الاشتقاق

- باستخدام التعريف
- باستخدام القواعد

أولاً : باستخدام التعريف

التعريف الأساسي

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

أستخدمه

اذا طلب مني أوجد مشتقة الدالة

التعريف البديل

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

أستخدمه

اذا طلب مني أوجد مشتقة الدالة عند نقطة

تمارين الاشتقاق باستخدام التعريف

مثال $\boxed{1}$: باستخدام تعريف المشتقة أوجد مشتقة الدالة f :

$$f(x) = x^2 + 2$$

الحل

$$f(x) = x^2 + 2$$

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 2 = x^2 + 2xh + h^2 + 2$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2 - (x^2 + 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2 - x^2 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h)$$

$$= 2x + 0$$

$$= 2x$$

مثال [2] : لتكن : $f(x)=x^3$ أوجد $f'(x)$

باستخدام تعريف المشتقة إن وجدت

<u>الحل</u>

$$f(x)=x^3$$

$$f(x+h)=(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)$$

$$=3x^2+0+0$$

$$=3x^2$$

مثال ③ : باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f :

$f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

الحل :

$f(x) = 3x^2$

$f(-2) = 3(-2)^2 = 12$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(-2) = \lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$$ (إن وجدت)

$$= \lim_{x \to -2} \frac{3x^2 - 12}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{3(x^2 - 4)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{3(x-2)(x+2)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2} 3(x-2)$$

$$= 3(-2-2)$$

$$= -12$$

مثال $\boxed{4}$: أوجد مشتقة الدالة f : $f(x)=\frac{1}{x}$ عند $x=b$ ، $b\neq 0$

الحل

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

$$f(b)=\frac{1}{b}$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(b)=\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$=\lim_{x\to b}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{b}}{x-b}$$

ملاحظة

$$\frac{A}{B}\mp\frac{C}{D}=\frac{AD\mp BC}{BD}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{b}=\frac{b-x}{xb}$$

$$=\lim_{x\to b}\frac{\frac{b-x}{xb}}{x-b}$$

$$=\lim_{x\to b}\frac{-1}{xb}$$

$$=\frac{\lim_{x\to b}-1}{\lim_{x\to b}xb}$$

شرط :

$$\lim_{x\to b}xb=b\cdot b=b^2\neq 0$$

$$=\frac{-1}{b\cdot b}$$

$$=\frac{-1}{b^2}$$

مثال 5 : باستخدام التعريف البديل أوجد مشتقة الدالة

$f(x)=\sqrt{x}$ عند $x=a$ حيث $a>0$

الحل

$$f(x)=\sqrt{x}$$

$$f(a)=\sqrt{a}$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$=\frac{\lim_{x\to a}1}{\lim_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

نهاية المقام

$$\lim_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})=\lim_{x\to a}\sqrt{x}+\lim_{x\to a}\sqrt{a}=\sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}\neq 0$$

مثال $\boxed{6}$: بين أن الدالة التالية لها مشتقة لجهة اليمين ومشتقة لجهة اليسار عند $x=0$ لكن ليس لها مشتقة عند $x=0$ حيث

$$f(x)=\begin{cases} x^2 : x \leq 0 \\ 2x : x > 0 \end{cases}$$

<u>الحل</u>

$$f(0)=(0)^2=0$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0^-}x=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to 0^+}2=2$$

$$\because f'_+(0)\neq f'_-(0)$$

$\therefore f'(0)$ غير موجودة

مثال $\boxed{7}$: لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & : x\leq -1 \\ \frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2} & : x>-1 \end{cases}$$

بين أن للدالة f مشتقة لجهة اليمين مساوية للمشتقة لجهة اليسار عند $x=-1$

<u>الحل</u>

$$f(-1)=\frac{1}{-1}=-1$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{\frac{1}{x}+1}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^-}\frac{\cancel{\frac{1+x}{x}}}{\cancel{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to -1^-} 1}{\lim\limits_{x\to -1^-} x}$$

شرط

$$\lim_{x\to -1^-} x=-1\neq 0$$

$$=\frac{1}{-1}$$

$$=-1$$

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}+1}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{1}{2}(x^2-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{1}{2}(x-1)(x+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{2}(x-1)$$

$$=\frac{1}{2}(-1-1)$$

$$=-1$$

$$\because f'_+(-1)=f'_-(-1)=-1$$

$$\therefore f'(-1)=-1$$

مثال 8 : لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4} & : x\le 1\\ \sqrt{x} & : x>1\end{cases}$$

بين أن للدالة f مشتقة لجهة اليمين مساوية للمشتقة لجهة اليسار عند $x=1$

الحل

$$f(1)=\frac{1}{4}(1)^2+\frac{3}{4}=1$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad (\text{إن وجدت})$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{4}(x^2-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{4}(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{4}(x+1)$$

$$=\frac{1}{4}(1+1)$$

$$=\frac{1}{2}$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 1^+}1}{\lim_{x\to 1^+}(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

نهاية المقام

$$\lim_{x\to 1^+}(\sqrt{x}+1)=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x}+\lim_{x\to 1^+}1$$

$$=\sqrt{1}+1$$

$$=2\neq 0$$

$$\because f'_+(1)=f'_-(1)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f'(1)=\frac{1}{2}$$

مثال $\boxed{9}$: لتكن f : $f(x)=|x-2|$

ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x=2$

الحل

$$f(x)=\begin{cases} +(x-2) & : x \geq 2 \\ -(x-2) & : x < 2 \end{cases}$$

$$f(2)=2-2=0$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$ (إن وجدت)

$$f'_{+}(2)=\lim_{x\to 2^{+}}\frac{(x-2)-0}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^{+}}\frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}}$$

$$=\lim_{x\to 2^{+}} 1$$

$$=1$$

$$f'_{-}(2)=\lim_{x\to 2^{-}}\frac{-(x-2)-0}{(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2^{-}}\frac{-\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}}$$

$$=\lim_{x\to 2^{-}} -1$$

$$=-1$$

$\because f'_{+}(2)\neq f'_{-}(2)$

$\therefore f'(2)$ غير موجودة

مثال $\boxed{10}$: لتكن f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & : x<2 \\ 2x-1 & : x\geq 2 \end{cases}$$

