مؤسسة السعدون للخدمات التعليمية

سلسلة مذكرات

THE GATE

الرياضيات

الصف الحادي عشر - علمي

الفصل الأول

سعر المذكرة : 4 د.ك

22210444

إعداد نخبة من أفضل الكوادر التعليمية على مستوى الكويت

فكرة وإشراف وإدارة: أ. عبدالله السعدون

التحذير القانوني

- ✓ إن الملكية الفكرية هي نتاج فكر الإنسان من إبداعات مثل المؤلفات والكتب والأبحاث والاختراعات، ولا تختلف حقوق الملكية الفكرية عن حقوق الملكية الأخرى ، في تمكن مالك الحق من الاستفادة من عمله بشتى الطرق،العمل الذي كان مجرد فكرة ' ثم تبلور إلى أن أصبح في صورة منتج ' ولهذا الحق للمالك منع الآخرين من التعامل في ملكه دون الحصول على إذن مسبق منه ' كما يحق له مقاضاتهم في حال التعدي على حقوقه والمطالبة بوقف التعدي أو وقف استمراره ' ومن هنا فإن القانون يحمي حقوق الملكية الفكرية من أي اعتداء عليها ' ويحق للمتضرر طلب التعويض مادياً ومعنوياً ' بالإضافة إلى الشق الجزائي الذي يقع على المعتدي .
- ✓ لا يجوز نشر أو تصوير أي جزء من هذه المذكرة أو تفريغ محتواها حيث إن هذه المادة العلمية مودعة في المكتبة الوطنية في تاريخ (25 / 10 / 2016) رقم الإيداع (109690)
- ✓ وتم إيداعها أيضا في قسم المطبوعات في وزارة الإعلام وتم حفظ حقوق الطبع و أخذ إذن نشر هذه المطبوعات في تاريخ (30 / 10 / 2016) وقد اقتضى هذا التنويه والتوضيح .

المقدّمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على معلم الناس الخير سيدنا محمد و على آله و صحبه أجمعين و بعد:

فإن الله تعالى كرم الانسان، و من عظيم تكريمه له أن جعله عاقلا، و اول ما امر به عبده العاقل قوله تعالى بعد أعوذ بالله من الشيطان الرجيم

اقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ (1) خَلَقَ الْإِنْسَانَ مِنْ عَلَقٍ (2) اقْرَأْ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ (3) الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ (4) عَلَّمَ الْإِنْسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْ (5)

- و لأن مسيرة العلم و القلم هي أعظم مسيرة يقودها الانسان في حياته فقد عملنا جاهدين على أن نكون أحد رواد هذه المسيرة العظيمة ممتثلين أمر الله تعالى بقوله (اقرأ) ثم خادمين لطلاب العلم و رواد المعرفة، و لاشي أهم في المسيرة العلمية من أبنائنا الطلبة، فهم أحوج ما يكون للرائد الذي يدلهم و المنارة التي تضيء لهم درب المعرفة، و لهذا كله فقد و ضعنا بين يدي السادة أولياء الأمور الأكارم و أبنائنا الطلبة الأعزاء عملا نحسبه جديرا بالريادة، و حريا بالاهتمام و الاقتناء.
- إنها (The Gate) بوابتكم إلى النجاح، و طريقكم إلى المعرفة و رائدكم إلى النجاح و التفوق.
- لقد عملنا في (The Gate) على أن تكون إبداعية متميزة في مادتها العلمية و إخراجها و تنسيقهاو خدمتها لتكون أهلا للريادة.
- (The Gate) عملنا فيها جاهدين لتكون سهلة التناول غنية المعلومات واضحة المعالم تغني الطالب العزيز عن سواها.
- لم نرد من خلال هذه المقدمة أن نكون مداحين لأنفسنا و جهدنا، فالطالب هو الحكم في هذا و الميدان خير دليل على الريادة.
- نضيف إلى ذلك أننا أنجزنا هذه المذكرة وفقا لنظام المناهج و التوجهات الجديدة لوزارة التربية حول كيفية معالجة الدروس و الامتحانات المقررة راجين من المولى عز و جل في علاه أن نكون قد وفقنا إلى تقديم هذا العمل ليكون مشاعل نور يهتدي بها طلابنا الأعزاء فتحميهم من الخطأ و الزلل والله ولي ذلك والقادر عليه.

The Gate

مذكرات تعليمية تشرح المنهج و تساعد الطالب على معرفة كل ما استصعب عليه في منهجه العلمي.

ما يميز مذكرة The Gate:

- ✓ عرض المادة العلمية بطريقة مشوقة و سلسة و أمثلة تطبيقية مساعدة.
- ✓ نماذج امتحانية مع إجابات تساعد الطالب في معرفة آلية الاختبار و جزئياته.
- ✓ نماذج امتحانية من غير إجابات يتدرب من خلالها الطالب على التعامل مع الامتحانات بطريقة عملية مفيدة.
- ✓ تُعد المذكرة نموذجا متكاملا للمنهج المقرر بأسلوب عملي بسيط واضح المعالم، سهل التناول.
- ✓ تحتوي المذكرة على فهارس منظمة تساعد الطالب على الوصول إلى الدرس المطلوب و المادة العلمية المستهدفة دون عناء.
- ✓ الإخراج المميز من حيث الطباعة و الألوان و التنسيق، و كل هذا يجعل المذكرة غير مسبوقة فى هذا المجال.
- ✓ إن أهم ما يميز (The Gate) أنها تواكب على نحو مستمر التغيرات و التطورات التي تطرأ على المناهج. حيث تقوم الكوادر العملية المختصة بالمراجعة والتنقيح قبل بداية كل فصل دراسي مراعين الأطر و التوجيهات التربوية الحديثة.

المحتويات

الجذور والتعبيرات الجذرية

مقدمة :

لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب : $A^2 = x \Rightarrow A = \pm\sqrt{x}\ ; x \geq 0$

لكل عدد حقيقي جذرتكعيبي واحد فقط : $A^3 = x \Rightarrow A = \sqrt[3]{x}$

ويتحقق : $(\sqrt[3]{x})^3 = \sqrt[3]{x^3} = x \quad ; x \in \mathbb{R}$

$(\sqrt{x})^2 = x \qquad x \geq 0$

ويتحقق : $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

تبسيط الجذور :

حتى يكون التعبير الجذري في أبسط صورة يجب مراعاة مايلي:

1) ألا يكون للمجذور عوامل مرفوعة لقوى أكبر او تساوي دليل الجذر .

مثلاً : $\sqrt{8a^6}$ ليس في أبسط صورة.

2) ألا يكون المقام جذرا.

3) ألا يكون المجذور كسرا.

4) أن يكون دليل الجذر أصغر عدد صحيح موجب ممكن .

مثال (1) بسط كل من التعبيرات الجذرية التالية ((لكل عدد حقيقي x)):

$\sqrt[3]{-27\,x^6} + 3x^2$ ، $\sqrt{x^8\,y^6}$

الحل :

$$\sqrt[3]{-27\,x^6} + 3x^2 = \sqrt[3]{(-3x^2)^3} + 3x^2$$
$$= -3x^2 + 3x^2 = 0$$

$$\sqrt{x^8\,y^6} = \sqrt{(x^4\,y^3)^2} = x^4\,|y^3| = \begin{cases} x^4\,y^3 & y \geq 0 \\ -x^4\,y^3 & y < 0 \end{cases}$$

تطبيق : بسط التعبير الجذري : $\sqrt[3]{8y^3x^6}$

جمع وطرح التعبيرات الجذرية :

عند جمع وطرح التعبيرات الجذرية يجب أن تكون متشابهة (أي أن دليل الجذرنفسه والمجذور نفسه)

مثال (2) أوجد الناتج في أبسط صورة :

a) $2\sqrt{75} - \sqrt{48}$ b) $4\sqrt[3]{8} + 2\sqrt[3]{128}$

c) $\sqrt{12} + \sqrt{147} - \sqrt{27}$ d) $\sqrt[3]{320} + \sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135}$

الحل :

a) $2\sqrt{75} - \sqrt{48} = 2\sqrt{5^2 \times 3} - \sqrt{4^2 \times 3}$

$= 2\sqrt{5^2} \times \sqrt{3} - \sqrt{4^2} \times \sqrt{3}$

$= 2 \times 5 \times \sqrt{3} - 4 \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

تعلّم :

1) حلل واكتب الأسس
2) فكك الجذور
3) بسط ثم اكتب الناتج

$b)\ 4\sqrt[3]{8} + 2\sqrt[3]{128} = 4\sqrt[3]{2^3} + 2\sqrt{2^6 \times 2}$

$= 4 \times 2 + 2\sqrt[3]{2^6} \times \sqrt[3]{2}$

$= 8 + 2 \times 4 \times \sqrt[3]{2} = 8 + 8\sqrt[3]{2}$

$c)\ \sqrt{12} + \sqrt{147} - \sqrt{27} = \sqrt{2^4 \times 3} + \sqrt{7^2 \times 3} - \sqrt{3^2 \times 3}$

$= \sqrt{2^4} \times \sqrt{3} + \sqrt{7^2} \times \sqrt{3} - \sqrt{3^2} \times \sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$d)\ \sqrt[3]{320} + \sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{2^6 \times 5} + \sqrt[3]{2^3 \times 5} - \sqrt[3]{3^3 \times 5}$

$= \sqrt[3]{2^6} \times \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{5}$

$= 2^2 \times \sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{5} = 3\sqrt[3]{5}$

تطبيق : أوجد الناتج في أبسط صورة $\sqrt{18} + 3\sqrt{50} - \sqrt{72}$

ضرب وقسمة الجذور التربيعية والتكعيبية :

لا بد قبل ذلك عرض بعض الخواص في الضرب و القسمة :

1) $\sqrt[3]{x^3} = x$ ، $\sqrt{x^2} = x \quad ; x \in \mathbb{R}^+$

2) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$ ، $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$

3) $\sqrt[3]{x\,y} = \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y}$ ، $\sqrt{x\,y} = \sqrt{x}\,\sqrt{y}$

4) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[2]{y}} \quad ; y \neq 0$ ، $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad ; y \neq 0$

مثال (3) بسط التعبيرات الجذرية التالية $\dfrac{\sqrt[3]{128\,x^{15}}}{\sqrt[3]{2\,x^2}}$ ، $\dfrac{\sqrt[3]{250\,x^7y^3}}{\sqrt[3]{2\,x^2\,y}}$

الحل :

$$\frac{\sqrt[3]{50\,x^7y^3}}{\sqrt[3]{2\,x^2\,y}} = \sqrt[3]{\frac{250\,x^7y^3}{2\,x^2\,y}} = \sqrt[3]{125\,x^5\,y^2} = \sqrt[3]{5^3}\ \sqrt[3]{x^3\,x^2}\ \sqrt[3]{y^2}$$

$$= 5\,x\,\sqrt[3]{x^2}\ \sqrt[3]{y^2} = 5x\ \sqrt[3]{x^2y^2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{128\,x^{15}}}{\sqrt[3]{2\,x^2}} = \sqrt[3]{\frac{128\,x^{15}}{2\,x^2}} = \sqrt[3]{64\,x^{13}} = \sqrt[3]{64}\ \sqrt[3]{(x^4)^3\,x} = 4\,x^4\,\sqrt[3]{x}$$

تطبيق :بسط التعبير الجذري التالي :، $4\sqrt[3]{x^4y} \times 3\sqrt[3]{x^2y}$

تبسيط كسر مقامه يتضمن جذراً :

إن مرافق $a - \sqrt{b}$ **هو** $a + \sqrt{b}$ **ويتحقق:** $(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b}) = (a)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 \quad ; b > 0$

مثال (4) **اكتب كل كسر بحيث يكون المقام عددا نسبياً :** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}$ ، $\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x}$ ، $\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; حيث $(x > 1)$

الحل

$$\frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}} \times \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}+2-3-\sqrt{2}}{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}-1}{7}$$

تعلّم :
1) أضرب واقسم على مرافق المقام
2) بسط البسط والمقام
3) بسط الناتج

$$\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x}=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x}\times\frac{\sqrt{x}+9x}{\sqrt{x}+9x}=\frac{x\sqrt{x}+9x^2+x+9x\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2-(9x)^2}$$

$$=\frac{9x^2+10\,x\sqrt{x}+x}{x-81\,x^2}$$

$$=\frac{x\,(9\,x+10\sqrt{x}+1)}{x\,(1-81\,x)}=\frac{9\,x+10\sqrt{x}+1}{1-81\,x}$$

$$\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{x\,\sqrt{x}+x+x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2-(1)^2}=\frac{x\,\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}}{x-1}$$

تطبيق : اكتب كل كسر بحيث يكون المقام عددا نسبياً : $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

مثال (5) أوجد قيمة التعبير : x^2-6 إذا كان $x=\frac{4}{\sqrt{5}-1}$

الحل : أولاً نبسط x :

$$x=\frac{4}{\sqrt{5}-1}\times\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\sqrt{5}+1$$

الآن نعوض :

$$x^2-6=\left(\sqrt{5}+1\right)^2-6$$

$$=\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}+1-6$$

$$=2\sqrt{5}$$

الأسس النسبية

يمكن التحويل من الصورة الجذرية للصورة الاسية من خلال القاعدة التالية :
إذا كان الجذر النوني للعدد x هو عدد حقيقي :

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \qquad ; n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ، } n \geq 2 \text{ ، } m \in \mathbb{Z}$$

ويكون :
$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & n \text{ زوجي} \\ x & n \text{ فردي} \end{cases}$$

مثال (1) اكتب بالصورة الجذرية : $y^{0.4}$

الحل :
$$y^{0.4} = y^{\frac{4}{10}} = y^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{y^2}$$

مثال (2) اكتب بالصورة الاسية : $\left(\sqrt{y}\right)^3$ ، $y > 0$

الحل :
$$\left(\sqrt{y}\right)^3 = \sqrt{y^3} = y^{\frac{3}{2}}$$

قوانين الأسس النسبية :

1) $b^m . b^n = b^{m+n}$
2) $(b^m)^n = b^{m.n}$
3) $(a \, . \, b)^m = a^m . b^m$
4) $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$
5) $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n} \; ; b \neq 0$
6) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \; ; b \neq 0$

مثال (3) بسط مايلي ((مستخدماً قوانين الأسس)):

a) $\left(x^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{5}{6}}\right) \div x^{\frac{2}{3}} \quad ; x > 0$ ، b) $\left(\frac{16\, x^{14}}{81\, y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ; x \geq 0 \text{ ، } y > 0$

الحل :

$$\left(x^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{5}{6}}\right) \div x^{\frac{2}{3}} = \left(x^{\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}\right) \div x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{3}} \div x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\left(\frac{16\, x^{14}}{81\, y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(16)^{\frac{1}{2}} \left(x^{14}\right)^{\frac{1}{2}}}{(81)^{\frac{1}{2}} \left(y^{18}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(4^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(x^{14}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(9^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(y^{18}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4^{2\times\frac{1}{2}} \, x^{14\times\frac{1}{2}}}{9^{2\times\frac{1}{2}} \, y^{18\times\frac{1}{2}}} = \frac{4\, x^7}{9\, y^9}$$

قوانين الجذور النونية :

إذا كان $\sqrt[n]{x} . \sqrt[n]{y}$ عددين حقيقين :

$$\sqrt[n]{x} . \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x\, y}$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \qquad y \neq 0$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n.m]{x}$$

مثال (4) بسط كل من التعبيرات التالية :

$$\left(\left(\sqrt{x^3y^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} \quad ، \quad \left(\sqrt[4]{x}\,.\sqrt[4]{y^3}\right)^{-12} \qquad x ، y \in \mathbb{Q}^+$$

الحل :

$$\left(\left(\sqrt{x^3y^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} = ((\sqrt{x^3}.\sqrt{y^3})^{\frac{1}{3}})^{-1}$$

$$= ((x^{\frac{3}{2}}.y^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}})^{-1}$$

$$= x^{\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}\times -1}.y^{\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}\times -1}$$

$$= x^{-\frac{1}{2}}.y^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}.\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{xy}} \times \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{xy}}{xy}$$

تعلّم :

في تبسيط التمارين التي تحتوي جذورا وأسس : نحول الجذر للصيغة الأسية ليصبح كامل التمرين بالصيغة الاسية ثم نطبق قوانين الاسس

$$\left(\sqrt[4]{x}\,.\sqrt[4]{y^3}\right)^{-12} = \left(x^{\frac{1}{4}}\,.y^{\frac{3}{4}}\right)^{-12} = x^{\frac{1}{4}\times -1}\,.y^{\frac{3}{4}\times -12}$$

$$= x^{-3}.y^{-9}$$

$$= \frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{y^9}$$

$$= \frac{1}{x^3\cdot y^9}$$

مثال (5) بسط التعبير الجذري : $t > 0$ $\left(\frac{\sqrt{9t}}{\sqrt[3]{27t^3}}\right)^{-12}$:

الحل.

$$\left(\frac{\sqrt{9t}}{\sqrt[3]{27t^3}}\right)^{-12} = \left(\frac{\sqrt{9}\,\sqrt{t}}{\sqrt[3]{27}\,\sqrt[3]{t}}\right)^{-12}$$

$$= \left(\frac{3\,t^{\frac{1}{2}}}{3\,t^{\frac{1}{3}}}\right)^{-12} = \left(t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\right)^{-12}$$

$$= t^{\frac{1}{6}\times -12} = t^{-2} = \frac{1}{t^2}$$

تطبيق : بسط التعبير التالي : $\sqrt{\sqrt[4]{246}}$

حل المعادلات

1) **المعادلات الجذرية** : معادلة يكون طرفها جذر أو أس المتغير عدداً نسبياً ليس صحيحا .

تعلّم
طريقة حل المعادلة الجذرية
1) نفصل الجذر
2) نضع الشرط لكل جذر
3) رفع الطرفين لأس يناسب الجذر
4) التحقق

مثال (1) أوجد مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{5x+4}-7=0$

الحل :

$\sqrt{5x+4}=7$

الشرط : $5x+4\geq 0$

$x\geq \frac{-4}{5}$

$x\in\left[\frac{-4}{5}\text{ ، }\infty\right)$

بتربيع الطرفين $\left(\sqrt{5x+4}\right)^2=7^2$

$5x+4=49$

$5x=49-4$

$x=9\in\left[\frac{-4}{5}\text{ ،}\infty\right)$

م.ح $=\{9\}$

مثال (2) أوجد مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{x-2}+9=0$

الحل

$\sqrt{x-2}=-9$

معادلة مستحيلة و م.ح $=\emptyset$

قاعدة : m عدد زوجي $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}}=|x|$

m عدد فردي $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}}=x$

مثال (3) أوجد مجموعة حل المعادلة : $2(x-2)^{\frac{2}{3}}=50$

الحل :

$(x-2)^{\frac{2}{3}}=25$

البسط زوجي $\left((x-2)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=(25)^{\frac{3}{2}}$

$|x-2|=125$

إما $x-2=-125$ أو $x-2=125$

$x=-123$ $x=127$

م.ح $=\{127\text{ ، }-123\}$

مثال (4) أوجد مجموعة حل المعادلة : $2(x+3)^{\frac{3}{2}}-54=0$

الحل :

$2(x+3)^{\frac{3}{2}}=54$

$(x+3)^{\frac{3}{2}}=27$

البسط فردي $\left((x+3)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=(27)^{\frac{2}{3}}$

$x+3=9$

$x=6$

م.ح $=\{6\}$

تطبيق :حل المعادلة: $(1-x)^{\frac{2}{5}}-4=0$

تعلّم
طريقة حل معادلة جذرية طرفها الآخر حدودية
1) نفصل الجذر
2) نضع الشرط لكل طرف
3) رفع الطرفين لأس يناسب الجذر
4) التحقق

حل معادلة جذرية طرفها الآخر حدودية :

مثال (5) أوجد مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{5x-1}+3=x$

الحل :
$$\sqrt{5x-1}=x-3$$

شرط الحل : $x-3\ge 0$ ، $5x-1\ge 0$

$x\ge 3$ ، $x\ge \frac{1}{5}$

$x\in[3،\infty)$ ، $x\in\left[\frac{1}{5}،\infty\right)$

ويكون شرط الحل المشترك $x\in[3،\infty)$

بالتربيع :
$$(\sqrt{5x-1})^2=(x-3)^2$$
$$5x-1=x^2-6x+9$$
$$x^2-6x-5x+9+1=0$$
$$x^2-11x+10=0$$
$$(x-10)(x-1)=0$$
$$x=10\in[3،\infty) \quad ، \quad x=1\notin[3،\infty)$$
$$\text{م.ح}=\{10\}$$

تطبيق :أوجد مجموعة حل المعادلة : $5+\sqrt{x-3}=x$

مثال (6) أوجد مجموعة حل المعادلة $\sqrt{5x}-\sqrt{2x+9}=0$

الحل :
$$\sqrt{5x}=\sqrt{2x+9}$$

شرط الحل : $2x+9\ge 0$ ، $5x\ge 0$

$x\ge -\frac{9}{2}$ ، $x\ge 0$

$x\in[-4.5\ ،\infty)$ ، $x\in[0،\infty)$

ويكون شرط الحل المشترك $x\in[0\ ،\infty)$

بالتربيع :
$$(\sqrt{5x})^2=(\sqrt{2x+9})^2$$
$$5x=2x+9$$
$$5x-2x=9$$
$$x=3\quad\in[0\ ،\infty)$$
$$\text{م.ح}=\{3\}$$

مثال (7) أوجد مجموعة حل المعادلة $\sqrt{8x}-2\sqrt{4x-16}=0$

الحل :
$$\sqrt{8x}=2\sqrt{4x-16}$$

شرط الحل : $4x-16\ge 0$ ، $8x\ge 0$

$x\ge 4$ ، $x\ge 0$

$x\in[4\ ،\infty)$ ، $x\in[0\ ،\infty)$

ويكون شرط الحل المشترك $x\in[4\ ،\infty)$

بالتربيع :
$$(\sqrt{8x})^2=(2\sqrt{4x-16})^2$$
$$8x=4(4x-16)$$
$$8x=16x-64$$
$$8x-16x=-64$$
$$x=8\quad\in[4\ ،\infty)\quad\Rightarrow \text{م.ح}=\{3\}$$

مثال (8) أوجد مجموعة حل المعادلة $\sqrt{x-7}+\sqrt{3x-21}=0$

الحل : $\sqrt{x-7}=-\sqrt{3x-21}$

وهذا لا يتحقق إلا إذا كان كل من الطرفين يساوي صفر

$x-7=0 \Rightarrow 0\ \ x=7$

$3x-21=0 \Rightarrow x=7$

م.ح $=\{7\}$

2) **حل المعادلة الأسية :** كل معادلة تتضمن أس يحوي متغير

مثال (1) أوجد مجموعة حل المعادلة : $\left(\frac{3}{4}\right)^{x}=\left(\frac{64}{27}\right)$

الحل : $\left(\frac{3}{4}\right)^{x}=\left(\frac{4^3}{3^3}\right)$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{x}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$

$x=-3 \Rightarrow$ م.ح $=\{3\}$

مثال (2) أوجد مجموعة حل المعادلة : $3^{x^2+5}=\frac{1}{81}$

الحل : $3^{x^2+5x}=\frac{1}{3^4}$

$3^{x^2+5x}=3^{-4}$

$x^2+5x=-4$

$x^2+5x+4=0$

$(x+1)(x+4)=0$

$x=-1$ ، $x=-4$

م.ح $=\{-1 ، -4\}$

مثال (3) أوجد مجموعة حل المعادلة : $7^{x^2-3}=\frac{1}{49}$

الحل : $7^{x^2-3x}=\frac{1}{7^2}$

$7^{x^2-3x}=7^{-2}$

$x^2-3x=-2$

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$x=1$ ، $x=2$

$\Rightarrow$ م.ح $=\{1،2\}$

تطبيق :أوجد مجموعة حل المعادلة : أوجد مجموعة حل المعادلة : $3^{x^2-1}=27$

تمارين الوحدة

الأسئلة المقالية :

تمرين (1) أوجد الناتج في أبسط صورة : $3\sqrt[3]{16}-3\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{128}$

