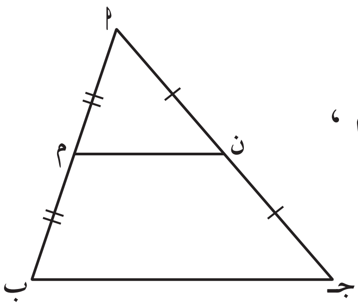
ل ع = ...



ق (هـ $\hat{ع}$ م) = ...

---

٢ أ ب جـ مثلّث فيه :



م منتصف $\overline{أ ب}$ ، ن منتصف $\overline{أ جـ}$ ، أ ب = ١٠ سم ،

أ جـ = ١٣ سم ، ب جـ = ١١ سم .

أوجِد بالبرهان : **(١)** طول $\overline{ن م}$.

(٢) محيط Δ أ ن م .

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

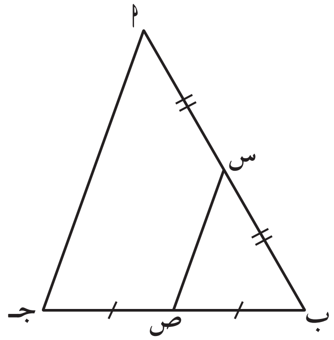
....

٣ أ ب جـ مثلّث فيه :

س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

ق ($\hat{\text{ب}}$) = ٦٠° ، ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٥٠° .

أوجِد ق (س $\hat{\text{ص}}$ ب) .

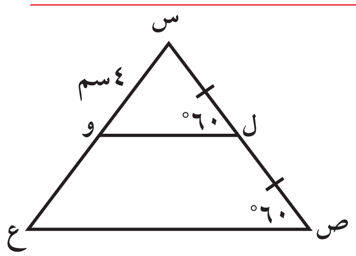


---

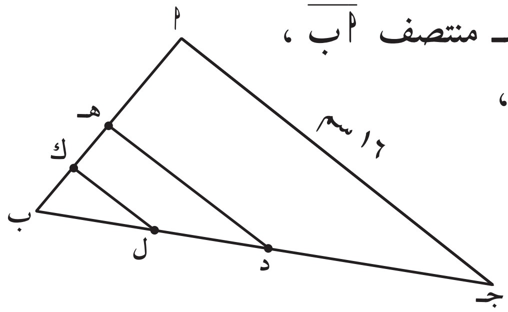
٤ س ص ع مثلّث فيه : ل منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ،

ق ($\hat{\text{ص}}$) = ق (س $\hat{\text{ل}}$ و) = ٦٠° ، س و = ٤سم .

أوجِد طول $\overline{\text{س ع}}$.

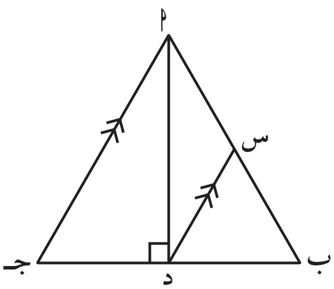


٥ أ ب جـ مثلّث فيه : أ جـ = ١٦ سم ، هـ منتصف أ ب ،
د منتصف جـ ب ، ك منتصف ب هـ ،
ك ل // هـ د . أوجِد طول ك ل .

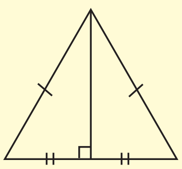


---

٦ عند تصميم أحد الجسور ، قام المهندس
برسم المثلّث في الشكل المقابل :
حيث أ ب = أ جـ = ٨ سم ، أ د ⊥ ب جـ ،
رسم د س // جـ أ ، س ∈ أ ب .
أوجِد طول س د .



تذكَّرْ أنّ :
في المثلّث المتطابق الضلعين العمود المرسوم من رأس المثلّث على قاعدته ينصّفها .



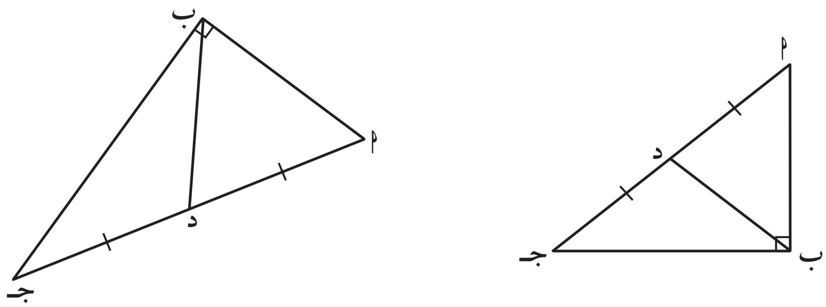
٨-٢ القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر

The Segment Joining the Vertex of Right Angle to the Midpoint of the Hypotenuse

سوف تتعلّم : توظيف القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة في المثلّث القائم الزاوية إلى منتصف الوتر لحلّ تمارين هندسية .

نشاط (١) :

في الأشكال التالية : أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، د منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$.



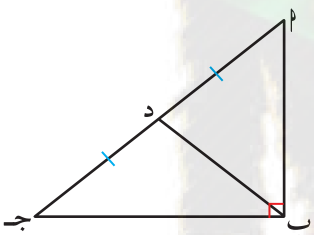
١ باستخدام الأدوات الهندسية ، أكمِل ما يلي :

طول $\overline{\text{ب د}}$ = ...	طول $\overline{\text{ب د}}$ = ...
طول $\overline{\text{أ جـ}}$ = ...	طول $\overline{\text{أ جـ}}$ = ...

٢ ماذا تلاحظ ؟ ....

نظرية :

طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر في المثلّث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر .



في المثلّث أ ب جـ :

∵ ق ($\hat{\text{ب}}$) = ٩٠° ، د منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ ب د = $\frac{1}{2}$ أ جـ

العبارات والمفردات:

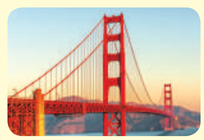
رأس
Vertex

زاوية قائمة
Right Angle

وتر المثلّث
Hypotenuse

معلومات مفيدة :

يستخدم المهندسون نظرية القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة في مثلّث إلى منتصف الوتر لمعرفة طول الدعائم الحديدية المستخدَمة في الجسور .

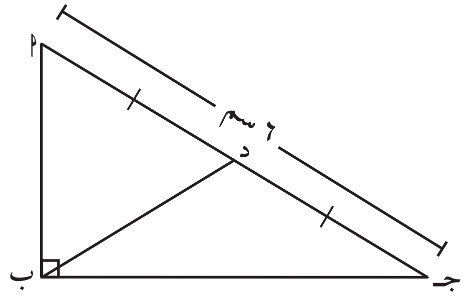


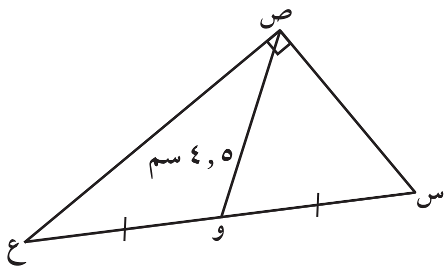
اللوازم :

– أدوات هندسية .

تدرّب (١) :

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



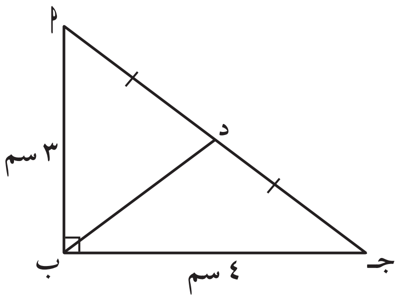


طول $\overline{\text{ب د}}$ = ...

س ع = ...

مثال (١) :

أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٣ سم ،
ب جـ = ٤ سم ، د منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$.
أوجِد بالبرهان طول $\overline{\text{ب د}}$.



الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٣ سم ،
ب جـ = ٤ سم ، د منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$.

المطلوب : إيجاد طول $\overline{\text{ب د}}$.

البرهان : ∵ أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب

∴ (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} (نظرية فيثاغورث)

= (٣)^{٢} + (٤)^{٢}

= ٩ + ١٦ = ٢٥

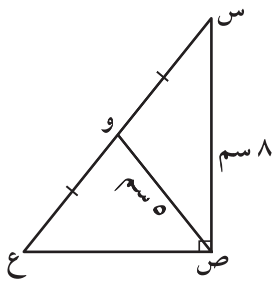
∴ أ جـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

∵ د منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٥ = ٢$\frac{١}{٢}$ سم

تدرّب (٢) :



س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ،
ص و = ٥ سم ، س ص = ٨ سم .

أوجد بالبرهان : (١) س ع (٢) ص ع .

المعطَيات : س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ،
و منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ، ص و = ٥ سم ، س ص = ٨ سم .

المطلوب : إيجاد (١) س ع (٢) ص ع

البرهان : ∵ س ص ع مثلّث قائم الزاوية في .... ، و منتصف ....
∴ ص و = $\frac{١}{٢}$ ....

....

....

....

....

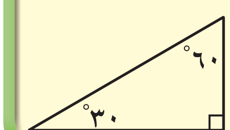
....

....

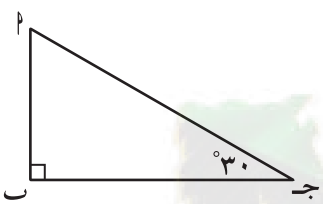
فكِّر وناقِش

إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة من رأس مثلّث إلى منتصف الضلع المقابل تساوي نصف طول هذا الضلع . فهل المثلّث قائم الزاوية ؟ ولماذا ؟

معلومة مفيدة :
المثلّث التالي : يُسمّى مثلّثًا ثلاثينيًّا ستّينيًّا .



نشاط (٢) :



ا ب جـ مثلّث ثلاثيني ستّيني ، ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٣٠° ،

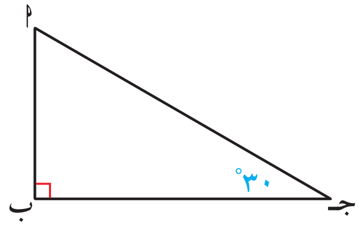
أكمِل ما يلي باستخدام الأدوات الهندسية :

١ طول $\overline{\text{ا ب}}$ = ...

٢ طول $\overline{\text{ا جـ}}$ = ...

٣ ماذا تلاحظ ؟ ....

نتيجة (١) : في المثلّث الثلاثيني الستّيني يكون طول الضلع المقابِل للزاوية التي قياسها ٣٠° مساوِيًا نصف طول الوتر .

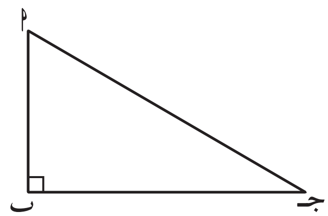


∵ ؀ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، ق ($\hat{جـ}$) = ٣٠°

∴ ؀ب = $\frac{١}{٢}$ ؀جـ

وعكس ذلك أيضًا صحيح :

نتيجة (٢) : في المثلّث القائم الزاوية إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة مساوِيًا نصف طول الوتر ، فإنّ قياس الزاوية المقابِلة لهذا الضلع ٣٠° ويُسمّى المثلّث ثلاثينيًّا ستّينيًّا .



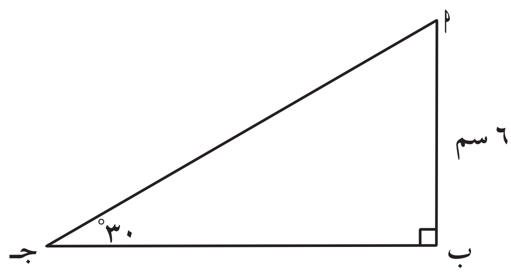
∵ ؀ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، ؀ب = $\frac{١}{٢}$ ؀جـ

∴ ق ($\hat{جـ}$) = ٣٠°

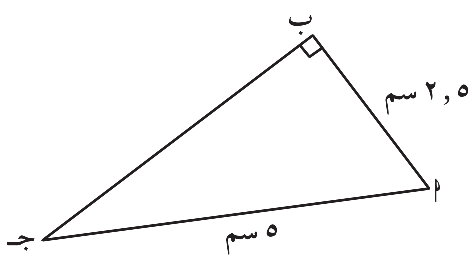
∴ المثلّث ؀ب جـ ثلاثيني ستّيني

تدرّب (٣) :

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

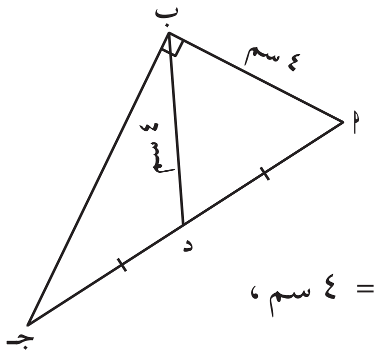


؀جـ = ...



ق ($\hat{جـ}$) = ...

مثال (٢) :



في الشكل المقابِل :

أوجد بالبرهان : (١) ق ($\hat{\text{جـ}}$) (٢) ق ($\hat{\text{أ}}$) .

الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٤ سم ،
ب د = ٤ سم ، د منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$.

المطلوب : إيجاد (١) ق ($\hat{\text{جـ}}$) (٢) ق ($\hat{\text{أ}}$) .

البرهان : ∵ المثلّث أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، د منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ ب د = $\frac{1}{2}$ أ جـ

∴ أ جـ = ٢ × ٤ = ٨ سم

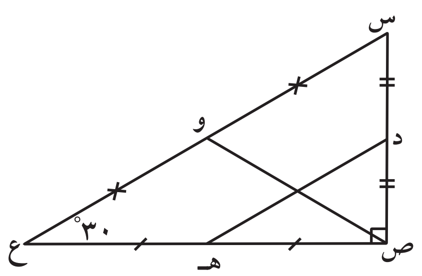
∵ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ

∴ ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٣٠°

∴ أ ب جـ مثلّث ثلاثيني ستّيني

∴ ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٦٠°

تدرّب (٤) :



س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ،
ص و = ٦ سم ، ق ($\hat{\text{ع}}$) = ٣٠° ،
د منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ ،
و منتصف $\overline{\text{س ع}}$.

أوجد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

(١) طول $\overline{\text{س ع}}$ (٢) طول $\overline{\text{س ص}}$ (٣) طول $\overline{\text{د هـ}}$

المعطَيات : ....
....

المطلوب : ....

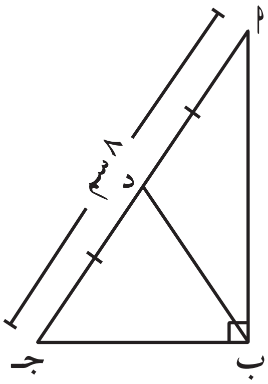
البرهان : ....

تمـــرَّنْ :

١ ﺃ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ،

د منتصف $\overline{\text{ﺃ جـ}}$ ، ﺃ جـ = ٨ سم .

أوجد بالبرهان طول $\overline{\text{ب د}}$.

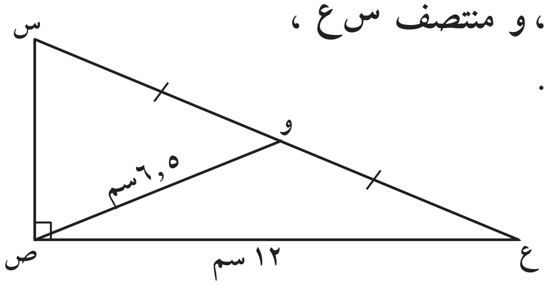


٢ س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ،
ص و = ٦,٥ سم ، ع ص = ١٢ سم .

أوجد بالبرهان كلًّا مما يلي :

(١) س ع

(٢) س ص



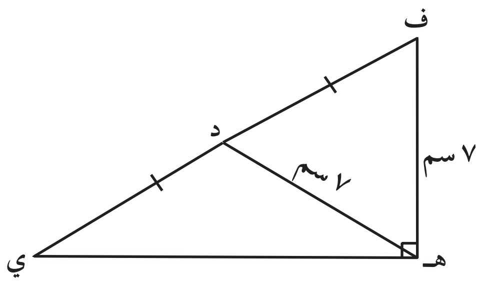
-----

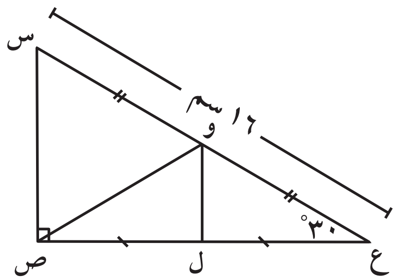
٣ في الشكل المقابِل :

أوجد بالبرهان كلًّا مما يلي :

(١) ق ($\hat{\text{ي}}$)

(٢) ق ($\hat{\text{ف}}$) .





٤ صمّم مهندس جسرًا للمشاة ، فقام برسم المثلّث في الشكل المقابِل كدعامة للجسر حيث

س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ،

س ع = ١٦ سم ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ،

ل منتصف $\overline{\text{ع ص}}$ ، ق ($\hat{\text{ع}}$) = ٣٠° .

أوجد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

(١) ص و

(٢) س ص

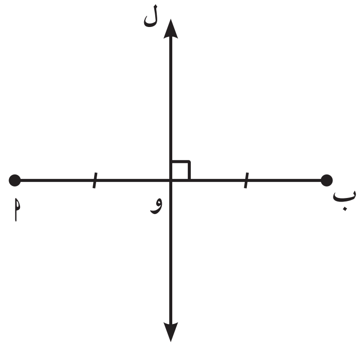
(٣) و ل

٨-٣ محاور أضلاع المثلّث
Perpendicular Bisectors of a Triangle

العبارات والمفردات :
محور القطعة المستقيمة
Perpendicular Bisector

سوف تتعلّم : توظيف محاور أضلاع المثلّث لحلّ تمارين هندسية .

محور القطعة المستقيمة هو العمود المنصِّف لها .



∵ $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp \overline{\text{أب}}$ ، أو = ب و

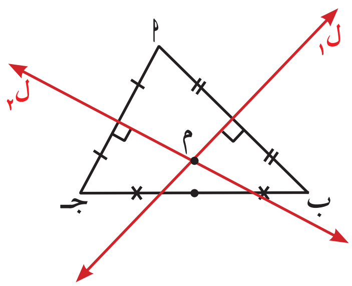
∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ محور $\overline{\text{أب}}$

نشاط :

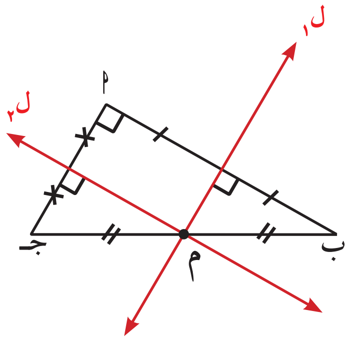
اللوازم :
– أدوات هندسية .