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$

الحل

$$f(2)=2(2)-1=3$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-1-3}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}(x+2)$$

$$=2+2$$

$$=4$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x-1-3}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x-4}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}2$$

$$=2$$

$$\because f'_+(2)\neq f'_-(2)$$

$\therefore f'(2)$ غير موجودة

مثال [11]: لتكن f :

$$f(x)=\begin{cases}6x-1 : x>\frac{1}{2}\\ 2x+1 : x\leq\frac{1}{2}\end{cases}$$

بين أن الدالة f متصلة عند $x=\frac{1}{2}$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندها

الحل

الاشتقاق

$$f(\tfrac{1}{2})=2(\tfrac{1}{2})+1=2$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(\tfrac{1}{2})=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}$$ (إن وجدت)

$$f'_+(\tfrac{1}{2})=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{6x-1-2}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{6x-3}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{6\cancel{(x-\frac{1}{2})}}{\cancel{(x-\frac{1}{2})}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}6=6$$

$$f'_-(\tfrac{1}{2})=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{2x+1-2}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{2x-1}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{2\cancel{(x-\frac{1}{2})}}{\cancel{x-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}2=2$$

$$\because f'_+(\tfrac{1}{2})\neq f'_-(\tfrac{1}{2})$$

$\therefore f'(\frac{1}{2})$ غير موجودة

الاتصال

$$f(\tfrac{1}{2})=2(\tfrac{1}{2})+1=2 \quad (1)$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}(6x-1)=6(\tfrac{1}{2})-1=2$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}(2x+1)=2(\tfrac{1}{2})+1=2$$

$$\because \lim_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)=2$$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=2 \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن

الدالة f متصلة عند $x=\frac{1}{2}$

مثال [12]: لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} -x-1 : x > -\frac{1}{3} \\ 5x+1 : x \leq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

بين أن الدالة f متصلة وغير قابلة للاشتقاق عند $x=-\frac{1}{3}$

الحل

الاشتقاق

$$f(-\tfrac{1}{3})=5(-\tfrac{1}{3})+1=-\frac{2}{3}$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(-\tfrac{1}{3})=\lim_{x\to -\frac{1}{3}}\frac{f(x)-f(-\frac{1}{3})}{x+\frac{1}{3}}$$

$$f'_+(-\tfrac{1}{3})=\lim_{x\to -\frac{1}{3}^+}\frac{-x-1+\frac{2}{3}}{x+\frac{1}{3}}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{1}{3}^+}\frac{-x-\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{3}}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{1}{3}^+}\frac{-\cancel{(x+\frac{1}{3})}}{\cancel{x+\frac{1}{3}}}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{1}{3}^+}-1$$

$$=-1$$

$$f'_-(-\tfrac{1}{3})=\lim_{x\to -\frac{1}{3}^-}\frac{5x+1+\frac{2}{3}}{x+\frac{1}{3}}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{1}{3}^-}\frac{5x+\frac{5}{3}}{x+\frac{1}{3}}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{1}{3}^-}\frac{5(x+\frac{1}{3})}{x+\frac{1}{3}}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{1}{3}^-}5$$

$$=5$$

$$\because f'_+(-\tfrac{1}{3})\neq f'_-(-\tfrac{1}{3})$$

$\therefore f'(-\frac{1}{3})$ غير موجودة

الاتصال

$$f(-\tfrac{1}{3})=5(-\tfrac{1}{3})+1=-\frac{2}{3} \quad \text{—— (1)}$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}^+}f(x)=\lim_{x\to -\frac{1}{3}^+}(-x-1)=-(-\tfrac{1}{3})-1=-\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}^-}f(x)=\lim_{x\to -\frac{1}{3}^-}(5x+1)=5(-\tfrac{1}{3})+1=-\frac{2}{3}$$

$$\because \lim_{x\to -\frac{1}{3}^+}f(x)=\lim_{x\to -\frac{1}{3}^-}f(x)=-\frac{2}{3}$$

$$\therefore \lim_{x\to -\frac{1}{3}}f(x)=-\frac{2}{3} \quad \text{—— (2)}$$

من (1) و (2) نجد أن

الدالة f متصلة عند $x=-\frac{1}{3}$

مثال $\boxed{13}$: لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & : x\le 2 \\ -x^2+7x-10 & : x>2 \end{cases}$$

بين أن الدالة f متصلة عند $x=2$ وادرس قابلية الاشتقاق عندها

الحل

الاشتقاق

$$f(2)=(2)^2-2-2=0$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+7x-10-0}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+7x-10}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x^2-7x+10)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-5)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}-(x-5)$$

$$=-(2-5)$$

$$=3$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-x-2-0}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-x-2}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{x-2}}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}(x+1)$$

$$=2+1$$

$$=3$$

$$\because f'_+(2)=f'_-(2)=3$$

$$\therefore f'(2)=3$$

الاتصال

$$f(2)=(2)^2-2-2=0 \quad \text{—— (1)}$$

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(-x^2+7x-10)=-(2)^2+7(2)-10=0$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-x-2)=(2)^2-2-2=0$$

$$\because \lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=0$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}f(x)=0 \quad \text{—— (2)}$$

من (1) و (2) نجد أن

الدالة f متصلة عند $x=2$

مثال $\boxed{14}$: لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x+5 : x\leq 3 \\ x^2-1 : x>3 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن $f'(3)$