الحل

$$3\sqrt[3]{16}-3\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{128}=3\sqrt[3]{2^3\times 2}-3\sqrt[3]{3^3\times 2}+\sqrt[3]{2^6\times 2}$$
$$=3\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^6}\times\sqrt[3]{2}$$
$$=3\times 2\sqrt[3]{2}-3\times 3\sqrt[3]{2}+2^2\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}$$

تمرين (2) بسط التعبير الجذري التالي :$u\neq 0$ ، $v\neq 0$: $\sqrt[3]{256\,u^5v}\div\sqrt[3]{4u^2v^{10}}$

الحل :

$$\sqrt[3]{256\,u^5v}\div\sqrt[3]{4u^2v^{10}}=\sqrt[3]{\frac{256\,u^5v}{4u^2v^{10}}}$$
$$=\sqrt[3]{\frac{64\,u^3}{v^9}}=\frac{\sqrt[3]{64}\,\sqrt[3]{u^3}}{\sqrt[3]{(v^3)^3}}=\frac{4\,u}{v^3}$$

تمرين (3) أوجد قيمة التعبير x^2-x+1 إذا كان $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

الحل : بما أن المقام لا يحوي جذراً نعوض :

$$x^2-x+1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+1$$
$$=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1$$
$$=\frac{1+2\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5}}{4}+1=\frac{4}{4}+1=2$$

تمرين (4) أوجد الناتج في أبسط صورة : $\dfrac{(32)^{\frac{1}{2}}\times(16)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{64}}$

الحل :

$$\frac{(32)^{\frac{1}{2}}\times(16)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{64}}=\frac{(2^5)^{\frac{1}{2}}\times(2^4)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{2^6}}=\frac{(2)^{\frac{5}{2}}\times(2)^{\frac{4}{3}}}{2}$$
$$=\frac{2^{\frac{5}{2}+\frac{4}{3}}}{2}=2^{\frac{23}{6}-1}=2^{\frac{17}{6}}$$

تمرين (5) أوجد مجموعة حل المعادلة : $2(2x+4)^{\frac{3}{4}}=16$

الحل :

$$2(2x+4)^{\frac{3}{4}}=16$$
$$(2x+4)^{\frac{3}{4}}=8$$
$$\left((2x+4)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}=8^{\frac{4}{3}}$$
$$2x+4=16$$
$$2x=12\Rightarrow x=6$$

م.ح $=\{6\}$

تمرين (6) أوجد مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{3x+13}-5=x$

الحل:

$$\sqrt{3x+13}=x+5$$

شرط الحل : $x+5\geq 0$ | $3x+13\geq 0$

$x\geq -5$ | $x\geq -\frac{13}{3}$

$x\in[-5،\infty)$ | $x\in\left[-\frac{13}{3}،\infty\right)$

ويكون شرط الحل المشترك $x\in\left[\frac{-1}{3}،\infty\right)$

بالتربيع :

$$(\sqrt{3x+13})^2=(x+5)^2$$

$$3x+13=x^2+10x+25$$

$$x^2+10x-3x+25-13=0$$

$$x^2+7x+12=0$$

$$(x+3)(x+4)=0$$

$$x=-3\in\left[-\frac{13}{3}،\infty\right) \quad ، \quad x=-4\in\left[-\frac{13}{3}،\infty\right)$$

$$\text{م.ح}=\{-3،-4\}$$

تمرين (7) أوجد مجموعة حل المعادلة : $(x+3)^{\frac{1}{2}}-1=x$

الحل :

$$(x+3)^{\frac{1}{2}}=x+1$$

شرط الحل : $x+1\geq 0$ | $x+3\geq 0$

$x\geq -1$ | $x\geq -3$

$x\in[-1،\infty)$ | $x\in[-3،\infty)$

ويكون شرط الحل المشترك $x\in[-1،\infty)$

بالتربيع :

$$((x+3)^{\frac{1}{2}})^2=(x+1)^2$$

$$x+3=x^2+2x+1$$

$$x^2+2x-x+1-3=0$$

$$x^2+x-2=0$$

$$(x-1)(x+2)=0$$

$$x=1\in[-1،\infty) \quad ، \quad x=-2\notin[-1،\infty)$$

$$\text{م.ح}=\{1\}$$

تمرين (8) أوجد مجموعة حل المعادلة : $(3x+2)^{\frac{1}{2}}=(2x+7)^{\frac{1}{2}}$

الحل : بما أن مقام الاس النسبي زوجي نوجد شرط الحل

شرط الحل : $2x+7\geq 0$ | $3x+2\geq 0$

$x\geq -\frac{7}{2}$ | $x\geq \frac{-2}{3}$

$x\in\left[-\frac{7}{2}،\infty\right)$ | $x\in\left[\frac{-2}{3}،\infty\right)$

ويكون شرط الحل المشترك $x\in\left[-\frac{2}{3}،\infty\right)$

بالتربيع :

$$((3x+2)^{\frac{1}{2}})^2=((2x+7)^{\frac{1}{2}})^2$$

$$3x+2=2x+7$$

$$3x-2x=7-2$$

$$x=5\in\left[-\frac{2}{3}،\infty\right)$$

$$\text{م.ح}=\{5\}$$

تمرين (9) أوجد مجموعة حل المعادلة : $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^{x}$

الحل :

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{5^3}{2^3}\right)^{x}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3x}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3x}$$

$$x-1 = -3x$$

$$x+3x = 1 \quad \Rightarrow \quad 4x = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}$$

م.ح $= \{\frac{1}{4}\}$

تمرين (10) أوجد مجموعة حل المعادلة : $2^{x^2-4} = 32$

الحل :

$$2^{x^2-4} = 32$$

$$2^{x^2-4} = 2^5$$

$$x^2-4 = 5$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

م.ح $= \{\pm 3\}$

الأسئلة الموضوعية :

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة .

1) $|m| \times \sqrt{m^2} = m^2 \quad , m \in \mathbb{R}$ — (a) (b)

2) $\sqrt[4]{\sqrt{x}} = x \quad , x > 0$ — (a) (b)

3) مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{x-1} = \sqrt{1-x}$ هي $\{0\}$ — (a) (b)

4) مجموعة حل المعادلة : $25^{|x|+\frac{1}{2}} = 5^{1-2x}$ هي $\mathbb{R}^-$ — (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة .

1) إذا كان $y > 0$ فإن قيمة التعبير $\dfrac{56^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{5}{3}}}{(7y^2)^{\frac{1}{3}}}$ تساوي

(a) $14y$ (b) $\frac{1}{7}y$ (c) $2y$ (d) $\frac{8}{7}y$

2) إذا كان $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ فإن :

(a) $\varphi^2 + \varphi = 1$ (b) $\varphi^2 = \varphi + 1$ (c) $\varphi^2 + \varphi + 1 = 0$ (d) $\varphi^2 + 1 = \varphi$

3) إن قيمة التعبير $x > 0$, $\dfrac{\sqrt[3]{x^6}\ \sqrt[4]{x^5}}{x^3\ \sqrt[8]{x^2}}$

(a) x (b) $\frac{1}{x}$ (c) 1 (d) $\sqrt{x}$

4) $,x \neq 0 \text{ ، } y \neq 0$ $\quad \left(\sqrt[4]{x^{-2}y^4}\right)^{-2} =$

(a) $|x^{-1}|\, y^{2}$ (b) $|x|\, y^{-2}$ (c) xy^2 (d) $x^{-2}y^2$

5) مجموعة حل المعادلة: $\left(\sqrt{x^{20}}\right)^{\frac{1}{5}} - x^2 = 0$

(a) $\{0\}$ (b) $\mathbb{R}^+$ (c) $\mathbb{R}^-$ (d) $\mathbb{R}$

6) مجموعة حل المعادلة : $x^2 = |x|$

(a) $\{-1 \text{،} 1 \text{،} 0\}$ (b) $\{1 \text{،} 0\}$ (c) $\{0\}$ (d) $\{-1\}$

7) إذا كان $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} = 3^{2-x}$ فإن x تساوي :

(a) -2 (b) 2 (c) -4 (d) 4

8) إذا كان $x + y = 2$ ، $x^2 - xy + y^2 = 4$ ، فإن: $\sqrt[6]{x^3 + y^3} =$

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[3]{2}$ (c) $\sqrt[3]{6}$ (d) 2

مجال الدالة :

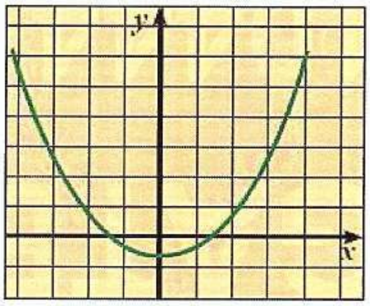
مقدمة وتعريف :

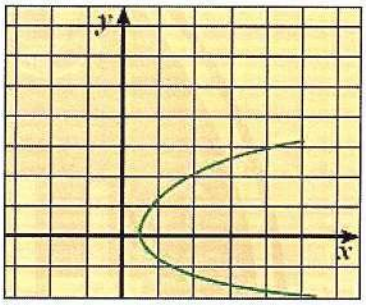
العلاقة : هي مجموعة من الأزواج في المستوى الإحداثي تسمى المساقط الأولى مجال العلاقة والمساقط الثانية مدى العلاقة وهي مجموعة جزئية من المجال المقابل
عندما يكون كل عنصر في المجال مرتبط بعنصر (عدد) واحد فقط من المجال المقابل فإنّ العلاقة تسمى دالة
الدالة التي مجالها ومجالها المقابل مجموعتان جزئيتان من الأعداد الحقيقية تسمى دالة حقيقية .

اختبار المستقيم الرأسي :

إذا تقاطع كل مستقيم رأسي مع بيان علاقة ما بنقطة واحدة على الأكثر فإن هذه العلاقة تكون دالة

مثال (1) حدد فيما إذا كان كل تمثيل ممايلي دالة أو لا .





الحل :

الشكل a يمثل دالة لإنه عند رسم مستقيم رأسي فإنه سيقطع التمثيل البياني في نقطة واحدة .
الشكل b لا يمثل دالة لإنه عند رسم مستقيم رأسي فإنه سيقطع التمثيل في أكثر من نقطة .

مجال الدالة :

إذا كان لدينا دالة : $y = f(x)$
فإن مجالها هو D مجموعة كل الأعداد الحقيقية التي يأخذها المتغير x وينتج قيم لـ y

إيجاد مجال الدالة :

قواعد أساسية :

1) **دالة كثيرة الحدود : مجالها** $\mathbb{R}$
2) **الدالة النسبية(الحدودية النسبية) : مجالها** $\mathbb{R}$ /{أصفار المقام}
3) **الجذرية ودليل الجذر زوجي : ما داخل الجذر** ≥ 0
4) **الجذرية ودليل الجذر فردي مجالها** $\mathbb{R}$

مثال (2) **أوجد مجال الدالة :** $f(x) = x^2 + 3x + \sqrt{2}$

الحل : دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

مثال (3) **أوجد مجال الدالة :** $f(x) = \sqrt{5x - 4}$

الحل : دالة جذرية دليل الجذر زوجي

نضع $5x - 4 \geq 0$

$$x \geq \frac{4}{5}$$

المجال $x \in \left[\frac{4}{5}, \infty\right)$

تعلّم
إذا كانت الدالة متنوعة
(نسبية و جذرية و.....)
1) نسمي كل دالة فيها .
2) نوجد مجال كل دالة .
3) نوجد المجال المشترك

مثال (4) أوجد مجال الدالة $g(x) = \frac{2x+}{x-4}$

الحل: حدودية نسبية

مجال البسط $\mathbb{R}$ كثيرة حدود ، مجال المقام $\mathbb{R}$ كثيرة حدود

أصفار المقام : $x - 4 = 0 \quad \Rightarrow x = 4$

المجال : $\mathbb{R} \cap \mathbb{R} \,/\, \{4\} = \mathbb{R}/\{4\} = (-\infty،4) \cup (4،\infty)$

مثال (5) أوجد مجال الدالة : $f(x) = \frac{\sqrt{5-4x}}{x^2+4}$

الحل : دالة متنوعة

مجال البسط

دالة البسط $g(x) = \sqrt{5-4x}$

جذرية دليل الجذر $= 2$

$5 - 4x \geq 0$

$-4x \geq -5$

$x \leq \frac{5}{4} \Rightarrow \left(-\infty، \frac{5}{4}\right)$

مجال المقام

دالة المقام $h(x) = x^2 + 4$

كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

أصفار المقام

$x^2 + 4 = 0$

$x^2 = -4$ وهي معادلة مستحيلة في $\mathbb{R}$

ويكون مجال الدالة $\mathbb{R} \cap \left(-\infty، \frac{5}{4}\right) = \left(-\infty، \frac{5}{4}\right)$

تطبيق : أوجد مجال الدالة : $g(x) = \frac{\sqrt{3x-4}}{x-2}$

مثال (6) أوجد مجال الدالة : $m(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{x-1}} + \sqrt{x+9}$

الحل : دالة متنوعة

$g(x) = \sqrt{x+9}$

دالة جذرية دليل الجذر زوجي

مجالها : $x + 9 \geq 0$

$x \geq -9$

$(-9 \,،\, \infty)$

$h(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{x-1}}$

دالة متنوعة : مجال البسط $\mathbb{R}$ كثيرة حدود

مجال المقام $\mathbb{R}$ جذرية دليل الجذر فردي

أصفار المقام : $x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

مجال الدالة : $\mathbb{R} \cap \mathbb{R} \,\cap (-9 \,،\, \infty)/\{1\} = (-9 \,،\, \infty)/\{1\} = (-9 \,،\, 1) \cup (1 \,،\, \infty)$

مثال (7) أوجد مجال الدالة : $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2-5}{x}}$

الحل : $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2-5x}{x}} = \frac{\sqrt[3]{x^2-5x}}{\sqrt[3]{x}}$

دالة متنوعة

مجال البسط

دالة البسط $h(x) = \sqrt[3]{x^2-5x}$

جذرية دليل الجذر فردي مجالها $\mathbb{R}$

مجال المقام

دالة المقام $h(x) = \sqrt[3]{x}$

جذرية دليل الجذر فردي مجالها $\mathbb{R}$

أصفار المقام

$x = 0$

ويكون مجال الدالة $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}/\{0\} = (-\infty،0) \cup (0،\infty)$

تطبيق : أوجد مجال الدالة : $m(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}}{x^2-1}$

الدوال التربيعية

نسمي كل دالة من الشكل : $f(x) = ax^2 + bx + c \quad ; a ، b ، c \in \mathbb{R} \; ; \; a \neq 0$

دالة تربيعية و هي تمثل بيانياً بمنحنى يسمى قطع مكافئ

و يكون متماثل حول المستقيم الرأسي الذي يمر برأس المنحني معادلته: $x = -\frac{b}{2a}$

مثال (1) **حدد فيما إذا كانت الدالة خطية أم تربيعية :**

$a)\ f(x) = 2x\,(x-3) \qquad b)\ f(x) = (2x+3)^2 - 4x^2 - 7x$

$c)\ f(x) = (x-2)(2x+3)$

الحل :

$a)\ f(x) = 2x(x-3) = 2x^2 - 6x$ وهي دالة تربيعية

$b)\ f(x) = (2x+3)^2 - 4x^2 - 7x$

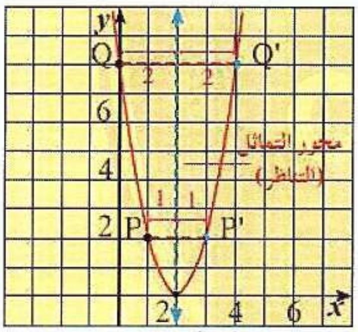
$= 4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 - 7x = 5x + 9$ دالة خطية

$c)\ f(x) = (x-2)(2x+3)$

$= 2x^2 + 3x - 4x - 6 = 2x^2 - x - 6$ وهي دالة تربيعية

الدوال التربيعية والقطوع المكافئة :

كل دالة تربيعية تمثل بيانياً بقطع مكافئ



رأس القطع

رأسه هو أعلى نقطة فيه (قيمة عظمى) عندما تكون فتحة المنحنى للأسفل

أو أدنى نفطة فيه (قيمة صغرى) عندما تكون فتحة المنحنى للاعلى

محور التماثل : هو المستقيم الذي معادلته $x = h$

حيث h الإحداثي السيني لنقطة رأس القطع

ملاحظة : إن معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (0،0) هي $y = ax^2$

ومعادلة محور التماثل لهذا القطع $x = 0$

مثال (2) **النقطة $F(4، -2)$ تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل ،أكتب معادلة هذا القطع ، ثم بين فيما إذا كان بيانه مفتوحاً للأعلى أم للأسفل .**

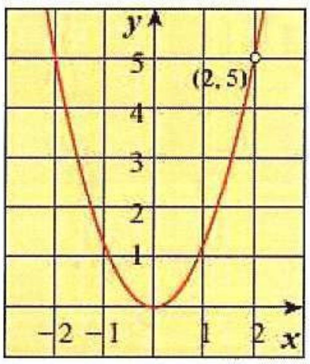
الحل : معادلة القطع المكافئ $y = ax^2$

بتعويض النقطة $(4، -2)$ $\quad -2 = a(4)^2$

$a = \frac{-1}{8}$

وتكون المعادلة $y^2 = \frac{-1}{8}x$

وبما أن $a = \frac{-1}{8} > 0$ تكون فتحة المنحني للأسفل .



مثال (3) **في الشكل المقابل قطع مكافئ معادلته $y^2 = ax$ أوجد معادلته .**

الحل : المنحنى يمر بالنقطة (2،5)

نعوض بالمعادلة $y^2 = a$

$5 = a(2)^2 \quad \Rightarrow a = \frac{5}{4}$

وتكون المعادلة $y^2 = \frac{5}{4}x$

معادلات بعض القطوع المكافئة بدلالة إحداثيات رؤوسها وخواصها

المعادلة : $h; k \in \mathbb{R}$ ، $a \neq 0$ $\quad y = a(x-h)^2 + k$

تمثل معادلة قطع مكافئ بدلالة إحداثيات رأسه $(h، k)$

رأس القطع $(h، k)$

الفتحة : a موجبة : الفتحة للأعلى ، a سالبة : الفتحة للأسفل

محور التماثل : $x = h$

مثال (4) **أكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $V(3،5)$ ويمر بالنقطة $P(5،4)$.**

الحل : المعادلة من الشكل : $y = a(x-h)^2 + k$

نعوض الرأس $(h،k) = (3،5)$

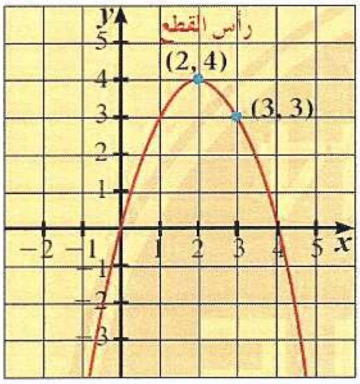
$$y = a(x-3)^2 + 5$$

والنقطة $(x،y) = (5،4)$

$$4 = a(5-3)^2 + 5$$

$$4 = a(4) + 5 \Rightarrow a = \frac{-1}{4}$$

وتكون معادلة القطع : $y = \frac{-1}{4}(x-3)^2 + 5$



تطبيق : **أوجد معادلة القطع المكافئ في الشكل المقابل .**

مثال (5) **ارسم منحنى الدالة : $y = -2(x-3)^2 - 1$**
مستخدماً خواص القطع المكافئ

الحل: المعادلة من الشكل : $y = a(x-h)^2 + k$

$a = -2$ ، $h = 3$ ، $k = -1$

رأس القطع : $(h،k) = (3، -1)$

الفتحة : $a = -2 < 0$ للأسفل

محور التماثل : $x = h = 3$

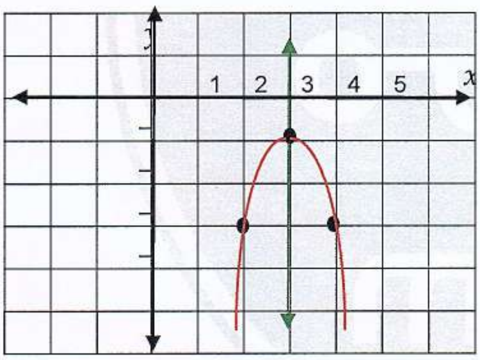
الرسم : نأخذ النقطة المساعدة $x = 4$

نعوض في المعادلة : $y = -2(4-3)^2 - 1 = -3$

فتكون النقطة $(4، -3)$

نوجد انعكاس النقطة $(4، -3)$ بالنسبة للمستقيم $x = 3$

نعين الرأس ومحور التماثل و النقطة المساعدة وانعكاسها .



مثال (6) **ارسم منحنى الدالة : $y = (x+3)^2 + 1$ مستخدماً خواص القطع المكافئ .**

الحل : المعادلة من الشكل : $y = a(x-h)^2 + k$

$a = 1$ ، $h = -3$ ، $k = 1$

رأس القطع : $(h،k) = (-3،1)$

الفتحة : $a = 1 > 0$ للأعلى

محور التماثل : $x = h = -3$

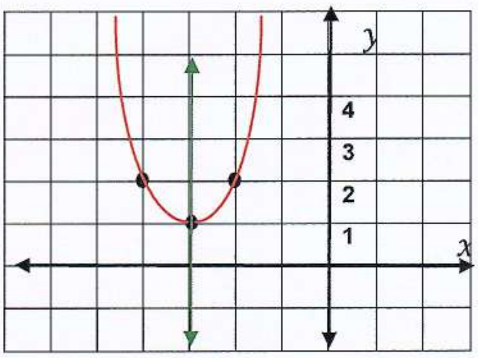
الرسم : نأخذ النقطة المساعدة $x = -2$

نعوض في المعادلة : $y = (-2+3)^2 + 1 = 2$

فتكون النقطة $(-2،2)$

نوجد انعكاس النقطة $(-2، 2)$ بالنسبة للمستقيم $x = -3$

نعين الرأس ومحور التماثل و النقطة المساعدة وانعكاسها



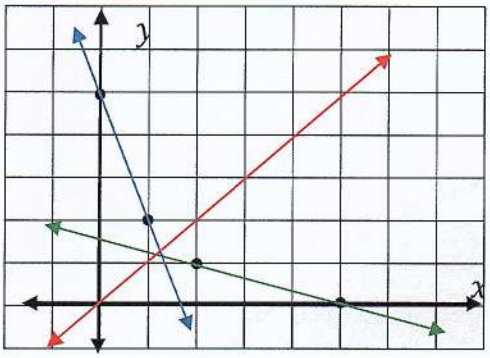
$x = 5$

تطبيق : ارسم منحنى الدالة : $y = -0.5(x-2)^2 + 3$ مستخدماً خواص القطع المكافئ .

مثال (1) ارسم بيان الدالة $y = -3x + 5$ ومعكوسها ثم اكتب دالة المعكوس .

الحل : رسم الدالة :

x	0	1
y	5	2



نرسم المستقيم المار من النقطتين $(1،2)$ ، $(0،5)$

نرسم المستقيم $y = x$

نرسم دالة المعكوس : نعكس الاحداثيات في الجدول

x	5	1
y	0	1

نرسم المستقيم المار من النقطتين $(2،1)$،$(5،0)$

نوجد دالة المعكوس : نبدل x بـ y ، ونفصل y

$$x = -3y + 5$$
$$x - 5 = -3y$$
$$y = \frac{x-5}{-3}$$

فتكون دالة المعكوس $y = \frac{-x+5}{3}$

تعلّم
لإيجاد دالة المعكوس
1) نبدل $x \rightleftarrows y$
2) نعزل y .

تطبيق : ارسم بيان الدالة $y = \frac{x-4}{2}$ ومعكوسها ، ثم أكتب دالة المعكوس .