في المثلّثات التالية :

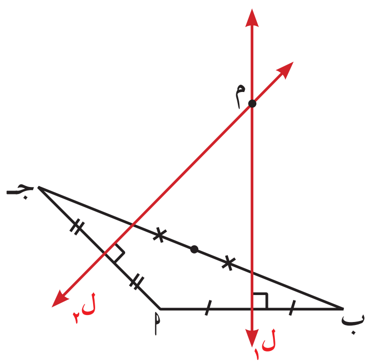
$\overleftrightarrow{\text{ل}}_1$ محور .... ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}_2$ محور .... ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1 \cap \overleftrightarrow{\text{ل}}_2$ = ...



مثلّث حادّ الزوايا



مثلّث قائم الزاوية



مثلّث منفرج الزاوية

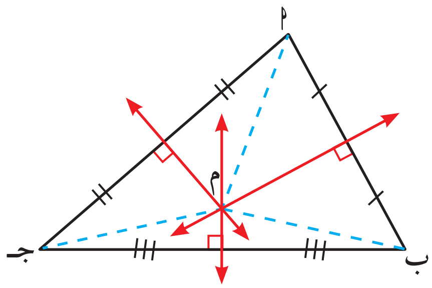
١ أُرسم $\overleftrightarrow{\text{ل}}_3$ محور $\overline{\text{ب جـ}}$ في المثلّثات السابقة [باستخدام الأدوات الهندسية].

٢ ماذا تلاحظ ؟ ....

نظرية :
محاور أضلاع المثلّث تتقاطع في نقطة واحدة .

من النشاط السابق نلاحظ أنّ :

- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث الحادّ الزوايا تقع داخله .
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث القائم الزاوية تقع في منتصف الوتر .
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث المنفرج الزاوية تقع خارجه .



لتكن م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ا ب جـ ،
باستخدام الأدوات الهندسية ، أوجِد كلًّا ممّا يلي :

١ م ا = ...
٢ م ب = ...
٣ م جـ = ...

ماذا تلاحظ ؟ ....

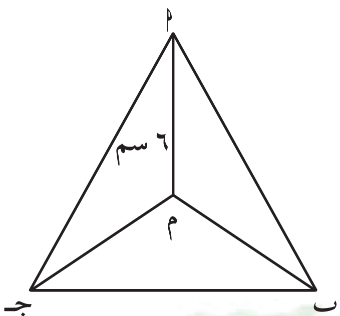
نتيجة : نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث تقع على أبعاد متساوية من رؤوسه .

∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ا ب جـ

∴ م ا = م ب = م جـ

بالرجوع إلى النشاط السابق ، تحقّق من صحّة النتيجة لكلّ من المثلّث القائم الزاوية و المثلّث المنفرج الزاوية .

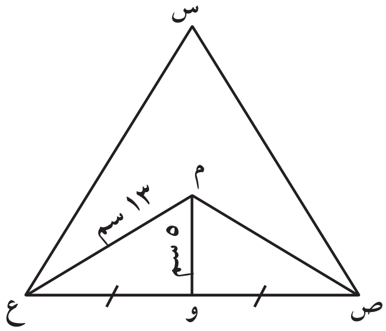
تدرّب (١) :



المثلّث ا ب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،
م ا = ٦ سم .
أكمل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :
م ب = ...
م جـ = ...

فكِّر وناقِش

لتكن م نقطة تقع على أبعاد متساوية من رؤوس مثلّث. فهل م هي نقطة تقاطع محاور أضلاعه ؟ فسِّر إجابتك.



مثال :

س ص ع مثلّث فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،

و منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ ، م ع = ١٣ سم ، م و = ٥ سم .

أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

(١) م ص (٢) ص و (٣) ص ع

الحل :

المعطيات : س ص ع مثلّث فيه م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،

و منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ ، م ع = ١٣ سم ، م و = ٥ سم .

المطلوب : إيجاد كلّ من : (١) م ص (٢) ص و (٣) ص ع

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث س ص ع

∴ م ص = م ع = ١٣ سم

∵ و منتصف $\overline{\text{ص ع}}$

∴ $\overline{\text{م و}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ع}}$

∴ Δ م ص و قائم الزاوية في و

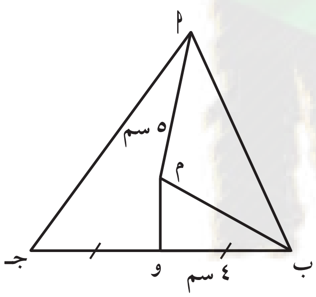
∴ (ص و)^{٢} = (م ص)^{٢} – (م و)^{٢} (نظرية فيثاغورث)

ص و = $\sqrt{(١٣)^{٢} - (٥)^{٢}}$

= $\sqrt{١٦٩ - ٢٥}$ = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم

∴ ص ع = ٢ × ص و

= ٢ × ١٢ = ٢٤ سم



تدرّب (٢) :

Δ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،

أ م = ٥ سم ، ب و = ٤ سم ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي : (١) م ب (٢) م و .

المعطَيات : ∆ ؟ب جـ فيه م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،

؟م = ٥ سم ، ب و = ٤ سم ، و منتصف ب جـ .

المطلوب : إيجاد كلّ ممّا يلي : (١) م ب (٢) م و

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ؟ب جـ

∴ م ب = ... = ... سم

∵ و منتصف ب جـ ∴ .... ⊥ ....

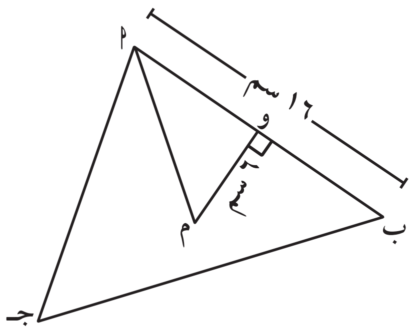
∵ ∆ م ب و قائم الزاوية في و

∴ $(\text{م و})^{2} = (\text{..............})^{2} - (\text{..............})^{2}$ (نظرية فيثاغورث)

= ....

∴ م و = ... = ... سم

تدرّب (٣) :



؟ب جـ مثلّث فيه :

م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ؟ب جـ ،

م و ⊥ ؟ب ، ؟ب = ١٦ سم ، م و = ٦ سم .

أوجِد بالبرهان كلًّا مما يلي : (١) م ب (٢) محيط ∆ ؟م ب .

المعطيات : ....

....

المطلوب : ....

البرهان : ....

....

....

....

....

....

....

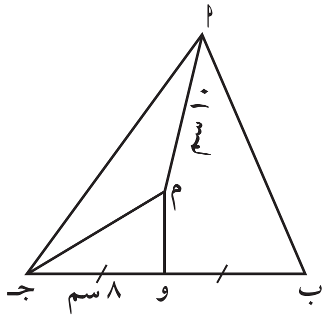
....

....

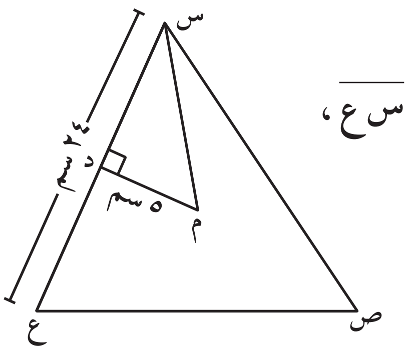
....

تمــرَّنْ :

١ ∆ ﺍ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،
ﺍ م = ١٠ سم ، و جـ = ٨ سم ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.
أوجد بالبرهان : (١) طول $\overline{\text{م جـ}}$ (٢) طول $\overline{\text{م و}}$



٢ س ص ع مثلّث فيه :
م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث س ص ع ، $\overline{\text{م د}}$ ⊥ $\overline{\text{س ع}}$ ،
س ع = ٢٤ سم ، م د = ٥ سم . أوجِد طول $\overline{\text{م ص}}$.

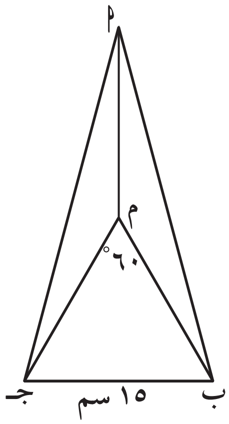


٣ أ ب جـ مثلّث فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،

إذا كان ب جـ = ١٥ سم ، ق (ب م̂ جـ) = ٦٠° .

(١) أثبِت أن المثلّث ب م جـ متطابق الأضلاع .

(٢) أوجِد م أ .



٨-٤ منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث
Interior Angles Bisectors of a Triangle

سوف تتعلّم : توظيف منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث لحل تمارين هندسية .

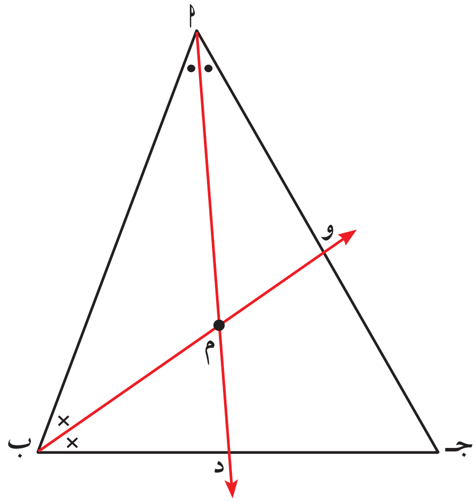
العبارات والمفردات :
منصِّفات الزوايا
Angle Bisectors

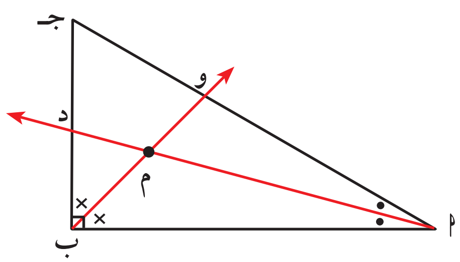
اللوازم :
– أدوات هندسية .

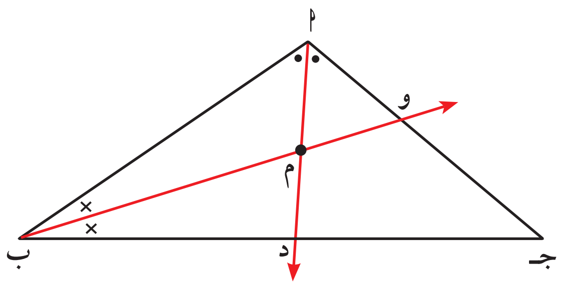
نشاط :

في المثلّثات التالية :

أد منصِّف الزاوية أ ، ب و منصِّف الزاوية ب ، أد ∩ ب و = { م }

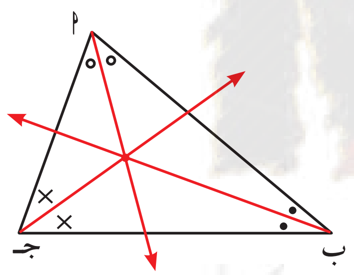






١ أُرسم منصِّف الزاوية جـ .

٢ ماذا تلاحظ ؟ ....



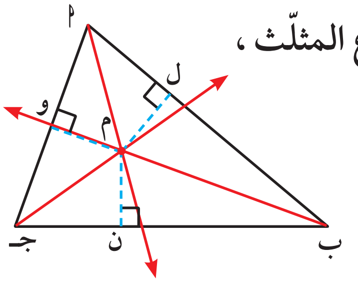
نظرية :
منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث تتقاطع في نقطة واحدة .

في الشكل المقابِل :

إذا كانت م هي نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث ا ب جـ ،

م ل ، م ن ، م و هي الأعمدة المرسومة من م على أضلاع المثلّث ،

فأوجِد باستخدام الأدوات الهندسية كلًّا ممّا يلي :



معلومة مفيدة :
بعد نقطة عن مستقيم هو طول العمود المرسوم من هذه النقطة على المستقيم.

١ طول م ل = ...

٢ طول م ن = ...

٣ طول م و = ...

ماذا تلاحظ ؟ ....

نتيجة : نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث على أبعاد متساوية من أضلاعه .

∵ م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث

∴ م ل = م ن = م و

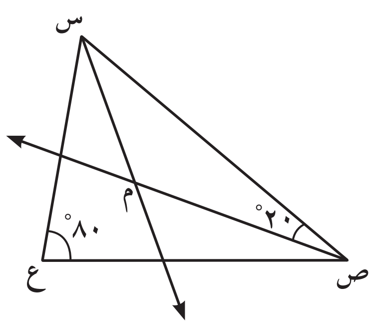
بالرجوع إلى النشاط السابق ، تحقَّقْ من صحّة النتيجة في كلّ من المثلّث القائم الزاوية والمثلّث المنفرج الزاوية .

تدرّب (١) :

في الشكل المقابِل :

م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث س ص ع

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



ق (م صَ ع) = ... ، ق (س صَ ع) = ... ،

ق (ص سَ ع) = ... ، ق (ص سَ م) = ...

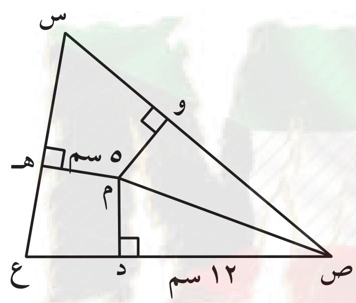
تدرّب (٢) :

المثلث س ص ع فيه :

م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،

م هـ = ٥ سم ، ص د = ١٢ سم .

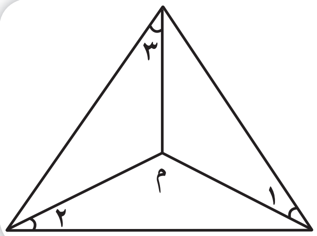
أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



م د = ...

م ص = ...

فكِّر وناقِش

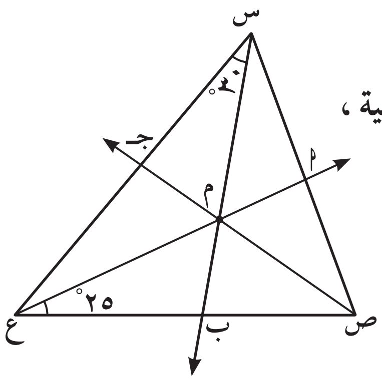


لتكن م نقطة تقاطع منصِّفات زوايا المثلَّث الداخلية .

فما مجموع قياسات الزوايا التالية :

ق ($\hat{١}$) ، ق ($\hat{٢}$) ، ق ($\hat{٣}$) ؟

مثال (١) :



Δ س ص ع فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،

إذا كان ق (م $\hat{ع}$ ص) = °٢٥ ، ق (م $\hat{س}$ ع) = °٣٠ ،

فأوجد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

(١) ق (س $\hat{ص}$ ع)　　(٢) ق (م $\hat{ص}$ ع)

الحلّ :

المعطيات : م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلَّث س ص ع ،

ق (م $\hat{ع}$ ص) = °٢٥ ، ق (م $\hat{س}$ ع) = °٣٠

المطلوب : إيجاد (١) ق (س $\hat{ص}$ ع)　　(٢) ق (م $\hat{ص}$ ع)

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلَّث س ص ع

∴ $\overleftarrow{\text{ع م}}$ منصِّف $\hat{ع}$

∴ ق (س $\hat{ع}$ ص) = ٢ × °٢٥ = °٥٠

وبالمثل $\overleftarrow{\text{س م}}$ منصِّف $\hat{س}$

∴ ق (ص $\hat{س}$ ع) = ٢ × °٣٠ = °٦٠

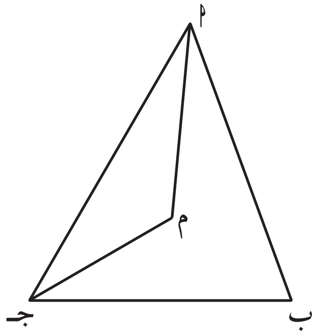
∵ مجموع قياسات زوايا المثلَّث الداخلية يساوي °١٨٠

∴ ق (س $\hat{ص}$ ع) = °١٨٠ − (°٥٠ + °٦٠) = °٧٠

∵ $\overleftarrow{\text{ص جـ}}$ منصِّف $\hat{ص}$

∴ ق (م $\hat{ص}$ ع) = °٧٠ ÷ ٢ = °٣٥

تدرّب (٣) :



Δ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،

إذا كان ق (أ بَ^ جـ) = ٧٠° ، ق (م جـ^ ب) = ٣٠° .

فأوجِد بالبرهان ق (م أ^ جـ) .

المعطَيات : ....

....

المطلوب : ....

البرهان : ....

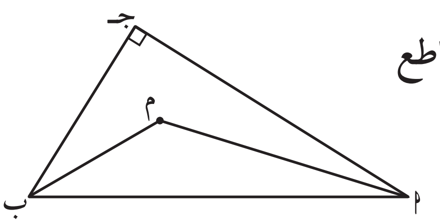
....

....

....

....

مثال (٢) :



Δ أ ب جـ قائم الزاوية في جـ ، إذا كانت م هي نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ، فأوجِد بالبرهان ق (أ م^ ب) .

الحلّ :

المعطَيات : Δ أ ب جـ قائم الزاوية في جـ ،
م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية .

المطلوب : إيجاد ق (أ م^ ب)

البرهان : في Δ أ ب جـ :

$\because$ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلية يساوي ١٨٠°

$\therefore$ ق (جـ أ^ ب) + ق (جـ ب^ أ) = ١٨٠° − ٩٠° = ٩٠°

$\because$ م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث أ ب جـ

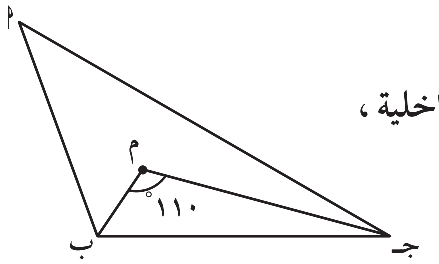
$\therefore$ ق (م أ^ ب) + ق (م ب^ أ) = $\frac{1}{2}$ [ق (جـ أ^ ب) + ق (جـ ب^ أ)]

= $\frac{1}{2}$ × ٩٠° = ٤٥°

$\therefore$ في Δ أ ب م :

ق (أ م^ ب) = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

تدرّب (٤) :



Δ ا ب جـ فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،

إذا كان ق (جـ م^ ب) = ١١٠° .

فأوجِد بالبرهان ق (جـ ا^ ب) .

المعطيات : ....

....

المطلوب : ....

البرهان : ....

....

....