الحل

$$f(3)=3+5=8$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$ (إن وجدت)

$$f'_-(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{x+5-8}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{x-3}}$$

$$=\lim_{x\to 3^-}1$$

$$=1$$

$$f'_+(3)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-1-8}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}(x+3)$$

$$=3+3$$

$$=6$$

$\because f'_+(3)\neq f'_-(3)$

$\therefore f'(3)$ غير موجودة

مثال $\boxed{15}$: لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & : x\leq -1 \\ x^2-x-2 & : x>-1 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$

<u>الحل</u>

$$f(-1)=(-1)^2+(-1)=0$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$ (إن وجدت)

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+x-0}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^-}\frac{x\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to -1^-}x$$

$$=-1$$

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-x-2-0}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-x-2}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{(x-2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}(x-2)$$

$$=-1-2$$

$$=-3$$

$$\because f'_+(-1)\neq f'_-(-1)$$

$\therefore f'(-1)$ غير موجودة

مثال $\boxed{16}$: لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2+1} & : x\leq 1\\ 2x-1 & : x>1\end{cases}$$

ابحث قابلية اشتقاق الدالة f عند $x=1$

الحل

$$f(1)=\frac{2}{(1)^2+1}=1$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$ (إن وجدت)

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-1-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}2$$

$$=2$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{2}{x^2+1}-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{-1\cancel{(1-x)}(1+x)}{x^2+1}}{\cancel{x-1}}$$

$$\frac{2}{x^2+1}-1$$

$$\frac{2-(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$\frac{2-x^2-1}{x^2+1}$$

$$\frac{1-x^2}{x^2+1}$$

$$\frac{(1-x)(1+x)}{x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(1+x)}{x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(-1-x)}{x^2+1}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 1^-}(-1-x)}{\lim_{x\to 1^-}(x^2+1)}$$

$$=\frac{-1-(1)}{(1)^2+1}=-1$$

$$\because f'_+(1)\neq f'_-(1)$$

$\therefore f'(1)$ غير موجودة

ثانياً : قواعد الاشتقاق

الأمثلة	القواعد
$f(x)=5$ $f'(x)=0$	$\boxed{1}$ $f(x)=$ ثابت (عدد) $f'(x)=0$
$f(x)=3x$ $f'(x)=3$	$\boxed{2}$ $f(x)=ax$ $f'(x)=a$
$f(x)=x^4$ $f'(x)=4x^3$	$\boxed{3}$ $f(x)=x^n$ $f'(x)=nx^{n-1}$
	$\boxed{4}$ $f(x)=\sqrt{x}$ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=(x^5+3x+2)^4$ $f'(x)=4(x^5+3x+2)^3(5x^4+3)$	$\boxed{5}$ $f(x)=(A)^n$ $f'(x)=n(A)^{n-1}(A')$

$\boxed{6}$ $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ $\boxed{\text{قاعدة الضرب}}$

$$f'(x) = \left(\overset{\text{نشتق}}{g(x)}\right)\left(\overset{\text{نترك}}{h(x)}\right) + \left(\overset{\text{نترك}}{g(x)}\right)\left(\overset{\text{نشتق}}{h(x)}\right)$$

$\boxed{7}$ $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ $\boxed{\text{قاعدة القسمة}}$

$$f'(x) = \frac{(\text{نشتق البسط})(\text{نترك المقام}) - (\text{نترك البسط})(\text{نشتق المقام})}{(\text{المقام})^2}$$

رموز الاشتقاق

$$f'(x) \qquad\qquad y' \qquad\qquad \frac{dy}{dx}$$

تمارين : أوجد مشتقة الدوال التالية

$\boxed{1}$ $f(x) = 4$ $f'(x) = 0$	$\boxed{2}$ $f(x) = e^2$ $f'(x) = 0$	$\boxed{3}$ $f(x) = \pi^{15}$ $f'(x) = 0$
$\boxed{4}$ $f(x) = 5x$ $f'(x) = 5$	$\boxed{5}$ $f(x) = x$ $f'(x) = 1$	$\boxed{6}$ $f(x) = x^{10}$ $f'(x) = 10x^9$
$\boxed{7}$ $f(x) = 3x^6$ $f'(x) = 18x^5$	$\boxed{8}$ $f(x) = -2x^{-7}$ $f'(x) = 14x^{-8}$	$\boxed{9}$ $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

مثال $\boxed{10}$: أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = 5x^3 - 4x^2 + 6$

<u>الحل</u>

$$y' = 15x^2 - 8x$$

مثال $\boxed{11}$:

أوجد $\frac{dy}{dt}$ حيث $y = t^3 + 6t^2 - \frac{5}{3}t + 16$

<u>الحل</u>

$$y' = 3t^2 + 12t - \frac{5}{3}$$

مثال $\boxed{12}$:

أوجد $f'(x)$ حيث $f(x)=(x^3-4)^4$

الحل

$$f'(x)=4(x^3-4)^3(3x^2)$$
$$=12x^2(x^3-4)^3$$

مثال $\boxed{13}$:

أوجد $f'(x)$ اذا كان : $f(x)=(2x+1)(3x-2)$

الحل

$$f'(x)=(2)(3x-2)+(2x+1)(3)$$
$$=6x-4+6x+3$$
$$=12x-1$$

مثال $\boxed{14}$:

أوجد $f'(x)$ اذا كان : $f(x)=(x^2+1)(x^3+3)$

الحل

$$f'(x)=(2x)(x^3+3)+(x^2+1)(3x^2)$$
$$=2x^4+6x+3x^4+3x^2$$
$$=5x^4+3x^2+6x$$

مثال 15 : أوجد مشتقة $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{5x^2 + 1}$

