الوحدة الأولى

النهايات و الاتصال

مثال إذا كانت الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^2-3 & : x<2 \\ x-1 & : x>2 \end{cases}$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x\to 2} f(x)$

الحل : " نوجد النهاية من جهة اليمين و النهاية من جهة اليسار و نقارن بينهما"

(النهاية من جهة اليسار) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2-3) = 2^2-3 = 1$

(النهاية من جهة اليمين) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (\,x-1) = 2-1 = 1$

$\because \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1 \qquad \therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$

****

إذا كانت الدالة g: $g(x)=\begin{cases} x^2-2 & : x\le 0 \\ x-1 & : x>0 \end{cases}$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x\to 0} g(x)$

مثال: أوجد :

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$$

عند التعويض المباشر عن x بـ -2 في كل من البسط و المقام نحصل على صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

نحلل كل من البسط و المقام نحصل على عامل صفري مشترك بين البسط والمقام $(x+2)$ نختصره

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+1)\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}} = \lim_{x \to -2} \frac{x+1}{x-2}$$

تحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$ $\qquad \lim_{x \to -2} (x-2) = -4 \ , -4 \neq 0$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{x+1}{x-2} = \frac{-2+1}{-2-2} = \frac{1}{4}$$

****

أوجد

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$$

مثال: أوجد :

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^3-27}{x}$$

عند التعويض المباشر عن x بـ 0 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

نحلل كل من البسط و المقام باستخدام المتطابقة $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

نحصل على عامل صفري مشترك بين البسط والمقام (x) نختصره

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^3-27}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^3-3^3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3^3+3(3)^2x+3(3)x^2+x^3-27}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{27+27x+9x^2+x^3-27}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(27+9x+x^2)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x^2+9x+27)=0^2+9(0)+27=27$$

****

أوجد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}$$

مثال: أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}\ -3}{x^2\ -2x}$$

الحل :

عند التعويض المباشر عن x بـ 2 في كل من البسط و المقام نحصل على صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

نضرب البسط و المقام بمرافق البسط $(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b)=a-b^2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}\ -3}{x^2\ -2x}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}\ -3}{x^2-2x}\times\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5\ -9}{x(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(\ x\ -2)(x+2)}{x(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$$

$$\lim_{x\to 2}(x^2+5)=9\quad ;\quad 9>0$$ تحقق من أن نهاية ماتحت الجذر < 0

تحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$

$$\lim_{x\to 2}(x(\sqrt{x^2+5}+3))\ =\lim_{x\to 2}x,\lim_{x\to 2}(\sqrt{x^2+5}+3)=2(3+3)=12\ ;12\neq 0$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}\ -3}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\frac{\lim_{x\to 2}(x+2)}{\lim_{x\to 2}\left(x\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)\right)}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

****

أوجد:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}\ -1}{x-2}$$

مثال: أوجد إن أمكن : $\lim_{x\to -1} \frac{3}{|x+1|}$

الحل :

$$\frac{3}{|x+1|} = \begin{cases} \frac{3}{x+1} & : \quad x > -1 \\ \frac{-3}{x+1} & : \quad x < -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{3}{|x+1|} = \lim_{x\to -1^+} (3 \times \frac{1}{x+1}) = \infty \qquad (1)$$

$$3 > 0, \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+3} = \infty \text{ لأن}$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{3}{|x+1|} = \lim_{x\to -1^-} \frac{-3}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \left(-3 \cdot \frac{1}{x+1}\right)$$

$$\because \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{(x+1)} = -\infty, -3 < 0$$

$$\therefore \lim_{x\to -1^-} \left(-3. \frac{1}{x+1}\right) = \infty \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{|x+1|} = \infty \qquad \text{من } (1),(2)$$

****

أوجد إن أمكن : $\lim_{x\to 2} \frac{3}{|x-2|}$

مثال: أوجد:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}$$

الحل :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\ , \qquad \because x>0\ \therefore |x|=x$$

تحقق من أن نهاية ماتحت الجذر > 0

$$\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}2-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=2-0=2\ \ ,2>0$$

تحقق من أن نهاية المقام ≠ 0

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=1+0=1\ \ ,1\neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}=\frac{\lim_{x\to\infty}\sqrt{\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$$

****

أوجد: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

مثال : أوجد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(2x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x-1}=1\times\frac{1}{-1}=-1$$

$$\lim_{x\to 0}(2x-1)=-1\neq 0,\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

****

أوجد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$$

مثال: لتكن f: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & : x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & : x > 0 \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

الحل:

$$f(0) = (0)^2 + (0) = 0 \qquad (1)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + x) = (0)^2 + 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x^2}{x+1}\right) = \frac{0^2}{0+1} \ , \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 0 + 1 = 1 \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \implies \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \qquad (2)$$

من (1) و (2) $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 0$

****

لتكن f: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & : x \ge 1 \\ 5x - 1 & : x < 1 \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$

مثال: ابحث اتصال كل من الدالة التالية عند $x = -2$:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

نفرض أن g : $g(x) = x^2 - 4x + 3$

g دالة متصلة عند $x = -2$

وحيث أن $g(-2) = (-2)^2 - 4(-2) + 3 = 15 \quad , 15 > 0$

الدالة f حيث $f(x) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ متصلة عند $x = -2$

****

مثال: ابحث اتصال كل من الدالة التالية عند $x = 2$:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$$

مثال: لتكن : $g(x) = 2x + 3$, $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$ ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x = 1$

الحل: g دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = 1$ (1)

$$g(1) = 2(1) + 3 = 5$$

f دالة متصلة عند كل $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$

لأن f دالة قسمة دالة قيمة مطلقة و كثيرة حدود

وكل منهما متصلة عند $x = 1$

أي أن f دالة متصلة عند $x = g(1)$ (2)

من (1) , (2) نجد أن $f \circ g$ متصلة عند $x = 1$

أولاً: نبحث اتصال الدالة g عند $x = 1$
ثانياً : نوجد قيمة تلك الدالة عند $x = 1$ أي $g(1)$
ثالثاً : نبحث اتصال الدالة f عند $x = g(1)$

****

لتكن : $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2 + 5$ ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

مثال: لتكن : $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=0$

الحل: نفرض أن : $h(x)=x^2-3x+2$, $g(x)=|x|$

فنجد أن : $f(x)=(g\circ h)(x)$

$$g(h(x))=g(x^2-3x+2)=\left|x^2-3x+2\right|$$

h دالة متصلة عند $x=0$ $\quad(1)$

$$h(0)=2$$

g دالة متصلة عند $x=2$ $\quad(2)$

من (1) , (2): $g\circ h$ متصلة عند $x=0$

أي أن f متصلة عند $x=0$

****

لتكن : $f(x)=\left|x^2-5x+2\right|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=1$

مثال: لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} 5 & : x=1 \\ ax+b & : 1<x<4 \\ b+8 & : x=4 \end{cases}$$

متصلة على $[1,4]$ أوجد قيمة الثابتين a,b

الحل:

$\because$ f دالة متصلة على $[\,1\,,\,4\,]$

$\therefore$ f متصلة عند $x=4$ من جهة اليسار

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=f(4) \qquad , f(4)=b+8$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}(ax+b)=4a+b$$

$$4a+b=b+8 \Rightarrow 4a=8 \Rightarrow \boldsymbol{a=2}$$

$\because$ f دالة متصلة على $[\,1,\,4\,]$

$\therefore$ f متصلة عند $x=1$ من جهة اليمين

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \qquad , \quad f(1)=5$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$$

$$\therefore a+b=5$$

$$a+b=5 \Rightarrow 2+b=5 \Rightarrow \boldsymbol{b=3}$$

****

لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a & : x<0 \\ 2 & : x=0 \\ ax+b & : x>0 \end{cases}$$

متصلة على مجالها $\mathbb{R}$ أوجد قيمة الثابتين a,b

مثال: لتكن f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة على $[6, 10]$

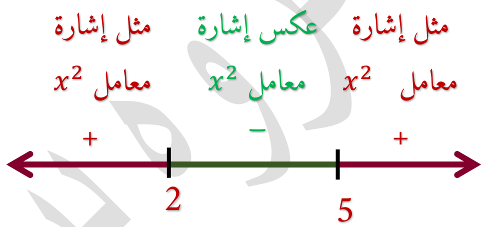
الحل: $f(x) = \sqrt{g(x)}$, $g(x) = x^2 - 7x + 10$

$$\therefore D_f = \{x : g(x) \geq 0\}$$

$$x^2 - 7x + 10 \geq 0$$

المعادلة المناظرة هي : $x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x-5)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 5 \ , \ x = 2$