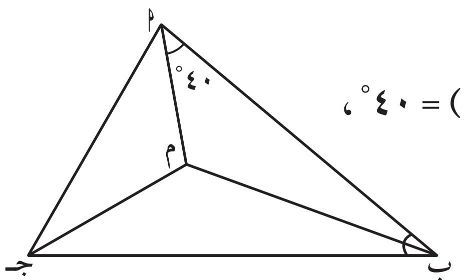
....

....

....

....

تمــرَّنْ :



١ Δ ا ب جـ فيه : ق (ا ب^ جـ) = ق (ب ا^ م) = ٤٠° ،

م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية .

أوجِد بالبرهان ق (ا جـ^ م) .

....

....

....

....

....

....

....

....

....

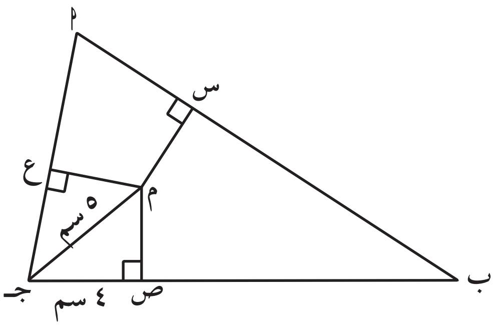
٢ المثلّث اب جـ فيه :

م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،

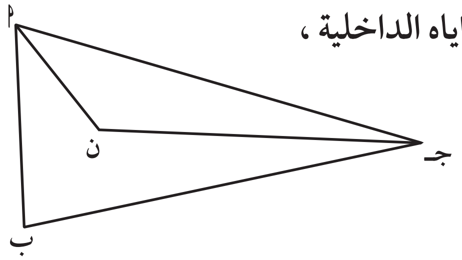
م جـ = ٥ سم ، جـ ص = ٤ سم

أوجِد بالبرهان :

(١) طول م ص (٢) طول س م



٣ Δ أ ب جـ فيه : ن نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،

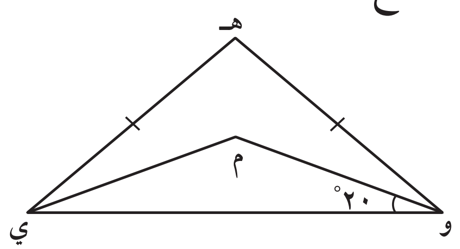


إذا كان :

ق (ن جـ أ) + ق (ن أ جـ) = ٥٠° ،

فأوجِد بالبرهان ق (ب) .

٤ Δ هـ و ي متطابق الضلعين فيه : م هي نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،



إذا كان ق (م و ي) = ٢٠° .

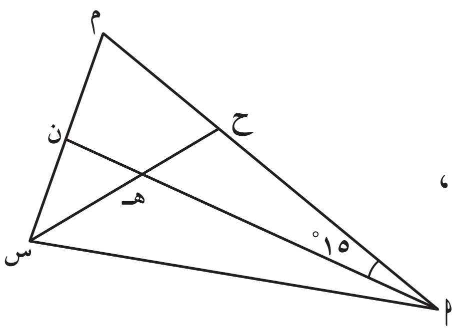
فأوجِد بالبرهان ق (هـ) .

٥ م ا س مثلّث فيه : ق ($\hat{\text{م}}$) = ٧٠° ،

ق (م $\hat{\text{ا}}$ ن) = ١٥° ، ق (ا $\hat{\text{س}}$ ح) = ٤٠° ،

إذا كان $\overleftarrow{\text{سح}}$ منصِّف $\hat{\text{س}}$ ، $\overline{\text{ان}}$ ∩ $\overline{\text{سح}}$ = { هـ } ،

فأثبت أنّ هـ نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث م ا س .

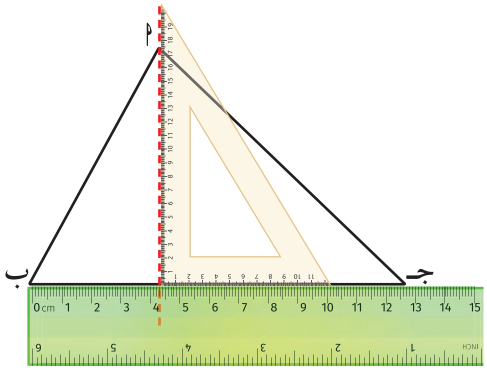


٨-٥ الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه
Altitudes from Vertices of a Triangle to its Sides

سوف تتعلّم : توظيف الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه لحل تمارين هندسيّة .

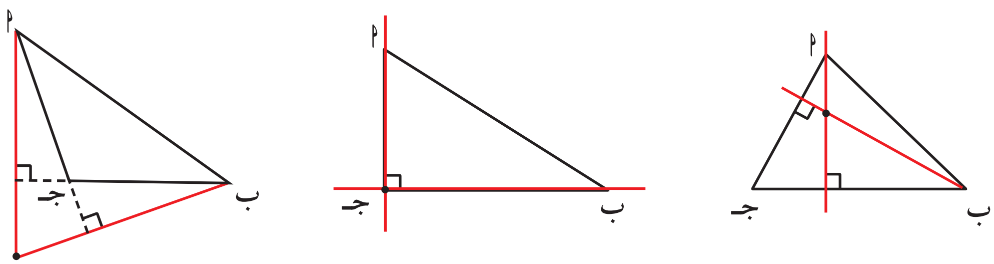
العبارات والمفردات :
الأعمدة
Altitudes
الارتفاعات
Heights

في المثلّث ﺍ ب جـ يمكن رسم العمود النازل من رأس المثلّث ﺍ على الضلع المقابِل له ب جـ باستخدام المثلّث القائم والمسطرة كما في الشكل .



نشاط :

في المثلّثات التالية تمّ رسم العمودين من الرأسين ﺍ ، ب على الضلعين المقابِلين لهما (أو امتدادهما) كما في الشكل .
اُرسم العمود الثالث من الرأس جـ .



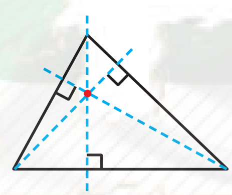
ماذا تلاحظ ؟ ....

معلومات مفيدة :
يستخدم مهندسو التنظيم المدني نظرية الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه لمعرفة الطرق المختصَرة بين الشوارع في المدن .

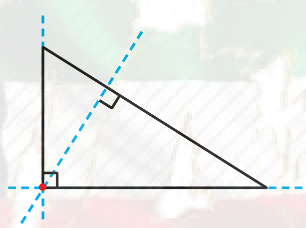
نظرية :
الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة .

اللوازم :
– أدوات هندسية .

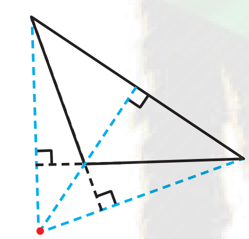
لاحِظ أنّ :



نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث الحادّ الزوايا على أضلاعه تقع داخل المثلّث .



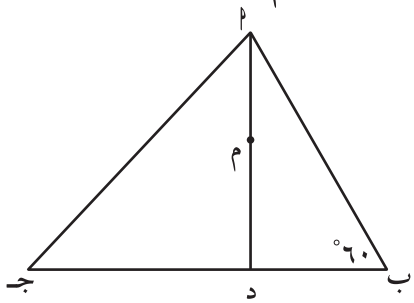
نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث القائم الزاوية على أضلاعه هي رأس الزاوية القائمة .



نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث المنفرج الزاوية على أضلاعه تقع خارج المثلّث .

تدرّب (١) :

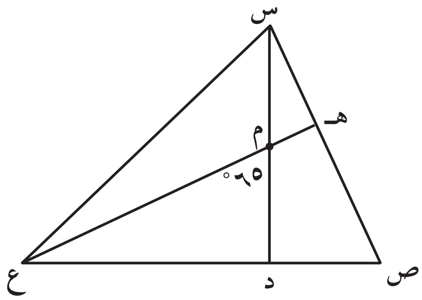
أ في المثلث أ ب جـ : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، م ∈ $\overline{\text{أ د}}$ ، أكمل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



ق (أ $\hat{\text{د}}$ ب) = ...

ق (د $\hat{\text{أ}}$ ب) = ...

ب في المثلث س ص ع : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، $\overline{\text{ع هـ}}$ ∩ $\overline{\text{س د}}$ = { م } . أكمل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



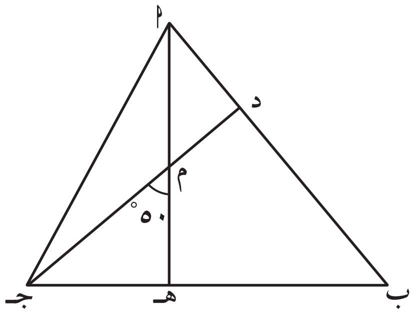
ق (م $\hat{\text{ع}}$ د) = ...

ق (س $\hat{\text{ص}}$ ع) = ...

مثال :

أ ب جـ مثلّث فيه : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، ق (جـ $\hat{\text{م}}$ هـ) = ٥٠° ، إذا كان $\overline{\text{جـ د}}$ ∩ $\overline{\text{أ هـ}}$ = { م } .

فأوجِد بالبرهان ق ($\hat{\text{ب}}$) .



الحل :

المعطَيات : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ،

ق (جـ $\hat{\text{م}}$ هـ) = ٥٠°

المطلوب : إيجاد ق ($\hat{\text{ب}}$) .

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث أ ب جـ على أضلاعه

∴ Δ م هـ جـ قائم الزاوية في هـ

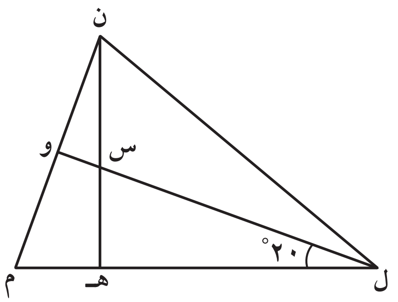
∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلية ١٨٠°

∴ ق (م $\hat{\text{جـ}}$ هـ) = ١٨٠° − (٥٠° + ٩٠°) = ٤٠°

في Δ جـ د ب القائم الزاوية في د

ق ($\hat{\text{ب}}$) = ١٨٠° − (٤٠° + ٩٠°) = ٥٠°

تدرّب (٢) :



ن ل م مثلّث فيه : س هي نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ،

$\overline{\text{ل و}} \cap \overline{\text{ن هـ}} = \{\text{س}\}$ ،

وكان ق (و $\hat{\text{ل}}$ م) = ٢٠° .

أوجِد بالبرهان كلًّا مما يلي: (١) ق (و $\hat{\text{م}}$ ل) (٢) ق (و $\hat{\text{س}}$ هـ) .

المعطيات : ....

....

المطلوب : ....

البرهان : ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

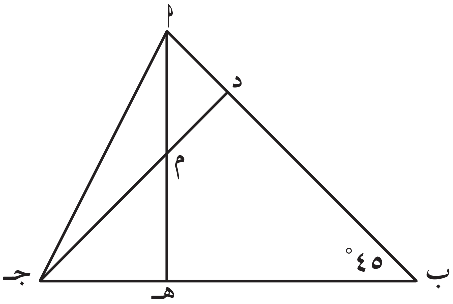
....

تمــرَّنْ :

١ Δ ٵ ب جـ فيه : ق ($\hat{ب}$) = ٤٥°،

م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ،

$\overline{ٵهـ} \cap \overline{جـد} = \{م\}$.



أوجد بالبرهان :

(١) ق ($\widehat{بٵهـ}$)   (٢) ق ($\widehat{دمهـ}$)

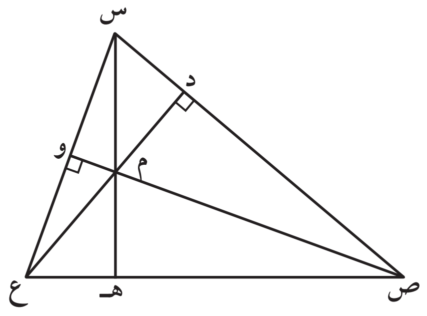
----

٢ Δ س ص ع فيه : ق (س $\hat{ع}$ ص) = ٧٠°،

$\overline{ع د} \perp \overline{س ص}$ ، $\overline{ص و} \perp \overline{س ع}$.

(١) أثبِت أنّ : $\overline{س هـ} \perp \overline{ص ع}$

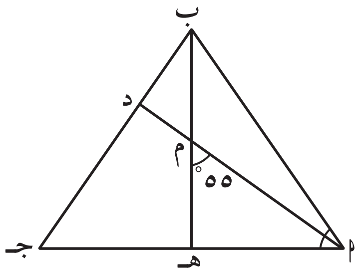
(٢) أوجِد بالبرهان ق (هـ $\hat{س}$ ع)



٣ Δ ﺃ ب جـ فيه :

م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ، $\overline{\text{ﺃ د}} \cap \overline{\text{ب هـ}}$ = { م } ،

ٯ (ب $\hat{\text{ﺃ}}$ جـ) = ٯ (ﺃ $\hat{\text{م}}$ هـ) = ٥٥° .



(١) أوجِد بالبرهان ٯ (ﺃ $\hat{\text{جـ}}$ ب)

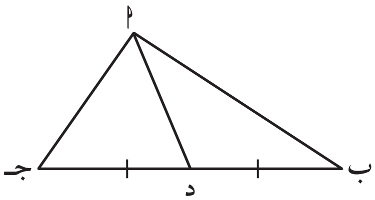
(٢) ما نوع المثلّث ﺃ ب جـ بالنسبة إلى أضلاعه ؟

٨-٦ القطع المتوسّطة للمثلّث
Medians of a Triangle

سوف تتعلّم : توظيف القطع المتوسّطة للمثلّث لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :
القطع المتوسطة للمثلث
Median of a Triangle

القطعة المستقيمة التي تصل أيّ رأس للمثلّث بمنتصف الضلع المقابِل له تسمى قطعة متوسّطة للمثلّث .



في Δ ٲ ب جـ :

$\because$ د منتصف ب جـ

$\therefore$ ٲ د قطعة متوسّطة للمثلّث ٲ ب جـ .

نشاط :

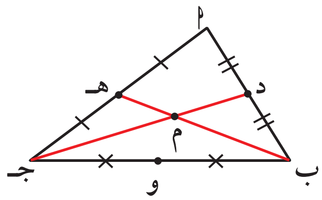
اللوازم :
– أدوات هندسية .

في المثلّثات التالية : ب هـ ، جـ د قطعتان متوسّطتان للمثلّث ٲ ب جـ .

أُرسم باستخدام الأدوات الهندسية القطعة المتوسّطة ٲ و .

ماذا تلاحظ ؟ ....

في كلّ من المثلّثات التالية : لتكن م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث ، أكمِل باستخدام المسطرة :

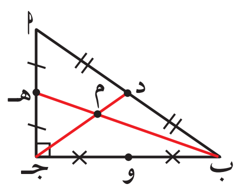


مثلّث حادّ الزوايا

جـ م = ... سم

د م = ... سم

(جـ م)/(د م) = ...

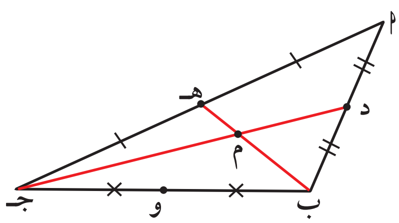


مثلّث قائم الزاوية

جـ م = ... سم

د م = ... سم

(جـ م)/(د م) = ... = ...



مثلّث منفرج الزاوية

جـ م = ... سم

د م = ... سم

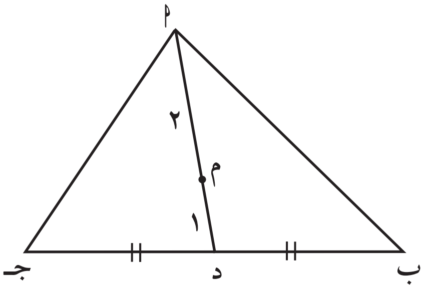
(جـ م)/(د م) = ... = ...

ماذا تلاحظ ؟ ....

تحقّقْ من صحّة هذه النسبة للقطع المتوسّطة الأخرى في المثلّث .

نظرية :

القطع المتوسّطة للمثلّث تتقاطع في نقطة واحدة تقسم كلّ منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس .



في Δ أ ب جـ :

$\overline{\text{أ د}}$ قطعة متوسّطة ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث .

أكمِل :

أ م = ... م د

م د = ... أ م

م د = ... أ د

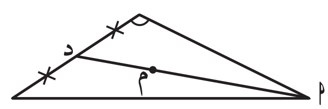
أ د = ... م د

أ م = ... أ د

أ د = ... أ م

تدرّب (١) :

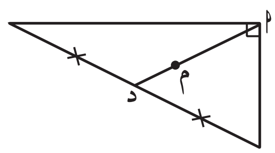
في كلّ من المثلّثات التالية : م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة ، أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



د م = ٣ سم

أ م = ... سم

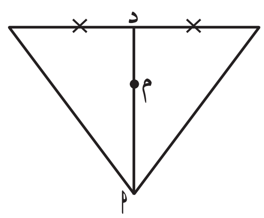
أ د = ... سم



أ م = ٤ سم

د م = ... سم

أ د = ... سم

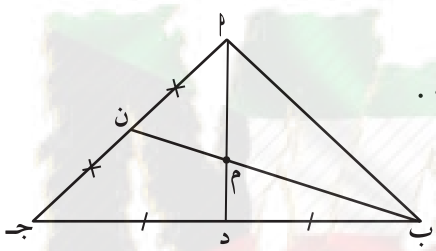


أ د = ١٨ سم

د م = ... سم

أ م = ... سم

تدرّب (٢) :



أ ب جـ مثلّث فيه : م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة .

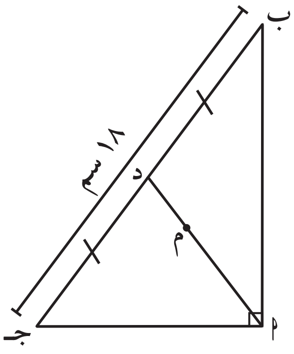
إذا كان ب م = ١٠ سم فإنّ :

ن م = ... ، ب ن = ...

إذا كان أ د = ١٢ سم فإنّ :

أ م = ... ، د م = ...

تدرّب (٣) :



ﺃ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ﺃ ، طول $\overline{\text{ب جـ}}$ = ١٨ سم ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث ﺃ ب جـ .

أوجد بالبرهان كلًّا من : (١) ﺃ د (٢) ﺃ م .

المعطيات : ....

....

....

المطلوب : ....

البرهان : ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

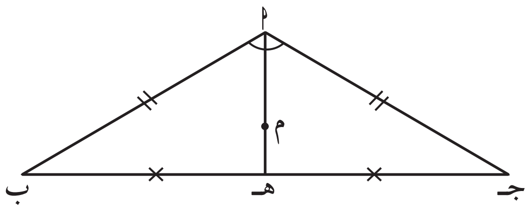
....