الحل

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(5x^2+1) - (x^3-1)(10x)}{(5x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{15x^4 + 3x^2 - (10x^4 - 10x)}{(5x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{15x^4 + 3x^2 - 10x^4 + 10x}{(5x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5x^4 + 3x^2 + 10x}{(5x^2+1)^2}$$

مثال 16 : أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \dfrac{4x^2 + 2x}{2x^3 + 5}$

الحل

$$f'(x) = \frac{(8x+2)(2x^3+5) - (4x^2+2x)(6x^2)}{(2x^3+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{16x^4 + 40x + 4x^3 + 10 - (24x^4 + 12x^3)}{(2x^3+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{16x^4 + 40x + 4x^3 + 10 - 24x^4 - 12x^3}{(2x^3+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-8x^4 - 8x^3 + 40x + 10}{(2x^3+5)^2}$$

مثال $\boxed{17}$:

أوجد $f'(x)$ حيث $f(x)=\frac{-4}{x^2+2x+5}$

الحل

$$f'(x)=\frac{\cancel{(0)(x^2+2x+5)}-(-4)(2x+2)}{(x^2+2x+5)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-(-8x-8)}{(x^2+2x+5)^2}=\frac{8x+8}{(x^2+2x+5)^2}$$

مثال $\boxed{18}$:

لتكن $y=\frac{x^2+3}{2x}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x=1$

الحل

$$y'=\frac{(2x)(2x)-(x^2+3)(2)}{(2x)^2}$$

$$y'=\frac{4x^2-(2x^2+6)}{(2x)^2}=\frac{4x^2-2x^2-6}{(2x)^2}$$

$$y'=\frac{2x^2-6}{(2x)^2}$$

عند $x=1$ $\Leftarrow$

$$y'=\frac{2(1)^2-6}{(2(1))^2}=-1$$

مثال $\boxed{19}$: لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & : x\leq 2 \\ 4x-3 & : x>2 \end{cases}$$

دالة متصلة على مجالها أوجد $f'(x)$ إن أمكن

<u>الحل</u>

$$D_f=R$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & : x<2 \\ \text{نبحث} & : x=2 \\ 4 & : x>2 \end{cases}$$

$$f(2)=(2)^2+1=5$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \quad (\text{إن وجدت})$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+1-5}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}(x+2)$$

$$=2+2=4$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x-3-5}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x-8}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{4\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}4$$

$$=4$$

$$\because f'_+(2)=f'_-(2)=4$$

$$\therefore f'(2)=4$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & : x<2 \\ 4 & : x=2 \\ 4 & : x>2 \end{cases} \qquad D_{f'}=R$$

. مثال $\boxed{20}$: لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & : x\le 1 \\ 2x+1 & : x>1 \end{cases}$$

دالة متصلة على مجالها أوجد $f'(x)$ إن أمكن

الحل

$$D_f=R$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & : x<1 \\ \text{نبحث} & : x=1 \\ 2 & : x>1 \end{cases}$$

$$f(1)=(1)^2+2=3$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+1-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}2=2$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=1+1=2$$

$$\because f'_+(1)=f'_-(1)=2$$

$$\therefore f'(1)=2$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & : x<1 \\ 2 & : x=1 \\ 2 & : x>1 \end{cases} \qquad D_{f'}=R$$

مثال [21] : لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & : x<1 \\ 2\sqrt{x} & : x\geq 1 \end{cases}$$

دالة متصلة على مجالها أوجد $f'(x)$ إن أمكن

الحل

$D_f=R$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & : x<1 \\ \text{تبحث} & : x=1 \\ 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} & : x>1 \end{cases}$$

$$f(1)=2\sqrt{1}=2$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad (\text{إن وجدت})$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}\cdot\frac{2\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+2}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{4x-4}{(x-1)(2\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{4\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(2\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{4}{(2\sqrt{x}+2)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 1^+}4}{\lim_{x\to 1^+}(2\sqrt{x}+2)}=\frac{4}{4}=1$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}(x+1)$$

$$=1+1=2$$

$$\because f'_+(1)\neq f'_-(1)$$

$$\therefore f'(1) \text{ غير موجودة}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & : x<1 \\ \text{غير موجودة} & : x=1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & : x>1 \end{cases}$$

$D_{f'}=R-\{1\}$

* معادلة المماس والناظم *

معادلة

المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

الناظم (العمودي)

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

(x_1, y_1) نقطة معطاة

يبقى m : كيف أحسب m

أشتق الدالة

وأستبدل رمز المشتقة بـ m

وأعوض النقطة فأحصل على قيمة m

مثال [1] : أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1,0)$

الحل

$$f'(x)=\frac{(1)(x+2)-(x-1)(1)}{(x+2)^2}$$

$$m=\frac{(1)(1+2)-(1-1)(1)}{(1+2)^2}$$

$$m=\frac{1}{3}$$

معادلة المماس

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{1}{3}(x-1)$$

$$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$$

معادلة الناظم

$$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{-1}{\frac{1}{3}}(x-1)$$

$$y=-3(x-1)$$

$$y=-3x+3$$

مثال $\boxed{2}$: أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة $(1, \frac{2}{3})$

لمنحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2}$

الحل

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x^2+2)-(x^3+1)(2x)}{(x^2+2)^2}$$

$$m = \frac{(3(1)^2)((1)^2+2)-((1)^3+1)(2(1))}{((1)^2+2)^2}$$

$$m = \frac{5}{9}$$

معادلة المماس

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

$$y-\frac{2}{3} = \frac{5}{9}(x-1)$$

$$y-\frac{2}{3} = \frac{5}{9}x-\frac{5}{9}$$

$$y = \frac{5}{9}x-\frac{5}{9}+\frac{2}{3}$$

$$y = \frac{5}{9}x+\frac{1}{9}$$

معادلة الناظم

$$y-y_1 = \frac{-1}{m}(x-x_1)$$

$$y-\frac{2}{3} = \frac{-1}{\frac{5}{9}}(x-1)$$

$$y-\frac{2}{3} = -\frac{9}{5}(x-1)$$

$$y-\frac{2}{3} = -\frac{9}{5}x+\frac{9}{5}$$

$$y = -\frac{9}{5}x+\frac{9}{5}+\frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{9}{5}x+\frac{37}{15}$$