مجال الدالة f هو : $(-\infty, 2] \cup [5, \infty) = \mathbb{R} - (2, 5)$

لدراسة اتصال الدالة f على $[6,10]$ حيث : $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - (2, 5)$$

$\because [6,10]$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R} - (2,5)$

$\therefore g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [6,10]$ (1)

الدالة g: $g(x) = x^2 - 7x + 10$ دالة متصلة على $[6,10]$ (2)

من (1) و (2) $\therefore f$ دالة متصلة على $[6,10]$

****

لتكن f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة على $[-5,0]$

مثال: لتكن f: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$ ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$,

نفرض أن : $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $h(x) = x^2 - 5x + 4$

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x))$$

$$= g(x^2 - 5x + 4) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$$

$\because$ الدالة h متصلة على $\mathbb{R}$ $\because$ الدالة g متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$

****

لتكن f: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 9x + 4}$ ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$,

وزارة التربية

الإدارة العامة لمنطقة الجهراء التعليمية

ثانوية ثابت بن قيس بنين

تمارين مراجعة على الإشتقاق

- الصف الثاني عشر علمي

اعداد

- قسم الرياضيات بثانوية ثابت بن قيس

رئيس القسم	الموجه الفني	مدير المدرسة
أ/ مرسي أحمد	أ/ أحمد العتيبي	أ / ناصر المسعود

السؤال(1): لتكن f : $f(x) = |\ x - 2\ |$ ابحث قابلية الإشتقاق عند $x = 2$

الدالة f متصلة عند $\boxed{x=2}$

$-\infty \xleftarrow{-(x-2)} \; 2 \; \xrightarrow{(x-2)} \infty$

$f(2) = 0$

$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 : x \geq 2 \\ -(x-2) : x < 2 \end{cases}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ (التعريف)}$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2) - 0}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} (-1) = -1$$

$$f'_-(2) = -1$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2) - 0}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} (1) =$$

$$f'_+(2) = 1$$

$$f'_+(2) \neq f'_-(2)$$

$f'(2)$ غير موجودة

اذن الدالة f ليست قابلة للاشتقاق عند $\boxed{x=2}$

السؤال(2): لتكن f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & : \ x \leq -1 \\ x^2 - x - 2 & : \ x > -1 \end{cases}$ ابحث قابلية الإشتقاق عند $x = -1$

السؤال(3): لتكن : $f(x) = x^2 + 2$ أوجد $\acute{f}(x)$ باستخدام تعريف المشتقة .

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 2 = x^2 + 2xh + h^2 + 2$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ إذا وجدت

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2 - (x^2 + 2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 \cancel{+2} - \cancel{x^2} \cancel{-2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x + h)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h)$$

$$= 2x + 0$$

$$f'(x) = 2x$$

السؤال(4): لتكن : $f(x) = x^3$ أوجد $\acute{f}(x)$ باستخدام تعريف المشتقة .

السؤال(5): لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & : x\le 2 \\ -x^2+7x-10 & : x>2 \end{cases}$$

بين أن الدالة f متصلة عند $x = 2$ وادرس قابلية الاشتقاق عندها

أولا الإتصال:

$1)\ f(2) = (2)^2 - 2 - 2 = \boxed{0}$

$2)\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-x^2+7x-10) = -(2)^2+7(2)-10 = \boxed{0}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2-2x-2) = (2)^2-2(2)-2 = \boxed{0}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$

$\therefore$ F متصلة عند $\boxed{x=2}$

ثانيا الإشتقاق:

$f'_+(2) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-x^2+7x-10-0}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-x^2+7x-10}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-\cancel{(x-2)}(x-5)}{\cancel{(x-2)}}$

$= - \lim\limits_{x\to 2^+} (x-5) = -(2-5) = \boxed{3}$

$f'_-(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-x-2-0}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}}$

$= \lim\limits_{x\to 2^-} (x+1) = 2+1 = \boxed{3}$

$\therefore f'_+(2) = f'_-(2) = \boxed{3}$

$\therefore f'(2) = 3$

أي F قابلة للإشتقاق عند $\boxed{x=2}$

==

السؤال(6): لتكن :
$$f(x)=\begin{cases} -x-1 & : x>\frac{-1}{3} \\ 5x+1 & : x\le\frac{-1}{3} \end{cases}$$
بين أن الدالة متصلة وغير قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{-1}{3}$

السؤال(7): أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(\underset{\uparrow}{\overset{a}{1}}, \underset{\uparrow}{\overset{F(a)}{0}})$

$$f'(x) = \frac{(1)(x+2) - (1)(x-1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(1)(1+2) - (1)(1-1)}{(1+2)^2} = \frac{1}{3}$$

$\boxed{1}$ معادلة المماس :

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

$$y - 0 = \frac{1}{3}(x-1)$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

$\boxed{2}$ معادلة العمودي (الناظم) :

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a)$$

$$y - 0 = \frac{-1}{\frac{1}{3}}(x-1)$$

$$y = -3(x-1)$$

$$y = -3x + 3$$

السؤال(8): أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3+2}$ عند النقطة $(1, \frac{2}{3})$

السؤال(9): أوجد المشتقة إن أمكن للدالة المتصلة:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 : & x < 1 \\ 2\sqrt{x} : & x \geq 1 \end{cases}$$

$-\infty \quad x^2+1 \quad 1 \quad 2\sqrt{x} \quad \infty$

مجال الدالة $f = R = (-\infty, 1) \cup [1, \infty)$

$f(1) = 2\sqrt{1} = 2 \quad \boxed{f(1) = 2}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x : & x < 1 \\ \text{نبحث} : & x = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} : & x > 1 \end{cases}$$

$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (إن وجدت) $x \neq a$

$f'_-(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim\limits_{x \to 1^-} (x+1)$

$= (1+1) = 2 \quad f'_-(1) = 2$

$f'_+(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2\cancel{(\sqrt{x} - 1)}}{\cancel{(\sqrt{x} - 1)}(\sqrt{x} + 1)}$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 1^+} 2}{\lim\limits_{x \to 1^+} (\sqrt{x} + 1)} = \frac{2}{2} = 1$

$f'_+(1) = 1$

شرط مهم:

$\lim\limits_{x \to 1^+} (\sqrt{x} + 1)$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x} + \lim\limits_{x \to 1^+} 1$

$= 1 + 1 = 2 \neq 0$

$f'_-(1) \neq f'_+(1)$

$f'(1)$ غير موجودة

$$f'(x) = \begin{cases} 2x : & x < 1 \\ \text{غير موجودة} : & x = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} : & x > 1 \end{cases}$$

مجال f' هو: $R - \{1\}$

==

السؤال(10): أوجد المشتقة إن أمكن للدالة المتصلة:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 : & x \leq 2 \\ 4x - 3 : & x > 2 \end{cases}$$

السؤال(11): أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة : $y = sec\ x$ عند النقطة $F(\frac{\pi}{3}\ ,\ 2)$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \sec x \cdot \tan x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}} = \sec(\tfrac{\pi}{3}) \cdot \tan(\tfrac{\pi}{3}) = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})} \cdot \tan(\tfrac{\pi}{3}) = 2\sqrt{3}$$

معادلة المستقيم العمودي (الناظم) على المنحنى:

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a)$$

$$y - 2 = \frac{-1}{2\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y - 2 = \frac{-1}{2\sqrt{3}}x + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

$$y = -\frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + 2$$

==

السؤال(12): أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة : $y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{sinx} + cot\ x$ عند النقطة $p(\frac{\pi}{4}\ ,\ 4)$

السؤال (13): لتكن : $g(x) = x^2 + 1$ ، $f(x) = \frac{2x-1}{x}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة : $(f \circ g)'(x)$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \longrightarrow \underline{\underline{1}}$$

$f(x) = \frac{2x-1}{x}$

$f'(x) = \frac{(2)(x) - (1)(2x-1)}{x^2}$

$f'(x) = \frac{2x - 2x + 1}{x^2}$

$f'(x) = \frac{1}{x^2}$

$f'(g(x)) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$

$g(x) = x^2 + 1$

$g'(x) = 2x$

بالتعويض من $\underline{1}$

$\therefore (f \circ g)'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x$

$(f \circ g)'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

السؤال (14): لتكن : $g(x) = \sqrt{x}$ ، $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة : $(f \circ g)'(1)$

السؤال (15): لتكن : $u = 2x^3 + x$ ، $y = u^2 + 4u - 3$

أوجد : $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل .

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = 2u + 4$$

$$= 2(2x^3 + x) + 4$$

$$= 4x^3 + 2x + 4$$

$$\frac{du}{dx} = 6x^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (4x^3 + 2x + 4) \cdot (6x^2 + 1)$$

$$= 24x^5 + 4x^3 + 12x^3 + 2x + 24x^2 + 4$$

$$= 24x^5 + 16x^3 + 24x^2 + 2x + 4$$

==

السؤال (16): لتكن : $u = 2x^2 - 1$ ، $y = u^3 + 4u - 3$

أوجد : $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل .

السؤال (17):أوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى الدالة : $f(x) = \sqrt{(x^2+5)}$ عند النقطة $(2\,,3)$

الحل

$$f(x) = \sqrt{x^2+5} = (x^2+5)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}}(x^2+5)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

ميل المماس عند النقطة $(2,3)$

$$f'(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2+5}} = \frac{2}{3}$$

* معادله المماس

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

$$y - 3 = \frac{2}{3}(x-2)$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + 3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

ميل العمودي "الناظم" $= \frac{-1}{f'(a)} = \frac{-3}{2}$

معادله العمودي

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a)$$

$$y - 3 = \frac{-3}{2}(x-2) \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 6$$

السؤال (18): لتكن الدالة : $y = \cos x$ بين أن $y^{(4)} + y'' = 0$.

السؤال (19): أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته : $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1, 1)$.

بالإشتقاق الضمني بالنسبه لـ x

$$2x - 2yy' + y\cdot 1 + xy' = 0$$

$$\therefore\ xy' - 2yy' = -2x - y$$

$$(x - 2y)y' = -2x - y$$

$$y' = \frac{-2x - y}{x - 2y}$$

$$y'\Big|_{(1,1)} = \frac{-2(1) - 1}{1 - 2(1)} = \frac{-3}{-1} = 3$$

==

السؤال (20): أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته : $2y = x^2 + \sin y$ عند $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$.

السؤال (21): إذا كانت : $y = x \sin x$ أثبت أن $y''' + y' + 2\sin x = 0$.

$y' = x(\sin x)' + \sin x \cdot (x)'$

$= x \cdot \cos x + \sin x$

$y'' = x \cdot (-\sin x) + \cos x \cdot 1 + \cos x$

$y''' = -(x \cdot \cos x + \sin x \cdot 1) + (-\sin x) + (-\sin x)$

$= -x\cos x - \sin x - \sin x - \sin x$

$= -x\cos x - 3\sin x$

الطرف الأيسر $= y''' + y' + 2\sin x = -x\cos x - 3\sin x + x\cos x + \sin x + 2\sin x$

الطرف الأيسر $= -\cancel{x\cos x} - \cancel{3\sin x} + \cancel{x\cos x} + \cancel{3\sin x} = 0$
الطرف الأيمن

==

السؤال (22): إذا كانت : $y = \sqrt{1-2x}$ أثبت أن $y\,y'' + (y')^2 = 0$.

دولة الكويت
وزارة التربية

وزارة التربية

الإدارة العامة لمنطقة الجهراء التعليمية

مدرسة سعد العبدالله الصباح

الثانوية بنين

أوراق عمل محلولة

مادة الرياضيات

للصف الثاني عشر علمي

الفترة الأولى

إعداد : أ. محمد جبر الخوالدة

الوحدة الثالثة : تطبيقات على الاشتقاق

2018

-2019

رئيس القسم : **أ. حافظ حمدنا الله**

الموجه الفني : **أ.صابر أبو زيد**

مدير المدرسة : **أ.حميدي عبدالله العتيبي**

مثال (1) أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال المتصلة التالية :

(a) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$

الحل : f دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x$$

نضع $f'(x) = 0$

$$4x^3 - 12x^2 - 16x = 0$$

$$\Rightarrow 4x(x^2 - 3x - 4) = 0$$

$$4x(x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0, x = 4, x = -1$$

$$f(0) = 10$$

$$f(4) = 4^4 - 4(4)^3 - 8(4)^2 + 10$$

$$f(4) = -118$$

$$f(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^3 - 8(-1)^2 + 10$$

$$f(-1) = 7$$

النقاط $(0,10), (4,-118), (-1,7)$ نقاط حرجة للدالة f على مجالها

****

حاول أن تحل (1) أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال المتصلة التالية :

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

الحل:

(b) $f(x) = \begin{cases} 3 - x & : x < 0 \\ 3 + 2x - x^2 & : x \geq 0 \end{cases}$

الحل :

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & : x < 0 \\ \text{تبحث} & : x = 0 \\ 2 - 2x & : x > 0 \end{cases}$$

$$f(0) = 3$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{3 - x - 3}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{3 + 2x - x^2 - 3}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(2 - x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} (2 - x) = 2$$

$f'_-(0) \neq f'_+(0) \Longrightarrow f'(0)$ غير موجودة

$\therefore$ النقطة $(0, 3)$ نقطة حرجة .

في الفترة $(-\infty, 0)$ ؛ $f'(x) = -1 \,,\ -1 \neq 0$

$\forall x \in (-\infty, 0) \quad , f'(x) \neq 0,$

$\therefore$ لا توجد نقاط حرجة على هذه الفترة

في الفترة $(0, \infty)$ ؛ $f'(x) = 2 - 2x$

$\Longrightarrow 2 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 1 \in (0, \infty)$

$f(1) = 3 + 2(1) - 1^2 = 4$

$\therefore$ النقطة $(1,4)$ نقطة حرجة

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : x < 1 \\ 3x - 1 & : x \geq 1 \end{cases}$

الحل:

مثال (2) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$

في الفترة $[-2,1]$

الحل: الدالة f متصلة على $[-2,1]$ إذاً لها قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة في هذه الفترة

أولاً : نوجد قيم الدالة عند النقاط الطرفية

$x = -2$ ، $x = 1$

$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -1$,

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = -1$

ثانياً : نوجد النقاط الحرجة للدالة في الفترة $(-2,1)$:

$f(x) = x^3 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow x = 1 \notin (-2,1) \quad , \quad x = -1 \in (-2,1)$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$

$\therefore$ $(-1,3)$ نقطة حرجة

أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[-2,1]$ هي 3

$\therefore$ 3 قيمة عظمى مطلقة

أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[-2,1]$ هي -1

$\therefore$ -1 قيمة صغرى مطلقة

حاول أن تحل (2) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$

في الفترة $[0,4]$

الحل:

مثال (3) أوجد القيم العظمى و الصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2,3]$

الحل: الدالة f متصلة على $[-2,3]$ إذاً لها قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة في هذه الفترة

أولاً : نوجد قيم الدالة عند النقاط الطرفية

$x = -2$ ، $x = 3$

$$f(-2) = (-2)^{\frac{2}{3}} \approx 1.587 ,$$

$$f(3) = (3)^{\frac{2}{3}} \approx 2.08$$

ثانياً : نوجد النقاط الحرجة للدالة في الفترة $(-2,3)$:

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$f'(x) \neq 0$, (البسط $2 \neq 0$)

لكن عند $x = 0 \in (-2,3)$

المشتقة ليست موجودة (المقام $= 0$) عند $x = 0$

$f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$ نقطة حرجة

أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[-2 , 3]$ هي 2.08

$\therefore$ 2.08 قيمة عظمى مطلقة

أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[-2 , 3]$ هي 0

$\therefore$ 0 قيمة صغرى مطلقة

حاول أن تحل (3) أوجد القيم العظمى و الصغرى المطلقة للدالة المتصلة f: $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$ في الفترة $[-2,3]$

الحل:

مثال (4) إذا كانت الدالة f متصلة على $[1,4]$ ؛ $f(x) = x + \frac{4}{x}$ أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة f في الفترة $[1,4]$

أولاً : نوجد قيم الدالة عند النقاط الطرفية

$x = 1$ ، $x = 4$

$$f(1) = 1 + \frac{4}{1} = 5$$

$$f(4) = 4 + \frac{4}{4} = 5$$

ثانياً : نوجد النقاط الحرجة للدالة في الفترة $(1,4)$:

$$f(x) = x + \frac{4}{x} \Longrightarrow f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 4 = 0$$

$$\Longrightarrow x^2 = 4$$

$$x = -2 \notin (1,4)$$

$$x = 2 \in (1,4)$$

$$f(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4$$

$\Longrightarrow (2,4)$ نقطة حرجة

أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[1,4]$ هي 5

$\therefore$ 5 قيمة عظمى مطلقة

أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[1,4]$ هي 4

$\therefore$ 4 قيمة صغرى مطلقة

حاول أن تحل (4) إذا كانت الدالة f متصلة على $[1,3]$ ؛ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة f في الفترة $[1,3]$

الحل:

مثال (5) بين أن الدالة f: $f(x) = x^2 + 2x$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 1]$، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك .

الحل: الدالة f: $f(x) = x^2 + 2x$ كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على الفترة $[-3, 1]$ وقابلة للاشتقاق على $(-3, 1)$

$\therefore$ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[-3, 1]$

$\therefore$ يوجد على الأقل $c \in (-3, 1)$ بحيث:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\because f(1) = 3 \quad , f(-3) = 3$$

$$f'(x) = 2x + 2$$

$$f'(c) = 2c + 2$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)}$$

$$2c + 2 = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)}$$

$$2c + 2 = \frac{3 - 3}{4} \Rightarrow 2c + 2 = 0$$

$$\therefore c = -1 \in (-3, 1)$$

التفسير: يوجد مماس لمنحنى الدالة عند $x = -1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(-3, 3)$, $(1, 3)$

حاول أن تحل (5) بين أن الدالة f: $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 1]$، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك .

الحل:

مثال (6) بين أن الدالة f:

$f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 4]$، ثم أوجد c الذي تتنبأ به النظرية وفسر إجابتك .

الحل: الدالة f كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على الفترة $[0, 4]$ ،

وقابلة للاشتقاق على $(0, 4)$

$\therefore$ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[0, 4]$

$\therefore$ يوجد على الأقل $c \in (0, 4)$ بحيث:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\because f(4) = 54 \ , f(0) = 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(c) = 3c^2 - 3$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$$

$$3c^2 - 3 = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$$

$$3c^2 - 3 = \frac{54 - 2}{4} = \frac{52}{4} = 13 \Rightarrow 3c^2 - 3 = 13 \Rightarrow c^2 = \frac{16}{3}$$

$$c = \frac{4}{\sqrt{3}} \in (0, 4) \quad , \quad c = -\frac{4}{\sqrt{3}} \notin (0, 4)$$

التفسير: يوجد مماس لمنحنى الدالة

عند $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(0, 2)$, $(4, 54)$

حاول أن تحل (6) بين أن الدالة f:

$f(x) = x^3 + 1$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 3]$، ثم أوجد c الذي تتنبأ به النظرية وفسر إجابتك .

الحل:

مثال (7) أوجد فترات التزايد وفترات التناقص

للدالة f: $f(x) = x^3 - 6x$

الحل: الدالة f كثيرة حدود فهي متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

نوجد مشتقة الدالة f:

$$f'(x) = 3x^2 - 6$$

نضع $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 6 = 0 \implies x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \ , x = -\sqrt{2}$$

نكون الجدول لدراسة اشارة f'

$-\infty$ $-\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ ∞

الفترات	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
إشارة f'	++	--	++
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

من الجدول: f متزايدة على الفترة $(-\infty, -\sqrt{2})$

و الفترة $(\sqrt{2}, \infty)$

و متناقصة على الفترة $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

حاول أن تحل (7) أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

الحل:

مثال (8) إذا كانت الدالة f ؛ $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$

حدد الفترات التزايد وفترات التناقص للدالة

الحل: f حدودية نسبية فهي متصلة لكل x حيث $x \in R-\{\frac{1}{2}\}$ وقابلة للاشتقاق على مجالها

$$f'(x)=\frac{2x(2x-1)-2(x^2)}{(2x-1)^2}$$
$$=\frac{4x^2-2x-2x^2}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2}=\frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}=0$$
$$\Rightarrow 2x(x-1)=0$$

$$\therefore x=0\ ,\quad x=1$$

نكون الجدول لدراسة اشارة f'

$-\infty$ 0 $\frac{1}{2}$ 1 ∞

الفترات	$(-\infty,0)$	$(0,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},1)$	$(1,\infty)$
إشارة f'	++	- -	- -	++
سلوك الدالة f	↗	↘	↘	↗

غير معرفة (عند $\frac{1}{2}$)

من الجدول: f متزايدة على كل من الفترة $(-\infty,0)$ والفترة $(1,\infty)$

و متناقصة على كل من الفترة $(0,\frac{1}{2})$ والفترة $(\frac{1}{2},1)$

حاول أن تحل (8) إذا كانت الدالة f ؛

$f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ حدد الفترات التزايد وفترات التناقص للدالة .

الحل:

مثال (9) لتكن الدالة f :

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$ أوجد كلاً مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالة.

b الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحلية.

الحل: $\because$ f دالة كثيرة حدود $\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق عند كل x : $x \in \mathbb{R}$ ،

❖ نوجد النقاط الحرجة : $f'(x) = -3x^2 + 6x$

نضع $f'(x) = 0$

$-3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -3x(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad , \quad x = 2$

$f(0) = -4 , f(2) = 0$

$\therefore$ النقاط الحرجة هي : $\big(0 , f(0)\big) = (0 , -4) \quad , \quad \big(2 , f(2)\big) = (2 , 0)$

❖ نكون الجدول لدراسة إشارة f' :

$-\infty \qquad 0 \qquad 2 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
إشارة f'	--	++	--
سلوك الدالة f	↘	↗	↘

نلاحظ من الجدول: الدالة متزايدة على الفترة $(0 , 2)$ ، ومتناقصة على الفترة $(-\infty, 0)$ و الفترة $(2,\infty)$

نستطيع أن نلاحظ من الجدول أنه توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 2$ هي $f(2) = 0$

وقيمة صغرى محلية عند $x = 0$ هي $f(0) = -4$

حاول أن تحل (9) لتكن الدالة f :

$f(x) = x^3 - 12x - 5$ أوجد كلاً مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالة.

b الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحلية.

الحل:

مثال (10) لتكن الدالة f : $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

أوجد كلاً مما يلي:
a النقاط الحرجة للدالة.
b الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.
c القيم القصوى المحلية.

الحل: f حدودية نسبية مجالها هو $\mathbb{R}$ (لاتوجد أصفار للمقام) f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{(1)(x^2+1)-2x.x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

نضع $f'(x)=0$

$$\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow (1-x)(1+x)=0$$
$$x=1\ ,\ x=-1$$
$$f(1)=\frac{1}{2}\ ,f(-1)=\frac{-1}{2}$$

∴ النقاط الحرجة هي :

$$\left(1\,,\frac{1}{2}\right)\quad,\left(-1\,,\ -\frac{1}{2}\right)$$

نكون الجدول لدراسة إشارة f' :

$-\infty \quad -1 \quad 1 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
إشارة f'	--	++	--
سلوك الدالة f	↘	↗	↘

نلاحظ من الجدول: الدالة متزايدة على الفترة $(-1\ ,\ 1)$ ، و متناقصة على الفترة $(-\infty,-1)$ و الفترة $(1,\infty)$

القيمة العظمى المحلية هي : $f(1)=\frac{1}{2}$،
والقيمة الصغرى المحلية هي : $f(-1)=-\frac{1}{2}$

حاول أن تحل (10) لتكن الدالة f :
$f(x)=x-3+\frac{4}{x-1}$ أوجد كلاً مما يلي:
a النقاط الحرجة للدالة.
b الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.
c القيم القصوى المحلية.

الحل:

مثال (11) أوجد فترات التقعّر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

الحل : $\because$ f دالة كثيرة حدود $\therefore$ f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

نضع $f''(x) = 0$

$$6x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}$$

نكون الجدول لدراسة إشارة f'' :

$-\infty$ $\quad \frac{2}{3} \quad$ ∞

الفترات	$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
إشارة f''	--	+ +
التقعر	$\cap$	$\cup$

نلاحظ من الجدول: بيان الدالة f مقعّر لأسفل على الفترة $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$

بيان الدالة f مقعّر لأعلى على الفترة $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$

لإيجاد نقطة الانعطاف:

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \frac{11}{27}$$

النقطة $I\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$ هي نقطة انعطاف لمنحنى f

حاول أن تحل (11) أوجد فترات التقعّر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f :

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$$

الحل:

مثال (12) لتكن f :

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1 \; ; \; a \, , \, b \in \mathbb{R}$$

وكان للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من : $x = -1 \, , \quad x = 2$

أوجد قيمة كل من الثابتين $a \, , \, b$

الحل: الدالة f كثيرة حدود فهي متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$$

$\because$ للدالة قيم قصوى محلية عند :

$$x = -1 \, , \quad x = 2$$

$\therefore$توجد نقاط حرجة للدالة عندهما وبالتالي:

$$f'(-1) = 0 \quad , f'(2) = 0$$

نحصل على المعادلتين الآتيتين : (بالتعويض عن $f'(x)$ في $x = -1 \, , \quad x = 2$)

$$\begin{cases} 6(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \\ 6(2)^2 + 2a(2) + b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a + b = -6 \\ 4a + b = -24 \end{cases}$$