....

....

فكِّر وناقِش

ما نوع المثلّث الذي تتطابق فيه القطع المتوسّطة الثلاث ؟



مثال :

أ ب جـ مثلّث فيه :

أ ب = أ جـ = ٢٤ سم ،

ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٣٠° ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث .

أوجد بالبرهان كلًّا من : (١) أ هـ (٢) م هـ (٣) م أ .

الحلّ :

المعطَيات : أ ب = أ جـ = ٢٤ سم ، ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٣٠° ،
م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة في المثلّث

المطلوب : إيجاد كلٍّ من : (١) أ هـ (٢) م هـ (٣) م أ

البرهان : في Δ أ ب جـ :

$\because$ أ ب = أ جـ ، هـ منتصف $\overline{\text{جـ ب}}$

$\therefore$ $\overline{\text{أ هـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{ب جـ}}$

$\because$ ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٣٠°

$\therefore$ Δ أ جـ هـ ثلاثيني ستّيني

$\therefore$ أ هـ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٤ = ١٢ سم

$\because$ م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث أ ب جـ

م هـ = $\frac{١}{٣}$ أ هـ

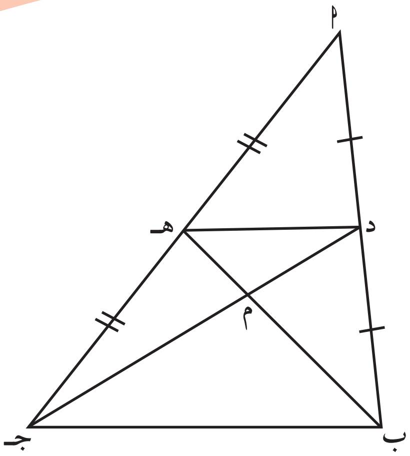
= $\frac{١}{٣}$ × ١٢ = ٤ سم

م أ = ٢ م هـ

= ٢ × ٤ = ٨ سم

تدرّب (٤) :

في الشكل المقابل :



د منتصف ﺃب ، هـ منتصف ﺃجـ ،

دجـ ∩ ب هـ = {م} ،

ب جـ = ٨ سم ، ب م = ٤ سم ، د جـ = ٩ سم .

أوجد بالبرهان محيط Δ د م هـ .

....

....

....

....

....

....

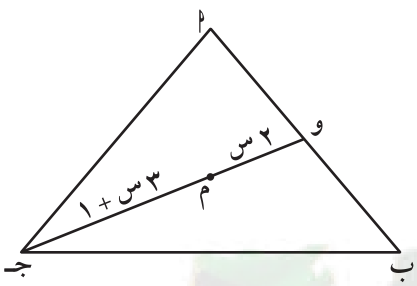
....

....

....

....

تدرّب (٥) :



المثلّث ﺃب جـ فيه : جـو قطعة متوسطة ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلّث ،

إذا كان م و = ٢ س ، جـ م = ٣ س + ١ .

أوجد بالبرهان قيمة س.

المعطَيات : ....

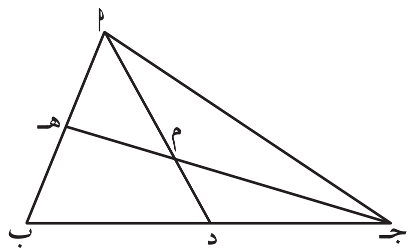
....

المطلوب : ....

البرهان :

تمـــرَّنْ :

١ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ د}} \cap \overline{\text{جـ هـ}} = \{\text{م}\}$ ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث أ ب جـ ،

إذا كان أ م = ١٨ سم ، جـ هـ = ٣٠ سم .

فأوجد بالبرهان :

(١) م هـ (٢) جـ م (٣) أ د

٢ Δ س ص ع قائم الزاوية في ص فيه :

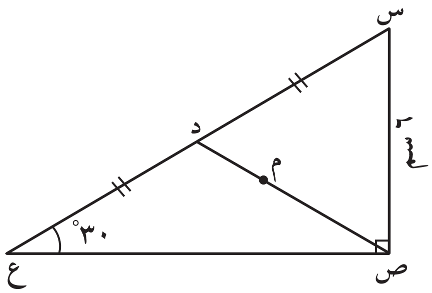
ق ($\hat{ع}$) = ٣٠°،

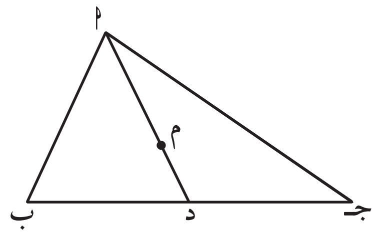
م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلّث ،

س ص = ٦ سم .

أوجد كلًّا ممّا يلي :

(١) س ع (٢) ص د (٣) ص م





❸ في الشكل المقابِل : $\overline{اد}$ قطعة متوسطة للمثلث ا ب جـ ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلّث ا ب جـ ،

إذا كان ا م = ٥ س ، م د = س + ٣ ،

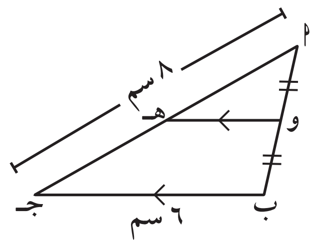
فأوجد بالبرهان ا د .

٨-٧ مراجعة الوحدة الثامنة
Revision Unit Eight

أوّلًا : التمارين المقالية

١ في كلّ من المثلّثات التالية أكمل (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

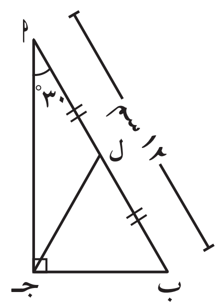
أ



أ هـ = ...

و هـ = ...

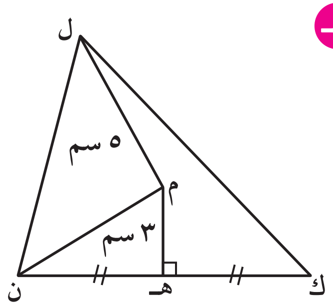
ب



جـ ل = ...

ب جـ = ...

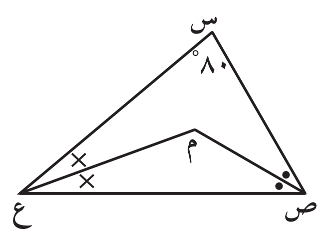
جـ



م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث .

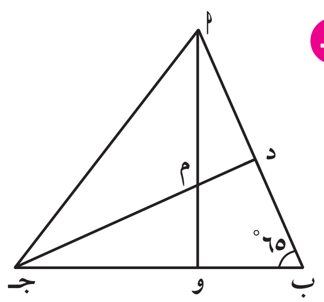
ك ن = ...

د



ق (ص $\hat{م}$ ع) = ...

هـ

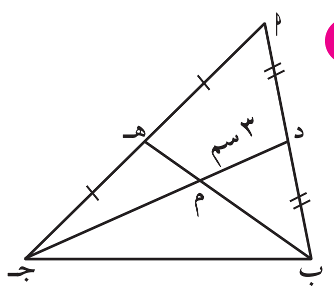


$\overline{أو}$ ∩ $\overline{جـ د}$ = { م } ،

م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث أ ب جـ على أضلاعه .

ق (ب $\hat{أ}$ و) = ...

و



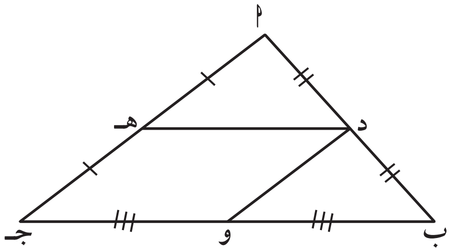
م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلّث أ ب جـ .

جـ م = ...

٢ أ ب جـ مثلّث فيه : د ، و ، هـ منتصفات

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ على الترتيب ،

إذا كان ب جـ = ٨ سم .



أ أوجد بالبرهان د هـ .

ب أثبت أنّ د و جـ هـ متوازي أضلاع .

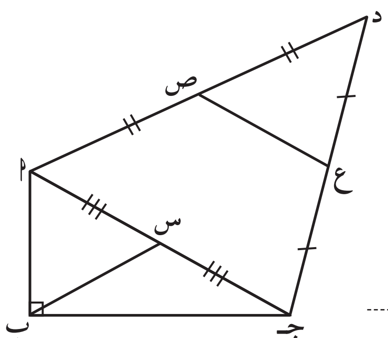
---

٣ أ ب جـ د شكل رباعي فيه : ق (أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ٩٠° ،

ص منتصف $\overline{\text{د أ}}$ ، ع منتصف د جـ ،

إذا كانت س منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$.

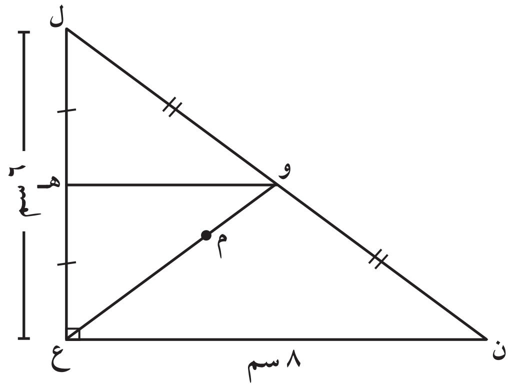
فأثبِت أنّ : ب س = ع ص .

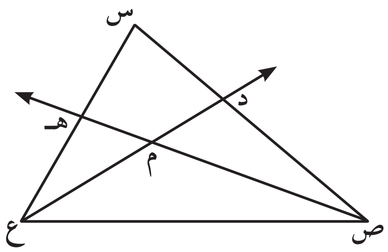


٤ عند تصميم جسر تمّ رسم المثلّث في الشكل المقابل حيث ل ع ن مثلّث قائم الزاوية في ع ، ع ن = ٨ سم ، ع ل = ٦ سم ، و منتصف $\overline{\text{ل ن}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ل ع}}$ ، م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث ل ع ن .

أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

(١) و هـ (٢) ل ن (٣) ع و (٤) م و





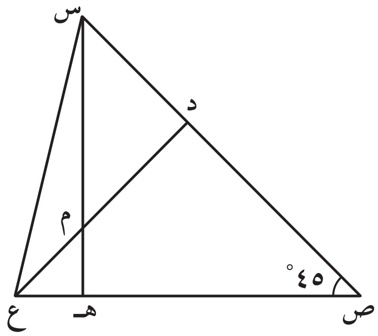
٥ س ص ع مثلّث فيه : ق ($\hat{\text{س}}$) = ٨٠°،

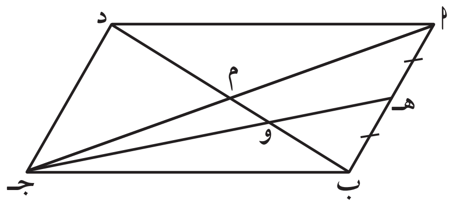
$\overleftarrow{\text{ص هـ}}$ منصِّف $\hat{\text{ص}}$ ،

$\overleftarrow{\text{ع د}}$ منصِّف $\hat{\text{ع}}$.

أوجِد بالبرهان ق (د $\hat{\text{م}}$ هـ) .

٦ س ص ع مثلّث فيه : ق ($\hat{ص}$) = ٤٥° ،
م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه ،
$\overline{س هـ} \cap \overline{ع د}$ = { م } .
أثبِت أنّ المثلّث س د م متطابق الضلعين .





٧ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه : م نقطة تقاطع قطريه ،

ب د = ١٢ سم ، نصّفت $\overline{\text{أ ب}}$ في هـ ،

$\overline{\text{جـ هـ}} \cap \overline{\text{ب د}} = \{\text{و}\}$.

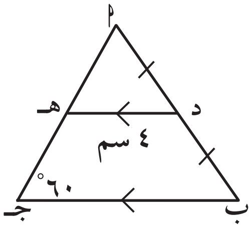
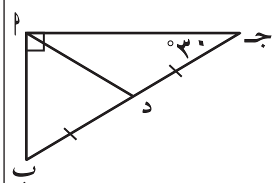
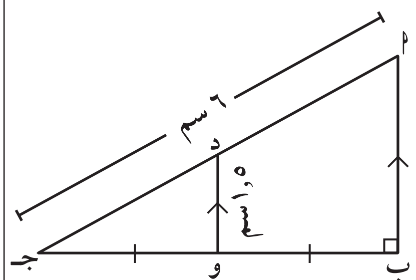
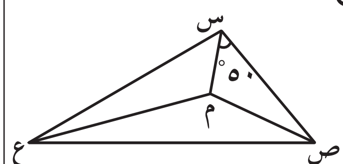
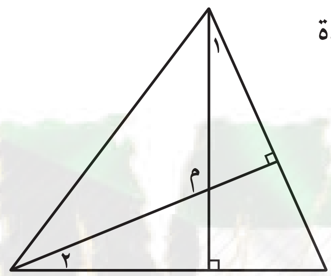
برهِن أنّ :

(١) و نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أ ب جـ

(٢) ب و = ٤ سم

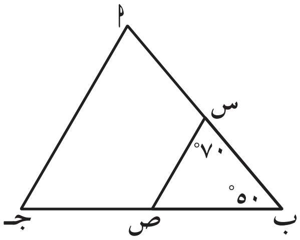
ثانيًا : التمارين الموضوعية

أوّلًا : في البنود التالية ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ المثلّث أ ب جـ فيه : أ ب = أ جـ ، د منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{دهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، د هـ = ٤ سم ، ق ($\widehat{\text{جـ}}$) = ٦٠° ، فإنّ أ جـ = ٨ سم . 	(أ)	(ب)
٢ أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في أ ، د منتصف $\overline{\text{جـ ب}}$ ، ق ($\widehat{\text{جـ}}$) = ٣٠° ، فإنّ Δ أ د ب متطابق الأضلاع . 	(أ)	(ب)
٣ أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، أ جـ = ٦ سم ، د و = ١,٥ سم ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{د و}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$. فإنّ : ق ($\widehat{\text{جـ}}$) = ٣٠° . 	(أ)	(ب)
٤ نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث القائم الزاوية هي رأس الزاوية القائمة .	(أ)	(ب)
٥ س ص ع مثلّث فيه : ق (ص $\widehat{\text{س}}$ م) = ق (س $\widehat{\text{ص}}$ ع) = ٥٠° ، حيث م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية ، فإنّ ق (س $\widehat{\text{ع}}$ م) = ٣٠° . 	(أ)	(ب)
٦ في الشكل المقابل : إذا كانت م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ، فإنّ ق ($\widehat{١}$) = ق ($\widehat{٢}$) . 	(أ)	(ب)

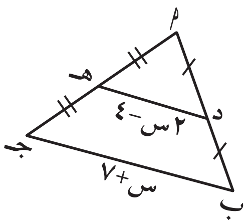
ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

٧ أ ب جـ مثلّث فيه : س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ،
ق ($\hat{\text{ب}}$) = ٥٠° ، ق (ب $\hat{\text{س}}$ ص) = ٧٠° ، فإنّ ق ($\hat{\text{جـ}}$) =



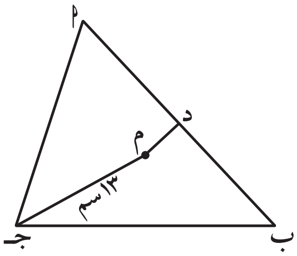
أ ٥٠° ب ٦٠° جـ ٧٠° د ٨٠°

٨ في الشكل المقابِل : س =



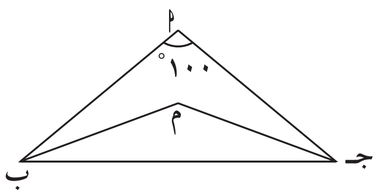
أ ٢٠ ب ١٥ جـ ٥ د ٢

٩ أ ب جـ مثلّث فيه : أ ب = ٢٤ سم، د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ،
م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ، جـ م = ١٣ سم ،
فإنّ م د =



أ ٥ سم ب ٦ سم
جـ ١٢ سم د ١٣ سم

١٠ أ ب جـ مثلّث فيه : ق ($\hat{\text{أ}}$) = ١٠٠° ، م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث ،
فإنّ ق (جـ $\hat{\text{م}}$ ب) =



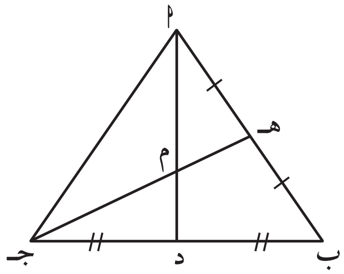
أ ١٤٠° ب ١٢٠°
جـ ١٠٠° د ٨٠°

١١ المثلّث الذي يكون فيه نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه هي أحد رؤوسه هو :

أ مثلّث منفرج الزاوية ب مثلّث متطابق الأضلاع
جـ مثلّث قائم الزاوية د مثلّث حادّ الزوايا

١٢ ا ب جـ مثلّث فيه : $\overline{\text{ا د}} \cap \overline{\text{جـ هـ}} = \{\text{م}\}$ ،
ا د = ١٢ سم فإن م د =

(أ) ٣ سم (ب) ٤ سم (جـ) ٦ سم (د) ٨ سم



---

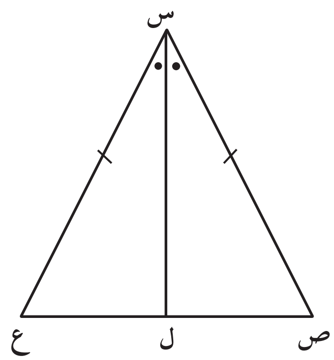
١٣ س ص ع مثلّث متطابق الضلعين ، فإنّ $\overline{\text{س ل}}$ هي :

(أ) منصِّف الزاوية س فقط .

(ب) قطعة متوسّطة فقط .

(جـ) محور $\overline{\text{ص ع}}$ فقط .

(د) منصِّف الزاوية س وقطعة متوسّطة ومحور $\overline{\text{ص ع}}$.



---

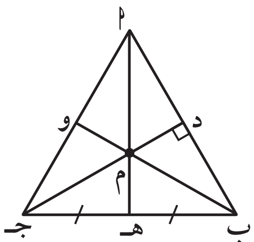
١٤ ا ب جـ مثلّث متطابق الأضلاع ، $\overline{\text{ا هـ}} \cap \overline{\text{ب و}} \cap \overline{\text{جـ د}} = \{\text{م}\}$ ، فإنّ م هي نقطة تقاطع :

(أ) منصِّفات زوايا المثلّث فقط .

(ب) منصِّفات زوايا المثلّث والأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه فقط .