* مشتقات الدوال المثلثية *

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

طريقة لحفظ المشتقات

$\overrightarrow{\tan x}$	$\sec x$	$\overleftarrow{\sec x}$
$\cot x$	$-\csc x$	$\csc x$

تمارين : أوجد مشتقة الدوال التالية

$\boxed{1}$ $f(x) = \tan x + \cot x$

$f'(x) = \sec^2 x - \csc^2 x$

$\boxed{2}$ $f(x) = \sec x + \csc x$

$f'(x) = \sec x \tan x - \csc x \cot x$

$\boxed{3}$ $f(x) = \sin^5 x$

الحل

$f(x) = (\sin x)^5$

$f'(x) = 5(\sin x)^4 (\cos x)$

$\boxed{4}$ $f(x) = \cos^2 x$

الحل

$f'(x) = 2(\cos x)(-\sin x)$

$= -2 \cos x \sin x$

$\boxed{5}$ $f(x) = x^2 \cdot \sin x$

الحل

$$f'(x) = (2x)(\sin x) + (x^2)(\cos x)$$

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

$\boxed{6}$ $y = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

الحل

$$y' = \frac{(-\sin x)(1-\sin x) - (\cos x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$y' = \frac{-\sin x + \overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^{1}}{(1-\sin x)^2}$$

$$y' = \frac{\cancel{1-\sin x}}{(1-\sin x)^{\cancel{2}}}$$

$$y' = \frac{1}{1-\sin x}$$

$\boxed{7}$ $y = \dfrac{x}{\cos x}$

الحل

$y' = \dfrac{(1)(\cos x) - (x)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$

$y' = \dfrac{\cos x + x\sin x}{(\cos x)^2}$

$\boxed{8}$ $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

الحل

$y' = \dfrac{(\cos x)(\sin x + \cos x) - (\sin x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$

$y' = \dfrac{\cos x \sin x + \cos^2 x - (\sin x \cos x - \sin^2 x)}{(\sin x + \cos x)^2}$

$y' = \dfrac{\cancel{\cos x \sin x} + \cos^2 x - \cancel{\sin x \cos x} + \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$

$y' = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$

$y' = \dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$

• المثالين القادمين يفضل تبسيطها قبل اشتقاقها وذلك لتسهيل عملية الاشتقاق

تذكير بالمتطابقات

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ‖ $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ ‖ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ ‖ $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

$\boxed{9}$ $f(x) = \frac{1+\tan x}{\tan x}$

الحل

تذكير

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$$

$$f(x) = \frac{1}{\tan x} + \frac{\tan x}{\tan x}$$

$$f(x) = \cot x + 1$$

$$f'(x) = -\csc^2 x$$

$\boxed{10}$

$$g(x) = \frac{\sec x}{\csc x}$$

الحل

$$g(x) = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\sin x}}$$

$$g(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$g(x) = \tan x$$

$$g'(x) = \sec^2 x$$

مثال $\boxed{11}$: أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة $y=\tan x$

عند النقطة $p(\frac{\pi}{4},1)$

الحل

$$y'=\sec^2 x$$

$$m=\sec^2\frac{\pi}{4}$$

$$m=2$$

معادلة العمودي: $y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$

$$y-1=\frac{-1}{2}(x-\frac{\pi}{4})$$

$$y-1=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{8}$$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{8}+1$$

مثال $\boxed{12}$: أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $y=\sec x$ عند النقطة $F(\frac{\pi}{3},2)$

الحل

$$y'=\sec x\cdot\tan x$$

$$m=\sec\frac{\pi}{3}\cdot\tan\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$$

معادلة المماس

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-2=2\sqrt{3}(x-\frac{\pi}{3})$$

$$y-2=2\sqrt{3}x-3,62$$

$$y=2\sqrt{3}x-3,62+2$$

$$y=2\sqrt{3}x-1,62$$

* قاعدة السلسلة *

الشكل الأول

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

او

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

الشكل الثاني

يعطي دالتين

$y =$ ، $u =$

ويطلب $\frac{dy}{dx}$

خطوات الحل

① نكتب القانون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

② تنزيل الدالتين

③ اشتقاق الدالتين

④ نضرب نواتج الاشتقاق

⑤ نرد u الى أصلها

مثال $\boxed{1}$: اذا كان

$f(x) = 3x^2+1 \quad , \quad g(x) = x^{10}$

فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة

$\boxed{1}$ $(f \circ g)'(x)$

$\boxed{2}$ $(g \circ f)'(-1)$

الحل

$\boxed{1}$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= f'(x^{10}) \cdot g'(x)$$

تنزيل	$g(x) = x^{10}$	$f(x) = 3x^2+1$
اشتقاق	$g'(x) = 10x^9$	$f'(x) = 6x$
استبدال ←		$f'(x^{10}) = 6x^{10}$

$$(f \circ g)'(x) = (6x^{10}) \cdot (10x^9)$$
$$= 60x^{19}$$

$\boxed{2}$

$$(g \circ f)'(-1) = g'(f(-1)) \cdot f'(-1)$$
$$= g'(4) \cdot f'(-1)$$

تنزيل	$f(x) = 3x^2+1$	$g(x) = x^{10}$
اشتقاق	$f'(x) = 6x$	$g'(x) = 10x^9$
تعويض	$f'(-1) = 6(-1) = -6$	$g'(4) = 10(4)^9 = 2621440$

$$(g \circ f)'(-1) = (2621440)(-6)$$
$$= -15728640$$

مثال $\boxed{2}$: لتكن $g(x)=x^{13}$ ، $f(x)=-2x^3+4$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة

$\boxed{1}$ $(g\circ f)'(0)$

$\boxed{2}$ $(f\circ g)'(x)$

الحل

$\boxed{1}$

$$(g\circ f)'(0) = g'(f(0))\cdot f'(0)$$
$$= g'(4)\cdot f'(0)$$

تنزيل	$f(x)=-2x^3+4$	$g(x)=x^{13}$
اشتقاق	$f'(x)=-6x^2$	$g'(x)=13x^{12}$
تعويض	$f'(0)=-6(0)^2=0$	$g'(4)=13(4)^{12}=218103808$

$$(g\circ f)'(0) = (218103808)(0)$$
$$=0$$

$\boxed{2}$

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$= f'(x^{13})\cdot g'(x)$$

تنزيل	$g(x)=x^{13}$	$f(x)=-2x^3+4$
اشتقاق	$g'(x)=13x^{12}$	$f'(x)=-6x^2$
استبدال	$\longleftarrow$	$f'(x^{13})=-6(x^{13})^2=-6x^{26}$

$$(f\circ g)'(x) = (-6x^{26})(13x^{12})$$
$$=-78x^{38}$$

مثال $\boxed{3}$: لتكن $f(x)=\frac{2x+1}{x}\ (x\neq 0)$, $g(x)=x^2+1$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f\circ g)'(x)$

الحل

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$= f'(x^2+1)\cdot g'(x)$$

تنزيل	$g(x)=x^2+1$	$f(x)=\frac{2x+1}{x}$
اشتقاق	$g'(x)=2x$	$f'(x)=\frac{(2)(x)-(2x+1)(1)}{(x)^2}=\frac{\cancel{2x}-\cancel{2x}-1}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$
استبدال	$\longleftarrow$	$f'(x^2+1)=\frac{-1}{(x^2+1)^2}$

$$(f\circ g)'(x) = \frac{-1}{(x^2+1)^2}\cdot(2x)$$

$$= \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

مثال [4]: لتكن $g(x)=\sqrt{x}$ ، $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f\circ g)'(1)$

الحل

$$(f\circ g)'(1) = f'(g(1))\cdot g'(1)$$
$$= f'(1)\cdot g'(1)$$

تنزيل	$g(x)=\sqrt{x}$	$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$
اشتقاق	$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x)=\dfrac{(2x)(x^2+4)-(x^2-4)(2x)}{(x^2+4)^2}$
تعويض	$g'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}$	$f'(1)=\dfrac{(2(1))((1)^2+4)-((1)^2-4)(2(1))}{((1)^2+4)^2}=\dfrac{16}{25}$

$$(f\circ g)'(1) = \frac{16}{25}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{8}{25}$$

مثـــال $\boxed{5}$: أوجد مشتقة الدالة $f(x)=\sin^3 x$

باستخدام قاعدة السلسلة

__الحل__ بفرض أن

$$g(x)=x^3 \qquad h(x)=\sin x$$

$$(g\circ h)(x)=g(h(x))=g(\sin x)=\sin^3 x=f(x)$$

$$(g\circ h)'(x)=g'(h(x))\cdot h'(x)$$

$$=g'(\sin x)\cdot h'(x)$$

تنزيل	$h(x)=\sin x$	$g(x)=x^3$
اشتقاق	$h'(x)=\cos x$	$g'(x)=3x^2$
استبدال	$\longleftarrow$	$g'(\sin x)=3(\sin x)^2$

$$(g\circ h)'(x)=3(\sin x)^2(\cos x)$$

مثال $\boxed{6}$: لتكن $y = u^2 + 4u - 3$ ، $u = 2x^3 + x$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة السلسلة

<u>الحل</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

تنزيل	$u = 2x^3 + x$	$y = u^2 + 4u - 3$
اشتقاق	$\frac{du}{dx} = 6x^2 + 1$	$\frac{dy}{du} = 2u + 4$

$$\frac{dy}{du} = (2u+4)(6x^2+1)$$

$$= (2(2x^3+x)+4)(6x^2+1)$$

$$= (4x^3+2x+4)(6x^2+1)$$

$$= 24x^5 + 4x^3 + 12x^3 + 2x + 24x^2 + 4$$

$$= 24x^5 + 16x^3 + 24x^2 + 2x + 4$$

مثال $\boxed{7}$: اذا كانت $u = 5x^2 + 2$ ، $y = u^3 - 3u + 1$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة السلسلة

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

تنزيل	$u = 5x^2 + 2$	$y = u^3 - 3u + 1$
اشتقاق	$\frac{du}{dx} = 10x$	$\frac{dy}{du} = (3u^2 - 3)$

$$\frac{dy}{dx} = (3u^2 - 3)(10x)$$

$$= (3(5x^2+2)^2 - 3)(10x)$$

$$= (3(25x^4 + 20x^2 + 4) - 3)(10x)$$

$$= (75x^4 + 60x^2 + 12 - 3)(10x)$$

$$= (75x^4 + 60x^2 + 9)(10x)$$

$$= 750x^5 + 600x^3 + 90x$$

مثال 8 : أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل حيث

$$y = \cos u \quad , \quad u = 6x + 2$$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

تنزيل	$u = 6x+2$	$y = \cos u$
اشتقاق	$\frac{du}{dx} = 6$	$\frac{dy}{du} = -\sin u$

$$\frac{dy}{dx} = (-\sin u)(6)$$

$$= -6 \sin u$$

$$= -6 \sin(6x+2)$$

* دالة القوى *

$$f(x) = (g(x))^n$$

$$f'(x) = n(g(x))^{n-1}(g'(x))$$

تذكير:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$$

مثال $\boxed{1}$: لتكن $y=\sqrt[5]{(x^2+3x+5)^3}$ أوجد y'