مثال (2) **أوجد معكوس الدالة : $y = 2(x+1) - 3$**

الحل : نبدل x بـ y

$$x = 2(y+1) - 3$$
$$x = 2y + 2 - 3$$
$$x + 1 = 2y$$

فتكون دالة المعكوس $y = \frac{x+1}{2}$

مثال (3) **أوجد دالة المعكوس للدالة : $f(x) = (x+3)^2 - 4$**

الحل : نضع $y = (x+3)^2 - 4$

نبدل x بـ y

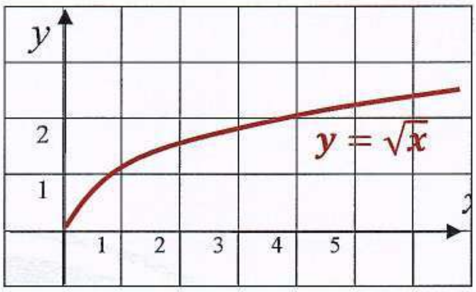
$$x = (y+3)^2 - 4$$
$$x + 4 = (y+3)^2$$
$$y + 3 = \pm\sqrt{x+4}$$

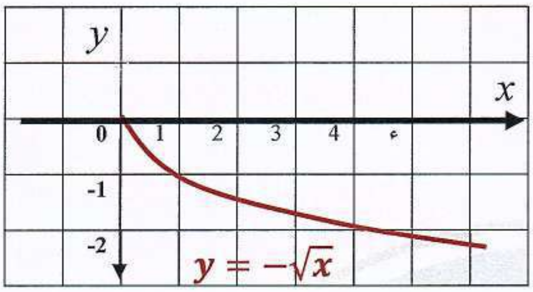
فتكون دالة المعكوس : $y = \pm\sqrt{x+4} - 3$

تطبيق : أوجد معكوس الدالة : $f(x) = x^2 + 3$

دوال الجذر التربيعي :

نسمي كل من الدالتين $y = \sqrt{x}$ ، $y = -\sqrt{x}$ دالتي الجذر التربيعي ومجال كل منهما $[0 ، \infty)$
ويكون التمثيل البياني لكل منهما :





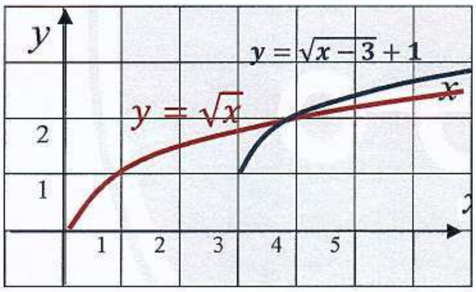
وينتج بيان الدالة : $;h، k \in \mathbb{R}$ $\quad y = \sqrt{x-h} + k$ من بيان الدالة $y = \sqrt{x}$
بالإزاحة الأفقية نحو اليمين أو اليسار بمقدار h
والإزاحة الرأسية نحو الأعلى أو الأسفل بمقدر k
ويكون مجال هذه الدالة :$[h، \infty)$

مثال (1) **ارسم بيان الدالة : $y = \sqrt{x-3} + 1$ وعيّن المجال والمدى .**

الحل : دالة المرجع : $y = \sqrt{x}$

$h = 3$ ، $k = 1$

ينتج بيان هذه الدالة من بيان الدالة $y = \sqrt{x}$
بالإزاحة نحو اليمين بمقدار ثلاث وحدات
ونحو الأعلى بمقدار وحدة واحدة
نرسم دالة المرجع ونزيحها لنحصل على الدالة المطلوبة .
المجال :$[3، \infty)$ ،
المدى :$[1، \infty)$

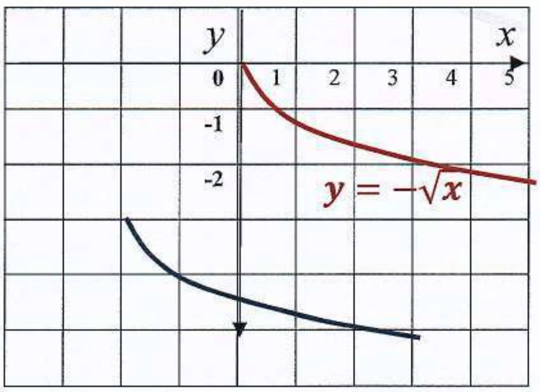


تمرين (2) **ارسم بيان الدالة : $y = -\sqrt{x+2} - 3$ وعيّن المجال والمدى .**

الحل : دالة المرجع : $y = -\sqrt{x}$ ،

$h = -2$ ، $k = -3$

ينتج بيان هذه الدالة من بيان الدالة $y = -\sqrt{x}$
بالإزاحة نحو اليسار بمقدار وحدتين
ونحو الأسفل بمقدار ثلاث وحدات
نرسم دالة المرجع ونزيحها لنحصل على الدالة المطلوبة .
المجال :$[-2، \infty)$
المدى :$(-\infty،3]$



تطبيق : ارسم بيان الدالة $y = \sqrt{x-4} - 2$ ثم عين مجال ومدى الدالة .

حـــل المتباينات

كل عبارة رياضية فيها علامة $<$ ، $\geq$ ، $>$ ، $\leq$ تسمى متباينة .

مثلاً : $x^2 - 4x > 0$ متباينة تربيعية

$\frac{x-3}{x+1} \leq 0$ متباينة كسرية

حل المتباينة التربيعية :

تعلّم
خطوات حل المتباينة
1) نكتب المعادلة المناظرة ونضعها $= 0$
2) نحلل ونوجد x.
3) نضع الإشارات.
4) الجدول ومجموعة الحل .

مثال (1) أوجد مجموعة حل المتباينة : $x^2 + 4x \geq -3$

الحل : المعادلة المناظرة : $x^2 + 4x = -3$

المعادلة الصفرية $x^2 + 4x + 3 = 0$

نحلل $(x+1)(x+3) = 0$

$x = -1$ ، $x = -3$

الإشارات $x + 1 \geq 0$ $x + 3 \geq 0$

$x \geq -1$ $x \geq -3$

$x + 1 \leq 0$ $x + 3 \leq 0$

$x \leq -1$ $x \leq -3$

الجدول

x	$-\infty$	-3		-1		∞
$x+1$	$-$ $-$		$-$	0	$+$	$+$
$x+3$	$-$ $-$	0	$+$		$+$	$+$
$(x+1)(x+3)$	$+$ $+$	0	$-$	0	$+$	$+$
حل المتباينة	محققة		غير محققة		محققة	

مجموعة الحل : $x \in (-\infty ، -3] \cup [-1 ، \infty)$

مثال (2) **أوجد مجموعة حل المتباينة :** $-2x^2 + 5x - 3 > 0$

الحل : نضرب المتباينة ب -1 لتعديل إشارة x^2 للإشارة الموجبة

فتصبح $2x^2 - 5x + 3 < 0$

المعادلة المناظرة : $2x^2 - 5x + 3 = 0$

نحلل $(2x-3)(x-1) = 0$

$x = \frac{3}{2}$ ، $x = 1$

الإشارات $2x - 3 < 0$ $x - 1 < 0$

$x < \frac{3}{2}$ $x < 1$

$2x - 3 > 0$ $x - 1 > 0$

$x > \frac{3}{2}$ $x > 1$

الجدول

x	$-\infty$	1		$\frac{3}{2}$		∞
$x - \frac{3}{2}$	$-$ $-$		$-$	0	$+$	$+$
$x - 1$	$-$ $-$	0	$+$		$+$	$+$
$(2x-3)(x-1)$	$+$ $+$	0	$-$	0	$+$	$+$
حل المتباينة	غير محققة		محققة		غيرمحققة	

مجموعة الحل : $x \in (1 ، \frac{3}{2})$

تطبيق : **أوجد مجموعة حل المتباينة : أوجد مجموعة حل المتباينة :** $-x^2 + 7x - 10 \leq 0$

مثال (3) **أوجد مجال الدالة :** $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

الحل : دالة جذرية مجالها كل x : $\quad 9 - x^2 \geq 0$

ولإيجاد x نحل المتباينة بنفس الطرق السابقة كونها متباينة تربيعية

نضرب المتباينة بـ -1 لتعديل إشارة x^2 للإشارة الموجبة

فتصبح المتباينة $\quad x^2 - 9 \leq 0$

المعادلة المناظرة : $\quad x^2 - 9 = 0$

نحلل $\quad (x-3)(x+3) = 0$

$x = 3 \quad ، \quad x = -3$

الإشارات $\quad x - 3 \leq 0 \qquad x + 3 \leq 0$

$x \leq 3 \qquad x \leq -3$

$x - 3 \geq 0 \qquad x + 3 \geq 0$

$x \geq 3 \qquad x \geq -3$

الجدول

x	$-\infty$		-3		3		∞
$x-3$	$-$	$-$		$-$	0	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$-$	0	$+$		$+$	$+$
$(x-3)(x+3)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
حل المتباينة	غير محققة			محققة		غير محققة	

مجموعة الحل : $x \in [-3 ، 3]$

المتباينة الكسرية :

مثال (1) **أوجد مجموعة حل المتباينة** $\dfrac{x^2-5x+6}{x-3} > 0$

الحل : نحلل البسط فيكون $\quad \dfrac{(x-3)(x-2)}{x-3} > 0$

نختصر بحيث $x \neq 3$: $\quad x - 2 > 0$

ويكون $\quad x > 2$

ويكون حل المتباينة : $x \in (2 ، \infty)/\{3\} = (2 ، 3) \cup (3 ، \infty)$

تطبيق : **أوجد مجموعة حل المتباينة :** $\dfrac{x^2-49}{x-7} \leq 0$

تمرين (2) **أوجد مجموعة قيم x التي تحقق المتباينة : $\frac{3x-}{-2x+3} \geq 0$**

الحل : المعادلة المناظرة $\frac{3x-5}{-2x+3} = 0$

أصفار البسط : $3x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ أصفار المقام : $-2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

الإشارات

$-2x + 3 \geq 0$ $3x - 5 \geq 0$

$x \leq \frac{3}{2}$ $x \geq \frac{5}{3}$

$-2x + 3 \leq 0$ $3x - 5 \leq 0$

$x \geq \frac{3}{2}$ $x \leq \frac{5}{3}$

الجدول

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$	∞
$3x-5$	− −		−	0	+ +
$-2x+3$	+ +	0	−		− −
$(3x-5)(-2x+3)$	− −	0	+	0	− −
حل المتباينة	غير محققة		محققة		غير محققة

مجموعة الحل : $x \in [\frac{3}{2} ، \frac{5}{3}]$

تطبيق : أوجد مجموعة حل المتباينة : $\frac{-2x+1}{x-3} \leq 0$

مثال (3) **أوجد مجموعة حل المتباينة : $\frac{x^2+5x}{x+3} < -2$**

الحل : $\frac{x^2-5x}{x+3} + 2 < 0$

$$\frac{x^2+5x}{x+3} + \frac{2(x+3)}{x+3} < 0$$

$$\frac{x^2+5x+2x+6}{x+3} < 0$$

$$\frac{x^2+7x+6}{x+3} < 0$$

نحلل البسط : $\frac{(x+6)(x+1)}{x+3} < 0$

أصفار البسط : $(x + 6)(x + 1) = 0$ ، أصفار المقام : $x + 3 = 0$

$x = -6$ ، $x = -1$ $x = -3$

الإشارات : $x + 1 < 0$ $x + 6 < 0$ $x + 3 < 0$

$x < -1$ $x < -6$ $x < -3$

$x + 1 > 0$ $x + 6 > 0$ $x + 3 > 0$

$x > -1$ $x > -6$ $x > -3$

الجدول

x	$-\infty$	-6		-3		-1	∞
$x+6$	− −	0	+ +		+ +		+ +
$x+1$	− −		− −		− −	0	+ +
$x+3$	− −		− −	0	+ +		+ +
$\frac{(x+6)(x+1)}{x+3}$	− −	0	+ +	0	− −	0	+ +
حل المتباينة	محققة		غير محققة		محققة		غير محققة

مجموعة الحل : $x \in (-\infty ، -6] \cup [-3 ، -1)$

الأسئلة المقالية :

تمرين (1) **أوجد مجال الدوال التالية :**

$a)\ \boldsymbol{f(x)} = \frac{\sqrt{-2}\ +3}{x^2-1}$ $\qquad b)\ \boldsymbol{m(x)} = \frac{\sqrt{x-2}}{5+\sqrt{2x-1}}$

الحل : دالة متنوعة $\quad a)\ \boldsymbol{f(x)} = \frac{\sqrt{-2x}+3}{x^2-1}$

مجال البسط

دالة البسط $g(x) = \sqrt{-2x} + 3$

جذرية دليل الجذر = 2

$-2x \geq 0$

$x \leq 0$

$(-\infty \text{ ، } 0]$

مجال المقام

دالة المقام $h(x) = x^2 - 1$

كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

أصفار المقام $\quad x^2 - 1 = 0$

$x = \pm 1$

إذاً أصفار المقام $\{1 \text{ ، } -1\}$

ويكون مجال الدالة $\{-1\} - (-\infty \text{ ، } 0] = \{-1\text{،}1\} - [0 \text{،} -\infty) \cap \mathbb{R}$

$b)\ m(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{5+\sqrt{2x-1}}$

الحل : مجال البسط

دالة البسط $g(x) = \sqrt{x-2}$

جذرية دليل الجذر = 2

$x - 2 \geq 0$

$x \geq 2$

$[2 \text{ ، } \infty)$

مجال المقام

دالة المقام $h(x) = 5 + \sqrt{2x-1}$

جذرية دليل الجذر = 2

$2x - 1 \geq 0$

$x \geq \frac{1}{2}$

$\left[\frac{1}{2} \text{ ، } \infty\right)$

أصفار المقام $\quad 5 + \sqrt{2x-1} = 0$

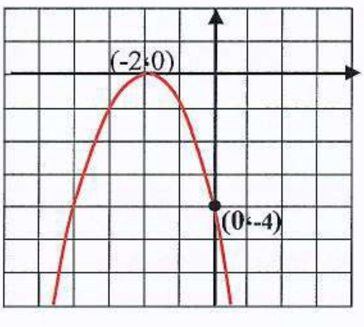
معادلة جذرية نفصل الجذر $\quad \sqrt{2x-1} = -5$

وهي معادلة مستحيلة إذاً لا يوجد أصفار للمقام

ويكون مجال الدالة $\left[\frac{1}{2}\text{، } \infty\right) \cap [2\text{، } \infty) = [2\text{، } \infty)$

تمرين (2) **في الشكل المقابل :**

أكتب معادلة القطع بدلالة احداثيات رأسه .



الحل : معادلة القطع من الشكل :

$y = a(x-h)^2 + k$

نعوض الراس $(\overset{h}{-2} \text{ ، } \overset{k}{0})$

نعوض النقطة $(\overset{x}{0} \text{ ، } \overset{y}{-4})$

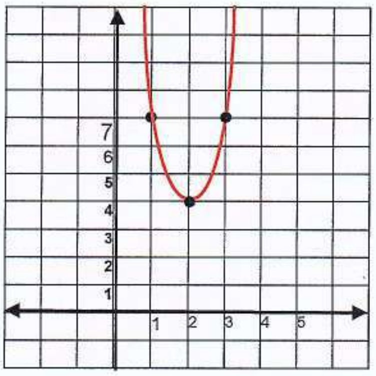
$-4 = a(0 - -2)^2 + 0$

$-4 = a(4) \Rightarrow a = -1$

وتكون المعادلة : $y = -1(x - -2)^2 + 0$

$y = -(x+2)^2$

تمرين (3) ارسم منحنى الدالة : $y = 3(x-2)^2 + 4$ مستخدماً خواص القطع المكافئ



الحل : المعادلة من الشكل : $y = a(x-h)^2 + k$

$a = 3 \text{ ، } h = 2 \text{ ، } k = 4$

رأس القطع : $(h \text{ ، } k) = (2 \text{ ، } 4)$

الفتحة : $a = 3 > 0$ للأعلى

محور التماثل : $x = h = 2$

الرسم : نأخذ النقطة المساعدة $x = 3$

نعوض في المعادلة : $y = 3(3-2)^2 + 4 = 7$

فتكون النقطة $(3 \text{، } 7)$

نوجد انعكاس النقطة $(3\text{،}7)$ بالنسبة للمستقيم $x = 2$

نعين الرأس ومحور التماثل و النقطة المساعدة وانعكاسها .

تمرين (4) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $V(3\text{،}1)$ والجزء المقطوع من محور الصادات (-2) .

الحل : معادلة القطع من الشكل : $y = a(x-h)^2 + k$

نعوض الراس $V(\overset{h}{3} \text{ ، } \overset{k}{1})$

بما أن الجزء المقطوع من محور الصادات (-2) إذاً يمر بالنقطة $(0\text{، } -2)$

نعوض النقطة $(\overset{x}{0} \text{ ، } \overset{y}{-2})$:

$$-2 = a(0-3)^2 + 1$$

$$-2 - 1 = a(9) \Rightarrow a = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}$$

وتكون المعادلة : $y = \frac{-1}{3}(x-3)^2 + 1$

تمرين (5) أوجد دالة المعكوس لكل من الدوال التالية : $b)\ y = x^2 - 3$ $\quad a)\ y = \frac{x+5}{3}$

الحل : $a)\ \ y = \frac{x+5}{3}$

نبدل x بـ y $\quad x = \frac{y+5}{3}$

$3x = y + 5$

وتكون دالة المعكوس $\quad y = 3x - 5$

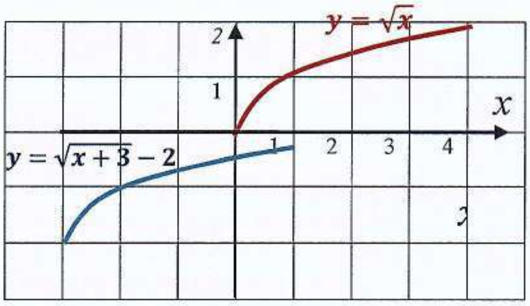
$b)\ \ y = x^2 - 3$

نبدل x بـ y $\quad x = y^2 - 3$

$x - 3 = y^2$

فتكون دالة المعكوس : $y = -\sqrt{x-3}\text{، } \ y = +\sqrt{x-3}$

تمرين (6) ارسم بيان الدالة $y = \sqrt{x+3} - 2$ ثم أوجد المجال والمدى .



الحل : دالة المرجع : $y = \sqrt{x}$

$h = -3 \text{ ، } k = -2$

ينتج بيان هذه الدالة من بيان الدالة $y = \sqrt{x}$

بالإزاحة نحو اليسار بمقدار ثلاث وحدات .

ونحو الأسفل بمقدار وحدتين .

نرسم دالة المرجع ونزيحها لنحصل على الدالة المطلوبة .

المجال :$[-3\text{، }\infty)$ ، المدى :$[-2\text{، }\infty)$

تمرين (7) ارسم بيان الدالة : $y = -\sqrt{x} + 2$ وعيّن المجال والمدى .

الحل : دالة المرجع $y = -\sqrt{x}$

$h = 0$ ، $k = 2$

ينتج بيان هذه الدالة من بيان الدالة $y = -\sqrt{x}$

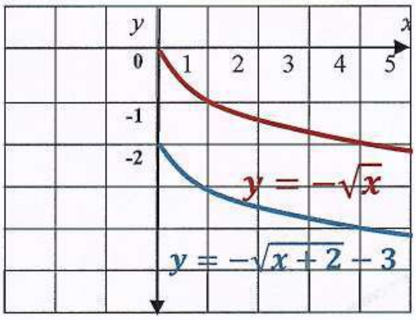
بالإزاحة نحو الأسفل بمقدار وحدتين

ولا يوجد إزاحة أفقية

نرسم دالة المرجع ونزيحها لنحصل على الدالة المطلوبة .

المجال :$[0، \infty)$

المدى :$(-\infty،2]$



تمرين (8) أوجد مجموعة قيم x التي تحقق المتباينة :$\frac{3x+7}{x+2} \geq 2$

الحل : $\frac{3x+7}{x+2} - 2 \geq 0$

بتوحيد المقامات : $\frac{3x+7}{x+2} - \frac{2(x+2)}{x+2} \geq 0$

$$\frac{3x+7-2x-4}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{x+3}{x+2} \geq 0$$

أصفار البسط : $x + 3 = 0$
$\Rightarrow x = -3$

أصفار المقام : $x + 2 = 0$
$\Rightarrow x = -2$

الإشارات

$x + 3 \geq 0$
$x \geq -3$
$x + 3 \leq 0$
$x \leq -3$

$x + 2 \geq 0$
$x \geq -2$
$x + 2 \leq 0$
$x \leq -2$

الجدول

x	$-\infty$		-3		-2		∞
$x+3$	$-$	$-$	0	$+$		$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$		$-$	0	$+$	$+$
$(x+3)(x+2)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
حل المتباينة	محققة			غير محققة		محققة	

مجموعة الحل : $x \in (-\infty، -2] \cup [-3، \infty)$

الأسئلة الموضوعية :

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة .

1) مجال الدالة $f(x) = \frac{1}{x^2}\sqrt{x+3}$ هو $[-3 ،\infty)$ — (a) ● b

2) الدالة $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$ هي دالة خطية — (a) ● b

3) الدالة $y = x(1-x) - (1-x^2)$ هي دالة خطية — ● a (b)

4) المعادلة $y = 2(x-1)^2 + 2$ يكون بيانها أكثر اتساعاً من بيان الدالة $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ — (a) ● b

5) توجد عند رأس منحني الدالة $y = -(x-3)^2 - 2$ قيمة عظمى — ● a (b)

6) لا يتغير مجال دالة الجذر التربيعي بعد إزاحة بيانها 3 وحدات يميناً . — (a) ● b

7) مجموعة حل المتباينة $(-x-3)^2$ هي $\{3\}$. — (a) ● b

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

8) لتكن $g(x) = x^2$, $g: [-2،2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x}$. فإن مجال الدالة $f.g$ هو :

(a) $[-22،]$ ● b $[0،2]$ (c) $(0،2)$ (d) ليس أياً مما سبق صحيحا

9) تكون الدالة : $f(x) = (a^2-4)x^2 - (a-2)x + 5$ دالة تربيعية لكل a تنتمي إلى :

(a) $\mathbb{R}$ ● b $\mathbb{R} - \{-2،2\}$ (c) $\mathbb{R} - \{2\}$ (d) $\mathbb{R} - \{-2\}$

10) الدالة $y = a(3-x)^2 - 2$ يكون رسمها أوسع من رسم بيان الدالة $y = -2x^2$ إذا كان :

(a) $|a| = 2$ (b) $|a| > 2$ (c) $a < 2$ ● d $|a| < 2$

11) معادلة القطع المكافئ $y = 2x^2$ الذي تم إزاحة رأسه وحدتين يساراً و 4 وحدات لاعلى هي :

(a) $y = (2x+2)^2 + 4$ (b) $y = 2(x-2)^2 + 4$

● c $y = 2(x+2)^2 + 4$ (d) $y = 2(x+2)^2 - 4$

12) بيان الدالة $y = \sqrt{x+2} - 2$ هو انسحاب لبيان الدالة $y = \sqrt{x}$:

(a) وحدتين إلى اليسار ووحدتين للأعلى ● b وحدتين إلى اليسار ووحدتين للأسفل

(c) وحدتين إلى اليمين ووحدتين للأعلى (d) وحدتين إلى اليمين ووحدتين للاسفل

13) مجموعة حل المتباينة $x^2 + |x| > 0$

(a) $\mathbb{R}$ (b) $(0، \infty)$ ● c $\mathbb{R} - \{0\}$ (d) ليس أياً مما سبق صحيحاً

دوال القوى ومعكوساتها

تكون دوال القوى على الشكل : $y = a\,x^n \quad a \neq 0 \text{ ، } n \in z^+$

مثلاً : $y = 3x^4$ دالة من الدرجة الرابعة .