إستخدم الآلة الحاسبة العلمية لإيجاد الحل (Mode 5 1)

$$a = -3 \; , \; b = -12$$

حاول أن تحل (12) لتكن f :

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5 \; ; \; a \, , \, b \in \mathbb{R}$$

وكان للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من $x = 1 \, , \quad x = \frac{1}{3}$

أوجد قيمة كل من الثابتين $a \, , \, b$

الحل:

مثال (13) ادرس تغير الدالة f: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها

الحل: f دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$ ، نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^3) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$$

f دالة كثيرة حدود قابلة للاشتقاق على مجالها

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-3)(x-1)$$

نضع $f'(x) = 0$

$$3(x-3)(x-1) = 0$$

$$x = 3 \quad , \quad x = 1$$

$$f(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) - 4 = -4$$

$$, f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) - 4 = 0$$

$\therefore$ النقطتان $(3,-4)$ و $(1,0)$ نقطتان حرجتان

نكون الجدول لدراسة إشارة f' :

$-\infty$ ، 1 ، 3 ، ∞

الفترات	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
إشارة f'	++	--	++
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

منحنى الدالة متزايد على كل من الفترتين $(3,\infty)$, $(-\infty,1)$ ومتناقص على الفترة $(1,3)$

نكون جدول لدراسة المشتقة الثانية : $f''(x) = 6x - 12$

نضع $f''(x) = 0$

$$6x - 12 = 0 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 9(2) - 4 = -2$$

نكون الجدول لدراسة إشارة f'' :

$-\infty$ 2 ∞

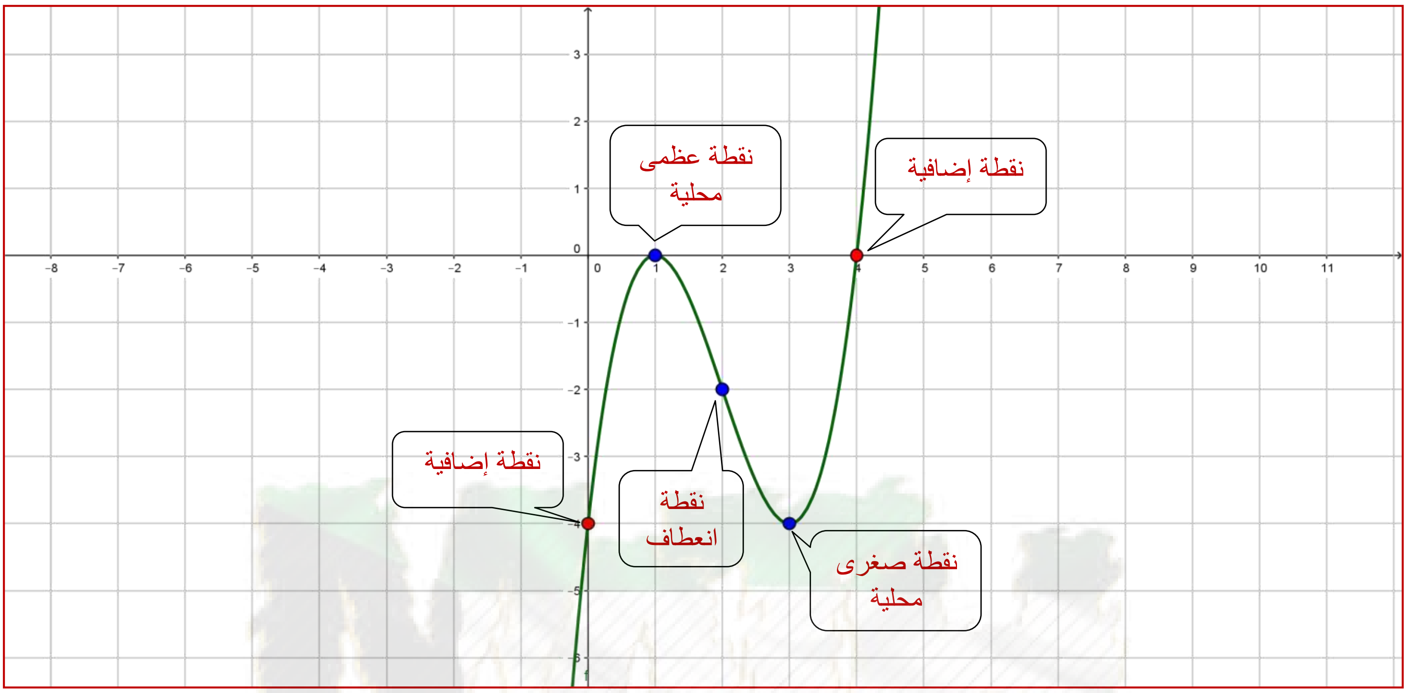
الفترات	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f''	--	+ +
التقعر	$\cap$	$\cup$

منحنى الدالة مقعر للأسفل على الفترة $(-\infty, 2)$ ومقعر للأعلى على الفترة $(2, \infty)$

$(2, -2)$ نقطة انعطاف

نقاط إضافية

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	0	-2	-4	0
	نقطة إضافية	نقطة عظمى محلية	نقطة إنعطاف	نقطة صغرى محلية	نقطة إضافية



حاول أن تحل (13) ادرس تغير الدالة f: $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها .

الحل:

ورقة الرسم البياني

مثال (14) ادرس تغير الدالة f: $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها

الحل: f دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$ ، نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(-x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x^3) = \infty$$

f دالة كثيرة حدود قابلة للاشتقاق على مجالها

$$f'(x) = -3x^2$$

نضع $f'(x) = 0$

$$-3x^2 = 0 \quad \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = 1 - (0)^3 = 1$$

$\therefore$ $(0\,,1)$ نقطة حرجة

نكون الجدول لدراسة إشارة f' :

$-\infty$ 0 ∞

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
إشارة f'	--	--
سلوك الدالة f	$\searrow$	$\searrow$

الدالة متناقصة على كل من الفترتين $(-\infty\,,0), (0\,,\infty)$

نكون جدول لدراسة المشتقة الثانية : $f''(x) = -6x$

نضع $f''(x) = 0$

$$-6x = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

$(0\,,1)$ نقطة انعطاف

جدول f'' :