الحل

$$y=(x^2+3x+5)^{\frac{3}{5}}$$

$$y'=\frac{3}{5}(x^2+3x+5)^{-\frac{2}{5}}(2x+3)$$

$$y'=\frac{3}{5}\,\frac{(2x+3)}{\sqrt[5]{(x^2+3x+5)^2}}$$

مثال $\boxed{2}$: لتكن $y=\sqrt[4]{(2x^4-3x^2+4)^3}$ أوجد y'

الحل

$$y=(2x^4-3x^2+4)^{\frac{3}{4}}$$

$$y'=\frac{3}{4}(2x^4-3x^2+4)^{-\frac{1}{4}}(8x^3-6x)$$

$$y'=\frac{3}{4}\,\frac{(8x^3-6x)}{\sqrt[4]{(2x^4-3x^2+4)}}$$

مثال $\boxed{3}$: أوجد ميل المماس المنحنى $y=\sin^5 x$

عند $x=\frac{\pi}{3}$

الحل

$$y' = 5(\sin x)^4(\cos x)$$

$$m = 5\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^4\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$m = \frac{45}{32}$$

مثال $\boxed{4}$: بين أن ميل مماس للمنحنى $y=\frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائماً موجب

حيث $x \neq -\frac{1}{2}$

الحل

$$y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$$

معلومة

$(\;)^{زوجي} \geq 0$

$$y = (-2x-1)^{-3}$$

$$y' = -3(-2x-1)^{-4}(-2)$$

$$y' = \frac{-3(-2)}{(-2x-1)^4} = \frac{6}{(-2x-1)^4} > 0$$

* المشتقات ذات الرتب العليا *

الرموز

المشتقة الأولى	$f'(x)\ ,\ y'\ ,\ \dfrac{dy}{dx}$
المشتقة الثانية	$f''(x)\ ,\ y''\ ,\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$
المشتقة الثالثة	$f'''(x)\ ,\ y'''\ ,\ \dfrac{d^3y}{dx^3}$
المشتقة الرابعة	$f^{(4)}(x)\ ,\ y^{(4)}\ ,\ \dfrac{d^4y}{dx^4}$
⋮	⋮ ⋮ ⋮

وهكذا

مثال 1 أوجد المشتقات حتى الرتبة الرابعة للدالة

$$y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$$

الحل

$$y' = 14x^6 - 8x + 3$$

$$y'' = 84x^5 - 8$$

$$y''' = 420x^4$$

$$y^{(4)} = 1680x^3$$

مثال 2 : اذا كانت $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$

فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة

الحل

$$y' = 20x^4 - 15x^2$$

$$y'' = 80x^3 - 30x$$

$$y''' = 240x^2 - 30$$

مثال $\boxed{3}$: اذا كانت $y=\sin x$ بين أن $y^{(4)}=y$

الحل

$$y=\sin x$$
$$y'=\cos x$$
$$y''=-\sin x$$
$$y'''=-\cos x$$
$$y^{(4)}=\sin x=y$$

مثال $\boxed{4}$: لتكن الدالة $y=\cos x$ بين أن $y^{(4)}+y''=0$

الحل

$$y=\cos x$$
$$y'=-\sin x$$
$$y''=-\cos x$$
$$y'''=\sin x$$
$$y^{(4)}=\cos x$$

$$\Longrightarrow \quad y^{(4)}+y''=\cos x-\cos x$$
$$=0$$

مثال $\boxed{5}$: أوجد y'' حيث $y=\frac{1}{\cos x}$

الحل

$$y=\sec x$$

قاعدة الضرب

$$y'=\overset{\text{الأول}}{\sec x}\cdot\overset{\text{الثاني}}{\tan x}$$

$$y''=(\sec x\tan x)(\tan x)+(\sec x)(\sec^2 x)$$

$$y''=\sec x\tan^2 x+\sec^3 x$$

مثال $\boxed{6}$: أوجد y'' حيث $y=\frac{1}{\sin x}$

الحل

$$y=\csc x$$

قاعدة الضرب

$$y'=-\overset{\text{الأول}}{\csc x}\cdot\overset{\text{الثاني}}{\cot x}$$

$$y''=(\csc x\cot x)(\cot x)+(-\csc x)(-\csc^2 x)$$

$$y''=\csc x\cot^2 x+\csc^3 x$$

مثال $\boxed{7}$: اذا كانت $y = x\sin x$

فأثبت أن $y''' + y' + 2\sin x = 0$

الحل

$$y = x \cdot \sin x$$

$$y' = (1)(\sin x) + (x)(\cos x)$$

$$\boxed{y' = \sin x + x\cos x}$$

$$y'' = \cos x + (1)(\cos x) + (x)(-\sin x)$$

$$y'' = \cos x + \cos x - x\sin x$$

$$\boxed{y'' = 2\cos x - x\sin x}$$

$$y''' = -2\sin x - [(1)(\sin x) + (x)(\cos x)]$$

$$y''' = -2\sin x - [\sin x + x\cos x]$$

$$\boxed{y''' = -2\sin x - \sin x - x\cos x}$$

$$y''' + y' + 2\sin x = -2\cancel{\sin x} - \cancel{\sin x} - x\cancel{\cos x} + \cancel{\sin x} + x\cancel{\cos x} + 2\cancel{\sin x}$$

$$= 0$$

مثال 8 : اذا كانت $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

فأثبت أن $4x^2 f''(x) - 3f(x) = 0$

الحل

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{f(x)=x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}}$$

$$4x^2 f''(x)-3f(x)=4x^2\cdot\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}}$$

$$=3x^{-\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}}$$

$$=0$$

* الاشتقاق الضمني *

القاعدة : كل ما أشتق y أعطيها هدية y'