الدالة الزوجية والدالة الفردية :

تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D زوجية إذا تحقق :

$$f(x) = f(-x) \quad ; \quad \forall x \in D \text{ ، } -x \in D$$

تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D فردية إذا تحقق :

$$f(-x) = -f(x) \quad ; \quad \forall x \in D \text{ ، } -x \in D$$

مثال (1) بيّن فيما إذا كانت الدالة فردية أو زوجية :

$a)\ f(x) = 3\,x^5 \qquad b)\ y = -2\,x^4 \qquad c)\ y = (x+3)^3$

الحل :

$a)\ f(x) = 3\,x^5 \quad D = \mathbb{R}$ ،

$f(-x) = 3\,(-x)^5 = -3x^5 = -f(x) \qquad \forall\, x \text{ ، } -x \in \mathbb{R}$

إذاً الدالة فردية لإن : $f(-x) = -f(x)$

$b)\ y = -2\,x^4$ نضع $y = g(x)$

$g(-x) = -2\,(-x)^4 = -2x^4 = g(x) \qquad \forall\, x \text{ ، } -x \in \mathbb{R}$

إذاً الدالة زوجية لإن : $g(-x) = g(x)$

$c)\ y = (x+3)^3$ نضع $y = v(x)$

$v(-x) = (-x+3)^3 \neq (x+3)^3 \qquad \forall\, x \text{ ، } -x \in \mathbb{R}$

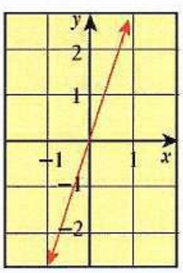
إذاً الدالة ليست زوجية لإن : $v(-x) \neq v(x)$

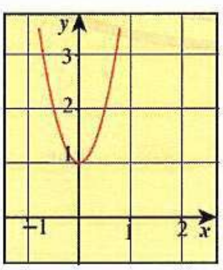
$v(-x) = (-x+3)^3 \neq -(x+3)^3 \qquad \forall\, x \text{ ، } -x \in \mathbb{R}$

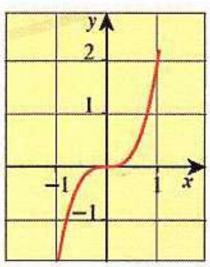
إذاً الدالة ليست فردية لإن : $v(-x) \neq -v(x)$

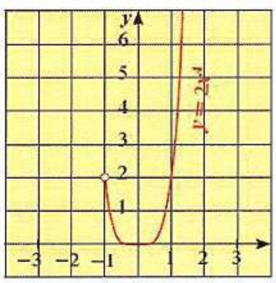
ملاحظة : 1) نقطة الأصل هي نقطة تماثل لبيان الدالة الفردية .
2) محور الصادات هو محور تماثل لبيان الدالة الزوجية .

مثال (2) الأشكال التالية تمثل دوال ، صف تماثل كل دالة ثم وضح فيما إذا كانت زوجية او فردية او لا .

a

$y = 3x$

b

$y = 4x^2 + 1$

c

$y = 2x^3$

d

$y = 2x^4, \quad x \in (-1, \infty)$

الحل : a) نلاحظ نقطة الأصل هي نقطة تماثل لبيان الدالة هي فردية

b) نلاحظ محور الصادات محور تماثل تماثل لبيان الدالة هي زوجية .

c) نلاحظ نقطة الأصل هي نقطة تماثل لبيان الدالة هي فردية

d) نلاحظ لايوجد محور ولا نقطة تماثل لبيان الدالة هي ليست زوجية وليست فردية .

مثال (3) اوجد معكوس الدالة : $b)\ f(x) = 5\,x^3$ ، $a)\ y = \sqrt{x-4}$

الحل :

$a)\ y = \sqrt{x-4}$

نبدل x بـ y $\qquad x = \sqrt{y-4}$

بالتربيع $\qquad x^2 = y - 4$

فتكون دالة المعكوس : $y = x^2 + 4$

$b)\ f(x) = 5\,x^3$

نضع $y = f(x) \Leftarrow y = 5\,x^3$

نبدل x بـ y $\qquad x = 5\,y^3$

$$\frac{1}{5}x = y^3$$

فتكون دالة المعكوس : $y = \sqrt[3]{\frac{1}{5}x}$

مثال (4) أوجد معكوس الدالة : $y = \frac{1}{2}x^4$

الحل : نبدل x بـ y $\qquad x = \frac{1}{2}y^4$

$$2x = y^4$$

فتكون دالة المعكوس : $y = +\sqrt[4]{2x}$ ، $y = -\sqrt[4]{2x}$

تطبيق : اوجد معكوس الدالة : $y = \sqrt{x-4}$

الدوال الحدودية

تعريف الدالة الحدودية (كثيرة الحدود):

حيث n عدد صحيح غير سالب و a_0 ، .... ، a_{n-1} ، a_n أعداد حقيقية .

مثلاً : الدالة $P(x)$ حدودية

$$P(x) = \boxed{2}x^3 - 5x^2 - 2x - 5$$

المعامل الرئيسي — حد تكعيبي — حد تربيعي — حد خطي — حد ثابت

مثال (1) أكتب كل حدودية ممايلي بالصورة العامة ثم صنفها تبعاً للدرجة و عدد الحدود :

$a)\ 3x^3 + x^2 - (4x + 2x^3) \qquad b)\ 6 - 2x^5 \qquad c)\ (2t-5)(t^2-1)$

الحل :

$$3x^3 + x^2 - (4x + 2x^3) = 3x^3 + x^2 - 4x - 2x^3$$
$$= x^3 + x^2 - 4x$$

وهي حدودية من الدرجة الثالثة ، لها ثلاثة حدود إذاً هي ثلاثية

$$6 - 2x^5 = -2x^5 + 6$$

وهي حدودية من الدرجة الخامسة ، لها حدان إذاً هي ثنائية

$$(2t-5)(t^2-1) = 2t^3 - 2t - 5t^2 + 5$$
$$= 2t^3 - 5t^2 - 2t + 5$$

وهي حدودية من الدرجة الثالثة ، لها أربعة حدود إذاً هي رباعية

سلوك النهاية :

سلوك نهاية بيان دالة يصف امتداد طرفيها الأيمن والأيسر وتوجد اربع نماذج لسلوك نهاية طرفي كثيرة الحدود .

1) الطرف الأيمن والأيسر للأعلى (↗، ↖).
وهذا عندما الحدودية من الدرجة زوجية ومعاملها الرئيسي موجب .

2) الطرف الأيمن والأيسر للأسفل . (↘ ، ↙)
وهذا عندما الحدودية من الدرجة زوجية ومعاملها الرئيسي سالب .

3) الطرف الأيمن للاعلى والأيسر للأسفل . (↗ ، ↙)
وهذا عندما الحدودية من الدرجة فردية ومعاملها الرئيسي موجب .

4) الطرف الأيمن للاسفل والأيسر للأعلى . (↘ ، ↖)
وهذا عندما الحدودية من الدرجة فردية ومعاملها الرئيسي سالب .

تعلّم

خطوات إيجاد سلوك نهاية دالة :

1) العامل الرئيسي... واشارته ...
2) سلوك النهاية جهة اليمين .....
3) الدرجة ....
4) سلوك النهاية جهة اليسار .....
5) سلوك النهاية ......

((راجع الكتاب صفحة 100)

ملاحظة هامة : عندما درجة كثير الحدود زوجية تتوافق جهتي الطرفين

مثال (1) وضح سلوك النهاية لكل كثيرة حدود ممايلي :

$a)\ y = 2x^2 + 6 - x^3$ $\qquad$ $b)\ y = 2x^4 - 3x$

$c)\ f(x) = 2x^3 - x$ $\qquad$ $d)\ h(x) = x - x^4$

الحـل :

$$a)\ y = 2x^2 + 6 - x^3 = -x^3 + 2x^2 + 6$$

العامل الرئيسي (-1) سالب .
سلوك النهاية جهة اليمين للأسفل ↘ .
الدرجة الثالثة (فردي) .
سلوك النهاية جهة اليسار للأعلى ↖ .
سلوك النهاية (↘ ، ↖)

$$b)\ y = 2x^4 - 3x$$

العامل الرئيسي (2) موجب .
سلوك النهاية جهة اليمين للأعلى ↗.
الدرجة الرابعة (زوجي) .
سلوك النهاية جهة اليسار للأعلى ↖ .
سلوك النهاية (↗ ، ↖)

$$c)\ f(x) = 2x^3 - x$$

العامل الرئيسي (2) موجب .
سلوك النهاية جهة اليمين للأعلى ↗ .
الدرجة الثالثة (فردي) .
سلوك النهاية جهة اليسار للأسفل ↙ .
سلوك النهاية (↗ ، ↙)

$$d)\ h(x) = x - x^4 = -x^4 + x$$

العامل الرئيسي (-1) سالب .
سلوك النهاية جهة اليمين للأسفل ↘ .
الدرجة الرابعة (زوجي) .
سلوك النهاية جهة اليسار للأسفل ↙ .
سلوك النهاية (↘ ، ↙) .

تطبيق : وضح سلوك النهاية لكل كثيرة حدود ممايلي :

$a)\ y = -x^3 + 2x + 2$ $\qquad$ $b)\ y = -2x^4 + 8x^3 - 8x^2$

العوامل الخطية لكثيرات الحدود

مثال (1) اكتب التعبير التالي : $(x+1)(x+1)(x-2)$ في شكل كثيرة حدود بالصورة العامة .

الحل :
$$\begin{aligned}(x+1)(x+1)(x-2) &= (x+1)(x^2-2x+x-2)\\ &= (x+1)(x^2-x-2)\\ &= x^3-x^2-2x+x^2-x-2\\ &= x^3-3x-2\end{aligned}$$

عوامل وأصفار دالة كثيرة الحدود :

لنأخذ الحدودوية : $f(x)=(x-3)(x-1)$

نسمي $(x-3)$ أحد عوامل هذه الحدودية ويكون العدد (3) صفراً لها .

من التمثيل البياني لهذه الدالة يمكن إيجاد أصفارها وهي الأجزاء المقطوعة من محور السينات .

أما إذا لم يكن التمثيل البياني موجود فنوجد أصفارها بوضع $f(x)=0$.

تعلّم

خطوات رسم الدالة الحدودية:
1) إيجاد اصفار الدالة .
2) إيجاد سلوك النهاية .
3) وضع جدول القيم .
4) رسم الدالة.

مثال (3) **أوجد أصفار الدالة** $f(x)=(x-7)(x-5)(3-x)$
ثم ارسم بيانا تقريبيا للدالة مراعياً سلوك الدالة .

الحل : لإيجاد أصفار الدالة نضع : $f(x)=0$

$$(x-7)(x-5)(3-x)=0$$

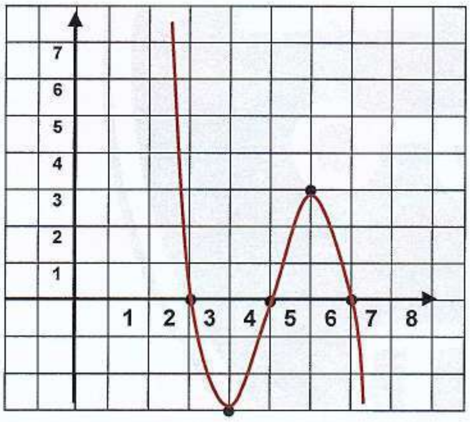
$x-7=0$ ، $x=7$ | $x-5=0$ ، $x=5$ | $3-x=0$ ، $x=3$

وتكون اصفار الدالة : $\{7 ، 5 ، 3\}$

$$f(x)=(x-7)(x-5)(3-x)$$

سلوك النهاية : العامل الرئيسي (-1) سالب .
سلوك النهاية جهة اليمين للأسفل ↘ .
الدرجة الثالثة (فردي) .
سلوك النهاية جهة اليسار للأعلى ↖ .
سلوك النهاية (↘ ، ↖)

رسم الدالة :



x	2	3	4	5	6	7	8
y	15	0	-3	0	3	0	-15

تطبيق : : أوجدأصفار الدالة $f(x)=(x-2)(x+1)(x+3)$
ثم ارسم بيانا تقريبيا للدالة مراعياً سلوك الدالة

ملاحظات هامة :

الأفكار التالية متكافئة لجميع كثيرة الحدود

1) $(x=+1)$ حل للمعادلة $x^2+3x-4=0$
2) $(+1)$ جزء مقطوع من محور السينات لمحور الدالة : $y=x^2+3x-4$
3) $(+1)$ صفر من اصفار الدالة : $y=x^2+3x-4$
4) $(x-1)$ عامل من عوامل كثيرة الحدود x^2+3x-4

قسمة كثيرات الحدود

1) القسمة المطولة :

مثال (1) اقسم $x-8 \overline{\big)\, 2x^2-19x+24}$

الحل :

$$\begin{array}{r|l} & 2x \ -3 \\ \hline x-8 & 2x^2-19x+24 \\ - & 2x^2-16x \\ \hline & \quad -3x+24 \\ - & \quad -3x+24 \\ \hline & \qquad 0 \end{array}$$

إذا الناتج : $2x-3$

الباقي : 0

مثال (2) **تحقق باستخدام القسمة المطولة أن $x+1$ هو عامل من عوامل الحدودية x^3-x+1**

الحل :

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \ -x \\ \hline x+1 & x^3 \ \ldots \ -x+1 \\ - & x^3+x^2 \\ \hline & \quad -x^2-x+1 \\ - & \quad -x^2-x \\ \hline & \qquad 0 \quad +1 \end{array}$$

إذا الناتج : x^2-x ، الباقي : 1

بما أن الباقي ليس صفر إذاً $x+1$ هو ليس عامل من عوامل الحدودية x^3-x+1

تطبيق : اقسم $x+4 \overline{\big)\, x^3+3x^2-6x-7}$

2) استخدام القسمة التركيبية :

مثال (3) استخدم القسمة التركيبية لإيجاد قسمة : x^3+4x^2+x-6 على $x+1$

الحل :

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & +4 & +1 & -6 \\ + & & -1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & -2 & -4 \end{array}$$

الناتج : x^2+3x-2

الباقي : -4

تعلّم
نعكس إشارة
العددالثابت في
المقسوم عليه

مثال (4) **مبنى على شكل شبه مكعب ، يعطى حجمه بالعلاقة : $V=x^3+4x^2-x-4$**

a) إذا كان $(x+4)$ أحد أبعاد المبنى ،فأوجد البعدين الآخرين

b) إذا كان أصغر أبعاد المبنى يساوي $10\ m$ فأوجد البعدين الآخرين .

الحل : **أن حجم المكعب يساوي ناتج ضرب أبعاده الثلاثة .**

بما أن احد الابعاد هو $(x+4)$ إذاً نوجد باقي الأبعاد بقسمة الحجم على هذا البعد

(a

$$V=x^3+4x^2-x-4$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & 4 & -1 & -4 \\ + & & -4 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

الناتج : x^2-1

بالتحليل : $(x-1)(x+1)$

إذا باقي الأبعاد : $(x+1)$ و $(x-1)$

b) بما أن أصغر الأبعاد $(x-1)$ يساوي 10

$x-1=10 \quad \Rightarrow x=11$

ويكون البعدين الآخرين $11+1=12$ ، $11+4=15$

نظرية :

نظرية الباقي :
إذا قسمت كثيرة الحدود من الدرجة $n > 1$ على $(x - a)$ حيث a ثابت ،فإن باقي القسمة هو $f(a)$

مثال (5) **استخدم نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $f(x) = 2x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 60$ على $(x + 1)$**
ثم تحقق من صحة الإجابة باستخدام القسمة التركيبية.

الحل : حسب نظرية الباقي فإن باقي القسمة هو $f(-1)$

$$f(-1) = 2(-1)^4 + 6(-1)^3 - 5(-1)^2 - 60 = -69$$

بالقسمة التركيبية :

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & 6 & -5 & 0 & -60 \\ + & & -2 & -4 & 9 & -9 \\ \hline & 2 & 4 & -9 & 9 & \boxed{-69} \end{array}$$

الباقي = -69 $\rightarrow$ وهذا ما وجدناه عند تطبيق النظرية .

الناتج : $2x^3 + 4x^2 - 9x + 9$

تطبيق : **استخدم نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4x + 12$ على $(x + 4)$**
ثم تحقق من صحة الإجابة باستخدام القسمة التركيبية

نظرية :

نظرية العامل : $(x - a)$ عامل خطي للحدودية أذا وفقط إذا a صفراً للحدودية .

مثال (6) **استخدم نظرية العامل لإثبات أن :**
$(x + 3)$ هو عامل من عوامل الحدودية $f(x) = x^3 - 4x^2 - 9x + 36$
ثم تحقق من صحة الإجابة باستخدام القسمة التركيبية ،وأوجد باقي العوامل والأصفار.

الحل : باستخدام نظرية العامل نوجد $f(-3)$

$$f(-3) = (-3)^3 - 4(-3)^2 - 9(-3) + 36 = 0$$

وبالتالي حسب نظرية العامل فإن $x + 3$ هو عامل من عوامل الحدودية .

التحقق باستخدام القسمة التركيبية :

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & -4 & -9 & 36 \\ + & & -3 & 21 & -36 \\ \hline & 1 & -7 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

الباقي = 0 أي أنه $x + 3$ هو عامل من عوامل الحدودية .

الناتج : $x^2 - 7x + 12$

لإيجاد باقي العوامل والأصفار نكتب : $x^2 - 7x + 12 = 0$

بالتحليل نجد باقي العوامل : $(x - 3)(x - 4)$

باقي الأصفار : $\{3،4\}$

الطريقة الأولى التحليل :

نستخدم هذه الطريقة عنما يكون الحد الثابت في كثيرة الحدود غير موجود ، حيث نخرج عامل مشترك ونكمل الحل.

مثال (1) أوجد مجموعة حل المعادلة : $4x^3 - 16x^2 - 20x = 0$ ثم تحقق من صحة الحل .

الحل : نلاحظ أن x مشترك بجميع الحدود وكذلك جميع المعاملات تقبل القسمة على 4

إذا $4x$ عامل مشترك لجميع الحدود :

$$4x^3 - 16x^2 - 20x = 0$$
$$4x\ (x^2 - 4x - 5) = 0$$
$$4x = 0 \qquad x^2 - 4x - 5 = 0$$
$$x = 0 \qquad a = 1 ، b = -4 ، c = -5$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$
$$x = 5 \quad ، \quad x = -1$$

مجموعة الحل : $\{0 ، 5 ، -1\}$

مثال (2) **:أوجد مجموعة حل المعادلة :** $x^3 + 2x^2 - 4x = 8$.

الحل :

$$x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$$
$$x^2(x+2) - 4(x+2) = 0$$
$$(x+2)(x^2 - 4) =$$
$$(x+2)(x+2)(x-2) = 0$$
$$x + 2 = 0 \qquad x - 2 = 0$$
$$x = -2 \qquad x = 2$$

مجموعة الحل $\{-2 ، 2\}$

الطريقة الثانية : الأصفار النسبية الممكنة

وفي هذه الطريقة يكون التحليل غير متاحاً وتكون خطوات حل المعادلة :

مثال (2) **أوجد مجموعة حل كل من المعادلة :** $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$:

الحل : الحد الثابت : -4 عوامله : $\pm 2 ، \pm 1 ، \pm 4$

المعامل الرئيسي : 1 عوامله : ± 1

الأصفار النسبية الممكنة : $\pm 2 ، \pm 1 ، \pm 4$

بالتعويض في الحدودية : $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

نجد : $f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 4(-1) - 4 = 0$

إذاً -1 هو صفر للحدودية ويكون احد حلول المعادلة .

بالقسمة التركيبية :

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ + & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

الناتج : $g(x) = x^2 - 4$

بحل المعادلة : $x^2 - 4 = 0$

$$x = 2 ، x = -2$$

وتكون مجموعة الحل : $\{-1 ، 2 ، -2\}$

تعلّم

خطوات طريقة الأصفار النسبية:

1) عوامل الحد الثابت .
2) عوامل المعامل الرئيسي .
3) الأصفار النسبية الممكنة : ((نقسم عوامل الحد الثابت على عوامل الحد الرئيسي))
4) نعوض الأصفار الممكنة لإيجاد صفر الدالة
5) القسمة التركيبية لإيجاد باقي الأصفار

تطبيق :أوجد مجموعة حل المعادلة : $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$ ((باستخدام نظرية الأصفار النسبية))

تمارين الوحدة

الأسئلة المقالية :

تمرين (1) **أوجد معكوس الدالة :** $y = \frac{1}{2}x^4$

الحل : نبدل x بـ y $\quad x = \frac{1}{2}y^4$

$$2x = y^4$$

فتكون دالة المعكوس : $y = \pm\sqrt[4]{2x}$

تمرين (2) **أوجد أصفار الدالة :** $f(x) = (x-2)^2(x-3)$
ثم ارسم بياناً تقريبياً موضحاً سلوك النهاية :

الحل : لإيجاد أصفار الدالة نضع : $f(x) = 0$

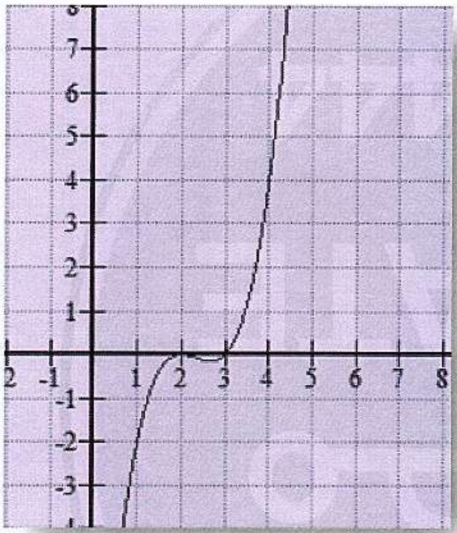
$$(x-2)^2(x-3) = 0$$

$x - 3 = 0 \quad \vdots \quad (x-2)^2 = 0$

$x = 3 \quad \vdots \quad x = 2$

وتكون اصفار الدالة : $\{\ 2 \text{ ، } 3\ \}$

$$f(x) = (x-2)^2(x-3)$$



سلوك النهاية : العامل الرئيسي (1) موجب .
سلوك النهاية جهة اليمين للأعلى ↗ .
الدرجة الثالثة (فردي) .
سلوك النهاية جهة اليسار للأسفل ↙ .
سلوك النهاية (↗ ، ↙)

رسم الدالة :

x	1	2	2,5	3	4
y	-2	0	-0.125	0	4

تمرين (3) **اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة أصفارها : -1 صفر بسيط ، و 4 صفر مكرر مرتين .**

الحل : -1 صفر بسيط $\Leftarrow$ $(x+1)$ عامل للحدودية .

4 صفر مكرر مرتين $\Leftarrow$ $(x-4)(x-4)$ عوامل للحدودية .

وبالتالي تكون الحدودية : $f(x) = (x+1)(x-4)(x-4)$

بالفك :

$$= (x+1)(x^2 - 8x + 16)$$
$$= x^3 - 8x^2 + 16x + x^2 - 8x + 16$$
$$= x^3 - 7x^2 + 8x + 16$$

تمرين (4) **مستخدما القسمة المطولة أوجد :** $(x^3 + 7x^2 - 5x - 6 \div (x+2)$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 9x + 13 \\
\hline
x+2 & x^3 - 7x^2 - 5x - 6 \\
 & -\ x^3 + 2x^2 \\
\hline
 & -9x^2 - 5x - 6 \\
 & -9x^2 - 18x \\
\hline
 & 13x - 6 \\
 & 13x + 26 \\
\hline
 & -32
\end{array}$$

إذا الناتج : $x^2 - 9x + 13$
الباقي : -32

تمرين (5) **مستخدما القسمة التركيبية أوجد :** $(x^4 - 5x^2 + 4x + 12) \div (x + 3)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 0 & -5 & 4 & 12 \\ & & -3 & 9 & -12 & 24 \\ \hline & 1 & -3 & 4 & -8 & 36 \end{array}$$

الباقي $= -4$

الناتج : $x^3 - x^2 + 4x - 8$

تمرين (6) **استخدم نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة:**

$f(x) = 2x^4 + 19x^3 - 2x^2 - 44x - 24$ **على** $(2x + 3)$

ثم تحقق من صحة الإجابة باستخدام القسمة التركيبية .

الحل : حسب نظرية الباقي فإن باقي القسمة هو $f\left(-\frac{3}{2}\right)$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^4 + 19\left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 44\left(-\frac{3}{2}\right) - 24 =$$

بالقسمة التركيبية :

$$\begin{array}{r|rrrrr} -\frac{3}{2} & 2 & 19 & -2 & -44 & -24 \\ & & -3 & -24 & 39 & 7.5 \\ \hline & 2 & 16 & -26 & -5 & -16.5 \end{array}$$

الباقي $= -16.5$ $\rightarrow$ وهذا ما وجدناه عند تطبيق النظرية .