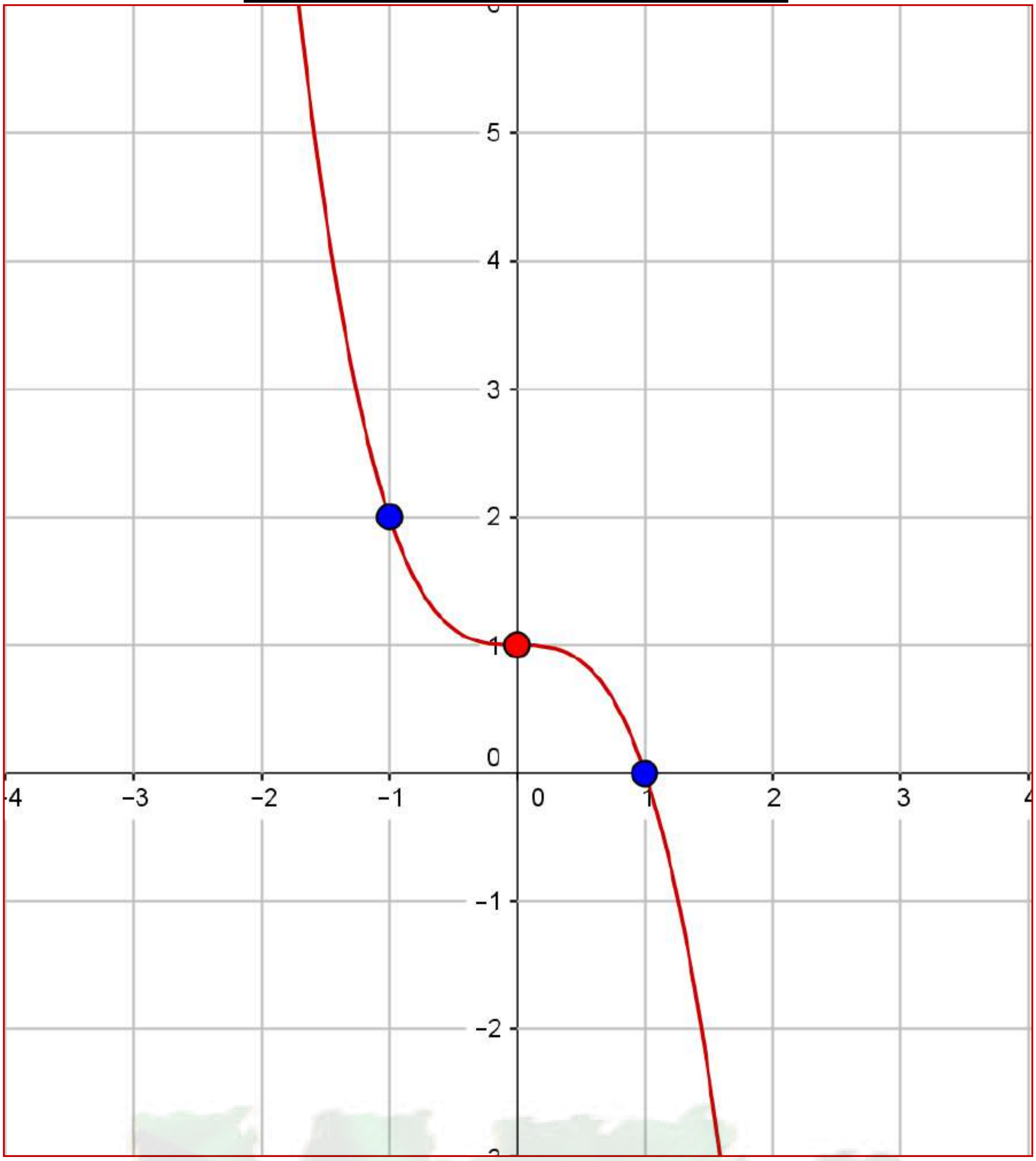
$-\infty$ 0 ∞

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
إشارة f''	++	--
التقعر	$\cup$	$\cap$

منحنى الدالة مقعر للأعلى على الفترة $(-\infty\,,0)$ ومقعر للأسفل على الفترة $(0,\infty)$

نقاط إضافية :

x	-1	0	1
$f(x)$	2	1	0



حاول أن تحل (14) ادرس تغير الدالة f: $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها .

الحل:

ورقة الرسم البياني

مثال (15) ادرس تغير الدالة $f(x) = x^4 - 2x^2$ وارسم بيانها .

الحل: f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$ ، نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^4) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^4) = \infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f

f دالة كثيرة حدود قابلة للاشتقاق على مجالها

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1) = 4x(x+1)(x-1)$$

نضع $f'(x) = 0$

$$4x(x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad , x = 1 , x = -1$$

$$f(0) = 0 \quad , f(1) = -1 , f(-1) = -1$$

$\therefore$ $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(0 , 0)$ نقاط حرجة

نكون الجدول لدراسة إشارة f' :

$-\infty$ … -1 … 0 … 1 … ∞

الفترات	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
إشارة f'	--	++	--	++
سلوك الدالة f	↘	↗	↘	↗

الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty , -1)$ و الفترة $(0,1)$

الدالة متزايدة على الفترة $(-1 , 0)$ والفترة $(1, \infty)$

نكون الجدول لدراسة إشارة f'' :

$$f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2-1)$$

$$f''(x) = 0$$

$$4(3x^2-1) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{5}{9} \quad , f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{5}{9}$$

النقطتان $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right)$ هما نقطتا انعطاف

جدول f'' :

$-\infty \qquad -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \infty$

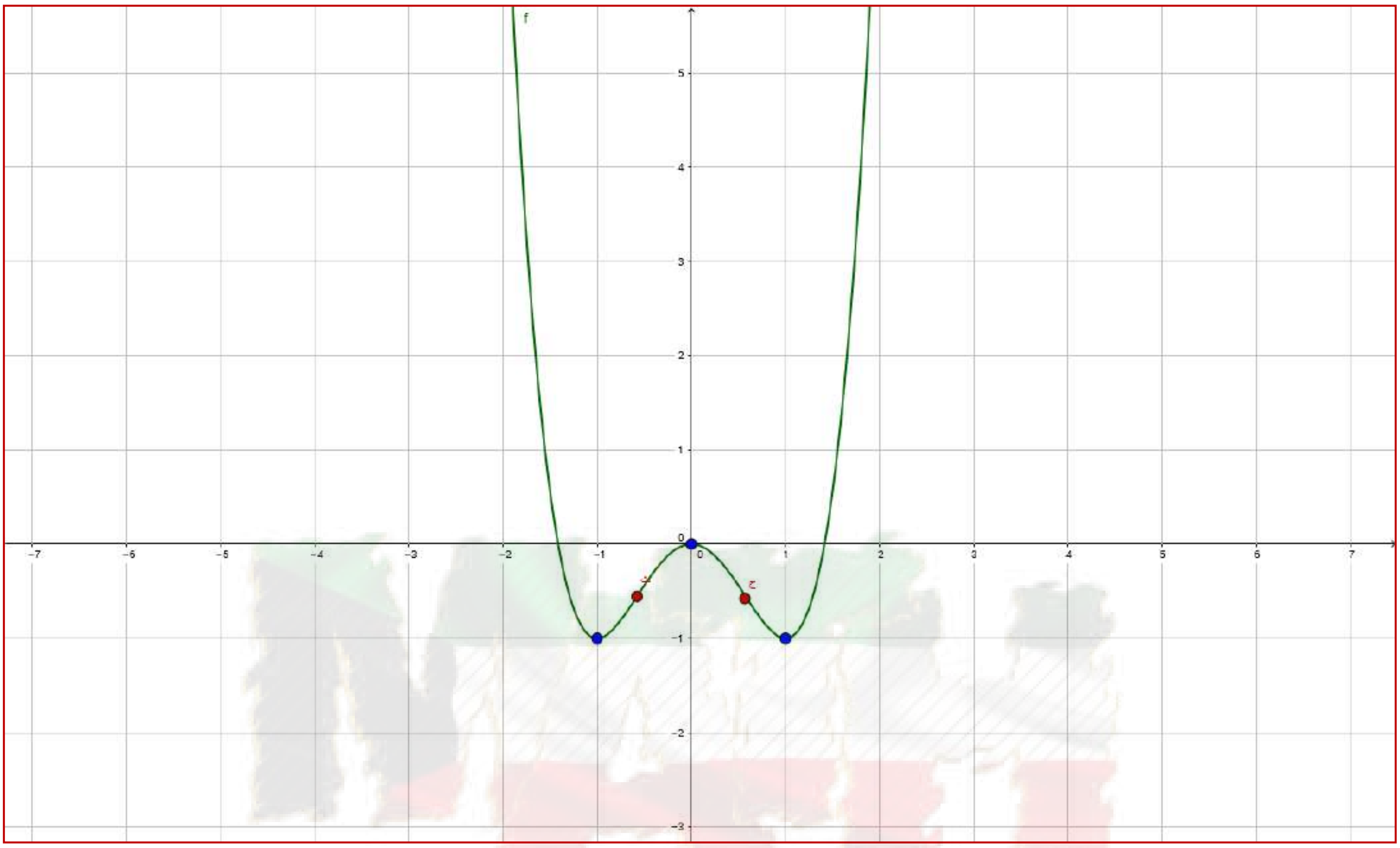
الفترات	$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$
إشارة f''	++	--	++
التقعر	$\cup$	$\cap$	$\cup$

منحنى الدالة f مقعّر لأسفل على الفترة $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

و مقعّر لأعلى على الفترة $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ والفترة $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$

نقاط إضافية :

x	-2	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	2
$f(x)$	8	-1	$\frac{-5}{9}$	1	$\frac{-5}{9}$	-1	8



حاول أن تحل (15) ادرس تغير الدالة f: $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2$ وارسم بيانها .

الحل:

ورقة الرسم البياني

مثال (16) ادرس تغير الدالة $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ وارسم بيانها .