أمثلة

الدالة	$2x$	x	x^3	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$
المشتقة	2	1	$3x^2$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$
الدالة	$2y$	y	y^3	$\sqrt{y}$	$\sin y$	$\cos y$
المشتقة	$2y'$	y'	$3y^2y'$	$\frac{1}{2\sqrt{y}}y'$	$\cos y\, y'$	$-\sin y\, y'$

خطوات الحل :

① نشتق الطرفين

② نفك الأقواس اذا وجدت

③ نضع الحدود التي تحوي y' في الطرف الأول وباقي الحدود في الطرف الثاني

④ نخرج y' عامل مشترك بالشكل $Ay' = B$

⑤ $y' = \frac{B}{A}$

ملاحظة هامة جداً : عندما أرى xy معاً

أطبق قاعدة الضرب

$$(x \cdot y)' = (1)(y) + (x)(y')$$

$$= (y + xy')$$

- نحفظ الناتج وعندما أرى xy أضع الناتج بدل منه

مثال $\boxed{1}$: أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ حيث

$$y^3 + 5y^2 - x^3 = 1$$

الحل

$$3y^2y' + 10yy' - 3x^2 = 0$$

$$3y^2y' + 10yy' = 3x^2$$

$$(3y^2 + 10y)y' = 3x^2$$

$$y' = \frac{3x^2}{(3y^2 + 10y)}$$

مثال $\boxed{2}$: أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ حيث

$$y^2 = x^2 - 2x$$

الحل

$$2yy' = 2x - 2$$

$$(2y)y' = 2x - 2$$

$$y' = \frac{2x - 2}{2y}$$

مثال $\boxed{3}$: أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ حيث

$$y^2 + x \cdot y = 7x$$

<u>الحل</u>

$$2yy' + (y + xy') = 7$$

$$2yy' + y + xy' = 7$$

$$2yy' + xy' = 7 - y$$

$$(2y + x)y' = 7 - y$$

$$y' = \frac{7-y}{2y+x}$$

مثال $\boxed{4}$: أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ حيث $y = x + x^2y^5$

<u>الحل</u> $y' = 1 + (2x)(y^5) + (x^2)(5y^4y')$

$$y' = 1 + 2xy^5 + 5x^2y^4y'$$

$$y' - 5x^2y^4y' = 1 + 2xy^5$$

$$(1 - 5x^2y^4)y' = 1 + 2xy^5$$

$$y' = \frac{1+2xy^5}{1-5x^2y^4}$$

مثال $\boxed{5}$: أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته $x^2+y^2-2xy=1$ حيث $x\neq y$ عند النقطة $(2,1)$

الحل

$$2x+2yy'-2(y+xy')=0$$

$$2x+2yy'-2y-2xy'=0$$

$$2yy'-2xy'=-2x+2y$$

$$(2y-2x)y'=-2x+2y$$

$$y'=\frac{-2x+2y}{2y-2x}$$

$$m=\frac{-2(2)+2(1)}{2(1)-2(2)}=1$$

مثال [6] : أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة

$x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1, 1)$ (x_1, y_1)

الحل

$$2x - 2yy' + (y + xy') - 0 = 0$$

$$2x - 2yy' + y + xy' = 0$$

$$-2yy' + xy' = -2x - y$$

$$(-2y + x)y' = -2x - y$$

$$y' = \frac{-2x - y}{(-2y + x)}$$

$$m = \frac{-2(1) - 1}{-2(1) + 1} = 3$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 3(x - 1)$$

$$y - 1 = 3x - 3$$

$$y = 3x - 3 + 1$$

$$y = 3x - 2$$

مثال $\boxed{7}$: أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$

الحل

$$2y' = 2x + \cos y \; y'$$

$$2y' - \cos y \; y' = 2x$$

$$(2 - \cos y)\, y' = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{2 - \cos y}$$

$$m = \frac{2(2\sqrt{\pi})}{2 - \cos(2\pi)} = 4\sqrt{\pi}$$

مثال $\boxed{8}$: للمنحنى الذي معادلته $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$

أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1,1)$

الحل

$$2yy' + \frac{1}{2\sqrt{y}} y' + 2x = 0$$

$$2yy' + \frac{1}{2\sqrt{y}} y' = -2x$$

$$\left(2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}\right) y' = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}} \Rightarrow m = \frac{-2(1)}{2(1) + \frac{1}{2\sqrt{1}}} = -\frac{4}{5}$$

تمرين 9 : للمنحنى الذي معادلته $2\sqrt{y}+y=x$

أوجد y' ثم أوجد معادلة العمودي لهذا المنحنى عند النقطة $(3,1)$

الحل

$$\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{y}}y'+y'=1$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}y'+y'=1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{y}}+1\right)y'=1$$

$$y'=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{y}}+1\right)}$$

$$m=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1}}+1}=\frac{1}{2}$$

معادلة العمودي

$$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$$

$$y-1=\frac{-1}{\frac{1}{2}}(x-3)$$

$$y-1=-2(x-3)$$

$$y-1=-2x+6$$

$$y=-2x+6+1$$

$$y=-2x+7$$

مثال $\boxed{10}$: إذا كانت $y=\sqrt{1-2x}$

فأثبت أن $yy''+(y')^2=0$

الحل

$y=\sqrt{1-2x}$ نربع الطرفين

$y^2=1-2x$ نشتق

$2yy'=-2$ نقسم الطرفين على 2

$y \cdot y'=-1$ نشتق مرة ثانية

$$(y')(y')+(y)(y'')=0$$

$$(y')^2+yy''=0$$

وهو المطلوب إثباته