الناتج : $2x^3 + 16x^2 - 26x - 5$

تمرين (7) **حل المعادلة :** $x^3 - 7x + 6 = 0$ **(مستخدماً نظرية الأصفار النسبية)**

الحل :

الحد الثابت : 6 عوامله : ± 2 ، ± 1 ، ± 3

المعامل الرئيسي : 1 عوامله : ± 1

الأصفار النسبية الممكنة : ± 2 ، ± 1 ، ± 3

بالتعويض في الحدودية : $f(x) = x^3 - 7x + 6$

نجد : $f(1) = (1)^3 - 7(1) + 6 = 0$

إذاً 1 هو صفر للحدودية ويكون احد حلول المعادلة .

بالقسمة التركيبية :

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

الباقي $= 0$

الناتج : $x^2 + x - 6$

بحل المعادلة : $x^2 + x - 6 = 0$

$x = 2$ ، $x = -3$

وتكون مجموعة الحل : $\{1 ، 2 ، -3\}$

الأسئلة الموضوعية :

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة .

1) الدالة $y = (x+4)^2$ هي دالة زوجية . (a) (b)

2) المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود $f(x) = 2x^5 - 3x^3(1-x^2)$ هو 2 . (a) (b)

3) إذا قبلت $f(x) = x^4 - 2x^2 + k + 1$ القسمة على x فإن $k = -1$. (a) (b)

4) إذا كان باقي قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $(x+a)$ يساوي صفراً ، فإن a عامل من عوامل f (a) (b)

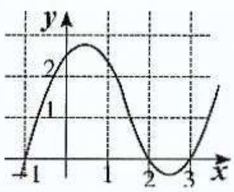
5) إذا كانت $2k$ تنتمي إلى مجموعة حل المعادلة $(4x^2+1)\left(\frac{x^2}{4}-1\right) = 0$ فإن $k \in \{-1،1\}$ (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6) قيمة k التي تجعل $(x-1)$ عاملاً من عوامل $f(x) = (x^2+x-2) + 2k$ هي

(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

7) ليكن بيان f كما في الشكل المرسوم فإن مجموعة حل المعادلة $f(x) = 0$ هي:



(a) $\{-1,2,3\}$ (b) $\{1,-2,-3\}$

(c) $\{-1,0,2,3\}$ (d) $\{0\}$

8) باقي قسمة (x^4+2) على $(x-3)$ هو :

(a) 3 (b) 27 (c) 81 (d) 83

9) إذا كان $f(-1) = f(0) = f(3) = -2$ فإن $f(x)$ يمكن أن تكون :

(a) $x^3 - x^2 + 3x - 2$ (b) $x^3 - 2x^2 + 3x$

(c) $2x^3 - 2x^2 - 3x - 2$ (d) $2x^3 - 4x^2 - 6x - 2$

10) إذا كان 0 هو باقي قسمة $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + kx - 1$ على $(x+1)$ فإن k تساوي :

(a) 7 (b) -7 (c) -3 (d) 3

11) $f(x) = x^3 - x$ تقبل القسمة على $x - k$ إذا كان k ينتمي إلى المجموعة :

(a) $\{0\}$ (b) $\{-1\}$ (c) $\{1\}$ (d) $\{0، -1، 1\}$

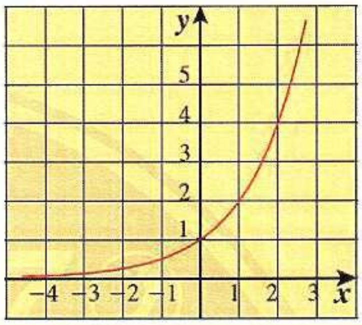
استكشاف النماذج الأسية :

تعريف : نسمي كل دالة من الشكل $y = a.b^x$ دالة أسية .

حيث : $x \in \mathbb{R}$ ، $a \in \mathbb{R}^*$ ، $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ويسمى الاساس

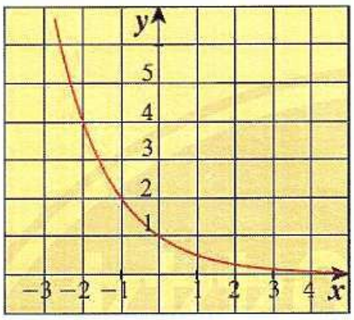
و من خلا التمثيل البياني للدالة الأسية نجد أن :

نمو أسي



عندما تكون $b > 1$، فإن الدالة تمثل نموًا أسيًا، وتكون b هي عامل النمو.

تضاؤل أسي



عندما تكون $0 < b < 1$، فإن الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًا، وتكون b هي عامل التضاؤل.

مثال (1) **مثل بيانياً بيان الدالة ثم بيّن فيما إذا كانت تمثل نموّاً لأو تضاؤلاً أسياً وحدد العامل :**

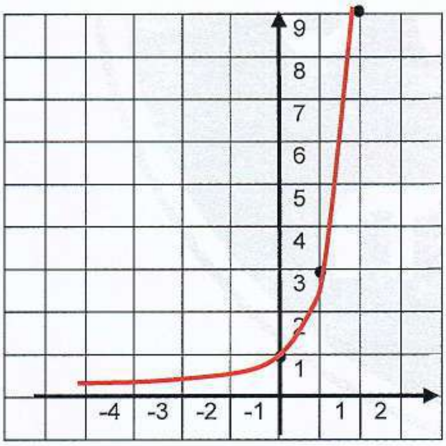
$$y = 3^x \quad ، \quad y = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

الحل :

$$y = 3^x$$

يمثل نمو أسياً $b = 3 > 1$ ، $a = 1$

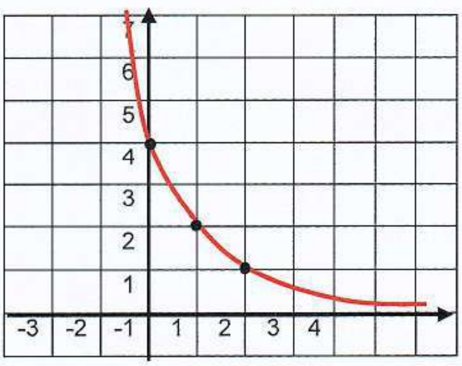
x	0	1	2
y	1	3	9



$$y = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

يمثل تضاؤلاً أسياً $b = \frac{1}{2} < 1$ ، $a = 4$

x	0	1	2
y	4	2	1



مثال (2) أكتب دالة أسية بالشكل: $y = a.b^x$ يمر بيانها بالنقطتين : $(3،16)$ ، $(2،4)$.

الحل : بالتعويض النقطتين في الدالة :

$$(2،4) \Rightarrow \quad 4 = a\, b^2$$

$$(3،16) \Rightarrow \quad 16 = a\, b^3$$

من المعادلة الأولى : $a = \frac{4}{b^2}$ نعوض في الثانية : $16 = \frac{4}{b^2}\, b^3$

$$16 = 4\, b$$

وبالتالي : $b = 4$ ، $a = \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}$

وتكون المعادلة : $y = \frac{1}{4}\,(4)^x$

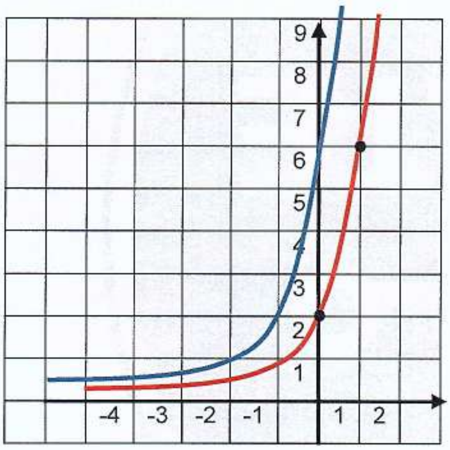
الدوال الأسية وتمثيلها بيانياً :

مثال (3) استخدم دالة المرجع $y = 2(3)^x$ لرسم بيان الدوال :

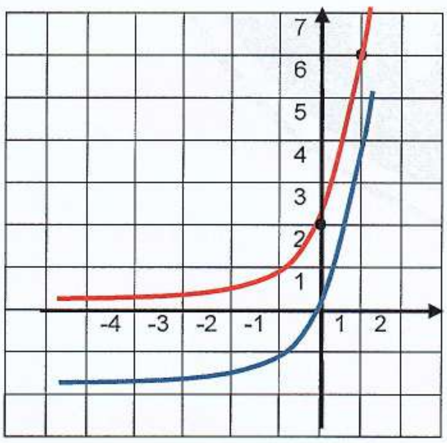
$a)\ y = 2(3)^{x+1} \qquad b)\ y = 2(3)^x - 2$

الحل: نرسم الدالة : $y = 2(3)^x$

x	0	1	2
y	2	6	18



بيان الدالة $y = 2(3)^{x+1}$ ينتج من بيان الدالة $y = 2(3)^x$ بانسحاب افقي نحو اليسار بمقدار وحدة



بيان الدالة $y = 2(3)^x - 2$ ينتج من بيان الدالة $y = 2(3)^x$ بانسحاب رأسي نحو الأسفل بمقدار وحدتان .

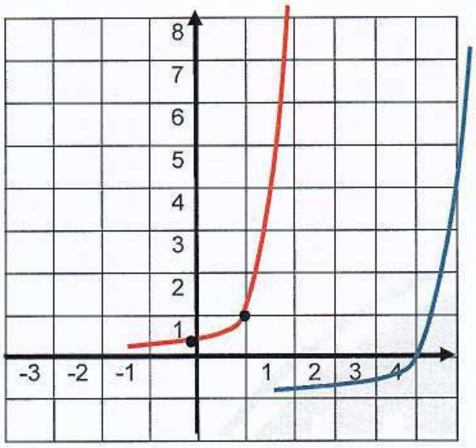
التطبيق : استخدم دالة المرجع $y = 8(\frac{1}{2})^x$ لرسم بيان الدالة : $y = 8(\frac{1}{2})^{x+2} - 3$

مثال (4) مثل بيانياً الدالة : $y = \frac{1}{9}(3)^{2x+1} - 2$ مستخدماً دالة المرجع والإنسحاب .

الحل :

نمثل دالة المرجع : $y = \frac{1}{9}(3)^{2x}$

x	0	1	2
y	1/9	1	9



ينتج بيان الدالة $y = \frac{1}{9}(3)^{2x-4} - 1$ من بيان الدالة $y = \frac{1}{4}(3)^{2x}$
بانسحاب أفقي نحو اليمين بمقدار أربع وحدات
وانسحاب رأسي نحو الأسفل وحدة

تطبيق : مثل بيانياً الدالة : $y = \frac{1}{4}(2)^{2x-1} - 3$ مستخدماً دالة المرجع.

الرمز e :

يرمز هذا الرمز e إلى العدد النيبري نسبة إلى العالم نيبر وقيمته تقريباً تساوي 2.718281828

الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانياً :

في الصورة الأسية $y = b^x$ حيث الأساس b وللحصول على x نستخدم ما يسمى اللوغاريتم ورمزه log
ونكتب $x = log_b\, y$ ويقرأ لوغاريتم y للاساس b .

مثلاً :

$$125 = 5^x$$
$$\Rightarrow \quad x = log_5 125 = 3$$

ملاحظة : يرمز إلى اللوغاريتم الذي أساسه 10 باللوغاريتم العشري ويكتب بدون أساس log
يرمز إلى اللوغاريتم الذي أساسه e باللوغاريتم الطبيعي ويكتب : ln

تعريف الدالة اللوغاريتمية :

تسمّى الدالة : $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = log_b x$

$\forall\ x > 0$ ، $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

دالة لوغاريتمية أساسها b .

ملاحظة : مجال الدالة اللوغاريتمية هو $0 <$ (ماداخل اللوغاريتم)

مثال (5) أوجد مجال الدالة :

$a)\ f(x) = log_7(1-x)$ $\qquad$ $b)\ g(x) = 3 + log_2(x^2+1)$

الحل :

a) $f(x) = log_7(1-x)$

$1 - x > 0$

$1 > x$

$x < 1$ ويكون مجال الدالة $(-\infty ، 1)$

b) $g(x) = 3 + log_2(x^2+1)$

$x^2 + 1 > 0$

وهذا المقدار هو موجب دوماً $\forall x \in \mathbb{R}$

إذاً مجال الدالة $\mathbb{R}$

التمثيل البياني للدالة اللوغارتمية :

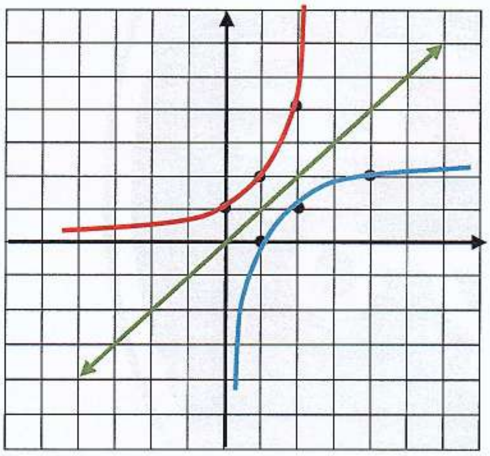
نعلم أن الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية ، وبالتالي التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية هو صورة الدالة الأسية وفق إنعكاس بالنسبة للمستقيم $y = x$.

مثال (6) **استخدم خواص الإنعكاس لرسم بيان الدالة $y = log_2 x$ ومعكوسها .**

الحل : خطوة (1) الدالة المعكوسة هي $y = 2^x$

نرسم هذه الدالة :

x	0	1	2
y	1	2	4



خطوة (2) نرسم المستقيم $y = x$

خطوة (3) نرسم الدالة $y = log_2 x$

بعكس الاحداثيات في الجدول

x	1	2	4
y	0	1	2

التطبيق : استخدم خواص الإنعكاس لرسم بيان الدالة $y = log_3 x$

انسحاب الدوال اللوغاريتمية

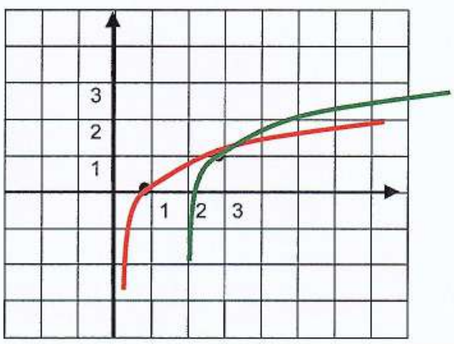
التمثيل البياني للدالة $y = log_b\,(x-h) + k$

هو انسحاب لدالة المرجع: $y = log_b\,(x)$ بمقدار h وحدة افقياً ، k وحدة راسية .

مثال (7) **ارسم بيان الدالة $y = log_3\,(x-2) + 1$ مستخدماً دالة المرجع والانسحاب .**

الحل: دالة المرجع $y_1 = log_3 x$

x	1	3
y	0	1



ينتج بيان الدالة y من بيان الدالة y_1
بانسحاب افقي نحو اليمين بمقدار وحدتين
وانسحاب راسي نحو الأعلى وحدة واحدة

التطبيق: ارسم بيان الدالة $y = log_2\,(x+3) - 1$ مستخدماً دالة المرجع والانسحاب .

خواص اللوغاريتمات

نلخص جميع خواص اللوغاريتمات بالخواص التالية :

$\forall m \text{،} n \text{،} b \in \mathbb{R}^+ , \; b \neq 1$

$$1) \; log_{\,b}\, m.n = log_{\,b} m + log_{\,b} n$$
$$2) \; log_{\,b}\, \frac{m}{n} = log_{\,b} m - log_{\,b} n$$
$$3) \; log_{\,b}\, m^k = k\,.log_{\,b} m$$

مثال (1) أعد كتابة كل مقدار ممايلي بصورة لوغريتم واحد .

$$a)\; \boldsymbol{log_5 2 + log_5 6} \qquad b)\; \boldsymbol{4\, log_2 3 - log_2 5 + log_2 10}$$

الحل :

$$a)\; log_5 2 + log_5 6 = \log_5(6 \times 2) = \log_5 12$$
$$b)\; 4\, log_2 3 - log_2 5 + log_2 10 = log_2 3^4 - log_2 5 + log_2 10$$
$$= \; log_2 \frac{3^4}{5} + log_2 10$$
$$= log_2 \left(\frac{3^4}{5} \times 10 \right) = log_2 (\, 162)$$

مثال (2) أوجد مفكوك : $\boldsymbol{log_7 (a^3 b)}$ ، $\boldsymbol{log\, (\frac{c}{3})^2}$

الحل :

$$log\, (\tfrac{c}{3})^2 \;\; = 2\; log \tfrac{c}{3} = 2 \log c \; - 2 \log 3$$
$$log_7 (a^3 b) = log_7\, a^3 + \; log_7 b$$
$$= 3\; log_7\, a + log_7 b$$

ملاحظات: $\boldsymbol{log_{\,b}\, b^m}$ ، $\boldsymbol{log_{\,b} 1 = 0}$ ، $\boldsymbol{log_{\,b} b = 1}$:

حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية :

حل المعادلات الأسية :

وجدنا سابقاً كيفية حل المعادلات الأسية التي يمكن ان يتساوى الأساس في طرفيها.

مثل حل المعادلة : $3^x = \frac{1}{81}$

حيث كان الحل بمساواة أساس الطرفين $3^x = 3^{-4}$ وتكون $x = -4$ ((راجع صفحة 8))

أما الآن سنتعرض لحل المعادلات الأسية التي لانستطيع توحيد أساس الطرفين وذلك باستخدام اللوغاريتمات حسب القاعدة :

$$\forall a\,, b\, \in \mathbb{R}^+\,, m \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$
$$a = b \Longleftrightarrow \log_m a = \log_m b$$

مثال (3) حل المعادلة : $\boldsymbol{3^{x+1} = 101}$

الحل : لايمكن توحيد الأساس لذلك نأخذ لوغاريتم الطرفين :

$$log(\, 3^{x+1}) = log\; (101)$$
$$(x+1) log\; 3 = log 101$$
$$x + 1 = \frac{log\; 101}{log\; 3} \Rightarrow x = \frac{log\; 101}{log\; 3} - 1 =$$

مثال (4) حل المعادلة $\boldsymbol{7^{5x} = 3000}$

الحل :

$$log(\, 7^{5x}) = log\; (3000)$$
$$5\; x\; log\; 7 = log\; 3000$$
$$\boldsymbol{5x \; = \frac{log\; 300}{log\; 7} \;\Rightarrow x = \frac{log\; 300}{5\; log\; 7}}$$

حل المعادلات اللوغاريتيمة :

لحل المعادلات اللوغاريتمية :
1) شرط الحل : ماداخل اللواغاريتم > 0
3) ثم نحول الى الصورة الأسية أو تطبيق خواص اللوغاريتمات .
4) ثم الأختصار وإيجاد x

مثال (1) حل المعادلة : $\log(7-2x) = -1$

الحل : الشرط : $7-2x > 0$

$-2x > -7$

$x < \frac{7}{2}$

$x \in \left(-\infty \text{،} \frac{7}{2}\right)$

بالتحويل للصورة الأسية

$$\log(7-2x) = -1$$
$$7-2x = 10^{-1}$$
$$-2x = 10^{-1} - 7$$
$$x = \frac{10^{-1}-7}{-2} = 3.45 \in \left(-\infty \text{،} \frac{7}{2}\right)$$

مثال (2) حل المعادلة : $\log 6 - \log 3x = -2$

الحل : الشرط : $3x > 0$

$x > 0$

$x \in (0 \text{،} \infty)$

بالتحويل للصورة الأسية

$$\log 6 - \log 3x = -2$$
$$\log \frac{6}{3x} = -2$$
$$\frac{6}{3x} = 10^{-2}$$
$$\frac{2}{x} = \frac{1}{100} \Rightarrow x = 200 \in (0 \text{،} \infty)$$

مثال (3) حل المعادلة : $\log_2(x-1) - \log_2(x+3) = \log_2 \frac{1}{x}$; $x \in (1\text{،} \infty)$

الحل :

$$\log_2(x-1) - \log_2(x+3) = \log_2 \frac{1}{x}$$
$$\log_2 \frac{x-1}{x+3} = \log_2 \frac{1}{x}$$
$$\frac{x-1}{x+3} = \frac{1}{x}$$
$$x(x-1) = x+3$$
$$x^2 - x - x - 3 = 0$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$x = -1 \notin (1\text{،} \infty) \quad \text{،} \quad x = 3 \in (1\text{،} \infty)$$

مثال (4) حل المعادلة $\log x^2 - \log(x^2 - x) = 1$, $x \in (1\text{،} \infty)$

الحل :

$$\log x^2 - \log(x^2-x) = 1$$
$$\log \frac{x^2}{x^2-x} = 1$$
$$\frac{x^2}{x^2-x} = 10$$
$$x^2 = 10(x^2-x)$$
$$x^2 - 10x^2 + 10x = 0$$
$$-9x^2 + 10x = 0$$
$$x = 0 \notin (1\text{،} \infty) \text{ ، } x = \frac{10}{9} \in (1\text{،} \infty)$$

التطبيق : أوجد مجموعة حل المعادلة :

$\log(3x+1) = 5$

$\log_4(x+6) - \log_4 12 = \log_4 2 - \log_4(x-4)$, $x \in (4\text{،} \infty)$

اللوغايتم الطبيعي :

مثال (1) **استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل المعادلة :** $e^{4(x+1)} = 32$

الحل : بأخذ لوغاريتم الطبيعي الطرفين :

$$\ln e^{4(x+1)} = \ln(32)$$
$$4(x+1) = \ln 32$$
$$x+1 = \frac{\ln 32}{4}$$
$$x = \frac{\ln 32}{4} - 1$$

مثال (2) **حل المعادلة :** $5 + \ln\left(\frac{x+2}{3}\right) = 7$

الحل : الشرط $\frac{x+2}{3} > 0$

$x + 2 > 0$

$x > -2 \Rightarrow x \in (-2،\infty)$

$$\ln\left(\frac{x+2}{3}\right) = 7 - 5$$
$$\mathrm{Ln}\left(\frac{x+2}{3}\right) = 2$$
$$\frac{x+2}{3} = e^2$$
$$x + 2 = 3e^2 \quad \Longrightarrow \quad x = 3e^2 - 2 \in (-2،\infty)$$

مثال (3) **حل المعادلة :** $2^{2x-3} + 4 = 7$

الحل :

$$2^{2x-3} + 4 = 7$$
$$2^{2x-3} = 3$$

بأخذ لوغاريتم أساسه 2 للطرفين

$$\log_2 2^{2x-3} = \log_2 3$$
$$2x - 3 = 3$$
$$2x = 6 \quad \Longrightarrow \quad x = 3$$

مثال (5) : **حل المعادلة :** $\frac{1}{2}\ln x + \ln 2 - \ln 3 = 3$

الحل : الشرط : $x > 0$

$x \in (0 ، \infty)$

$$\ln x + 2\ln 2 - 2\ln 3 = 6$$
$$\ln x + \ln 4 - \ln 9 = 6$$
$$\ln\frac{4x}{9} = 6$$
$$\frac{4x}{9} = e^6$$
$$x = \frac{9e^6}{4} \in (0 ، \infty)$$

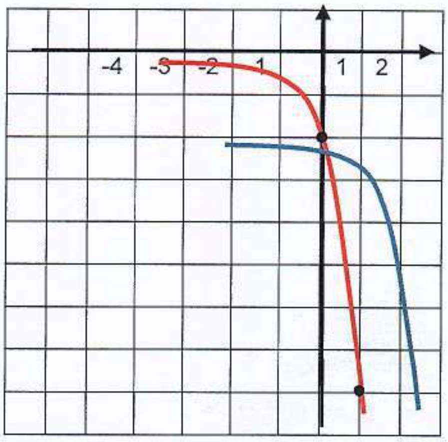
التطبيق : حل المعادلة : $7e^{2x} + \frac{5}{2} = 13$

حل المعادلة : $\ln(5x-3)^{\frac{1}{3}} = 2$

تمارين الوحدة

الأسئلة المقالية :

تمرين (1) مثل بيانيا الدالة : $y = -2(4)^{x-2} - 3$ مستخدماً دالة المرجع والإنسحاب .