(جـ) منصِّفات زوايا المثلّث والأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه وقطعه المتوسّطة فقط .

(د) منصِّفات زوايا المثلّث والأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه وقطعه المتوسّطة ومحاور أضلاعه .



الوحدة التاسعة

النسبة المئوية
Percent

التجارة
Trading

تهتمّ دولة الكويت بالتجارة منذ نشأتها . واستمرّ هذا الاهتمام على مدى تعاقب الأجيال ، وتجلّى بأبهى صورة من خلال إنشاء المجمَّعات التجارية ، ومن أهمّها وأكبرها مجمَّع الأفنيوز The Avenues الذي افتُتح في أبريل ٢٠٠٧ م تحت رعاية وحضور حضرة صاحب السموّ أمير البلاد الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح . يتميّز الأفنيوز بتصميم عمراني خلّاب يجمع عددًا من المدارس العمرانية المتنوّعة ، ويمنح كلّ منطقة هوية خاصّة مستوحاة من أعرق المدن في العالم ما يجعل من تجربة التسوّق في الأفنيوز تجربة فريدة من نوعها لكلّ متسوّق وزائر .

مشروع الوحدة : (معرض للأدوات الكهربائية)

تحرص دولة الكويت على تشجيع المشاريع الصغيرة لدعم الشباب ومحاربة البطالة وتمكين القطاع الخاصّ من تحقيق النموّ الاقتصادي لدولة الكويت . ليكن مشروعنا الصغير إدارة وتجهيز معرض للأدوات الكهربائية .








خطّة العمل :

- إدارة وتجهيز معرض للأدوات الكهربائية .

خطوات تنفيذ المشروع :

- يقسّم المعلّم المتعلّمين إلى مجموعات ويقومون باختيار اسم المعرض .
- لنفرض أنّه تمّ البدء بإنشاء المعرض في شهر يناير برأس مال قدره ٢٧ ٠٠٠ دينار .
- تختار كلّ مجموعة نوعًا واحدًا من الأجهزة التي سيبيعها معرضهم وتبحث عن سعر الجهاز بالإنترنت .
- تحسب المجموعة سعر شراء الجهاز مضافًا إليه كلفة الشحن ولتكن ١٥٪ من سعره الأصلي .
- إذا بيع الجهاز بربح ٢٥٪ ، فكم سيكون السعر الجديد لبيع الجهاز ؟
- في شهر فبراير وبمناسبة الاحتفالات بالعيد الوطني ، قرّر المعرض عمل خصم على الأجهزة بنسبة ١٠٪ . فما سعر بيع الجهاز بعد الخصم ؟
- تقوم كلّ مجموعة بتسجيل ما قامت به منذ بدء إنشاء المعرض وحتّى نهاية شهر فبراير .

علاقات وتواصل :

- تتبادل المجموعات الأوراق وتتأكّد من صحّة التنفيذ .

عرض العمل :

- تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

مخطّط تنظيمي للوحدة التاسعة

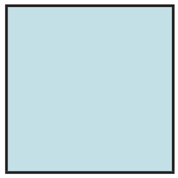
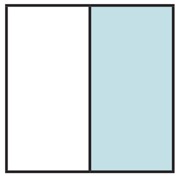
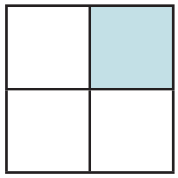
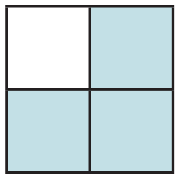
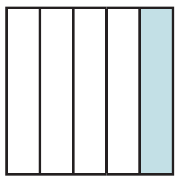
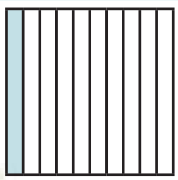
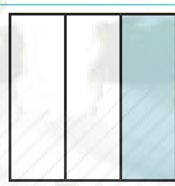
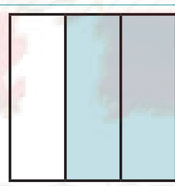
النسبة المئوية

النسبة المئوية التزايدية والنسبة المئوية التناقصية

تطبيقات على تغيّر النسبة المئوية

اِستعِدَّ للوحدة التاسعة

١ أكمِل الجدول التالي :

الشكل	الصورة الكسرية	الصورة العشرية	النسبة المئوية
			٪١٠٠
	$\frac{١}{٢}$		
		٠,٢٥	
			٪٧٥
	$\frac{١}{٥}$		
		٠,١	
		٠,$\overline{٣}$	٪٣٣ $\frac{١}{٣}$
		٠,$\overline{٦}$	٪٦٦ $\frac{٢}{٣}$

٢ حُلَّ التناسب :

أ $\frac{٣}{٧} = \frac{٦}{س}$

ب $\frac{٢٥}{س} = \frac{١٢٥}{١٠٠}$

٣ حُلَّ المعادلات التالية في ح :

أ ٤٢٠ = ٦٠ س

ب ٤ = س × $\frac{٨}{١٠٠}$

جـ ٢٠ = ١٦ × (١ + س)

د ٣ = ٥ × (١ – س)

٤ أوجِد قيمة كلّ من :

أ ٢٠٪ من ٢٥

ب ٣٥٪ من ٧٠

العبارات والمفردات :

النسبة المئوية
Percent

تقدير
Estimate

٩-١ النسبة المئوية
Percent

سوف تتعلّم : حلّ مسائل تتضمّن نسبًا مئوية و تقدير النسبة المئوية .

أوّلًا : حل المسائل باستخدام النسب المئوية

نشاط (١) :

بدل الخدمة : يُعطى عادة مقابِل الخدمة التي تقدّمها المطاعم ، إذا كان بدل الخدمة ١٠٪ من قيمة الفاتورة وفي بعض الحالات يكون ٢٠٪ مقابِل الخدمة المميَّزة .

١ أوجِد بدل الخدمة إذا كان المبلغ ٧٠ دينارًا .

بدل الخدمة = ... × ٧٠

٢ أوجِد بدل الخدمة المميَّزة إذا كان المبلغ ٨٠ دينارًا .

تدرّب (١) :

إذا كان سعر لوحة فنّية ١٥٠ دينارًا ، وتمّ خصم ١٠٪ من سعرها الأصلي .
فما قيمة هذا الخصم ؟

مثال (١) :

باعت مكتبة ١٨٠ كتابًا والتي تمثّل ٣٠٪ من كتبها المعروضة.
أوجِد عدد الكتب التي كانت في المكتبة قبل البيع.

الحلّ :

النسبة المئوية = $\frac{\text{الجزء}}{\text{الكلّ}}$

$\frac{٣٠}{١٠٠} = \frac{١٨٠}{\text{س}}$

٣٠ × س = ١٨٠ × ١٠٠

س = $\frac{١٨٠ \times ١٠٠}{٣٠}$ = ٦٠٠

∴ عدد الكتب = ٦٠٠ كتاب

حلّ آخر :

عدد الكتب المباعة =
النسبة المئوية × عدد الكتب

١٨٠ = ٣٠٪ × س

١٨٠ = $\frac{٣٠}{١٠٠}$ × س

س = ١٨٠ × $\frac{١٠٠}{٣٠}$ = ٦٠٠

∴ عدد الكتب = ٦٠٠ كتاب

تدرّب (٢) :

باع محلّ للعطور ٤٠٪ من الكمّية المعروضة عنده ، والتي بلغت ٣٦٠ زجاجة عطر ، فكم عدد زجاجات العطر التي كانت لديه ؟

....

....

....

....

....

تدرّب (٣) :

أثناء موسم التخفيضات، اشترت شهد حقيبة كان سعرها ٢٤٠ دينارًا ، وتمّ خصم ٦٠ دينارًا من سعرها الأصلي ، فما النسبة المئوية للخصم ؟

....

....

....

....

ثانيًا: تقدير النسب المئوية

نشاط (٢):

يعتمد أحد الفنادق نظام بدل الخدمة نظير نوع الخدمة التي يقدّمها . إذا كان بدل الخدمة ١٢٪ من قيمة الفاتورة وفي بعض الحالات ١٨٪ مقابِل الخدمة المميَّزة .

١ قدِّر بدل الخدمة إذا كان المبلغ ٥٨ دينارًا .

بدل الخدمة = ١٢٪ × ٥٨

نلاحظ أنّ :

١٢٪ ≈ .... ٪ ، ٥٨ ≈ ....

∴ بدل الخدمة ≈ .... ٪ × ....

= .... دنانير

∴ ١٢٪ من ٥٨ دينارًا ≈ .... دنانير

٢ قدِّر بدل الخدمة المميَّزة إذا كان المبلغ ٩٢ دينارًا .

....

....

....

....

....

عند تقدير النسب المئوية نختار أعدادًا مناسِبة .

مثال (٢) :

قدِّر ٢٤٪ من ٨١

الحلّ :

٢٤٪ ≈ ٢٥٪ ، ٨١ ≈ ٨٠

٢٥٪ من ٨٠

= ٢٥٪ × ٨٠

$= \frac{٢٥}{١٠٠} \times ٨٠ = \frac{١}{٤} \times ٨٠ = ٢٠$

∴ ٢٤٪ من ٨١ ≈ ٢٠

أعطِ تقديرًا آخر .

تدرّب (٤) :

١ قدِّر ٧٤,٥٪ من ٢٣٩

٢ قدِّر ٣٣٪ من ٨٩

تدرّب (٥) :

أعلن أحد المحلّات التجارية عن خصم ١١٪ على إحدى السلع . قدِّر قيمة الخصم إذا كان سعر السلعة ٤٩٩ دينارًا .

تدرّب (٦) :

إذا كانت مبيعات شركة ما في أحد الأعوام ٠٠٠ ٣٥٠ دينار ثم انخفضت بنسبة ١٩٪ في العام الذي يليه ، فقدِّر قيمة الانخفاض .

تمــرَّنْ :

١ جهاز كهربائي سعره ١٢٠ دينارًا ، وفي موسم التنزيلات وُضِع عليه خصم بنسبة ١٥٪ ، فما قيمة الخصم ؟

٢ سُجِّل ٥٠ متعلّمًا في رحلة مدرسية إلى أبراج الكويت ، حضر منهم ٣٥ متعلّمًا فقط . ما النسبة المئوية للحاضرين ؟

٣ إذا كان ٢٠٪ من متعلّمي الصفّ التاسع في إحدى المدارس هو ٤٢ متعلمًا ، فما عدد متعلمي الصف التاسع ؟

٤ قدِّر ٦٣ ٪ من العدد ٤٥

٥ قدِّر ١٩٪ من العدد ٢١٠

٦ لوحة أثرية ثمنها ١٤٥٠ دينارًا ، قدِّر ٧٣ ٪ من ثمن اللوحة .

٩-٢ النسبة المئوية التزايدية والنسبة المئوية التناقصية
Percentage Increase and Percentage Decrease

سوف تتعلّم : حلّ مسائل تتضمّن نسبًا مئوية تزايدية ونسبًا مئوية تناقصية .

العبارات والمفردات :
النسبة المئوية التزايدية
Percentage Increase
النسبة المئوية التناقصية
Percentage Decrease

نشاط :

قرّر مجلس إدارة أحد المجمَّعات التجارية زيادة إيجار المحلّات التابعة له بنسبة ٢٠٪ للمحلّ الواحد ، إذا كانت قيمة الإيجار القديم ٥٠٠ دينار .

١ أوجِد ما يلي :

أ مقدار الزيادة .

مقدار الزيادة = ٥٠٠ × ٢٠٪

= ....

= ....

ب القيمة النهائية للإيجار .

القيمة النهائية = القيمة الأصلية + مقدار الزيادة

= .... + ...

= ....

جـ النسبة المئوية بعد الزيادة .

النسبة المئوية بعد الزيادة = ١٠٠٪ + ٢٠٪

= ....

٢ ما قيمة ١٢٠٪ من ٥٠٠ ؟ ....

....

....

ماذا تلاحظ ؟ ....

يمكن حلّ المسائل التي تتضمّن نسبًا مئوية تزايدية باستخدام المعادلة التالية :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠ ٪ + النسبة المئوية للتزايد)

كذلك يمكن حلّ المسائل التي تتضمّن نسبًا مئوية تناقصية باستخدام المعادلة التالية :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠ ٪ − النسبة المئوية للتناقص)

مثال (١) :

أوجِد القيمة النهائية إذا كانت القيمة الأصلية ٩٠ والنسبة المئوية للتزايد ٣٠٪ .

الحلّ :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

= ٩٠ × (١٠٠٪ + ٣٠٪)

= ٩٠ × ١٣٠٪

$= ٩٠ \times \frac{١٣٠}{١٠٠}$

= ١١٧

تدرّب (١) :

أوجِد القيمة النهائية إذا كانت القيمة الأصلية ١٢٠٠ والنسبة المئوية للتناقص ٨٠ ٪ .

مثال (٢) :

تناقصت إيرادات إحدى المؤسَّسات التجارية في نهاية السنة المالية لعام ٢٠١٧ م حيث بلغت ٢٧٠ ٠٠٠ دينار ، بنسبة تناقص ١٠٪ عن نهاية السنة المالية ٢٠١٦ م. أوجِد القيمة الأصلية للإيرادات ومقدار النقص .

تذكَّرْ أنّ :
مقدار التغيّر = القيمة النهائية − القيمة الأصلية

الحلّ :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للتناقص)

٢٧٠ ٠٠٠ = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − ١٠٪)

٢٧٠ ٠٠٠ = القيمة الأصلية × ٩٠٪

٢٧٠ ٠٠٠ = القيمة الأصلية × $\frac{٩٠}{١٠٠}$

القيمة الأصلية = ٢٧٠ ٠٠٠ × $\frac{١٠٠}{٩٠}$

= ٣٠٠ ٠٠٠ دينار

مقدار التغيّر = ٢٧٠ ٠٠٠ − ٣٠٠ ٠٠٠ = −٣٠ ٠٠٠ دينار

∴ مقدار النقص = ٣٠ ٠٠٠ دينار

تدرّب (٢) :

أوجِد القيمة الأصلية إذا كانت القيمة النهائية تساوي ٨٠ والنسبة المئوية للتزايد تساوي ٦٠ ٪ . وما مقدار الزيادة ؟

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠ ٪ + ...)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال (٣) :

زادت أسعار بيع التلفاز في أحد المحلّات التجارية فبلغت ٢١٠ دنانير ، إذا كان السعر الأصلي ١٤٠ دينارًا ، فأوجِد النسبة المئوية للتزايد .

تذكَّرْ أنّ :

١٠٠٪ = ١

٥٠٪ = $\frac{١}{٢}$

الحلّ :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

٢١٠ = ١٤٠ × (١ + س)

١ + س = $\frac{٢١٠}{١٤٠}$

١ + س = $\frac{٣}{٢}$

س = $\frac{٣}{٢}$ − ١ = $\frac{١}{٢}$

∴ النسبة المئوية للتزايد = $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠٪ = ٥٠٪

حاوِل أن تحلّ بطريقة أخرى .

تدرّب (٣) :

أوجِد النسبة المئوية للتناقص إذا كانت القيمة النهائية ٣٠٠ والقيمة الأصلية ٥٠٠ .

تمــرَّنْ :

١ أوجِد السعر النهائي لحاسوب كان سعره ٧٠٠ دينار ثمّ زاد بنسبة ٢٠ ٪ .

٢ يعمل جاسم في محلّ بيع الهواتف المتنقّلة ويحصل على خصم ٣٠٪ على مشترَياته .
إذا كان سعر البيع لأحد الهواتف ٧٠ دينارًا ، فكم سيدفع جاسم بعد الخصم ؟

٣ اِرتفعت قيمة سهم إحدى شركات الاتّصالات المدرَجة في سوق الأوراق المالية بنسبة ١٤٪ . إذا كانت القيمة الأصلية للسهم ٤٠٠ فلس ، فأوجِد القيمة النهائية للسهم .

٤ أوجِد القيمة الأصلية إذا كانت :

القيمة النهائية تساوي ٧٠٠ ، النسبة المئوية للتناقص تساوي ٦٥٪ .

٥ تزايدت إيرادات أحد المطاعم بنسبة ٣٠٪ عن الشهر السابق ، إذا بلغت الإيرادات ٦٠٠ ٢ دينار ، فاحسب إيرادات الشهر السابق .

٦ اِشترت عائشة قلادة ذهبية بقيمة ٤٠٠ ٢ دينار بعد أن حصلت على خصم ٢٠٪ .
أوجِد السعر الأصلي للقلادة ، ثمّ أوجِد مقدار الخصم .

٧ أوجِد النسبة المئوية للتزايد إذا كانت القيمة النهائية ٢٤٠ والقيمة الأصلية ٢٠٠ .

٩-٣ تطبيقات على تغيّر النسبة المئوية
Applications of Percent Change

سوف تتعلّم : استخدام النسبة المئوية للتزايد والتناقص وتطبيقها .

نشاط :

في سوق الكويت للأوراق المالية تتأرجح أسعار أسهم الشركات التجارية بين هبوط وارتفاع ، إذا بلغ سعر بيع السهم لإحدى الشركات في بداية تداوله ١٠٠ فلس ،
فأوجِد سعر بيع السهم في كلّ من الحالات التالية :

١ اِرتفاع بنسبة ٢٪ ثمّ انخفاض بنسبة ٢٪ .

القيمة النهائية لسعر بيع السهم بعد ارتفاع ٢٪

= القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

= .... × (١٠٠٪ + ٢٪)

= .... × .... = ... فلسًا

القيمة النهائية لسعر بيع السهم

= القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للتناقص)

= .... × (١٠٠٪ − ٢٪)

= .... × .... = ... فلسًا

ماذا تلاحظ ؟ ....

٢ اِنخفاض بنسبة ٢٪ ثمّ ارتفاع بنسبة ٢٪ .

القيمة النهائية لسعر بيع السهم بعد انخفاض ٢٪

= القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للتناقص)

= ١٠٠ × (١٠٠٪ − ٢٪)

= ١٠٠ × .... = ... فلسًا

القيمة النهائية لسعر بيع السهم

= القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

= .... × (١٠٠٪ + ٢٪)

= .... × .... = ... فلسًا

قارن بين القيمة النهائية في كلّ من ١ ، ٢ .

معلومات مفيدة :

سوق الكويت للأوراق المالية أو بورصة الكويت الرسمية ، هي سوق لتداول الأسهم بشكل رسمي، وتتضمّن ٥ أسواق وهي : السوق الرسمِية ، السوق الموازِية ، سوق الكسور ، سوق الخيارات وسوق الآجل . تمّ تأسيس السوق بعد إصدار قانون تنظيم التداولات المالية في أكتوبر عام ١٩٦٢ م.