الحل: f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^4) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (-x^4) = -\infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f : f دالة كثيرة حدود قابلة للاشتقاق على مجالها

$$f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1) = -4x(x+1)(x-1)$$

نضع $f'(x) = 0$

$$-4x(x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad , \quad x = -1 \ , \ x = 1$$

$$f(0) = 1 \, , f(-1) = 2 \, , f(1) = 2$$

$\therefore$ $(0,1), (1,2), (-1,2)$ نقاط حرجة

نكون الجدول لدراسة إشارة f' :

	$-\infty$	-1	0	1	∞

الفترات	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
إشارة f'	++	--	++	--
سلوك الدالة f	↗	↘	↗	↘

الدالة متزايدة على كل من الفترة $(-\infty , -1)$ والفترة $(0 , 1)$

الدالة متناقصة على كل من الفترة $(-1 , 0)$ و الفترة $(1 , \infty)$

$$f''(x) = -12x^2 + 4$$

نضع $f''(x) = 0$

$$-12x^2 + 4 = 0 \Rightarrow -12\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow -12\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{14}{9} \quad , f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{14}{9}$$

نكون الجدول لدراسة إشارة f'' :

$-\infty \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \infty$

الفترات	$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$
إشارة f''	--	++	--
التقعر	$\frown$	$\smile$	$\frown$

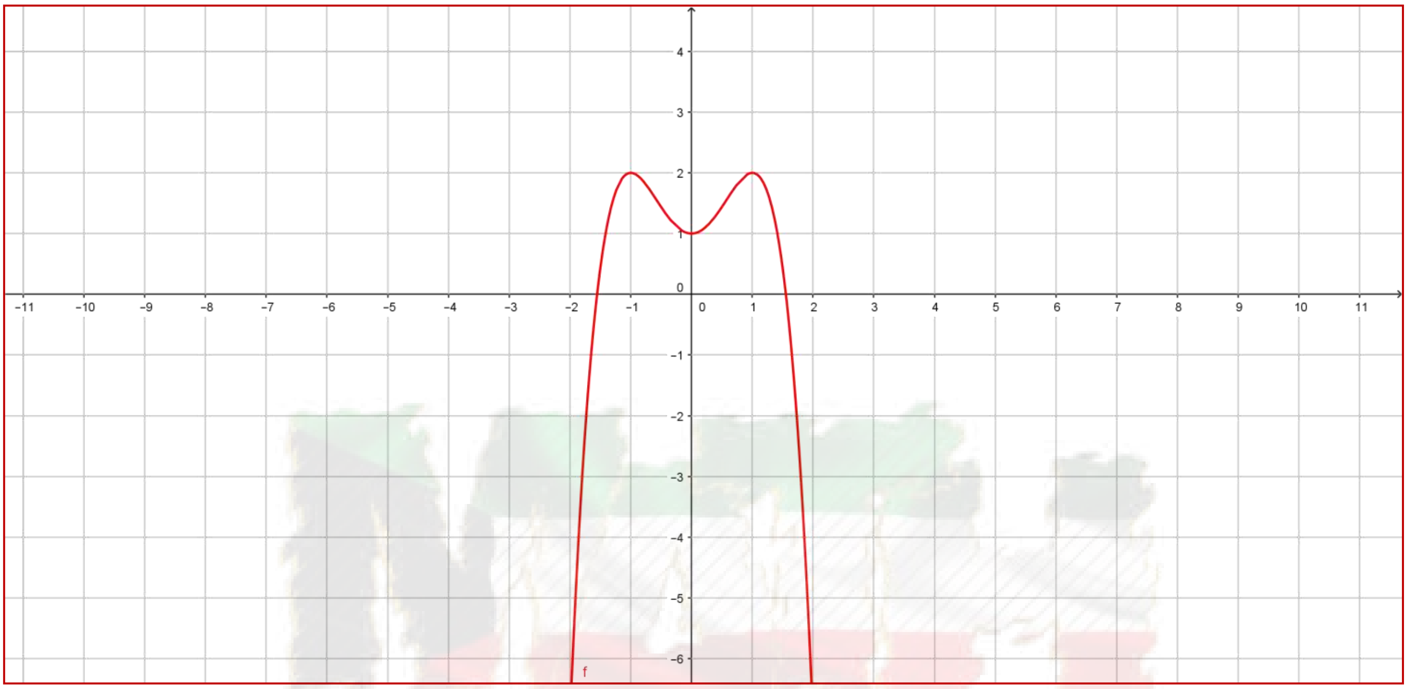
منحنى الدالة f مقعّر لأسفل على الفترة $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ و الفترة $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$

و مقعّر لأعلى على الفترة $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{14}{9}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{14}{9}\right)$ هما نقطتا انعطاف

نقاط إضافية

x	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
$f(x)$	2	$\frac{14}{9}$	1	$\frac{14}{9}$	2



حاول أن تحل (16) ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 8x^2 - x^4 - 8$ وارسم بيانها .

الحل:

ورقة الرسم البياني

مع تمنياتنا لكم بالتوفيق و النجاح

قسم رياضيات ثانوية سعد العبدالله الصباح

تطبيقات على القيم القصوى

مثال (17) أوجد عددين مجموعهما 14 و ناتج ضربهما أكبر مايمكن .

الحل : بفرض أحد العددين هو x

حيث $0 < x < 14$

فيكون العدد الآخر هو $14 - x$

ناتج ضربهما :

$$f(x) = x(14 - x) = 14x - x^2$$

$$f'(x) = 14 - 2x$$

$$f'(x) = 0 \implies 14 - 2x = 0 \implies x = 7$$

يوجد نقطة حرجة $(7, f(7))$

$$f''(x) = -2 \quad , -2 < 0 \quad , \quad \forall\, x \in (0,14)$$

$$f''(7) = -2 \quad , -2 < 0$$

$\therefore f(7) = 49$ قيمة عظمى عند $x = 7$

العدد الأول هو 7

و العدد الثاني هو : $14 - 7 = 7$

العددان هما 7 , 7

حاول أن تحل (17) أوجد عددين موجبين مجموعهما 100 و مجموع مربعيهما أصغر مايمكن .

الحل:

مثال (18) يراد صنع صندوق بدون غطاء بقص مربعات متطابقةطول ضلع كل منها x من أركان طبقة صفيح أبعادها $15cm$, $8cm$ و ثني من جوانبها إلى الأعلى

أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن . و ما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة ؟

الحل : ارتفاع الصندوق x و البعدان الآخران هما $(8-2x)$, $(15-2x)$

حيث $0 < 2x < 8$ أي أن $0 < x < 4$

حجم الصندوق هو ناتج ضرب أبعاده الثلاثة

$$V(x) = x(8-2x)(15-2x)$$
$$= 4x^3 - 46x^2 + 120x$$
$$V'(x) = 12x^2 - 92x + 120$$
$$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 92x + 120 = 0$$
$$(3x-5)(x-6) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

مرفوضة $, x = 6 \notin (0,4)$

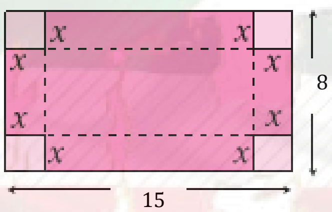
$$V''(x) = 24x - 92 \Rightarrow V''\left(\frac{5}{3}\right) = -52 < 0$$

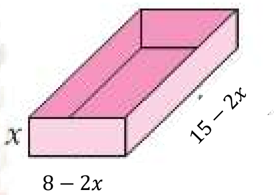
$\therefore$ يوجد عند $x = \frac{5}{3}$ قيمة عظمى

$\therefore$ يكون حجم الصندوق أكبر مايمكن عند $x = \frac{5}{3}$

حجمه :

$$V\left(\frac{5}{3}\right) = 4\left(\frac{5}{3}\right)^3 - 46\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 120\left(\frac{5}{3}\right)$$
$$= \frac{2450}{27} cm^3$$



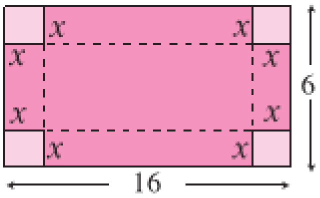


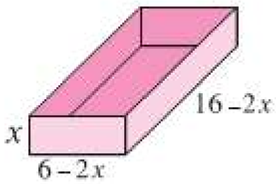
حاول أن تحل (18) يراد صنع صندوق بدون غطاء بقص مربعات متطابقةطول ضلع كل منها x من أركان طبقة صفيح أبعادها $16cm$, $6cm$

و ثني من جوانبها إلى الأعلى

أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن . و ما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة ؟

الحل:





مثال (19) تعطى الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h .

(a) أوجد الارتفاع $h(cm)$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة .

(b) ما قيمة هذا الحجم ؟

الحل : (a) $\frac{dV}{dh} = 2\pi(-3h^2 + 36)$

نضع $\frac{dV}{dh} = 0$

$$2\pi(-3h^2 + 36) = 0 \Rightarrow -3h^2 + 36 = 0 \Rightarrow h^2 = 12$$

$h = 2\sqrt{3}$ أو $h = -2\sqrt{3}$ (مرفوضة)

$$\frac{d^2V}{dh^2} = 2\pi(-6h) = -12\pi h$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d^2V}{dh^2}\right|_{h=2\sqrt{3}} = -12\pi(2\sqrt{3}) = -24\sqrt{3}\pi < 0$$

$\therefore$ يوجد عند $h = 2\sqrt{3}$ قيمة عظمى

$\therefore$ نحصل على أكبر حجم للأسطوانة عند $h = 2\sqrt{3}$

(b) أكبر حجم للأسطوانة : $V(2\sqrt{3}) =$

$$2\pi(-(2\sqrt{3})^3 + 36(2\sqrt{3})) \approx 522.37cm^3$$

حاول أن تحل (19) طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لتراً واحداً تكون على شكل إسطوانة دائرية قائمة ما أبعادها لتكون كمية المعدن المستخدم لصنعها أقل مايمكن ؟

(المساحة السطحية للأسطوانة تساوي :

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

و حجم الأسطوانة يساوي : $V = \pi r^2 h$)

الحل:

مثال (20) أوجد أقصر مسافة بين النقطة $A(x,y)$ على المنحني الذي معادلته $y=\sqrt{x}$ و النقطة $B(3,0)$

الحل : المسافة بين النقطتين A,B هي :

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$
$$=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

نفرض دالة المسافة هي:

$$s(x)=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

من معادلة المنحنى : $y=\sqrt{x}\Rightarrow y^2=x$

بالتعويض بالدالة :

$$s(x)=\sqrt{x^2-6x+9+x}=\sqrt{x^2-5x+9}$$
$$s(x)=(x^2-5x+9)^{\frac{1}{2}}$$
$$s'(x)=\frac{1}{2}(2x-5)(x^2-5x+9)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+9}}$$
$$s'(x)=0\Rightarrow 2x-5=0\Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

نوجد أصفار المقام بوضع :

$$x^2-5x+9=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=25-4(1)(9)=-11<0$$

لايوجد أصفار للمقام .

x		$\frac{5}{2}$	
$s'(x)$	--		++
$s(x)$	↘		↗

∴أقصر مسافة بين النقطتين A,B هي عند $x=\frac{5}{2}$ قيمة صغرى

$$s\left(\frac{5}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-5\left(\frac{5}{2}\right)+9}=\frac{\sqrt{11}}{2}$$

∴أقصر مسافة هي $\frac{\sqrt{11}}{2}$ وحدة طول

حاول أن تحل (20) أوجد أقصر مسافة بين النقطة $P(x,y)$ على المنحني الذي معادلته $y^2-x^2=16$ و النقطة $Q(6,0)$

الحل:

مثال (21) تصنع إحدى الشركات يومياً x (بالآلاف) من المكثفات الكهربائية.

يعطى معدل كلفة إنتاج كل قطعة بالعلاقة:

$$C(x) = x - 2 + \frac{25}{x}$$

a) أوجد كمية المكثفات المنتجة يومياً لتحقيق أقل كلفة ممكنة.

b) تباع كل ألف قطعة بسعر 10 دنانير.

أوجد كمية المكثفات المنتجة لتحقيق أكبر ربح

الحل: a) x عدد المكثفات $\therefore\ x \in (0,\infty)$

$$c'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2}$$

$$c'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 25}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 25 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+5) = 0$$

$$x = 5 \quad , \quad x = -5 \notin (0,\infty)$$

x		5	
$c'(x)$	----		+++++
$c(x)$	↘		↗

من الجدول يوجد قيمة صغرى عند $x = 5$

$\therefore$ كمية المكثفات التي تحقق أقل كلفة 5000 مكثف

b) الربح = سعر مبيع الكمية − كلفة الكمية

$$p(x) = 10x - \left(x - 2 + \frac{25}{x}\right)x$$

$$= 10x - x^2 + 2x - 25$$

$$= -x^2 + 12x - 25$$

$$p'(x) = -2x + 12 \Rightarrow -2x + 12 = 0 \Rightarrow x = 6$$

x		6	
$p'(x)$	+++		----
$p(x)$	↗		↘

من الجدول يوجد قيمة عظمى عند $x = 6$

$\therefore$ مبيع 6000 قطعة يحقق أكبر ربح

$$p(x) = -(6)^2 + 12(6) - 25 = 11$$

أكبر قيمة للربح تساوي 11 دينار

حاول أن تحل (21) تنتج إحدى شركات الأدوات الكهربائية خلال فترة زمنية محددة وكمية x من الخلاطات الكهربائية.

يعطى معدل كلفة إنتاج كل قطعة بالعلاقة:

$$C(x) = x - 20 + \frac{400}{x}$$

a) أوجد كمية عدد القطع المنتجة خلال الفترة لتحقيق أقل كلفة ممكنة.

b) تباع كل قطعة بمبلغ 100 دينار.

1) عبر عن ربح الشركة بمعلومية x

2) أوجد قيمة x التي تحقق أكبر ربح و ماقيمته ؟

الحل:

التقدير

مثال 1

عينة عشوائية حجمها 64 و متوسطها الحسابي $\overline{x} = 150$ والانحراف المعياري للمجتمع $\sigma=10$ باستخدام مستوى ثقة 95 %

1- أوجد هامش الخطأ
2- أوجد فترة الثقة للمعلمة μ
3- فسر فترة الثقة

الحل

تطبيق 1

عينة عشوائية حجمها $n=25$ ومتوسطها الحسابي $\overline{x}=30$ والانحراف المعياري

للمجتمع $\sigma=2.5$ باستخدام مستوى ثقة 95 %

1- أوجد هامش الخطأ
2- أوجد فترة الثقة للمعلمة μ
3- فسر فترة الثقة

الحل

مثال 2

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمهما $n=49$ ومتوسطها الحسابي 60 وانحرافها المعياري $s=7$ باستخدام مستوى ثقة % 95

1- أوجد هامش الخطأ
2- أوجد فترة الثقة للمعلمة μ
3- فسر فترة الثقة

الحل

تطبيق 2

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمهما 100 ومتوسطها الحسابي 65 وانحرافها المعياري s=5 باستخدام مستوى ثقة 95 %

1- أوجد هامش الخطأ
2- أوجد فترة الثقة للمعلمة μ
3- فسر فترة الثقة

الحل

مثال 3

أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الأحصائي μ

علما بأن العينة أخذت من مجتمع طبيعي

إذا كان لدينا $n=25$ ، $s^2=49$ ، $\bar{x}=20$

الحل

تطبيق 3

أوجد فترة ثقة %95 للمتوسط الحسابي للمجتمع الأحصائي μ

علما بأن العينة أخذت من مجتمع طبيعي

إذا كان لدينا $n=16$ ، $s=5$ ، $\bar{x}=18$

الحل

اختبارات الفروض الاحصائية

مثال 1

يعتقد مسؤول في احدى الشركات أن متوسط الرواتب هو 500 دينار . أعطت عينة من 20 موظفاً (دينار) $\bar{x} = 520$ والانحراف المعياري $\sigma = 50$

تأكد من فرضية المسؤول عند مستوية المعنوية $\alpha = 0.05$

الحل

تطبيق 1

يزعم مدير في احدى الشركات أن متوسط الرواتب هو 600 دينار . أعطت عينة من 25 موظفاً (دينار) $\bar{x} = 550$ والانحراف المعياري $100 = \sigma$

تأكد من فرضية المدير عند مستوية المعنوية $\alpha = 0.05$

الحل

مثال 2

في عينة من مجتمع احصائي إذا كان قيمة 40 $\overline{x}=$ والانحراف المعياري $S=7$ ،
اختبر الفرض إذا $\mu=35$ مقابل الفرض البديل $\mu \neq 35$ عند مستوية المعنوية
$\alpha = 0.05$ اذا كانت حجم العينة $n=20$

الحل

تطبيق 2

في عينة من مجتمع احصائي إذا كان قيمة $\bar{x}=50$ والانحراف المعياري $S=9$ ، اختبر الفرض إذا $\mu=40$ مقابل الفرض البديل $\mu \neq 40$ عند مستوية المعنوية $\alpha = 0.05$ اذا كانت حجم العينة $n=20$

الحل

مثال 3

في دراسة لعدد استخدام ساعات الحاسوب ، أخذت عينة من 100 شخص يعملون في مختلف المجالات فوجد أن المتوسط الحسابي لعدد استخدام الحاسوب هو $\overline{x} = 4.5$ والانحراف المعياري $S=1$ ، اختبر الفرض إذا كان متوسط عدد الساعات للمجتمع هو $\mu=5$ ، مقابل الفرض البديل $\mu \neq 5$ عند مستوية المعنوية $\alpha = 5\ \%$

الحل

تطبيق 3

أخذت عينة من مجتمع قيد الدراسة حجمها $n= 150$ ، فوجد أن المتوسط الحسابي للعينة $\overline{x}= 30.3$ مع انحراف معياري $S=6.5$ ، اختبر الفرض إذا كان المتوسط الحسابي للمجتمع هو $\mu=30$ ، مقابل الفرض البديل $\mu \neq 30$ عند مستوية المعنوية $\alpha = 5\ \%$

الحل