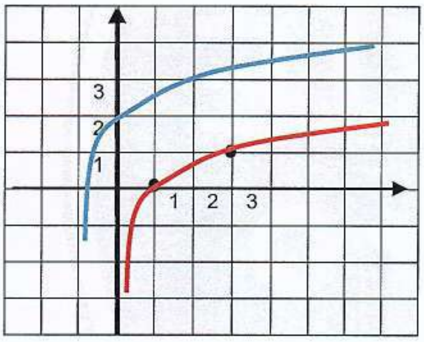
الحل : دالة المرجع : $y = -2(4)^{x}$

x	0	1
y	-2	-8

بيان الدالة $y = -2(4)^{x-2} - 3$ ينتج من بيان الدالة $y = -2(4)^{x}$
بانسحاب افقي نحو اليمين بمقدار وحدتين
وانسحاب رأسي نحو الأسفل بمقدار ثلاث وحدات .

تمرين (2) مثل بيانيا الدالة : $y = log_3(x+1) + 2$ مستخدماً دالة المرجع والإنسحاب.

الحل: دالة المرجع $y_1 = log_3 x$



x	1	3
y	0	1

ينتج بيان الدالة y من بيان الدالة y_1
بانسحاب افقي نحو اليسار بمقدار وحدة واحدة
وانسحاب راسي نحو الأعلى بمقدار وحدتين

تمرين (3) أوجد مجال تعريف الدالة : $log_4(x^2 - 4)$

الحل:
$$x^2 - 4 > 0$$
$$x^2 > 4$$
$$|x| > 2$$
$x > 2$ أو $x < -2$

ويكون مجال الدالة $(-\infty ، -2) \cup (2، \infty)$

تمرين (4) حل المعادلة : $log\,(2x) - log\,(x-3) = log\ 8$

الحل: الشرط : $x - 3 > 0$ | $2x > 0$

$x > 3$ | $x > 0$

$x \in (3 ، \infty)$ | $x \in (0 ، \infty)$

شرط الحل المشترك $(3،\infty)$

$$log\,(2x) - log\,(x-3) = log\ 8$$
$$log\ \frac{2x}{x-3} = \log 8$$
$$\frac{2x}{x-3} = 8$$
$$2x = 8x - 24$$
$$2x - 8x = -24 \Rightarrow -6x = -24$$
$$x = 4 \in (3،\infty)$$

تمرين (5) حل المعادلة : $\boldsymbol{log\,(x) - log\,(x-1) = 1}$

الحل: الشرط : $x - 1 > 0$ | $x > 0$

$x > 1$

$x \in (1 \text{،} \infty)$ | $x \in (0 \text{،} \infty)$

شرط الحل المشترك $(1\text{،}\infty)$

$$log\,(x) - log\,(x-1) = 1$$

$$log\,\frac{x}{x-1} = 1$$

$$\frac{x}{x-1} = 10$$

$$x = 10x - 10$$

$$x - 10x = -10 \;\Rightarrow\; -9x = -10$$

$$x = \frac{10}{9} \in (1\text{،}\infty)$$

تمرين (6) حل المعادلة : $\boldsymbol{log_{5x-3}\,64 = log_2\;4}$

الحل: الشرط : $5x - 3 \neq 1$ | $5x - 3 > 0$

$5x \neq 4$ | $x > \frac{3}{5}$

$x \neq \frac{4}{5}$ | $x \in \left(\frac{3}{5} \text{،} \infty\right)$

شرط الحل $x \in \left(\frac{3}{5} \text{،} \infty\right) - \left\{\frac{4}{5}\right\}$

$$log_{5x-3}\,64 = log_2\;4$$

$$\frac{ln\,64}{ln(5x-3)} = \frac{ln\,4}{ln\,2}$$

$$\frac{ln\,4^3}{ln(5x-3)} = \frac{ln}{ln\,2}$$

$$\frac{3\,ln\,4}{ln(5x-3)} = \frac{ln\,4}{ln} \quad \Rightarrow 3\,ln\,2 = ln\,5x - 3$$

$$5x - 3 = 8 \;\Rightarrow x = \frac{11}{5} \in \left(\frac{3}{5} \text{،} \infty\right) - \left\{\frac{4}{5}\right\}$$

تمرين (7) حل المعادلة : $\boldsymbol{log_{2x-3}\,49 = 2}$

الحل: الشرط : $2x - 3 \neq 1$ | $2x - 3 > 0$

$2x \neq 4$ | $x > \frac{3}{2}$

$x \neq 2$ | $x \in \left(\frac{3}{2} \text{،} \infty\right)$

شرط الحل $x \in \left(\frac{3}{2} \text{،} \infty\right) - \{2\}$

$$log_{2x-3}\,49 = 2$$

$$(2x-3)^2 = 49$$

$$(2x-3)^2 = 7^2$$

$$|2x-3| = 7$$

$$2x - 3 = 7 \;\Rightarrow x = \frac{10}{2} = 5 \in \left(\frac{3}{2} \text{،} \infty\right) - \{2\}$$

$$2x - 3 = -7 \;\Rightarrow x = \frac{-4}{2} = -2 \notin \left(\frac{3}{2} \text{،} \infty\right) - \{2\}$$

تمرين (8) **حل المعادلة :** $2e^{3x-3} + 4 = 16$

الحل

$$2e^{3x-3} = 16 - 4$$

$$2e^{3x-3} = 12$$

$$e^{3x-3} = 6$$

بأخذ لوغاريتم الطبيعي الطرفين : $ln\ e^{3x-3} = ln\ (6)$

$$3x - 3 = \ln 6$$

$$3x = ln(6) - 3$$

$$x = \frac{ln(6)-3}{3}$$

تمرين (9) **حل المعادلة :** $ln\left(\frac{x-1}{2}\right) = 4$

الحل: : الشرط $\frac{x-1}{2} > 0$

$x - 1 > 0$

$x > 1 \Rightarrow x \in (1،\infty)$

$$\frac{x-1}{2} = e^4$$

$$x - 1 = 2e^4 \quad \Rightarrow x = 2e^4 + 1$$

الأسئلة الموضوعية :

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة .

1) الدالة $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ تمثل نمواً أسياً . (a) **(b)**

2) بيان الدالة $y = 2(3)^x$ يقطع جزءا من محور الصادات قدره 2 . (a) **(b)**

3) بيان الدالة $y = log_3\ (x)$ هو انعكاس في المستقيم $y - x = 0$ لبيان الدالة $y = 3^x$. **(a)** (b)

4) حل المعادلة $3\,log\,x - log\,6 + log\,2.4 = 9$ هو 5×10^4 (a) **(b)**

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

5) بيان الدالة $g(x) =$ هو انعكاس في محور الصادات لبيان الدالة : $f(x) = 3(5)^x - 1$

(a) $3(5)^x + 1$ **(b)** $3(5)^{-x} - 1$ (c) $-3(5)^x + 1$ (d) $3(5)^{-x} + 1$

6) يمكن رسم بيان الدالة : $y = log(x+1) - 2$ معتبراً دالة المرجع $y = log\,x$ بانسحاب :

(d) وحدة إلى اليساروحدتين إلى الأعلى **(b)** وحدة إلى اليسار ووحدتين للأسفل

(c) وحدتين إلى اليمين و وحدة للأعلى (a) وحدتين إلى اليساروحدة للأعلى

7) إذا كان $log\,3 = n$ ، $log\,2 = m$ فإن المقدار $m + n - 1$ يساوي :

(a) $log\,0.06$ **(b)** $log\,0.06$ (c) $log\,6$ (d) $log\,60$

8) حل المعادلة $ln(2m+3) = 8$ هو :

(a) $e^8 - 3$ (b) $\frac{e^8}{2} - 3$ **(c)** $\frac{e^8-3}{2}$ (d) $e^8 - 4$

المتجه في المستوي

تعريف القطعة الموجهة : هي قطعة مستقيمة ترتبط بجهة معينة .

تعريف متجه الموضع : قطعة موجهة بدايتها نقطة الأصل ونهايتها النقطة $M(x \text{،} y)$

ويرمز لهذا المتجه ب الرمز $\vec{M} = \langle x_0 \text{،} y_0 \rangle$ ونسمي y_0 ، x_0 مركبتي هذا المتجه .

القطه الموجهة المتكافئة : تكون القطه الموجهة متكافئة إذا كان لها نفس الطول ونفس الجهة .
ويكون لهما نفس متجه الموضع .

تعريف المتجه : مجموعة غير منتهية من القطع الموجهة المتكافئة والتي أحدها متجه الموضع .

مثال(1) **إذا كانت النقط : $D(-2 \text{،} -7)$، $E(3 \text{،}11)$ ، $F(5 \text{،}13)$**
فأوجد مركبات المتجهات $\langle \overrightarrow{DE} \rangle$ ، $\langle \overrightarrow{FE} \rangle$

الحل :

$$\langle \overrightarrow{FE} \rangle = \langle 3-5 \ ,\ 11-13 \rangle = \langle -2 , -2 \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{ED} \rangle = \langle -2-3 \ , -7-11 \rangle = \langle -5 , -18 \rangle$$

طول (معيار) متجه و إتجاهه .

ليكن المتجه $\vec{U} = \langle x \text{،} y \rangle$

إن **معيار (طول) هذا المتجه** يرمز له بالرمز $\|\vec{U}\|$ يعطى بالعلاقة : $\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

اما **اتجاه المتجه** $\|\vec{U}\|$ **:**

فيتحدد بالزاوية الموجهة θ التي يصنعها المتجه مع الإتجاه الموجب لمحور السينات : $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$

ولإيجاد زاوية المتجه (إتجاه المتجه) :

1) نوجد زاوية الإسناد α : $\alpha = tan^{-1}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)$

2) ونحدد الزاوية θ حسب الربع الموافق للمتجه :

$$\theta = \begin{cases} \alpha & \text{الربع الأول} \\ 180^\circ - \alpha & \text{الربع الثاني} \\ 180^\circ + \alpha & \text{الربع الثالث} \\ 360^\circ - \alpha & \text{الربع الرابع} \end{cases}$$

مثال(2) **ارسم كل متجه ثم أوجد معيار وقياس الزاوية θ التي يصنعها مع الإتجاه الموجب لمحور السينات .**

$$\vec{u} = \langle -2 \text{ ، } -3 \rangle \quad \text{،} \quad \vec{v} = \langle 1 \text{ ، } -4 \rangle$$

الحل :

$$\vec{u} = \langle -2 \text{ ، } -3 \rangle$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

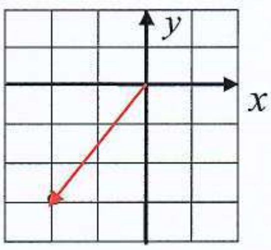
زاوية المتجه : نفرض α زاوية الإسناد

$$\alpha = tan^{-1}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right) = tan^{-1}\left(\left|\frac{-3}{-2}\right|\right) = 56^\circ 18' 35''$$

بما أن x سالب ، y سالب

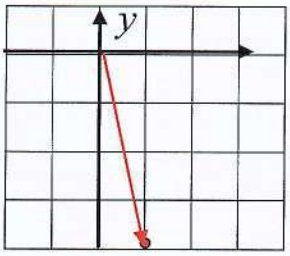
إذاً في الربع الثالث

إذاً : $\theta = 180 + \alpha = 180 + 56^\circ 18' 35'' = 236^\circ 18' 35''$



$$\vec{v} = \langle 1 \ ، -4 \rangle$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$$



زاوية المتجه : نفرض α زاوية الإسناد

$$\alpha = tan^{-1}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right) = tan^{-1}\left(\left|\frac{-4}{1}\right|\right) = 75^{\circ}57'49''$$

بما أن x موجب ، y سالب

إذاً تقع في الربع الرابع

إذاً : $\theta = 360^{\circ} - \alpha = 360^{\circ} - 75^{\circ}57'49'' = 284^{\circ}2'11''$

التطبيق :ارسم المتجه : $\vec{u} = \langle -2 \ ، -3 \rangle$
ثم أوجد معياره وقياس الزاوية θ التي يصنعها مع الإتجاه الموجب لمحور السينات .

متجه الوحدة :

المتجه $\vec{U} = \langle x \ ، y \rangle$ يكون متجه وحدة إذا كان معياره يساوي الوحدة أي : $\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

مثال(3) **إذا كان المتجه $\overrightarrow{m} = \langle x \ ، \frac{12}{13} \rangle$ متجه وحدة فأوجد قيمة x**

الحل :

$$\|\overrightarrow{m}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

$$\sqrt{x^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2} = 1$$

بالتربيع

$$x^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$$

$$x^2 = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}$$

$$\boldsymbol{x} = \pm\sqrt{\frac{25}{169}} = \pm\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{13}}$$

المتجهان المتساويان :

يكون متجهان متساويان إذا كانت القطعتان الموجهتان المناظرتان لهما متكافئتان

المتجه $\vec{A} = \langle x_1 \ ، y_1 \rangle$ ، $\vec{B} = \langle x_2 \ ، y_2 \rangle$ متساويان إذا كان : $x_1 = x_2 \ ، \ y_1 = y_2$

مثال(4) **ليكن المتجهان :** $\vec{A} = \langle -2x + 3 \ ، 4y - 1 \rangle$ ، $\vec{B} = \langle -1 \ ، 3 \rangle$
أوجد $x \ ، y$ **اللتين تحققان** $\vec{A} = \vec{B}$

الحل :

$$\vec{A} = \vec{B}$$

$4y - 1 = 3$	$-2x + 3 = -1$
$4y = 3 + 1$	$-2x = -1 - 3$
$4y = 4$	$-2x = -4$
$y = 1$	$x = 2$

ضرب متجه بعدد حقيقي

إذا كان $\vec{u} = \langle x \ ، y \rangle$ متجه غير صفري و $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^*$

فإن : $\boldsymbol{k}.\vec{u} = \boldsymbol{k}.\langle x \ ، y \rangle = \langle kx \ ، ky \rangle$

مثلاً : $\vec{A} = \langle -3 \ ، 1 \rangle$ **فإن :** $-2\vec{A} = -\mathbf{2}\langle -3 \ ، 1 \rangle = \langle 6 \ ، -2 \rangle$

جمع المتجهات هندسياً

الحالة الأولى : علاقة شال

(المتجهين متعاقبين) إذا نهاية المتجه الأول $\overrightarrow{AB}$ هي نفسها بداية المتجه الثاني $\overrightarrow{BC}$ فإن ناتج جمع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ هو متجه $\overrightarrow{AC}$

الحالة الثانية : إكمال المتوازي الأضلاع

إذا كان للمتجهان $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ البداية نفسها فإن ناتج جمع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ هو القطر $\overrightarrow{AD}$ للمتوازي الاضلاع $ABCD$

تعلّم : عند عملية الجمع هندسياً ننسق المتجهات بحيث يكون المتجهين متعاقبين أو لها نقطة البداية

مثال(1) $ABCD$ مضلع أوجد :

$\boldsymbol{a})\langle\overrightarrow{AB}\rangle+\langle\overrightarrow{CD}\rangle+\langle\overrightarrow{BC}\rangle$ $\qquad$ $\boldsymbol{b})\ \langle\overrightarrow{AD}\rangle+\langle\overrightarrow{CA}\rangle+\langle\overrightarrow{BC}\rangle+\langle\overrightarrow{DB}\rangle$

الحل :

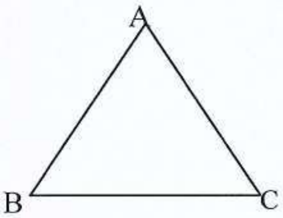
ننسق المتجهات

$$a)\ \langle\overrightarrow{AB}\rangle+\langle\overrightarrow{CD}\rangle+\langle\overrightarrow{BC}\rangle=\langle\overrightarrow{AB}\rangle+\langle\overrightarrow{BC}\rangle+\langle\overrightarrow{CD}\rangle$$
$$=\langle\overrightarrow{AC}\rangle+\langle\overrightarrow{CD}\rangle=\langle\overrightarrow{AD}\rangle$$

ننسق المتجهات

$$b)\ \langle\overrightarrow{AD}\rangle+\langle\overrightarrow{CA}\rangle+\langle\overrightarrow{BC}\rangle+\langle\overrightarrow{DB}\rangle=\underbrace{\langle\overrightarrow{AD}\rangle+\langle\overrightarrow{DB}\rangle}+\underbrace{\langle\overrightarrow{BC}\rangle+\langle\overrightarrow{CA}\rangle}$$
$$=\quad\langle\overrightarrow{AB}\rangle\quad+\quad\langle\overrightarrow{BA}\rangle\quad=\vec{0}$$

مثال(2) في المثلث ABC عين N بحيث $\langle\overrightarrow{BN}\rangle=\langle\overrightarrow{BA}\rangle+\langle\overrightarrow{CA}\rangle$



الحل : بما أن المتجهين $\langle\overrightarrow{BA}\rangle$،$\langle\overrightarrow{CA}\rangle$

ليس متتابعين وليس لهما نقطة البداية نفسها

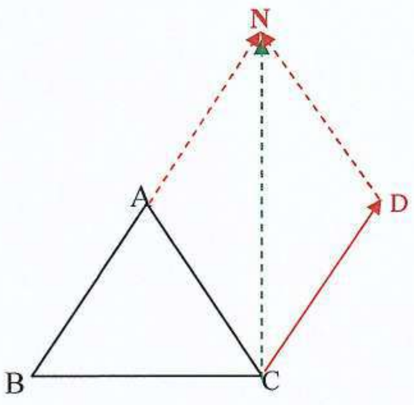
لذلك نرسم مكافئ لأحدهما يشترك مع الآخر بالبداية.

ليكن $\langle\overrightarrow{CD}\rangle$ بحيث $\langle\overrightarrow{BA}\rangle=\langle\overrightarrow{CD}\rangle$

نعوض :

بإكمال المتوازي الأضلاع $\langle\overrightarrow{CD}\rangle+\langle\overrightarrow{CA}\rangle=\langle\overrightarrow{CN}\rangle$

وتكون $N\in\overrightarrow{BA}$



جمع المتجهات جبرياً :

عند عملية جمع متجهين جبريا نجمع مركبتي السينات ومركبتي الصادات .

مثال(3) ليكن المتجهان : $\vec{A}=\langle 4\ ،-2\ \rangle$ ، $\vec{B}=\langle -7\ ،5\rangle$

أوجد : $\vec{A}+\vec{B}$ ، $3\vec{A}+5\vec{B}$

الحل :

$$\vec{A}+\vec{B}=\langle 4\ ،-2\ \rangle+\langle -7\ ،5\rangle=\langle 4+(-7)\ ،-2+5\ \rangle=\langle -3\ ،3\rangle$$

$$3\vec{A}+5\vec{B}=3\langle 4\ ،-2\ \rangle+5\langle -7\ ،5\rangle$$
$$=\langle 12\ ،-6\ \rangle+\langle -35\ ،25\rangle=\langle -23\ ،19\rangle$$

التطبيق : ليكن المتجهان : $\vec{A}=\langle -4\ ،3\ \rangle$ ، $\vec{B}=\langle 2\ ،1\rangle$

أوجد : $\vec{A}+\vec{B}$ ، $2\vec{A}+5\vec{B}$

طرح المتجهات

طرح المتجهات هندسياً : يتم طرح متجهين هندسياً عن طريق تحويل طرح متجهين الى جمع المعكوس .

مثال (4) $ABCD$ مضلع أوجد :

$$a)\ \langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{CD}\rangle - \langle\overrightarrow{AD}\rangle - \langle\overrightarrow{CB}\rangle \qquad b)\ \langle\overrightarrow{AB}\rangle - \langle\overrightarrow{AC}\rangle + \langle\overrightarrow{BC}\rangle + \langle\overrightarrow{AD}\rangle$$

الحل

(نغير الأشارة و نعكس المتجهات)
$$a)\ \langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{CD}\rangle - \langle\overrightarrow{AD}\rangle - \langle\overrightarrow{CB}\rangle = \langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{CD}\rangle + \langle\overrightarrow{DA}\rangle + \langle\overrightarrow{BC}\rangle$$

ننسق المتجهات
$$= \langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{BC}\rangle + \langle\overrightarrow{CD}\rangle + \langle\overrightarrow{DA}\rangle$$
$$= \langle\overrightarrow{AC}\rangle + \langle\overrightarrow{CA}\rangle = \overrightarrow{0}$$

(نغير الأشارة و نعكس المتجه)
$$b)\ \langle\overrightarrow{AB}\rangle - \langle\overrightarrow{AC}\rangle + \langle\overrightarrow{BC}\rangle + \langle\overrightarrow{AD}\rangle = \langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{CA}\rangle + \langle\overrightarrow{BC}\rangle + \langle\overrightarrow{AD}\rangle$$

ننسق المتجهات
$$= \langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{BC}\rangle + \langle\overrightarrow{CA}\rangle + \langle\overrightarrow{AD}\rangle$$
$$= \langle\overrightarrow{AC}\rangle + \langle\overrightarrow{CD}\rangle = \overrightarrow{AD}$$

طرح المتجهات جبرياً :

عند عملية طرح متجهين جبريا نطرح مركبتي السينات ومركبتي الصادات .

مثال (5) ليكن المتجهان : $\overrightarrow{A} = \langle -3 ، 0 \rangle$ ، $\overrightarrow{B} = \langle 5 ، -9 \rangle$

أوجد : $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$

الحل :
$$\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = \langle -3 ، 0 \rangle - \langle 5 ، -9 \rangle$$
$$= \langle -3-5 ، 0-(-9) \rangle = \langle -8 ، 9 \rangle$$

التعبير عن متجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين .

نسمي المتجهين $\overrightarrow{i} = \langle 1 ، 0 \rangle$ ، $\overrightarrow{j} = \langle 0 ، 1 \rangle$ متجهي الوحدة الأساسيين .
ونعبر عن أي متجه بدلالة متجهي الوحدة .

مثلاً : المتجه $\overrightarrow{OA} = \langle x_A ، y_A \rangle$ نعبر عنه بالشكل :
$$\overrightarrow{OA} = \langle x_A ، y_A \rangle = x_A\ \overrightarrow{i} + y_A\,\overrightarrow{j}$$

مثال (6) لتكن النقاط : $A(3 ، 4)$ ، $B(-2 ، 5)$
أكتب المتجه $\langle\overrightarrow{OA}\rangle$ ، $\langle\overrightarrow{OB}\rangle$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين .

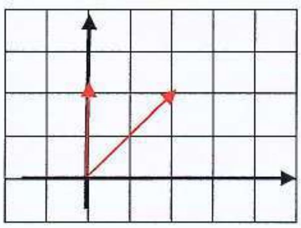
الحل :
$$\langle\overrightarrow{OA}\rangle = \langle 3 ، 4 \rangle = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$$
$$\langle\overrightarrow{OB}\rangle = \langle -2 ، 5 \rangle = -2\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}$$

الضرب الداخلي

الضرب الداخلي لمتجهين :

إذا كان $\overrightarrow{A}$ ، $\overrightarrow{B}$ متجهين غير صفريين فإن الضرب الداخلي للمتجهين هو $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$ ويعطى بالعلاقة :
$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \|\overrightarrow{A}\| \times \|\overrightarrow{B}\| \times \cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) \qquad 0° \le m(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) \le 180°$$

مثال (7) إذا كان $\overrightarrow{u} = \langle 0 ، 2 \rangle$ ، $\overrightarrow{v} = \langle 2 ، 2 \rangle$ فأوجد $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ ((مستعيناً بالرسم البياني)) .



$$= 2 \times 2\sqrt{2} \times \cos(45) = 4$$

قانون ضرب متجهين

إذا كان $\overrightarrow{B} = \langle x_B ، y_B \rangle$ ، $\overrightarrow{A} = \langle x_A ، y_A \rangle$ متجهين في المستوي الإحداثي .

فإن : $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \langle x_A ، y_A \rangle \cdot \langle x_B ، y_B \rangle = x_A . x_B + y_A . y_B$

ونقول عن متجهين أنهما متعامدين إذا كان ناتج ضرب المتجهين يساوي صفر .