مثال (١) :

رفعت إحدى شركات الطيران أسعارها بنسبة ٢٠٪ ، ثمّ منحت هذه الشركة موظّفيها خصمًا يبلغ ١٠٪ . فكم ستدفع إحدى الموظّفات في هذه الشركة لتذكرة كان سعرها ٢٠٠ دينار قبل الزيادة ؟

الحلّ :

سعر التذكرة بعد الزيادة = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

= ٢٠٠ × (١٠٠٪ + ٢٠٪)

= ٢٠٠ × ١٢٠٪

= ٢٠٠ × $\frac{١٢٠}{١٠٠}$ = ٢٤٠ دينارًا

القيمة النهائية للتذكرة = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للتناقص)

= ٢٤٠ × (١٠٠٪ − ١٠٪)

= ٢٤٠ × ٩٠٪

= ٢٤٠ × $\frac{٩٠}{١٠٠}$ = ٢١٦ دينارًا

حاوِل أن تحلّ بطريقة أخرى .

تدرّب (١) :

في معرض لموادّ البناء تبيع إحدى الشركات أنواعًا مختلفة من البلاط ، إذا كان سعر بيع المتر المربّع من أحد أنواع البلاط هو ٥ دنانير و خلال فترة الخصومات كانت نسبة الخصم ٣٠٪ يُضاف إليها ١٠٪ كلفة تركيب ، فما هي كلفة شراء وتركيب المتر المربّع من هذا النوع من البلاط ؟

تدرّب (٢) :

يكلّف استئجار قارب من إحدى شركات تأجير القوارب في اليوم الواحد ٢٥ دينارًا يُضاف إليها نظير الخدمة ، أوجِد تكلفة الاستئجار في الحالات التالية :

أ خصم ٢٠٪ ثم إضافة ١٠٪ نظير الخدمة .

....

....

....

....

....

....

....

ب خصم ٢٠ ٪ خصمًا بعد إضافة ٥ دنانير نظير الخدمة .

....

....

....

....

....

مثال (٢) :

انخفض سعر مبيعات متجر للموادّ الغذائية إلى ١٦٠٠ دينار بنسبة ٢٠٪ .

أ أوجد القيمة الأصلية للمبيعات قبل الانخفاض .

ب ما النسبة المئوية للتزايد التي تعيد سعر المبيعات إلى سعرها الأصلي قبل الانخفاض؟

الحلّ :

أ القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للتناقص)

١٦٠٠ = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − ٢٠٪)

١٦٠٠ = القيمة الأصلية × ٨٠٪

١٦٠٠ = القيمة الأصلية × $\frac{٨٠}{١٠٠}$

∴ القيمة الأصلية = ١٦٠٠ × $\frac{١٠٠}{٨٠}$ = ٢٠٠٠ دينار

ب القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

$$٢٠٠٠ = ١٦٠٠ \times (١ + س)$$

$$١ + س = \frac{٢٠٠٠}{١٦٠٠}$$

$$١ + س = \frac{٥}{٤}$$

$$س = \frac{٥}{٤} - ١ = \frac{١}{٤}$$

∴ النسبة المئوية للتزايد $= \frac{١}{٤} \times ١٠٠٪ = ٢٥٪$

تدرّب (٣) :

إذا زادت نفقات حصّة ١٠٠ ٪ عن الشهر السابق لتصل إلى ٤٠٠ دينار .

أ أوجِد نفقات حصّة قبل الزيادة .

ب ما النسبة المئوية للتناقص التي تجعل نفقات حصّة تعود إلى مستواها في الشهر الماضي؟

فكِر وناقِش

يقول سعد إنّ خصم ٥٠٪ يليها زيادة ١٠٠٪ على سلعة ما يعيدها إلى سعرها الأصلي . هل توافقه الرأي ؟ (فسِّر إجابتك)

تمــرَّنْ :

١ اِشترى أحمد منزلًا بمبلغ ٤٠٠ ٠٠٠ دينار ثمّ باعه بزيادة قدرها ٢٥٪ عن سعره الأصلي ، حيث تقاضى الوسيط العقاري ٥٪ من سعر البيع ، فما هو المبلغ الذي حصل عليه أحمد من بيع المنزل ؟

٢ إذا كان سعر استئجار غرفة في أحد المنتجعات السياحية لليلة الواحدة ٢٠٠ دينار وترتفع خلال فترة الصيف أسعار استئجار الغرف بنسبة ١٥٪ ، يقدّم نادي السياحة لأعضائه خصمًا قدره ١٠٪ خلال فترة الصيف ، فما المبلغ الذي سيدفعه عضو نادي السياحة عند استئجاره الغرفة خلال هذه الفترة ؟

٣ رفع أحد معارض السيّارات أسعاره بنسبة ٢٠٪ ، ثمّ منح هذا المعرض موظَّفيه خصمًا يبلغ ١٠٪ . فكم سيدفع أحد الموظَّفين في هذا المعرض ثمنًا لشراء سيّارة كان سعرها ٩٠٠٠ دينار قبل الزيادة ؟

٤ بلغ سعر التذكرة الواحدة لحضور مسرحية ٥٠ دينارًا ، ويُضاف إليها نظير الخدمة . أوجِد سعر التذكرة في كلّ من الحالات التالية :

أ خصم ٢٠٪ ثمّ إضافة ١٢٪ نظير الخدمة .

ب خصم ٢٠٪ بعد إضافة ١٠ دنانير نظير الخدمة .

٥ اِنخفض سعر أسهم شركة ٤٠٪ عن سعر العام الماضي والذي كان ٢٠٠ ٠٠٠ دينار ، أوجِد ما يلي :

أ قيمة الأسهم بعد الانخفاض .

ب ما النسبة المئوية للتزايد في السعر التي ستعيد سعر الأسهم إلى سعر العام الماضي ؟

٩-٤ مراجعة الوحدة التاسعة
Revision Unit Nine

أوّلًا : التمارين المقالية

١ قدِّر ما يلي :

أ ٢٨٪ من ١٥٣

ب ٢٢٪ من ٤٠٠

جـ ٦٤٪ من ٣٥٨

د ٧٢٪ من ٧٢

٢ يقدّم أحد النوادي الرياضية لزبائنه عرضًا للاشتراك السنوي بخصم نسبته ٢٥٪ .
كم سيدفع المشترِك إذا كان السعر الأصلي للاشتراك السنوي ٣٠٠ دينار ؟

٣ بلغ عدد زبائن يوم الأربعاء في أحد المطاعم ١٢٠ شخصًا ، وفي يوم الجمعة زاد عدد الزبائن إلى ٣٦٠ شخصًا . أوجِد النسبة المئوية للتزايد في عدد الزبائن يوم الجمعة .

٤ في متجر للأجهزة الإلكترونية ، بيعت آلة تصوير بتخفيض قدره ٣٠٪ من ثمنها الأصلي ، إذا كان ثمن آلة التصوير هو ٢١٠ دينار ، فما هو ثمنها قبل التخفيض ؟

٥ أعلنت شركة عقارية عن زيادة قدرها ١٥٪ على مبيعاتها من قطع الأراضي والشقق ، يعمل خالد في هذه الشركة ويحصل على خصم ١٠٪ على مبيعات الشركة . فكم سيدفع خالد لشراء شقّة كان سعرها الأصلي ١٠٠ ٠٠٠ دينار قبل الزيادة ؟

٦ **انخفض سعر سلعة إلى ٥٠٠ دينار بنسبة خصم ٥٠ ٪ .**
أوجد ما يلي :

أ القيمة الأصلية للسلعة .

ب ما النسبة المئوية للتزايد التي تعيد سعر السلعة إلى سعرها الأصلي ؟

٧ **تعمل مريم في شركة تجارية تمنحها أجرًا على عدد الساعات التي تعمل بها خلال العام . قرّرت مريم أن تنقّص من عدد ساعات عملها ، فنقص راتبها السنوي بمقدار ٢٠ ٪ . إذا أصبح راتبها ٤٨٠٠٠ دينار ، فأوجِد ما يلي :**

أ الراتب السنوي قبل التناقص .

ب النسبة المئوية للزيادة التي تعيد راتبها السنوي كما كان عليه .

ثانيًا : التمارين الموضوعية

أوّلًا : في البنود التالية ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ حاسوب سعره الأصلي ٤٠٠ دينار وقد أصبح ثمنه خلال فترة الخصومات ٣٠٠ دينار ، فإنّ النسبة المئوية للخصم هي ٢٥٪ .	(أ)	(ب)
٢ جهاز سعره ٩٤ دينارًا بيع بسعر ١٠٠ دينار ، فإنّ النسبة المئوية للتزايد ٦٪ .	(أ)	(ب)
٣ إذا انخفض سعر سلعة بنسبة ٥٪ ثمّ ارتفع بنسبة ٥٪ ، فإنّ سعر السلعة سيعود إلى سعرها الأصلي .	(أ)	(ب)

ثانيًا : لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

٤ زاد سعر سهم من ٥٠ فلسًا إلى ٧٥ فلسًا ، فإنّ النسبة المئوية للتزايد هي :

(أ) ٢٥٪ (ب) ٥٠٪ (جـ) ٧٥٪ (د) ١٥٠٪

٥ بلغ عدد الناجحين في مدرسة ٢٨٠ متعلّمًا ، وكانت نسبة الناجحين ٧٠٪ ، فإنّ عدد متعلّمي المدرسة يساوي :

(أ) ٢٠٠ متعلّم (ب) ٣٥٠ متعلّمًا (جـ) ٤٠٠ متعلّم (د) ٥٢٠ متعلّمًا

٦ إذا كان عدد المشترِكين في جريدة محلّية ٥٠٠ مشترِك ، فإذا بلغت نسبة الزيادة لعدد المشترِكين ٤٠٪ ، فإنّ عدد المشترِكين بعد الزيادة يساوي :

(أ) ٢٠٠ مشترِك (ب) ٣٠٠ مشترِك (جـ) ٧٠٠ مشترِك (د) ٨٠٠ مشترِك

٧ إذا انخفض سعر سهم ٥٠٪ عن سعره في العام الماضي ، فإنّ النسبة المئوية للزيادة التي تعيده إلى سعره الأصلي هي :

(أ) ٥٠٪ (ب) ١٠٠٪ (جـ) ١٥٠٪ (د) ٢٠٠٪

الوحدة العاشرة

الهندسة والقياس
Geometry & Measurment

تصاميم هندسية
Geometrical Designs

تهتمّ دولة الكويت بمنظرها الجمالي ، وذلك من خلال إنشاء المباني الشاهقة ذات التصاميم الرائعة والجميلة ، ومن أعلى هذه المباني برج الحمراء الذي تمّ افتتاحه في عام ٢٠١١ م ، ويتكوّن برج الحمراء من ٨٠ طابقًا بارتفاع ٤١٣ مترًا . وهو بذلك يُعَدّ أطول ناطحة سحاب في الكويت وفي المرتبة ٢٣ على مستوى العالم (إحصائية ٢٠١٦ م) .

مشروع الوحدة : (كُنْ مهندسًا معماريًّا)

المهندس المعماري هو المسؤول عن إخراج التصاميم الهندسية إلى أرض الواقع من خلال المباني الجميلة التي نراها حينما نتجوّل في بلدنا الحبيب الكويت .

خطّة العمل :

- إنشاء مجسّم لمبنى بتصميم هندسي رائع .

خطوات تنفيذ المشروع :

- يتشاور أفراد المجموعة لاختيار مبنى يقومون بتصميمه وإنشاء مجسّم مصغّر له .
- يرسم أفراد المجموعة مخطّطًا تقريبيًّا للمبنى .
- يحدّد أفراد المجموعة المجسّمات التي تمّ استخدامها في المبنى من المجسّمات التالية : (مكعّب - شبه مكعّب - أسطوانة - مخروط - هرم - منشور ثلاثي قائم) .
- يرسم أفراد المجموعة شبكة كلّ مجسّم من المجسّمات المختارة على ورق مقوّى مع الحرص على تسجيل الأبعاد المختارة على الشبكة .
- يكوّن أفراد المجموعة المجسّمات من الشبكات التي تمّ رسمها ويكملون تصميم المبنى .
- يكمل المتعلّمون الجدول التالي :

إسم المجسّم المستخدَم	حجم المجسّم المستخدَم	المساحة السطحية للمجسّم

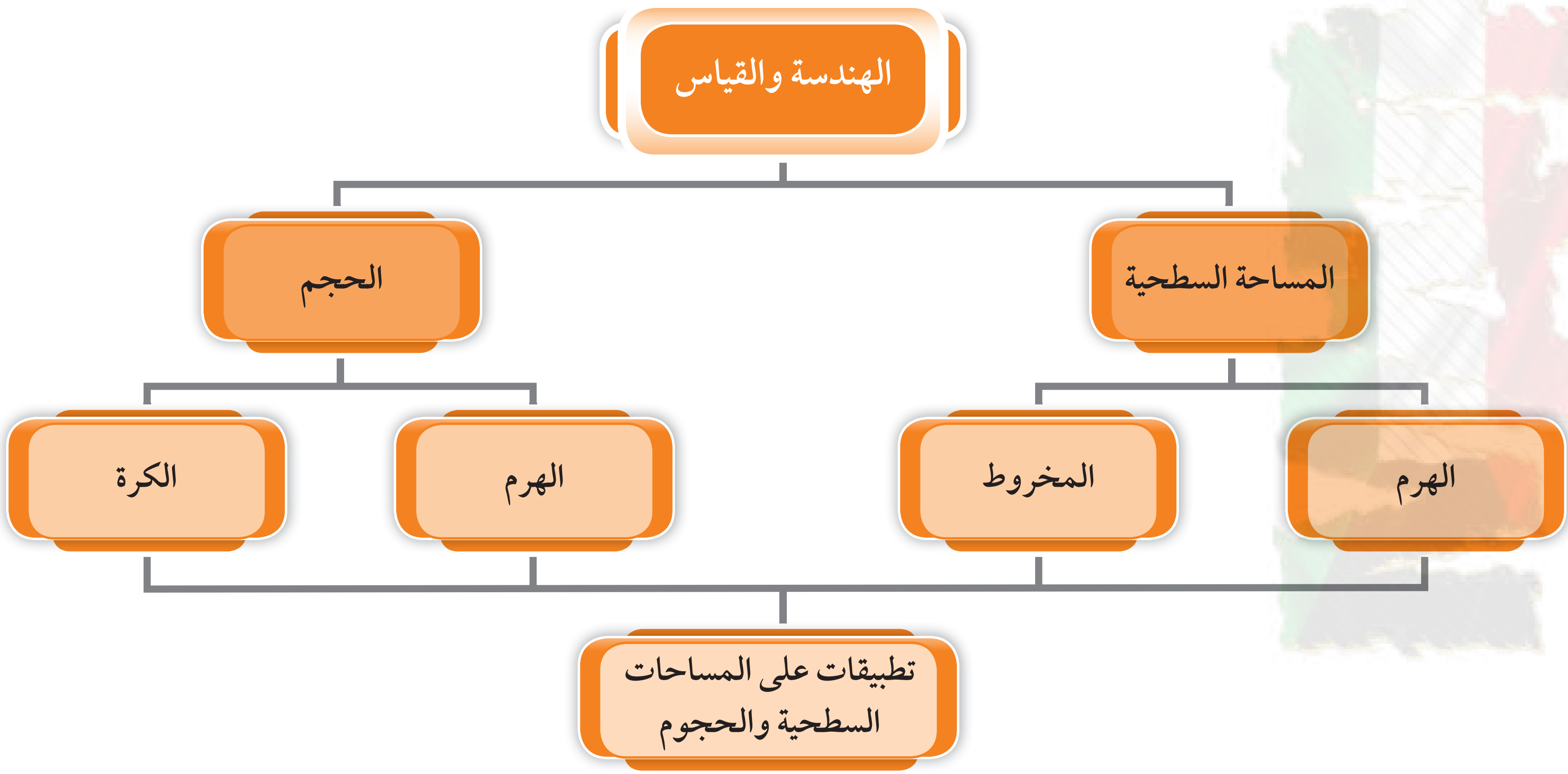
علاقات وتواصل :

- تتبادل المجموعات الجداول وتتأكّد من صحّة التنفيذ .

عرض العمل :

- تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

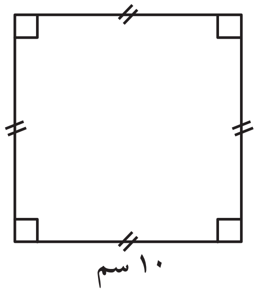
مخطَّط تنظيمي للوحدة العاشرة



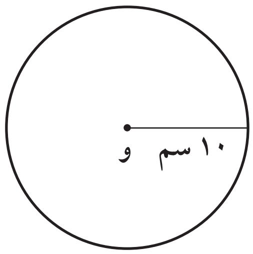
اِستعِدّ للوحدة العاشرة

١ أوجِد محيط ومساحة كلّ شكل ممّا يلي بحسب المعطيات على الرسم :

أ

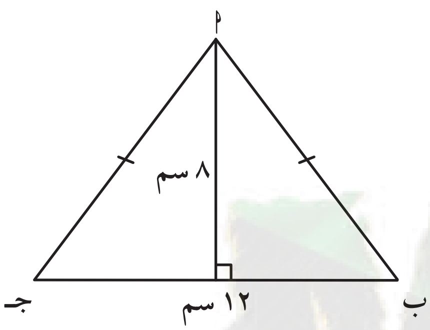


ب



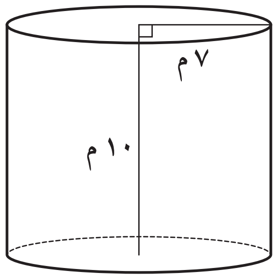
(اعتبر π = ٣,١٤)

جـ



٣ أوجِد المساحة الجانبية والحجم للأسطوانة الدائرية القائمة (اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$) :

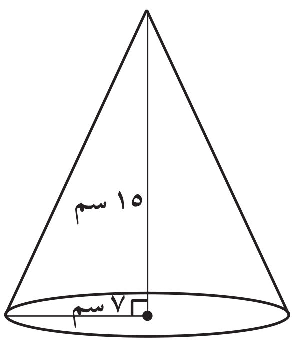
تذكَّرْ أنّ :
(١) المساحة الجانبية للأسطوانة الدائرية القائمة = ٢ π نق ع
(٢) حجم الأسطوانة الدائرية القائمة = π نق^٢ ع



---

٤ أوجِد حجم المخروط الدائري القائم الذي طول نصف قطر قاعدته ٧ سم ، وارتفاعه ١٥ سم . (بدلالة π)

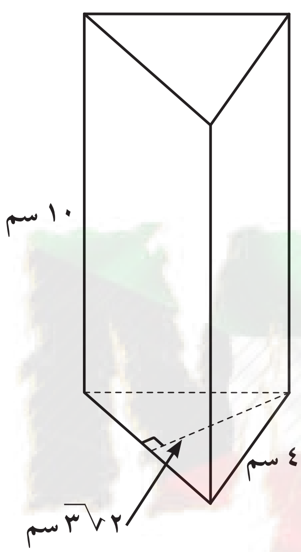
تذكَّرْ أنّ :
حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع



---

٥ منشور ثلاثي قائم قاعدته على شكل مثلّث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٤ سم وارتفاعه ٢ $\sqrt{٣}$ سم وارتفاع المنشور ١٠ سم . أوجِد حجم المنشور ومساحته السطحية .

تذكَّرْ أنّ :
(١) حجم المنشور القائم = مساحة القاعدة × الارتفاع
(٢) المساحة السطحية للمنشور القائم = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة



١٠-١ المساحة السطحية للهرم والمخروط
Surface Area of Pyramid and Cone

العبارات والمفردات :

رأس
Vertex

قاعدة
Base

إرتفاع
Height

إرتفاع مائل
Slant Height

سطح
Surface

مساحة
Area

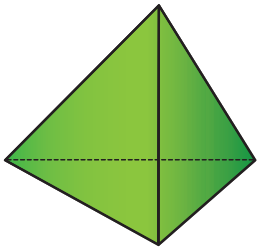
مساحة جانبية
Lateral Area

هرم منتظم
Regular Pyramid

مخروط
Cone

سوف تتعلّم : إيجاد المساحة السطحية للهرم المنتظم والمخروط الدائري القائم .

نشاط :



اِصنع هرمًا بنفسك :

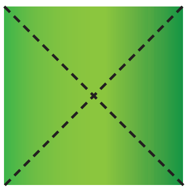
١ أحضِر ورقتين من الورق المقوى مربّعتي الشكل .

٢ اُرسم قطري إحدى الورقتين .

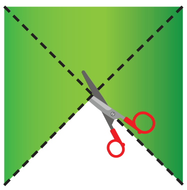
٣ اِقطع أحد المثلّثات التي نتجت من رسم القطرين كما في الشكل ، ثمّ ألصِق الحوافّ معًا لصنع هرم .

٤ ألصِق الورقة الأخرى المربّعة الشكل على الوجه غير المغطّى من الهرم ، وقُصَّ الزائد .

٥ صِفِ القاعدة والأوجه الجانبية .



الخطوة (١)

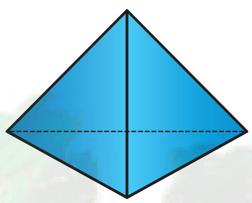


الخطوة (٢)

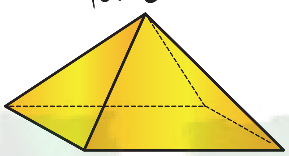
اللوازم :

– عدد ٢ ورق مقوّى مربّعة الشكل .
– مقصّ .
– مسطرة .

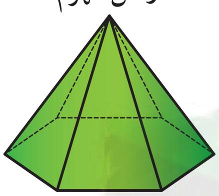
الهرم المنتظم : مجسّم متعدّد الأوجه له قاعدة واحدة منتظمة وأوجهه الجانبية الأخرى مثلّثات متطابقة تلتقي عند أعلى الهرم في نقطة تُسمّى رأس الهرم . يُسمّى الهرم بحسب عدد أضلاع قاعدته .



هرم ثلاثي القاعدة



هرم رباعي القاعدة

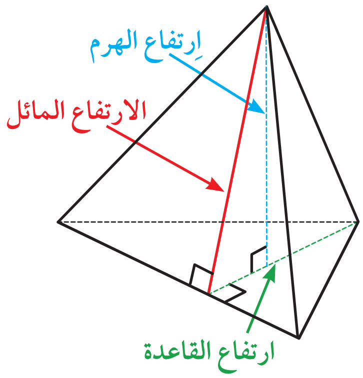


هرم سداسي القاعدة

ستقتصر دراستنا على الهرم المنتظم .

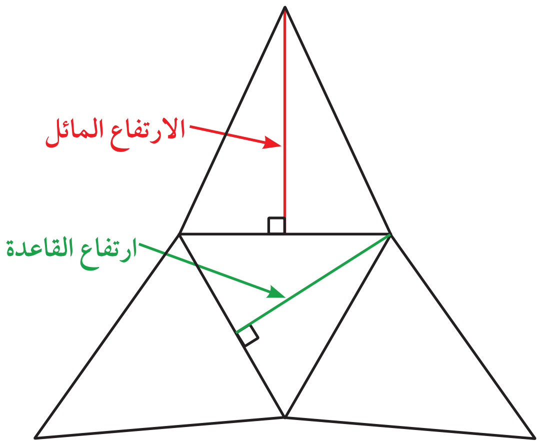
معلومة مفيدة :

إذا تطابقت الأضلاع وتطابقت الزوايا في مضلّع ما ، فإنّه يُسمّى مضلّعًا منتظمًا.



اِرتفاع الهرم : هو البعد العمودي من رأس الهرم إلى القاعدة المقابِلة .

الارتفاع المائل : هو البعد العمودي من رأس الهرم إلى أحد أحرف قاعدة الهرم .



يمكن إيجاد المساحة السطحية للهرم باستخدام شبكته كما في الشكل .

المساحة السطحية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

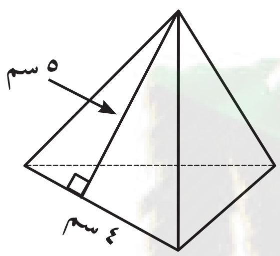
المساحة الجانبية للهرم المنتظم = عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد

المساحة السطحية للهرم المنتظم = (عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة

تدرّب (١) :

هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٤ سم ومساحة قاعدته $٤\sqrt{٣}$ سم^٢ وارتفاعه المائل ٥ سم ، أوجِد مساحته السطحية .

المساحة السطحية للهرم المنتظم = (عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة



مساحة الوجه الواحد = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع

= $\frac{١}{٢}$ × .... × ....

= ....

مساحة القاعدة = ...

المساحة السطحية للهرم المنتظم = ٣ × .... + ...

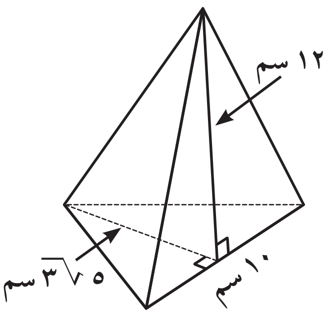
= (.......... + ...) سم^٢

مثال (١) :

هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، وارتفاع قاعدته ٥ √٣ سم ،
وارتفاعه المائل ١٢ سم . أوجد مساحته السطحية .

الحل :

المساحة السطحية للهرم المنتظم = (عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة



مساحة الوجه الواحد = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٢

= ٦٠ سم^{٢}

مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٥ √٣

= ٢٥ √٣ سم^{٢}

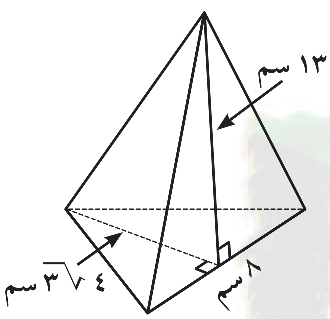
المساحة السطحية للهرم المنتظم = ٣ × ٦٠ + ٢٥ √٣

= (١٨٠ + ٢٥ √٣) سم^{٢}

تدرّب (٢) :

علبة زجاجية على شكل هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٨ سم
وارتفاع القاعدة ٤ √٣ سم وارتفاعه المائل ١٣ سم . أوجد المساحة السطحية للعلبة .

المساحة السطحية للهرم المنتظم = (.................. × ....) + ...



مساحة الوجه الواحد = ...

= ....

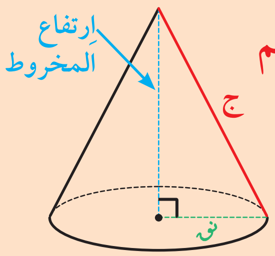
مساحة القاعدة = ...

= ....

المساحة السطحية للهرم المنتظم = ... × .... + ...

= (.......... + ...) سم^{٢}

المخروط الدائري القائم : مجسَّم قاعدته دائرية الشكل وله رأس واحد ، وارتفاعه هو طول العمود المرسوم من رأسه على قاعدته عند مركزها .



المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × طول الراسم

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ π نق × ج

= π نق × ج

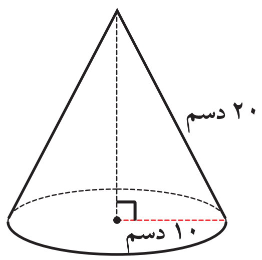
(حيث ج هو طول الراسم)

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= π نق × ج + π نق^{٢}

= π نق (ج + نق)

مثال (٢) :



في الشكل المقابِل مخروط دائري قائم (اعتبر π = ٣,١٤) .

أوجد : (أ) مساحته الجانبية .

(ب) مساحته السطحية .

الحلّ :

(أ) المساحة الجانبية = π نق × ج

= ٣,١٤ × ١٠ × ٢٠

= ٦٢٨ دسم^{٢}

(ب) المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم

= المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٦٢٨ + π نق^{٢}

= ٦٢٨ + ٣,١٤ × (١٠)^{٢}

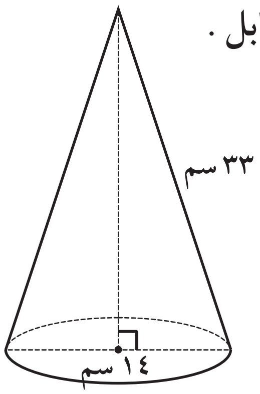
= ٦٢٨ + ٣١٤

= ٩٤٢ دسم^{٢}

تدرّب (٣) :

أوجد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابل .

(اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$) .



نق = ...

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم

= π نق (ج + نق)

= ....

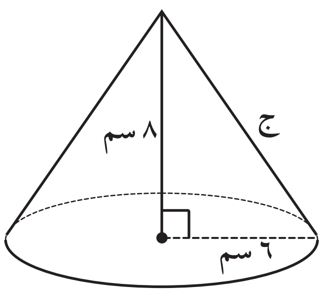
= ....

= ....

تدرّب (٤) :

في الشكل المقابل :

مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم ، أوجد ما يلي :



أ طول الراسم (ج) :

....

....

....

ب المساحة السطحية للمخروط : (بدلالة π)

....

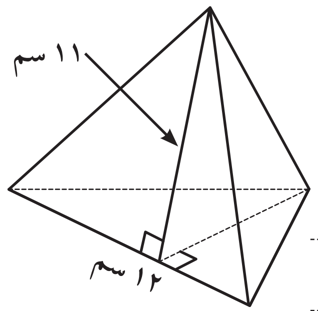
....

....

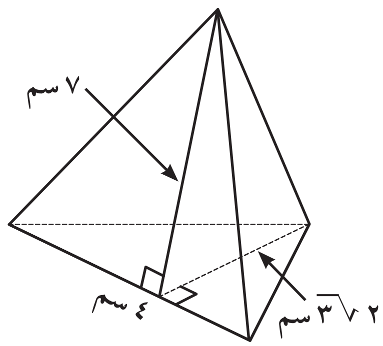
....

تمـــرَّنْ :

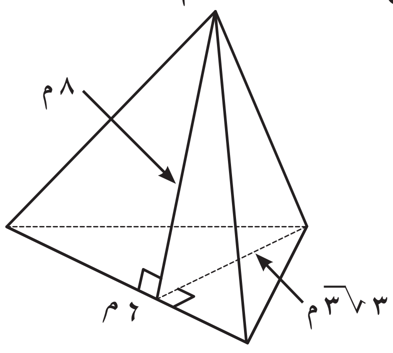
١ هرم ثلاثي منتظم مساحة قاعدته $36\sqrt{3}$ سم^2 ، طول ضلع قاعدته ١٢ سم ، وارتفاعه المائل ١١ سم . أوجد مساحته السطحية .



٢ هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٤ سم وارتفاع قاعدته $2\sqrt{3}$ سم وارتفاعه المائل ٧ سم . أوجد مساحته السطحية .

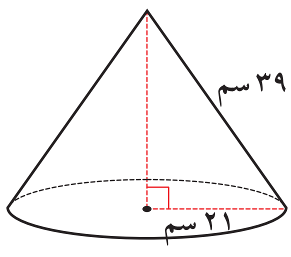


٣ هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٦ م ، وارتفاع قاعدته ٣ $\sqrt{٣}$ م وارتفاعه المائل ٨ م . أوجد المساحة السطحية للهرم المنتظم .



٤ أوجِد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابل .

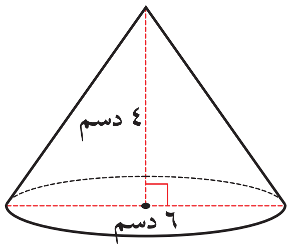
(اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)



٥ **في الشكل المقابِل :**

مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته ٦ دسم

وارتفاعه ٤ دسم ، أوجد ما يلي :



أ طول الراسم (ج) :

ب المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم : (بدلالة π)

٦ **أرادت شركة ورقيات تصنيع قبّعات للأطفال على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٧ سم وطول الراسم ٣٠ سم . احسب المساحة السطحية للورق المستخدم لصناعة القبّعة . (اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)**

٢-١٠ حجم الهرم
Volume of The Pyramid

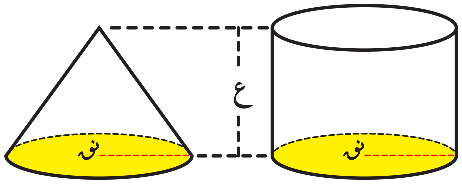
سوف تتعلّم : إيجاد حجم هرم .

العبارات والمفردات :

هرم **Pyramid**

حجم **Volume**

درست فيما سبق العلاقة بين حجم الأسطوانة الدائرية القائمة والمخروط الدائري القائم اللذين لهما نفس القاعدة ونفس الارتفاع .



حجم المخروط الدائري القائم

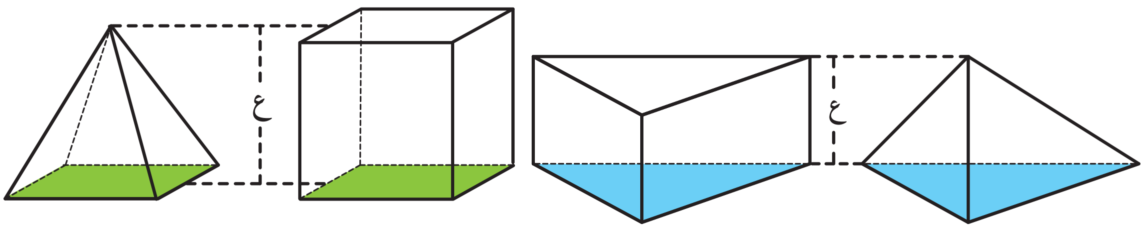
= $\frac{١}{٣}$ × حجم الأسطوانة الدائرية القائمة المشترَكة معه في القاعدة والارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × م × ع

= $\frac{١}{٣}$ × π نق^٢ ع

وبالمثل :



حجم الهرم القائم = $\frac{١}{٣}$ × حجم المنشور القائم المشترَك معه في القاعدة والارتفاع

حجم الهرم القائم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

ح = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

معلومات مفيدة :

بُنيت الأهرامات في الجيزة في مصر من قبل الفراعنة لتحمل معنى الخلود ، فهي عبارة عن مقابر أثرية من ممالك مصر القديمة وشُيِّدت بسبب اعتقاد الفراعنة بالحياة الآخرة .

مثال (١) :

أوجِد حجم الهرم المنتظم الذي قاعدته على شكل مربّع طول ضلعه ٩ سم وارتفاع الهرم ٢٠ سم .

الحلّ :

حجم الهرم المنتظم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

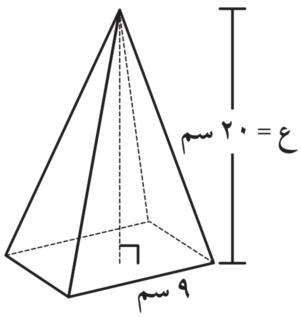
ح = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

ح = $\frac{١}{٣}$ × $(٩)^{٢}$ × ٢٠

ح = $\frac{١}{٣}$ × ٨١ × ٢٠

ح = ٥٤٠ سم^{٣}

∴ حجم الهرم = ٥٤٠ سم^{٣}



تدرّب (١) :

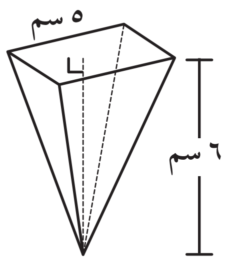
أوجِد حجم الهرم الرباعي القائم الذي قاعدته على شكل مربّع كما في الشكل :

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

= $\frac{١}{٣}$ × (..........)^{٢} × ....

= $\frac{١}{٣}$ × .... × ....

= ....



تدرّب (٢) :

أوجِد حجم المجسَّم في الشكل المقابِل :

مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ × .... × ....

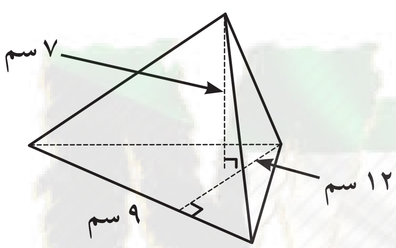
= $\frac{١}{٢}$ × .... × ....

= ....

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × .... × ....

= $\frac{١}{٣}$ × .... × ....

= ....



مثال (٢) :

ينتج أحد مصانع الحلوى قطعًا من الكاكاو على شكل هرم منتظم ، حجم القطعة الواحدة منها ١٦ سم^{٣} وارتفاعها ٦ سم ، أوجِد مساحة قاعدة قطعة الكاكاو .

الحل :

حجم الهرم المنتظم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

١٦ = $\frac{١}{٣}$ × م × ٦

١٦ = ٢ م

م = ٨

∴ مساحة قاعدة قطعة الكاكاو = ٨ سم^{٢}

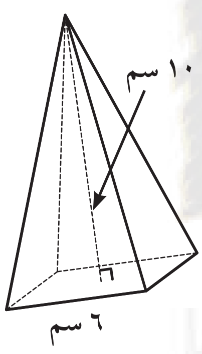
تدرّب (٣) :

تصنع رنا علبة على شكل هرم منتظم ، إذا كان حجم العلبة ٥٥ سم^{٣} ، مساحة قاعدتها ١٥ سم^{٢} ، فما ارتفاع هذه العلبة ؟

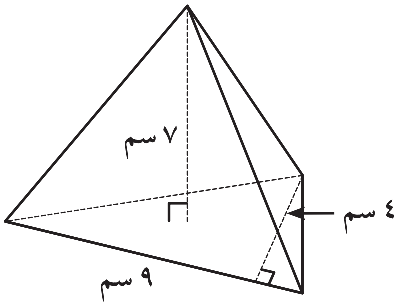
تمــرَّنْ :

١ أوجد حجم المجسَّم في كلّ ممّا يلي :

أ هرم منتظم قاعدته مربّعة الشكل طول ضلعها ٦ سم وارتفاع الهرم ١٠ سم .