$\overrightarrow{A} \perp \overrightarrow{B} = x_A . x_B + y_A . y_B = 0$

مثال (8) **إذا كانت النقط $C(2 ، 1)$ ، $B(3 ، 2)$ ، $A(6 ، -1)$ رؤوس المثلث ABC .**

1) **أكتب كل من المتجهين $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{BA}$ بدلالة متجهي الوحدة $\vec{j}$ ، $\vec{i}$**

2) **أوجد $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$**

3) **أثبت أن المثلث ABC قائم .**

الحل :

1) $\overrightarrow{BA} = \langle 6-3 , -1-2 \rangle = \langle 3 , -3 \rangle$

$\overrightarrow{BC} = \langle 2-3 , 1-2 \rangle = \langle -1 , -1 \rangle$

2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \langle 3 , -3 \rangle \cdot \langle -1 , -1 \rangle = 3 \times -1 + (-3) \times -1 = 0$

3) بما أن $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

إذا $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ وبالتالي المثلث ABC قائم في B

التطبيق : إذا كانت النقط $C(-3 ، -1)$ ، $B(1 ، 1)$ ، $A(-2 ، -3)$ رؤوس المثلث ABC .

1) **أكتب كل من المتجهين $\overrightarrow{CA}$ ، $\overrightarrow{CB}$ بدلالة متجهي الوحدة $\vec{j}$ ، $\vec{i}$**

2) **أثبت أن المثلث ABC قائم في C.**

مثال (9) **إذا كان المتجهان $\overrightarrow{B} = \langle x ، -2 \rangle$ ، $\overrightarrow{A} = \langle 3 ، -1 \rangle$ وكان $\overrightarrow{A} \perp \overrightarrow{B}$ فأوجد قيمة x .**

الحل :

$$\overrightarrow{A} \perp \overrightarrow{B} \Rightarrow \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = 0$$

$$\langle 3 ، -1 \rangle \cdot \langle x ، -2 \rangle = 0$$

$$\mathbf{3x + (-1)(-2) = 0}$$

$$\mathbf{3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2}{3}}$$

قانون متجهين متوازيين :

نقول عن المتجهين $\overrightarrow{B} = \langle x_B ، y_B \rangle$ ، $\overrightarrow{A} = \langle x_A ، y_A \rangle$ أنهما متوازيان

إذا تحقق : $x_A . y_B - x_B . y_A = 0$

مثال (10) أثبت أن $\overrightarrow{A} // \overrightarrow{B}$ حيث $\overrightarrow{B} = \langle 6 ، -4 \rangle$ ، $\overrightarrow{A} = \langle 3 ، -2 \rangle$

الحل : $x_A . y_B - x_B . y_A = 3 \times (-4) - 6 \times (-2) = 0$

إذاً $\overrightarrow{A} // \overrightarrow{B}$

مثال (11) إذا كان $\overrightarrow{A} // \overrightarrow{B}$ ، $\overrightarrow{B} = \langle x ، \frac{4}{5} \rangle$ ، $\overrightarrow{A} = \langle \frac{7}{3} ، \frac{2}{3} \rangle$ فأوجد x

الحل : بما أن $\overrightarrow{A} // \overrightarrow{B}$

$$x_A . y_B - x_B . y_A = 0$$

$$\frac{7}{3} \times \frac{4}{5} - x . \frac{2}{3} = 0$$

$$\frac{28}{15} - \frac{2}{3} x = 0 \Rightarrow x = \frac{14}{5}$$

مثال (12) لنأخذ $\overrightarrow{v} = \langle 2 ، -3 \rangle$ ، $\overrightarrow{u} = \langle x ، 4 \rangle$

1) أوجد قيمة x بحيث يكون $\overrightarrow{u}$ متعامد مع $\overrightarrow{v}$

2) أوجد قيمة x بحيث يكون $\|\overrightarrow{u}\| = 5 \text{ units}$

الحل :

1) بما أن $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ فإن : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

$$\langle x , 4 \rangle \cdot \langle 2 , -3 \rangle = 2x - 12 = 0 \Rightarrow x = 6$$

2) $\|\overrightarrow{u}\| = 5$

$$\sqrt{x^2 + 16} = 5$$

$$x^2 + 16 = 25$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

قياس الزاوية بين متجهين

إذا كان $\overrightarrow{A}$ ، $\overrightarrow{B}$ متجهين غير صفريين فإن :

$$cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{\|\overrightarrow{A}\| \cdot \|\overrightarrow{B}\|} \quad , 0^\circ \le m(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) \le 180^\circ$$

مثال (13) أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين :

$$\overrightarrow{A} = \langle 6 ، 3 \rangle ، \overrightarrow{B} = \langle 3 ، -1 \rangle$$

الحل :

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \langle 6 ، 3 \rangle \cdot \langle 3 ، -1 \rangle$$

$$= 6 \times 3 + 3 \times -1 = 15$$

$$\|\overrightarrow{A}\| = \sqrt{(6)^2 + (3)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\|\overrightarrow{B}\| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{Cos}(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{\|\overrightarrow{A}\| \cdot \|\overrightarrow{B}\|} =$$

$$= \frac{15}{3\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

وبالتالي : $m(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ$

التطبيق : أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين :

$$\overrightarrow{A} = \langle 2 ، 2\sqrt{3} \rangle ، \overrightarrow{B} = \langle -4 ، -4\sqrt{3} \rangle$$

تمارين الوحدة

الأسئلة المقالية :

تمرين (1) $A، B، C، D$ نقاط في المستوي ، بسط :

$$a)\ 2\langle\overrightarrow{AB}\rangle + 4\langle\overrightarrow{BC}\rangle + 2\langle\overrightarrow{CD}\rangle + 2\langle\overrightarrow{AD}\rangle$$

$$b)\ 2\langle\overrightarrow{AB}\rangle - 3\langle\overrightarrow{AC}\rangle + \langle\overrightarrow{AD}\rangle + 2\langle\overrightarrow{BD}\rangle$$

الحل :

$$a)\ 2\big(\langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{BC}\rangle + \langle\overrightarrow{CD}\rangle + \langle\overrightarrow{DA}\rangle\big) + 2\langle\overrightarrow{BC}\rangle = 2\big(\langle\overrightarrow{AC}\rangle + \langle\overrightarrow{CA}\rangle\big) + 2\langle\overrightarrow{BC}\rangle$$
$$= \mathbf{2}\,.\,\overrightarrow{\mathbf{0}} + 2\langle\overrightarrow{BC}\rangle = 2\langle\overrightarrow{BC}\rangle$$

$$b)\ 2\big(\langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{BD}\rangle + \langle\overrightarrow{CA}\rangle\big) + \langle\overrightarrow{CA}\rangle + \langle\overrightarrow{AD}\rangle = 2\big(\langle\overrightarrow{AD}\rangle + \langle\overrightarrow{CA}\rangle\big) + \langle\overrightarrow{CD}\rangle$$
$$= 2\langle\overrightarrow{CD}\rangle + \langle\overrightarrow{CD}\rangle$$
$$= 3\langle\overrightarrow{CD}\rangle$$

تمرين (2) **إذا كانت النقط $C(3 ، -1)$ ، $B(-3،1)$ ، $A(-1،3)$ ثلاث نقط في المستوى الإحداثي.**

1) اوجد : $\|\overrightarrow{AB}\|$ ، $\|\overrightarrow{AC}\|$ ، $\|\overrightarrow{BC}\|$.

2) أوجد $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج نوع المثلث .

الحل :

1)
$$\overrightarrow{AB} = \langle -3-(-1)\,,1-3\rangle = \langle -2\,,-2\rangle$$
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$$
$$\overrightarrow{AC} = \langle 3-(-1),-1-3\rangle = \langle 4\,,-4\rangle$$
$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(4)^2+(-4)^2} = 4\sqrt{2}$$
$$\overrightarrow{BC} = \langle 3-(-3),-1-1\rangle = \langle 6\,,-2\rangle$$
$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(6)^2+(-2)^2} = 2\sqrt{10}$$

2)
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \langle -2\,,-2\rangle\cdot\langle 4\,,-4\rangle = -2\times 4 + -2\times -4 = 0$$

بما أن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

إذا $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ وبالتالي المثلث ABC قائم في A

تمرين (3) **لنأخذ في المستوي الإحداثي $\overrightarrow{B} = \langle -\sqrt{2}\,،0\rangle$ ، $\overrightarrow{A} = \langle 2\,،-2\rangle$**

أوجد $m(\overrightarrow{A}،\overrightarrow{B})$

الحل :

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = \langle 2\,،-2\rangle\cdot\langle -\sqrt{2}\,،0\rangle$$
$$= 2\times -\sqrt{2} + (-2)\times 0 = -2\sqrt{2}$$
$$\|\overrightarrow{A}\| = \sqrt{(2)^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$$
$$\|\overrightarrow{B}\| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+(0)^2} = 2$$

$$\mathrm{Cos}(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{\|\overrightarrow{A}\|\cdot\|\overrightarrow{B}\|} =$$
$$= \frac{-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times 2} = -\frac{1}{2}$$

وبالتالي : $m(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^{\circ}$

الأسئلة الموضوعية :

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة .

1) $ABCF$ متوازي اضلاع حيث : $\overrightarrow{BA} = \langle -2،3 \rangle$ ، $\overrightarrow{BF} = \langle 1، 4 \rangle$
إذاً $\overrightarrow{BC} = \langle 3،1 \rangle$ — (a) (b)

2) في المثلث ABC ، $\langle \overrightarrow{AB} \rangle - \langle \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{BC} \rangle - \langle \overrightarrow{BA} \rangle = \langle \overrightarrow{AB} \rangle$ — (a) (b)

3) $\overrightarrow{A}$ ، $\overrightarrow{B}$ متجهان في المستوي حيث : $\overrightarrow{A} = \langle 2، -3 \rangle$ ، $\overrightarrow{B} = \langle 1، 0 \rangle$
فإن: $\text{Cos}(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ — (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة .

4) لنأخذ في المستوي الإحداثي النقاط : $E(2،4)$ ، $F(-1، -5)$ ، $G(x، y)$
إذا كان $\langle \overrightarrow{EF} \rangle = \langle \overrightarrow{EG} \rangle$ فإن : $(x، y)$ تساوي :

(a) $(-1، -5)$ (b) $(-5، -13)$ (c) $(5،13)$ (d) $(1،5)$

5) $ABCD$ متوازي اضلاع حيث : $C(3، -1)$ ، $B(0، -2)$ ، $A(-2،1)$ إذا إحداثيات D هي :

(a) $(2،2)$ (b) $(-1،2)$ (c) $(1،2)$ (d) $(1، -2)$

6) إذا كان $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -2$ فإن $m(\overrightarrow{BA}، \overrightarrow{BC})$ **لا يمكن** أن يساوي :

(a) 60° (b) 28° (c) 122° (d) 50°

7) إذا كان ، $\overrightarrow{L} = \langle \overrightarrow{AC} \rangle + 2\langle \overrightarrow{AB} \rangle - \langle \overrightarrow{BC} \rangle$ فإن :

(a) $\overrightarrow{L} = \frac{1}{2}\langle \overrightarrow{AB} \rangle$ (b) $\overrightarrow{L} = -\frac{1}{2}\langle \overrightarrow{AB} \rangle$

(c) $\overrightarrow{L} = 3\langle \overrightarrow{AB} \rangle$ (d) $\overrightarrow{L} = -3\langle \overrightarrow{AB} \rangle$

سنبدأ في هذا الباب من بند الثاني ((العينات)) حيث أن البند الأول عبارة عن تعاريف وأسئلة موضوعية .

العينات

العينة العشوائية : هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم اختيارها بطريقة علمية دون تحيز كي تمثل المجتمع أفضل تمثيل بأقل تكلفة ممكنة .

أنواع العينات :

1) العينة العشوائية البسيطة :

وفي هذا النوع يتم اختيار الأرقام المطلوبة من جدول الأعداد العشوائية حسب رقم العمود والصف المحددين .

مثال (1) في مؤسسة يوجد 90 موظفاً مرقمين من 1 وحتى 90 . يراد اختيار 7 موظفين لأداء فريضة الحج على نفقة المؤسسة ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية .

المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءاً من الصف السادس والعمود الرابع

الحل : من جدول الأعداد العشوائية من الصف السادس والعمود الرابع وباختيار أول رقيمن :

59 ، 61 ، 3 ، 24 ،77 ، 70 ، 10

التطبيق : في المثال السابق إذا تم سحب العينة من الصف العاشر والعمود الخامس فما الأعداد التي ستحصل عليها.

2) العينة العشوائية الطبقية :

عندما يكون المجتمع مؤلف من مجموعات لا تتقاطع مع بعضها نأخذ من كل مجموعة عينة بسيطة فنحصل على عينة طبقية .

ولسحب عينة عشوائية طبقية

نحسب كسر المعاينة = $\frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}$

نحسب حجم كل طبقة = كسر المعاينة × حجم الطبقة المناظرة

ثم نوجد الأرقام المناظرة لكل طبقة من جدول الأعداد العشوائية

مثال (2) في إحدى المستشفيات يوجد 80 إدارياً مرقمين من 1 إلى 80 ، 140 طبيباً مرقمين من 81 إلى 220 ،240 ممرض مرقمين من 221 إلى 460 ، 40 عاملاً مرقمين من 461 إلى 500 .تم سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 25 فرداً لدراسة كفاءة العاملين .

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة .

الحل : **لسهولة تنظيم البيانات ننظم لجدول :**

الاداريون	الأطباء	الممرضين	العمال	المجموع
80	140	240	40	500

كسر المعاينة = $\frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \frac{25}{500} = \frac{1}{20}$

حجم طبقة الإداريون : $80 \times \frac{1}{20} = 4$

حجم طبقة الاطباء: $140 \times \frac{1}{20} = 7$

حجم طبقة الممرضين : $240 \times \frac{1}{20} = 12$

حجم طبقة العمال : $40 \times \frac{1}{20} = 2$

مثال (3) في أحد المصارف يوجد 35 موظفاً موزعين كما يبين الجدول التالي :

المجموع	مستخدمون	محاسبون ومدقون	مدراء أقسام
35	20	10	5
الترقيم	من 1 إلى 20	من 21 إلى 30	من 31 إلى 35

المطلوب : سحب عينة طبقية مكونة من 7 أفراد لدراسة الأداء الوظيفي من جدول الأعداد العشوائية .

الحل :

كسر المعاينة = $\frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}$

حجم طبقة المستخدمون : $20 \times \frac{1}{5} = 4$

الأرقام المطلوبة : 2 ، 8 ، 6 ، 1

حجم طبقة المحاسبون والمدققون : $10 \times \frac{1}{5} = 2$

الأرقام المطلوبة : 28، 22

حجم طبقة المستخدمون مدراء الأقسام : $5 \times \frac{1}{5} = 1$

الأرقام المطلوبة :31

التطبيق : في أحد المعامل يوجد 200 موظفاً موزعين كما يبين الجدول التالي :

المجموع	مستخدمون	محاسبون ومدقون	مدراء أقسام
200	120	60	20
الترقيم	من 1 إلى 120	من 121 إلى 180	من 181 إلى 200

المطلوب : سحب عينة طبقية مكونة من 10 أفراد لدراسة الأداء الوظيفي من جدول الأعداد العشوائية ابتداءا من الصف الثالث والعمود الثاني .

3) العينة العشوائية المنتظمة :

تعتبر من أكثر العينات استخداماً يتم سحب مفرداتها بحسب نظام منتظم وثابت ،وتستخدم في المجتمعات الإحصائية التي تكون مفرداتها متجانسة .

ولسحب عينة عشوائية منتظمة .

نوجد طول الفترة = $\frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}}$

نسحب المفردة الأولى التي قيمتها أقل من طول الفترة من جدول الأعداد العشوائية

نوجد باقي المفردات وذلك بزيادة طول الفترة .

مثال (3) يبلغ عدد طلبة الصف الحادي عشر علمي في إحدى المدارس 140 طالباً مرقمين من 1 إلى 140 .

المطلوب : سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 7 لزيارة إحدى دور المسنين وتقديم الهدايا بمناسبة عيد الفطر باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءاً من الصف السادس والعمود التاسع .

الحل :

طول الفترة = $\frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}} = \frac{140}{7} = 20$

من جدول الأعداد العشوائية ابتداءاً من الصف السادس والعمود التاسع نبحث عن العدد الذي أصغر أو يساوي 20

وهو يكون : 15

إذاً : العدد الأول 15

العدد الثاني $20 + 15 = 35$

العدد الثالث $20 + 35 = 55$
العدد الرابع $20 + 55 = 75$
العدد الخامس $20 + 75 = 95$
العدد السادس $20 + 95 = 115$
العدد السابع $20 + 115 = 135$

التطبيق: في المثال السابق مالعينة العشوائية المنتظمة إذا أراد صاحب المحل تشكيلها على أن يكون حجمها 10 باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءاً من الصف الثامن والعمود السابع .

أساليب عرض البيانات :

القطاعات الدائرية

مثال (3) يمثل الجدول التالي التوزيع التكراري لالوان العيون لدى 40 طالباً ثانوياً .

الفئة	أسود	أزرق	بني	عسلي	زيتي	المجموع
التكرار	13	4	13	6	4	40

1) أوجد التكرار النسبي والتكرار المئوي
2) مثل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية

الحل :

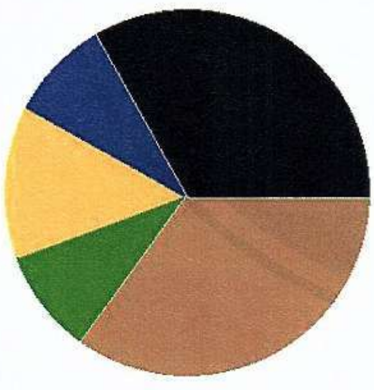
1)

الفئة	أسود	أزرق	بني	عسلي	زيتي	المجموع
التكرار	13	4	13	6	4	40
التكرار النسبي	13/40	4/40	13/40	6/40	4/40	1
التكرار المئوي	32.5%	10%	32.5%	15%	10%	100%

2) التمثيل بالقطاعات الدائرية :

قياس القطاع: $\frac{360^\circ}{40} = 9^\circ$

الأسود $13 \times 9^\circ = 117^\circ$
أزرق $4 \times 9^\circ = 36^\circ$
بني $13 \times 9^\circ = 117^\circ$
عسلي $6 \times 9^\circ = 54^\circ$
زيتي $4 \times 9^\circ = 36^\circ$



المنحنى التكراري والمدرج التكراري

مثال (3) يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأطوال 30 طالباً بالسنتيمتر (cm) .

الفئة	-155	-160	-165	-170	-175	-180	المجموع
التكرار	4	6	11	5	3	1	30

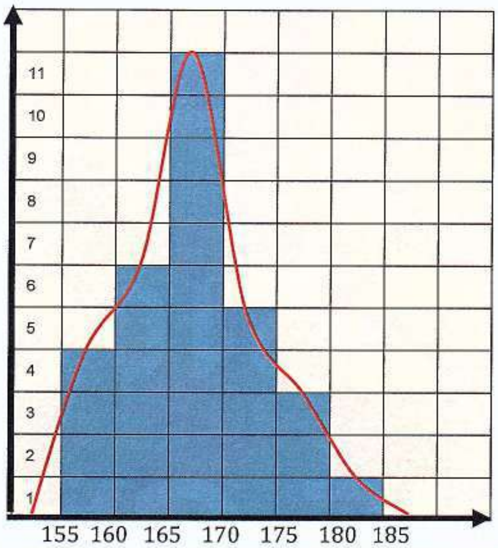
1) أوجد مراكز الفئات .
2) ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري .

الحل :

1)

الفئة	-155	-160	-165	-170	-175	-180	المجموع
التكرار	4	6	11	5	3	1	30
مركز الفئة	157.5	162.5	167.5	172.5	177.5	182.5	

2) المدرج التكراري والمنحنى التكراري



التطبيق : يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لنتائج تحيل مادة النيترات في 40 وحدة ماء معدة للخدمات المشتركة في المنازل (غير الصالحة للشرب) وذلك خلال شهر واحد (mg/L)

الفئة	-15	-20	-25	-30	-35	-40	-45	-50	المجموع
التكرار	3	4	8	9	7	4	3	2	40

1) أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات.
2) ارسم المنحني التكراري.
3) ارسم المدرج التكراري ومنه المنحني التكراري .

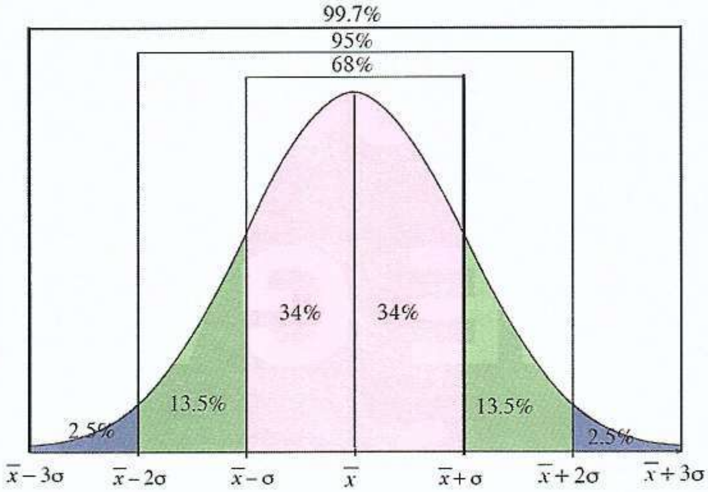
القاعدة التجريبية

تستخدم القاعدة التجريبية لدراسة الجودة في مواقف إحصائية متعددة لعينات ذات قيم مفردة محددة وعلى ضوء الدراسة نتخذ القرارات المناسبة .

على افتراض لدينا مجموعة بيانات كمية ووجدنا المتوسط الحسابي $\overline{x}$ والانحراف المعياري σ لهذه البيانات .
وتبين أن المنحني التكراري هو على شكل جرس يمكن عندها تطبيق القاعدة التجريبية التي تنص على :

1) حوالي % 68 من قيم البيانات تقع في الفترة $[\overline{x} - \sigma ، \overline{x} + \sigma]$.
2) حوالي % 95 من قيم البيانات تقع في الفترة $[\overline{x} - 2\sigma ، \overline{x} + 2\sigma]$.
3) حوالي % 99,7 من قيم البيانات تقع في الفترة $[\overline{x} - 3\sigma ، \overline{x} + 3\sigma]$.

والشكل التالي يبين التوزيعات الثلاثة :



مثال (1) لاحظت شركة ان المتوسط الحسابي أرباحها 475 دينار بانحراف معياري 115 دينار .على افتراض أن المنحنى التكراري لأرباح هذه الشركة على شكل الجرس (منحنى طبيعي).

1) طبق القاعدة التجريبية
2) هل وصلت أرباح الشركة إلى 750 دينار ؟ فسر ذلك .

الحل : $\overline{x} = 475$ ، : $\sigma = 115$

حوالي % 68 من قيم البيانات تقع في الفترة $[\overline{x} - \sigma ، \overline{x} + \sigma] =$
$[475 - 115 ، 475 + 115] = [360،590]$

حوالي % 95 من قيم البيانات تقع في الفترة $[\overline{x} - 2\sigma ، \overline{x} + 2\sigma]$
$[475 - 2 \times 115 ، 475 + 2 \times 115] = [245 ، 705]$

حوالي % 99,7 من قيم البيانات تقع في الفترة $[\overline{x} - 3\sigma ، \overline{x} + 3\sigma]$
$[475 - 3 \times 115 ، 475 + 3 \times 115] = [130 ، 820]$

بما أن 750 تقع داخل الفترة $[130 ، 820]$
اذاً وصلت أرباح الشركة الى 750 دينار

التطبيق :إذا كان المتوسط الحسابي لأرباح شركة 350 ديناروالإنحراف المعياري 110 والمنحنى التكراري لأرباح هذه الشركة هو على شكل الجرس (توزيع طبيعي)

1) طبق القاعدة التجريبية.
2) هل وصلت أرباح الشركة إلى 690 دينار ؟ فسر ذلك .

مثال (2) يعلن مصنع لأنتاج المصابيح الكهربائية ان متوسط عمر المصباح الكهربائي من النوع (A)هو $700h$ بانحراف معياري $100h$ ،على افتراض ان المنحني الممثل لتوزيع عمر المصابيح يقترب كثيراً من التوزيع الطبيعي .

1) طبق القاعدة التجريبية .
2) أوجد النسبة المئوية للمصابيح الكهربائية من النوع (A) التي يزيد عمرها عن $500h$.
3) أوجد النسبة المئوية للمصابيح الكهربائية من النوع (A) التي يقل عمرها عن $400h$.

الحل:

1) $\bar{x} = 700$ ، : $\sigma = 100$

حوالي % 68 من قيم البيانات تقع في الفترة $[\bar{x} - \sigma ، \bar{x} + \sigma] =$

$[700 - 100 ، 700 + 100] = [600،800]$

حوالي % 95 من قيم البيانات تقع في الفترة $[\bar{x} - 2\sigma ، \bar{x} + 2\sigma]$

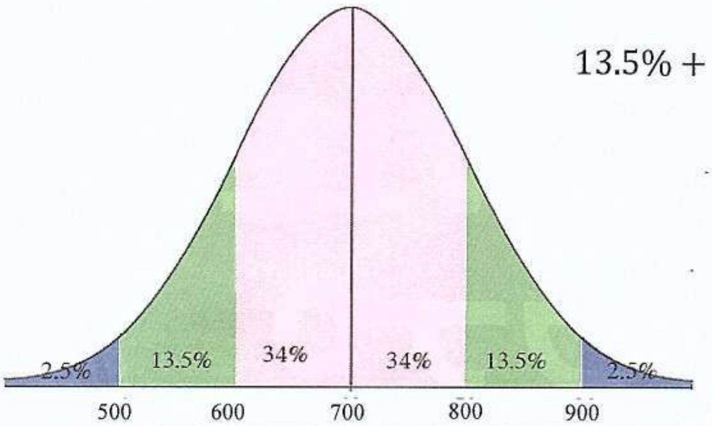
$[700 - 2 \times 100 ، 700 + 2 \times 100] = [500 ، 900]$

حوالي % 99,7 من قيم البيانات تقع في الفترة $[\bar{x} - 3\sigma ، \bar{x} + 3\sigma]$

$[700 - 3 \times 100 ، 700 + 3 \times 100] = [400 ، 1000]$

(2
نسبة المصابيح التي تزيد عن 500 هي :
$13.5\% + 34\% + 34\% + 13.5\% + 2.5\% = 97.5\%$

(3
نسبة المصابيح التي يقل عمرهاعن 600 هي :
$13.5\% + 2.5\% = 16\%$



القيمة المعيارية

وهي مؤشر يدل على انحراف قيمة مفردة من بيانات عن المتوسط الحسابي باستخدام الانحراف المعياري .
وتستخدم للمقارنة بين قيمتين لمفردتين مختلفتين تنتمي كل منهم لمجموعة محددة .
باستخدام القاعدة :

القيمة المعيارية = $\frac{\text{قيمة المفردة—المتوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}}$ ، $\boxed{z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}}$

مثال (3) جاءت إحدى درجات طالب في مادة الفيزياء 15 حيث المتوسط الحسابي 14 والانحراف المعياري 3.8 وفي مادة الكيمياء 15 حيث المتوسط الحسابي 13 والانحراف المعياري 7.8 .
مالقيمة المعيارية للدرجة 15 مقارنة مع درجات كل مادة ؟ ايهما أفضل ؟

الحل :

الفيزياء

$\bar{x} = 14 \quad \sigma = 3.8 \quad x = 15$

$z_1 = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} = \frac{15-14}{3.8}$

$z_1 = 0.26$

الكيمياء

$\bar{x} = 13 \quad \sigma = 7.8 \quad x = 15$

$z_2 = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} = \frac{15-13}{7.8}$

$z_2 = 0.25$

بما أن $z_1 > z_2$ إذا في الفيزياء أفضل

الأسئلة الموضوعية :

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة .

1) في التوزيع الطبيعي الفترة : $[\overline{x} - \sigma \text{ ، } \overline{x} + \sigma]$ تحتوي على 95% من البيانات . (a) (b)

2) في بيانات حيث المتوسط الحسابي $\bar{x} = 12$
والقيمة المعيارية للمفردة $x = 15$ هي $z = 0.4$ فإن الانحراف المعياري $\sigma = 7.5$ (a) (b)

3) حجم المجتمع الإحصائي = طول الفترة × حجم العينة (a) (b)

4) التكرار النسبي يساوي : قياس الزاوية المركزية لقطاع × 360° (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة .

5) إذا كان حجم العينة يساوي 100 وحجم المجتمع الأحصائي يساوي 2000 ، فكسر المعاينة يساوي :

(a) 0.3 (b) 0.5 (c) 0.05 (d) 0.02

6) إذا كان طول الفترة يساوي 40 وحجم المجتمع الإحصائي يساوي 1000 ، فحجم العينة يساوي :

(a) 35 (b) 25 (c) 40 (d) 30

7) القيمة المعيارية للمفردة 14 من البيانات هي 0.6 والمتوسط الحسابي 11 فإن الإنحراف المعياري لقيم هذه البيانات هو

(a) 0.2 (b) -0.2 (c) -5 (d) 5

8) الفترة $[\overline{x} - 2\sigma \text{ ، } \overline{x} + 2\sigma]$ تحتوي على :

(a) 99.7% من البيانات (b) 68% من البيانات

(c) 95% من البيانات (d) 90% من البيانات

امتحان نهاية الفصل الدراسي الأول – المجال الدراسي : الرياضيات
الصف الحـــادي عشر العلمي العام الدراسي 2016 /2017 م
الزمن :(ساعتان ونصف)

وزارة التربية

القسم الأول : القسم المقال (أجب عن جميع الأسئلة موضحاً خطوات الحل)

السؤال الأول : a) أوجد مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{8x} - 2\sqrt{4x-16} = 0$

الحل :

(b) أوجد مجال الدالة : $f(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{x+1}} + \sqrt{x+9}$

الحل:

السؤال الثاني : a) أوجد مجموعة حل المعادلة : $\log (x) - \log (x - 1) = 1$

الحل :

(b) مثل بيانيا الدالة : $y = -2(4)^{x-2} - 3$ مستخدماً دالة المرجع والإنسحاب .

الحل :

<u>السؤال الثالث</u> : أوجد مجموعة حل المتباينة : $\frac{3x-5}{-2x+3} \geq 0$

<u>الحل :</u>

(b) أوجد مجموعة حل المعادلة : $x^3 - 7x + 6 = 0$ (مستخدماً نظرية الأصفار النسبية)

الحل :

السؤال الرابع: a) أوجد قيمة التعبير : $x^2 - 6$ إذا كان $x = \frac{4}{\sqrt{5}-1}$

الحل :

(b) أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين : $\overrightarrow{A} = \langle 6 ، 3 \rangle$ ؛ $\overrightarrow{B} = \langle 3 ، -1 \rangle$

الحل :

c) لاحظت شركة ان المتوسط الحسابي أرباحها 475 دينار بانحراف معياري 115 دينار .على افتراض أن المنحنى التكراري لأرباح هذه الشركة على شكل الجرس (منحنى طبيعي).

1) طبق القاعدة التجريبية
2) هل وصلت أرباح الشركة إلى 750 دينار ؟ فسر ذلك .

<u>الحل</u> :

القسم الثاني ـــ البنود الموضوعية

أولاً : في البنود (3 – 1) عبارات ظلل في ورقة الإجابة : (a) إذا كانت العبارة صحيحة

(b) إذا كانت العبارة خاطئة

1) $\sqrt[4]{\sqrt{x}} = x \quad ,x > 0$ (a) (b)

2) إذا قبلت $f(x) = x^4 - 2x^2 + k + 1$ القسمة على x فإن $k = -1$ (a) (b)

3) $ABCF$ متوازي اضلاع حيث : $\overrightarrow{BF} = \langle 1، 4\rangle$ ، $\overrightarrow{BA} = \langle -2،3\rangle$ (a) (b)

إذاً $\overrightarrow{BC} = \langle 3،1\rangle$

ثانياً : في البنود (8 – 4) لكل بند أربع اختيارات واحد فقط صحيح ظلل في ورقة الإجابة

الرمز الدال على الإجابة الصحيحة

4) معادلة القطع المكافئ $y = 2x^2$ الذي تم إزاحة رأسه وحدتين يساراً و 4 وحدات لاعلى هي :

(a) $y = (2x + 2)^2 + 4$ (b) $y = 2(x - 2)^2 + 4$

(c) $y = 2(x + 2)^2 + 4$ (d) $y = 2(x + 2)^2 - 4$

5) باقي قسمة $(x^4 + 2)$ على $(x - 3)$ هو :

(a) 3 (b) 27 (c) 81 (d) 83

6) إذا كان $log\, 3 = n$ ، $log\, 2 = m$ فإن المقدار $m + n - 1$ يساوي :

(a) $log\, 0.06$ (b) $log\, 0.06$ (c) $log\, 6$ (d) $log\, 60$

7) إذا كان حجم العينة يساوي 100 وحجم المجتمع الأحصائي يساوي 2000 ، فكسر المعاينة يساوي :

(a) 0.3 (b) 0.5 (c) 0.05 (d) 0.02

8) $,x \neq 0 ، y \neq 0 \qquad \left(\sqrt[4]{x^{-2}y^4}\right)^{-2} =$

(a) $|x^{-1}|\, y^{2}$ (b) $|x|\, y^{-2}$ (c) xy^2 (d) $x^{-2}y^2$

9) إذا كان ، $\vec{L} = \langle\overrightarrow{AC}\rangle + 2\,\langle\overrightarrow{AB}\rangle - \langle\overrightarrow{BC}\rangle$ فإن :

(a) $\vec{L} = \frac{1}{2}\langle\overrightarrow{AB}\rangle$ (b) $\vec{L} = -\frac{1}{2}\langle\overrightarrow{AB}\rangle$

(c) $\vec{L} = 3\langle\overrightarrow{AB}\rangle$ (d) $\vec{L} = -3\langle\overrightarrow{AB}\rangle$

10)بيان الدالة $y = \sqrt{x+2} - 2$ هو انسحاب لبيان الدالة $y = \sqrt{x}$:

(a) وحدتين إلى اليسار ووحدتين للأعلى (b) وحدتين إلى اليسار ووحدتين للأسفل

(c) وحدتين إلى اليمين ووحدتين للأعلى (d) وحدتين إلى اليمين ووحدتين للاسفل

الإجابات الموضوعية

السؤال	الإجابـــــــة			
(1)	a	b	c	d
(2)	a	b	c	d
(3)	a	b	c	d
(4)	a	b	c	d
(5)	a	b	c	d
(6)	a	b	c	d
(7)	a	b	c	d
(8)	a	b	c	d
(9)	a	b	c	d
(10)	a	b	c	d

دولة الكويت
وزارة التربية

(الأسئلة في 10 صفحات)

نموذج إجابة امتحان نهاية الفترة الدراسية الثانية - المجال الدراسي الرياضيات
الصف الحادي عشر العلمي   الزمن : ساعتان و 45 دقيقة
العام الدراسي 2016/2015 م

إجابة السؤال الأول:

10

(a) أوجد مجموعة حل المعادلة : (5 درجات)

$$\sqrt{5x}-\sqrt{2x+9}=0$$

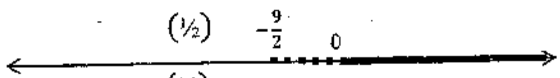
الحل :

$\sqrt{5x}-\sqrt{2x+9}=0$

$\sqrt{5x}=\sqrt{2x+9}$ (½)

$5x\geq 0\ ,\quad 2x+9\geq 0$ (½) نبحث شرط الحل

$x\geq 0\ ,\quad x\geq -\frac{9}{2}$ (½)



$\therefore x\geq 0$ (½)

$x\in[0,\infty)$ (½)

$\left(\sqrt{5x}\right)^2=\left(\sqrt{2x+9}\right)^2$ (½)

$5x=2x+9$ (½)

$5x-2x=9$

$3x=9\Rightarrow x=3$ (½)

$3\in[0,\infty)$ (½)

مجموعة الحل هي : $\{3\}$ (½)

تراعى الحلول الأخرى

تابع إجابة الســـؤال الأول:

(b) ليكن $\vec{u} = \langle x, 4\rangle, \vec{v} = \langle 2, -3\rangle$.　　　　(5 درجات)

① اوجد قيمة x بحيث يكون $\vec{u}$ متعامد مع $\vec{v}$.

② اوجد قيمة x بحيث يكون $\|\vec{u}\|$= 5 units .

① $\because\ \vec{v} \perp \vec{u}$

$\therefore\ \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ 　　(½)

$x_v \cdot x_u + y_v \cdot y_u = 0$ 　　(½)

$(2) \cdot (x) + (-3) \cdot (4) = 0$ 　　(½)

$2x - 12 = 0$

$x = 6$ 　　(½)

② $\because\ \|\vec{u}\| = 5$ units

$\therefore\ \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 　　(½)

$\sqrt{x^2 + (4)^2} = 5$ 　　(½)

$x^2 + 16 = 25$ 　　(½)

$x^2 = 9$ 　　(½)

$\therefore x = 3$ أو $x = -3$ 　　(½) + (½)

تراعى الحلول الاخرى

إجابة السؤال الثاني:

10

(a) أوجد مجال الدالة: (5 درجات)

$$g(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2-4}$$

الحل :

نفرض أن $g(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$

$(½) + (½)$ مجال الدالة f هو $\mathbb{R}$ لأنها كثيرة حدود

$(½) + (½)$ مجال الدالة h: $2 - x \geq 0$

$x \leq 2$

$(½) + (½)$ مجال h هو $(-\infty, 2]$

أصفار المقام :

$(½)$ $x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$(½)$ $x = 2$ او $x = -2$

$(½)$ مجالg =(مجال f $\cap$ مجالh) / مجموعة أصفار المقام

$(½)$ $=(\mathbb{R} \cap (-\infty, 2])$ / $\{-2, 2\}$

$\therefore$ مجال g = $(-\infty, 2) \setminus \{-2\}$

تراعى الحلول الاخرى

تابع إجابة السؤال الثاني:

(b) أوجد مجموعة حل المعادلة : (5 درجات)

$$\log x^2 - \log(x^2 - x) = 1 \quad , x \in (1, \infty)$$

الحل :

$$\log\left(\frac{x^2}{x^2 - x}\right) = 1 \qquad (½) + (½)$$

$$\log\left(\frac{x^2}{x^2 - x}\right) = \log(10) \qquad (½)$$

$$\frac{x^2}{x^2 - x} = 10 \qquad (½) + (½)$$

$$x^2 = 10\,x^2 - 10x \qquad (½)$$

$$10\,x^2 - x^2 - 10x = 0$$

$$9\,x^2 - 10x = 0 \qquad (½)$$

$$x(9x - 10) = 0$$

$$x = 0 \notin (1, \infty)\,, \quad x = \frac{10}{9} \in (1, \infty) \qquad (½) \quad + \quad (½)$$

مجموعة الحل $= \left\{\frac{10}{9}\right\}$ (½)

تراعى الحلول الأخرى

إجابة السؤال الثالث:

(a) أوجد مجموعة حل المتباينة : (5 درجات) 10

$$-x^2 + 5x - 6 > 0$$

الحل :

$x^2 - 5x + 6 < 0$ (½)

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-2)(x-3) = 0$

$x = 2$ او $x = 3$ (½) + (½)

$(x-3) < 0 \rightarrow x < 3$ | $(x-2) < 0 \rightarrow x < 2$ (½)

$(x-3) > 0 \rightarrow x > 3$ | $(x-2) > 0 \rightarrow x > 2$ (½)

x	$-\infty$	2		3	∞	
$x-2$	-	0	+		+	(½)
$x-3$	-		-	0	+	(½)
$(x-2)(x-3)$	+		-		+	(½)

مجموعة الحل = $(2,3)$ (1)

تراعى الحلول الاخرى

تابع إجابة السؤال الثالث:

(b) مستخدما دالة المرجع مثل بيانيا الدالة : (5 درجات)

$$y = (3)^{x-3} + 1$$

الحل :

(½) دالة المرجع هي $y_1 = (3)^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = (3)^x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

(½) (½)

الدالة $y_2 = (3)^{x-3} + 1$

يمكن كتابتها على الصورة

$$y = a(b)^{x-h} + k$$

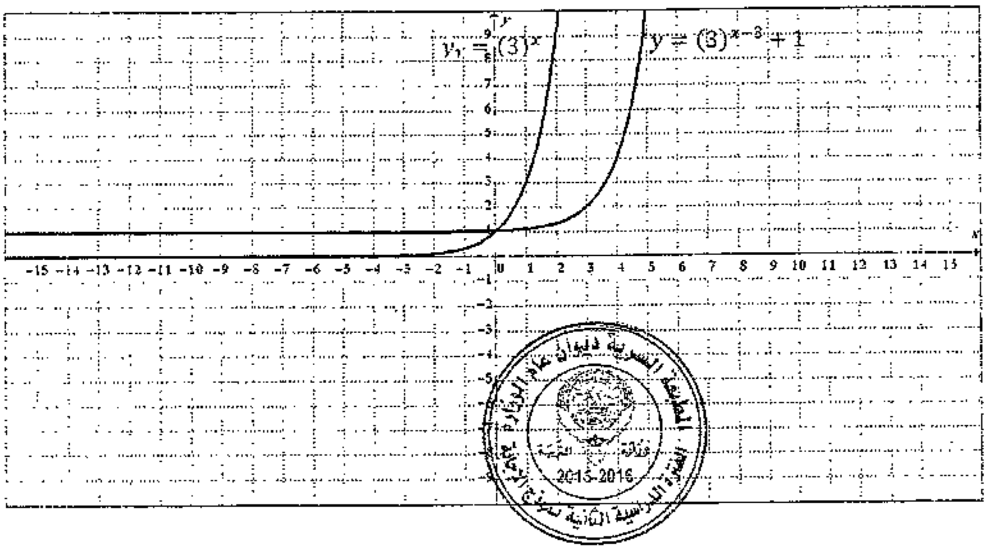
(½) $h = 3\ ,\qquad k = 1$

(½) نحصل على بيان y_2 بسحب بيان دالة المرجع y_1 ثلاث وحدات لليمين

(½) ووحدة واحدة للأعلى

(½) + (½) تمثيل دالة المرجع $y_1 = (3)^x$

(½) + (½) تمثيل الدالة $y = (3)^{x-3} + 1$



تراعى الحلول الاخرى

إجابة السؤال الرابع :

10

(a) استخدم الأصفار النسبية الممكنة لحل المعادلة: (6 درجات)

$$x^3 - 4x^2 + 3 = 0$$

الحل :

$x^3 - 4x^2 + 3 = 0$

(½) الحد الثابت هو (3) عوامله هي : $\pm 1, \pm 3$

(½) المعامل الرئيس هو (1) عوامله هي : ± 1

(½) الأصفار النسبية الممكنة هي : $\pm 1, \pm 3$

لتكن $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3$

$p(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 3$

(½) $p(1) = 0$

(½) $\therefore (1)$ صفر من أصفار الحدودية

(½) $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$

نقسم $P(x)$ على $(x-1)$

$p(x) = x^3 - 4x^2 - 0(x) + 3$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -4 & 0 & 3 \\ & & 1 & -3 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

(½) (½) (½)

(½) ناتج القسمة $q(x) = x^2 - 3x - 3$

نحل المعادلة $x^2 - 3x - 3 = 0$ باستخدام القانون

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$ أو $x = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$ (½) + (½)

مجموعة الحل $= \left\{1, \frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right\}$

تراعى الحلول الاخرى

تابع إجابة السؤال الرابع: (4 درجات)

(b) في نتيجة نهاية العام الدراسي حصل أحد الطلاب على 15 درجة في مادة الفيزياء حيث المتوسط الحسابي 14 والانحراف المعياري 8 وحصل على 15 درجة في مادة الكيمياء حيث المتوسط الحسابي 12 والانحراف المعياري 7.5 في أي من المادتين كان الطالب أكثر تحصيلا.

الحل :

لتحديد المادة التي كان فيها الطالب أكثر تحصيلا نحول الدرجات الفعلية إلى قيم معيارية :

القيمة المعيارية للدرجة 15 في مادة الفيزياء:

$$z_1 = \frac{x_1 - \overline{x_1}}{\sigma_1} \qquad (½)$$

$$z_1 = \frac{15 - 14}{8} \qquad (½)$$

$$z_1 = 0.125 \qquad (½)$$

القيمة المعيارية للدرجة 15 في مادة الكيمياء:

$$z_2 = \frac{x_2 - \overline{x_2}}{\sigma_2} \qquad (½)$$

$$z_2 = \frac{15 - 12}{7.5} \qquad (½)$$

$$z_2 = 0.4 \qquad (½)$$

$$\because 0.4 > 0.125$$

$\therefore$ القيمة المعيارية للدرجة 15 في مادة الكيمياء أفضل من القيمة المعيارية للدرجة 15 في مادة الفيزياء (½)

$\therefore$ أداء الطالب في مادة الكيمياء أفضل من أدائه في مادة الفيزياء (½)

تراعى الحلول الاخرى

البنود الموضوعية: في البنود من (3 – 1) بنود صحيحة وأخرى خاطئة ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت العبارة خاطئة :

①	إذا مر بيان دالة بنقطة الأصل فان بيان معكوسها يمر أيضاً بنقطة الأصل
②	إذا كانت الدالة الحدودية من الدرجة n فإن لها n حداً
③	$log_4(lne^4) = 1$

في البنود من (10 – 4) لكل بند أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ظلل في ورقة الإجابة دائرة الرمز الدالة على الإجابة الصحيحة

④ مجموعة حل $\left(\sqrt{x^{20}}\right)^{\frac{1}{5}} - x^2 = 0$ هــي :

ⓐ $\{0\}$ ⓑ $\mathbb{R}$ ⓒ $\mathbb{R}^+$ ⓓ $\mathbb{R}^-$

⑤ سلوك نهاية الدالة $f(x) = x^4 - 2x^5$ هــو :

ⓐ $(\nwarrow, \nearrow)$ ⓑ $(\swarrow, \searrow)$ ⓒ $(\swarrow, \nearrow)$ ⓓ $(\nwarrow, \searrow)$

⑥ إذا كان باقي قسمة $f(x) = x^4 - kx^2 + x - k$ على $(x-1)$ هو 3 فان k تساوي :

ⓐ $\frac{1}{2}$ ⓑ 3 ⓒ $-\frac{1}{2}$ ⓓ $\frac{5}{2}$

⑦ مجموعة حل المتباينة $\frac{(x^2+4)(x-2)}{(x-2)} > 0$

ⓐ $\mathbb{R}$ ⓑ $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ⓒ $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ ⓓ $\mathbb{R}\backslash\{0,2\}$

⑧ إذا كان $log3 = n$ ، $log2 = m$ فإن المقدار $m + n - 1$ يساوي:

ⓐ $log0.06$ ⓑ $log0.6$ ⓒ $log6$ ⓓ $log60$

⑨ إذا كان $ABCD$ متوازي إضلاع حيث $A(-2,1), B(0,-2), C(3,-1)$ فان إحداثيات D هي .

ⓐ $(2,2)$ ⓑ $(-1,2)$ ⓒ $(1,2)$ ⓓ $(1,-2)$

⑩ في التوزيع الطبيعي ، الفترة $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ تحتوي على:

ⓐ 68% من البيانات ⓑ 99.7% من البيانات

ⓒ 95% من البيانات ⓓ 90% من البيانات

إجابة البنود الموضوعية :

10

رقم البند	الإجابة			
1	**a**	b	c	d
2	a	**b**	c	d
3	**a**	b	c	d
4	a	**b**	c	d
5	a	b	c	**d**
6	a	b	**c**	d
7	a	b	**c**	d
8	a	**b**	c	d
9	a	b	**c**	d
10	**a**	b	c	d

The Gate

thegate2016

thegate16

thegate2016

2016thegate

222 10 444

thegate2016@yahoo.com