ب هرم قاعدته مثلّثة الشكل طول قاعدتها ٩ سم وارتفاعها ٤ سم وارتفاع الهرم ٧ سم .



---

٢ هرم ثلاثي حجمه ١٥٠ سم^{٣} ، إذا كانت مساحة قاعدة الهرم ٢٥ سم^{٢} ، فما ارتفاع هذا الهرم ؟

---

٣ صنع وليد نموذجًا لهرم رباعي منتظم حجمه ٤٠٠ سم^{٣} ، إذا كان ارتفاع الهرم ١٢ سم ، فما طول ضلع قاعدة الهرم ؟

حجم الكرة
Volume of The Sphere

العبارات والمفردات :
حجم Volume
كرة Sphere

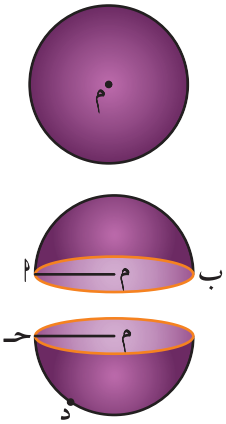
سوف تتعلّم : حساب حجم كرة .

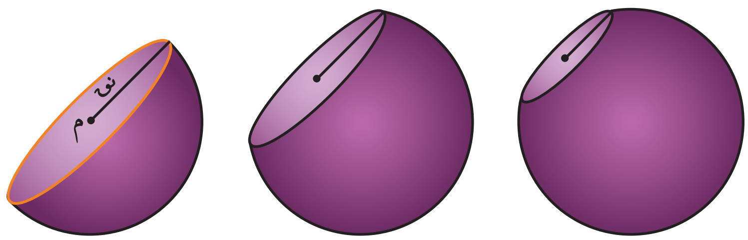
- في الشكل المقابِل كرة مركزها م .
- كلّ نقطة على سطح الكرة تبعد بمقدار ثابت (نق) عن مركز الكرة م .

أي أنّ :

م أ = م ب = م جـ = م د = طول نصف قطر الكرة = نق .

- أيّ مقطع في الكرة هو دائرة .
- الدائرة التي مركزها هو مركز الكرة وطول نصف قطرها نق تُسمّى **دائرة عظمى** للكرة .



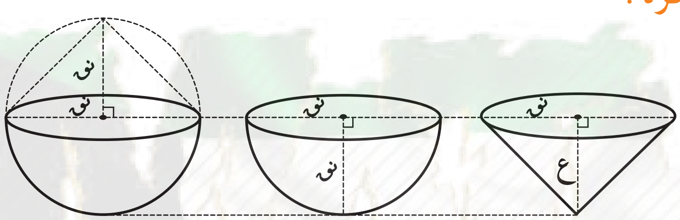


اللوازم :
- مخروط قائم وكرة طول نصف قطرها يساوي ارتفاع المخروط ويساوي طول نصف قطر قاعدة المخروط .
- رمل ملوَّن .

نشاط :

لديك كرة ومخروط وكانت قاعدة المخروط دائرة عظمى في الكرة ، وارتفاع المخروط يساوي طول نصف قطر الكرة .
(قطعت الكرة عند دائرتها العظمى) .

لإيجاد حجم الكرة :



١ اِملأ المخروط بأكمله بكمّية من الرمل الملوّن .

٢ أفرِغ محتوى المخروط في نصف الكرة الأوّل .

٣ كرِّر ما سبق حتّى يمتلئ نصفي الكرة بالرمل الملوَّن .

٤ كم مرّة ملأت المخروط لتعبئة الكرة بأكملها بالرمل الملوَّن ؟ ....

٥ ما العلاقة بين حجم الكرة وحجم المخروط الذي قاعدته دائرة عظمى في الكرة ، وارتفاع المخروط يساوي طول نصف قطر الكرة ؟

حجم الكرة = ... أمثال حجم المخروط

حجم الكرة = ... × $\frac{١}{٣}$ × π نق^٢ ع

∵ ع = ...

∴ حجم الكرة = ... × $\frac{١}{٣}$ × π نق^٢ × ....

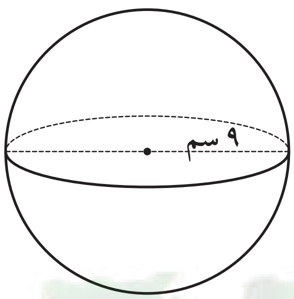
∴ حجم الكرة = ...

ممّا سبق نستنتج أنّ :

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ × π نق^٣

مثال (١) :

أوجِد حجم كرة طول نصف قطرها ٩ سم . (بدلالة π)



الحلّ :

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ × π نق^٣

= $\frac{٤}{٣}$ × π × (٩)^٣

= $\frac{٤}{٣}$ × π × ٩ × ٩ × ٩

= ١٢ × π × ٨١

= ٩٧٢ π سم^٣

تدرّب (١) :

أوجد حجم كرة طول نصف قطرها ٣ سم . (بدلالة π)

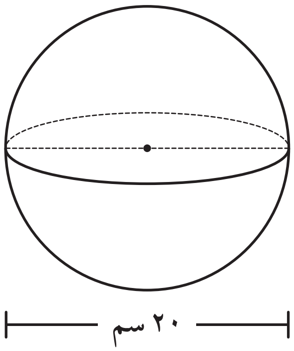
حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

= $\frac{٤}{٣} \times \pi \times$ (..........)^{٣}

= $\frac{٤}{٣} \times \pi \times$ .... $\times$ .... $\times$ ....

= .... سم^{٣}

مثال (٢) :



من خلال الشكل المقابِل :

أوجِد حجم الكرة المرسومة . (اعتبر π = ٣,١٤)

الحل :

نق = ١٠ سم

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

= $\frac{٤}{٣} \times ٣,١٤ \times (١٠)^{٣}$

= $\frac{٤}{٣} \times ٣,١٤ \times ١٠٠٠$

= $\frac{٤}{٣} \times ٣١٤٠$

= $\frac{١٢٥٦٠}{٣}$

$\approx$ ٤١٨٦,٧ سم^{٣}

تدرّب (٢) :

أوجد حجم كرة طول قطرها ١ م . (اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

نق = ... م

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

= ....

= ....

= .... م^{٣}

تدرّب (٣) :

أوجِد حجم قبّة مسجد إذا عُلِم أنّها على شكل نصف كرة طول قطرها ١٢ م .
(بدلالة π)

نق = ...

حجم القبّة = $\frac{١}{٢}$ × ....

= ....

= ....

= ....

= ....

مثال (٣) :

شركة عطور تصمّم زجاجة عطر على شكل كرة حجمها ٣٦ π سم^{٣}،
أوجِد طول قطر الزجاجة .

الحلّ :

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ × π نق^{٣}

∴ $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} = ٣٦ π

$\frac{٣}{٤\pi}$ × $\frac{٤\pi}{٣}$ نق^{٣} = $\frac{٣}{٤\pi}$ × ٣٦ π

نق^{٣} = ٢٧

∴ نق = $\sqrt[٣]{٢٧}$ = ٣ سم

∴ طول قطر زجاجة العطر = ٦ سم

تدرّب (٤) :

كرة حجمها $\frac{٣٢}{٣}$ π م^{٣} . أوجِد طول نصف قطرها.

....

....

....

....

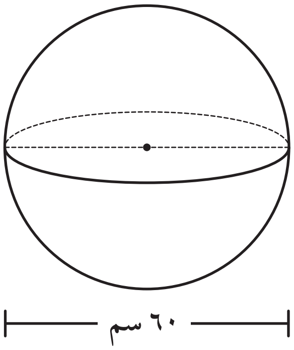
....

تمـــرَّنْ :

١ أوجِد حجم كرة طول نصف قطرها ٦ سم . (بدلالة π)

٢ من خلال الشكل المقابِل :

أوجِد حجم الكرة المرسومة . (بدلالة π)



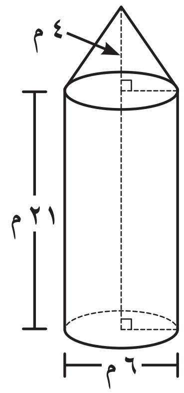
٣ خزّان على شكل نصف كرة ، إذا كان طول قطر الخزّان ٢ م ، فاحسب حجمه . (اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

---

٤ إذا كان حجم كرة $\frac{٢٥٦}{٣}\pi$ م^{٣} ، فاحسب طول نصف قطرها .

١٠-٤ تطبيقات على المساحات السطحية والحجوم
Applications on Surface Areas and Volumes

تدرّب (١) :



صمّم مهندس معماري مئذنة مسجد على شكل أسطوانة دائرية قائمة يعلوها مخروط دائري قائم كما في الشكل ،
طول قطر قاعدة الأسطوانة الدائرية القائمة ٦ م وارتفاعها ٢١ م
وارتفاع المخروط الدائري القائم ٤ م .
أوجد مساحة سطح المئذنة الظاهر . (بدلالة π)

طول نصف القطر = ... م

طول الراسم = ...

= ....

المساحة السطحية للمئذنة = المساحة الجانبية للمخروط + المساحة الجانبية للأسطوانة

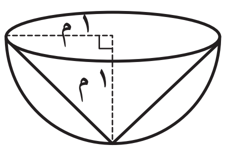
= .... + ...

= ....

= ....

= ....

تدرّب (٢) :



في الشكل المقابِل :
نصف كرة طول نصف قطرها ١ م ، حفر بداخلها مخروط دائري قائم قاعدته دائرة عظمى لنصف الكرة وارتفاع المخروط يساوي طول نصف قطر الكرة .
اُحسب حجم الجزء المتبقّي من المجسم . (بدلالة π)

حجم نصف الكرة = ...

= ....

حجم المخروط = ...

= ....

حجم الجزء المتبقّي = ...

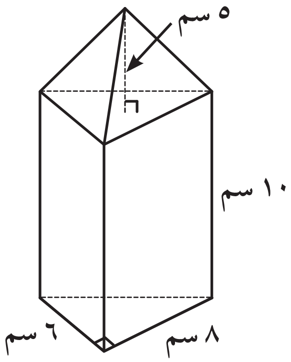
ماذا تلاحظ؟ ....

فكِّر وناقِش

ما أوجه الشبه بين حجم الهرم وحجم المخروط ؟

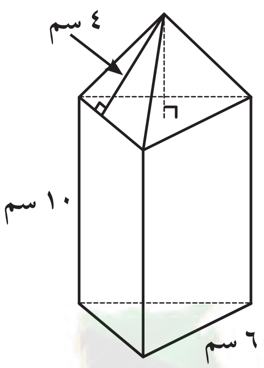
تمـــرَّنْ :

١ في الشكل المقابِل : منشور ثلاثي قائم ارتفاعه ١٠ سم وقاعدته على شكل مثلّث قائم طول ضلعي القائمة فيه ٨ سم ، ٦ سم ، يعلوه هرم ثلاثي قائم له نفس القاعدة وارتفاعه ٥ سم ، أوجد حجم هذا المجسَّم .



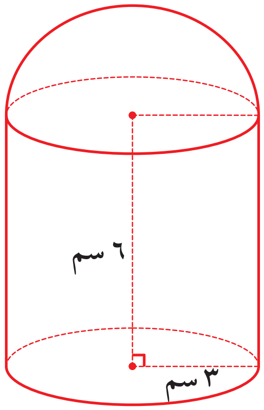
----

* ٢ أرادت ياسمين تغليف علبة على شكل منشور ثلاثي قائم يعلوه هرم ثلاثي منتظم مساحة قاعدته $9\sqrt{3}$ سم^2 كما في الشكل . أوجِد المساحة السطحية للورق المستخدم لتغليف العلبة.



----

٣ في الشكل المقابِل : أسطوانة يعلوها نصف كرة .
أوجد حجم المجسَّم . (بدلالة π)

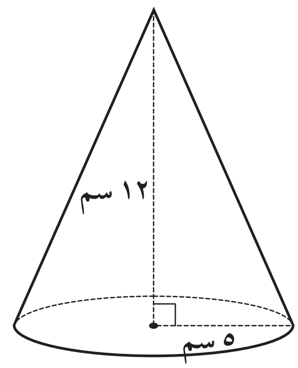


١٠-٥ مراجعة الوحدة العاشرة
Revision Unit Ten

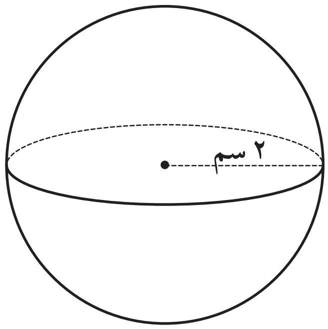
أوّلًا : التمارين المقالية

١ أوجِد كلًّا ممّا يلي (بدلالة π) :

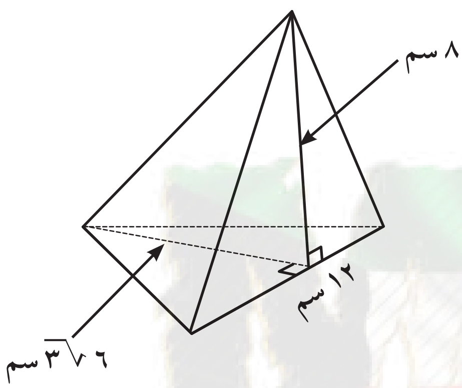
أ المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم .



ب حجم الكرة .

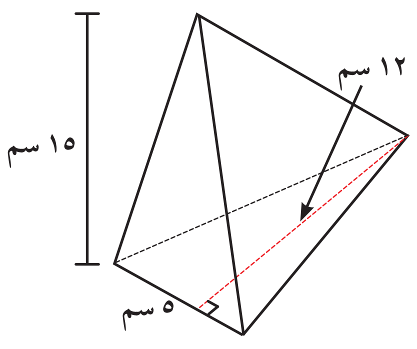


٢ في الشكل المقابل : أوجد المساحة السطحية للهرم الثلاثي المنتظم .

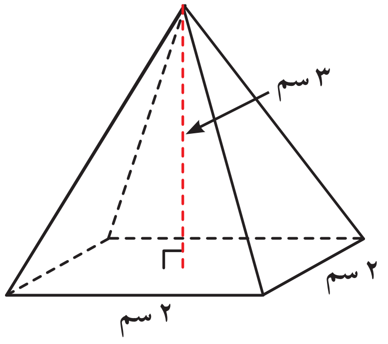


٣ أوجِد حجم كلّ مجسَّم ممّا يلي :

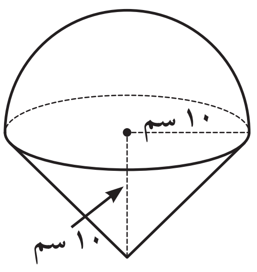
أ



ب



٤ مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ١٠ سم ، يعلوه نصف كرة (كما في الشكل) . اُحسب حجم المجسَّم (بدلالة π) :



٥ خزّان مياه على شكل كرة ، حجمه ٣٦٠٠٠ π دسم^٣ . أوجد طول نصف قطر الخزّان .

ثانيًا : التمارين الموضوعية

أوّلًا : في البنود التالية ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ حجم الكرة التي طول نصف قطرها ١ سم يساوي $\frac{٤}{٣}\pi$ سم^{٣} .	(أ)	(ب)
٢ منشور ثلاثي قائم حجمه ٣٠ سم^{٣} ، فإنّ حجم الهرم الثلاثي القائم المشترَك معه في القاعدة والارتفاع يساوي ٩٠ سم^{٣} .	(أ)	(ب)
٣ إذا كان ارتفاع هرم ١ م ، وقاعدته على شكل مربّع طول ضلعه ٣ م ، فإنّ حجم المنشور القائم الذي له نفس الارتفاع والقاعدة هو ٩ م^{٣} .	(أ)	(ب)
٤ هرم قائم حجمه ١٠٠٠ سم^{٣} ومساحة قاعدته ٥٠٠ سم^{٢} ، فإنّ ارتفاعه ٢٠ سم .	(أ)	(ب)

ثانيًا : لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة .

٥ هرم قائم مساحة قاعدته ٦ سم^{٢} وارتفاعه ١٠ سم ، فإنّ حجمه يساوي :

(أ) ٢٠ سم^{٣} (ب) ٦٠ سم^{٣} (جـ) ١٨٠ سم^{٣} (د) ٦٠٠٠ سم^{٣}

٦ هرم ثلاثي منتظم مساحة قاعدته ٥٠ وحدة مربّعة ومساحة أحد أوجهه الجانبية تساوي ٣٠ وحدة مربّعة ، فإنّ مساحته السطحية بالوحدة المربّعة هي :

(أ) ٨٠ (ب) ١٤٠ (جـ) ١٨٠ (د) ١٥٠٠

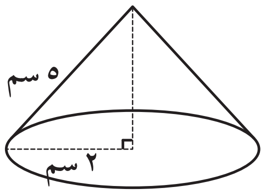
٧ مخروط دائري قائم قاعدته دائرة عظمى في كرة وارتفاعه يساوي طول نصف قطر الكرة ، إذا كان حجمه ٣ π وحدة مكعّبة ، فإنّ حجم الكرة بالوحدة المكعّبة هو :

(أ) π (ب) ٤ π (جـ) ٩ π (د) ١٢ π

٨ حجم كرة طول نصف قطرها ٥ سم يساوي :

(أ) $\frac{٤}{٣} \times ١٢٥$ سم^{٣} (ب) $\frac{٣}{٤} \times ١٢٥\,\pi$ سم^{٣} (جـ) $\pi \times ١٢٥$ سم^{٣} (د) $\frac{٤}{٣}\pi \times ١٢٥$ سم^{٣}

٩ من خلال الشكل المرسوم : المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم تساوي :



أ ١٠ π سم^{٢} ب ١٤ π سم^{٢}

جـ ٢٠ π سم^{٢} د ٢٥ π سم^{٢}

---

١٠ كرتان طول نصف قطر الأولى يساوي ٧ سم وطول نصف قطر الثانية يساوي ١٤ سم ، فإن النسبة بين حجم الكرة الأولى إلى حجم الكرة الثانية هي :

أ ٨ : ١ ب ١ : ٢ جـ ١ : ٦ د ١ : ٨