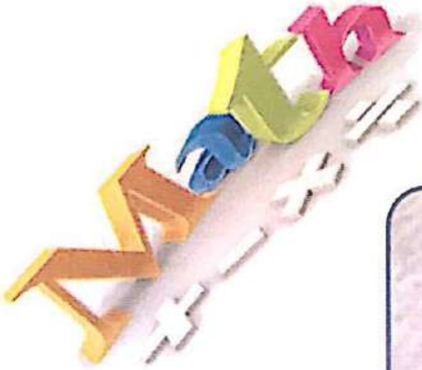
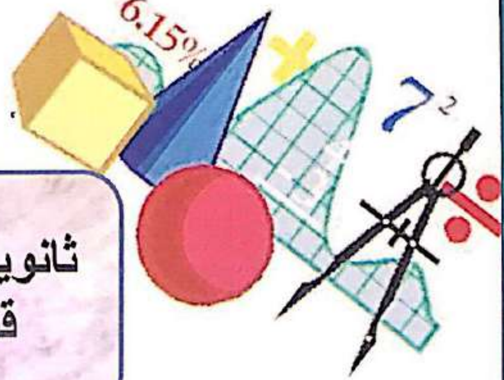
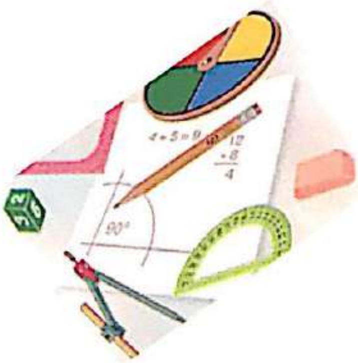
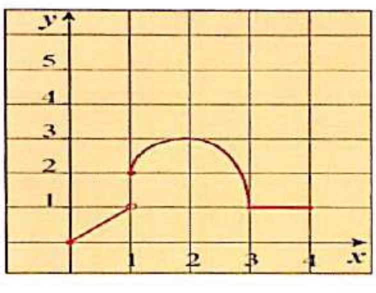




ثانوية سلمان الفارسي
قسم الرياضيات

الصف الثاني عشر علمي
الفصل الدراسي الأول
الوحدة الأولى
الاتـــصـــال





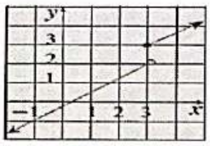
M . ATA

فكرة الحل : اتصال دالة فرعية عند نقطة

الاتصال (5 - 1)

تدريب

(1)

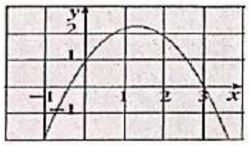


$\lim_{x\to 3} f(x)$ غير موجودة

$f(3) = 3$

ماذا تلاحظ؟ f ليست متصلة

(2)

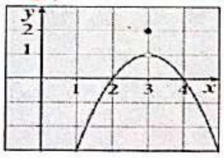


$\lim_{x\to 3} f(x) = 0$

$f(3) = 0$

ماذا تلاحظ؟ f متصلة

(3)

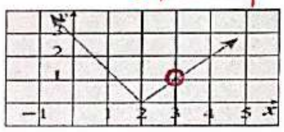


$\lim_{x\to 3} f(x) = 1$

$f(3) = 2$

ماذا تلاحظ؟ f ليست متصلة

(4)



$\lim_{x\to 3} f(x) = 1$

$f(3)$ غير معرفة

ماذا تلاحظ؟ f ليست متصلة

تعريف (8): الاتصال عند نقطة

تكون الدالة f متصلة عند $x = c$ في مجالها إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

من التعريف السابق نجد أنه لتكون f متصلة عند c يجب أن تتوافر الشروط الثلاثة التالية:

1. الدالة f معرّفة عند $x = c$ أي $f(c)$ موجودة.
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أيّ شرط من الشروط السابقة فنقول إن f منفصلة (ليست متصلة) عند $x = c$.

مثال (1)

لتكن f :
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & : x \geq 1 \text{ (يمين)} \\ 5x - 1 & : x < 1 \text{ (يسار)} \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$.

الحل

$f(1) = (1)^2 + 3(1) = 4 \longrightarrow (1)$

اليمين :

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2 + 3x)$

$= (1)^2 + 3(1) = 4$

اليسار :

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (5x - 1)$

$= 5(1) - 1 = 4$

$\because \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 4$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = 4 \longrightarrow (2)$

من (1) ، (2) $\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

$\therefore f$ متصلة عند $x = 1$

حاول أن تحل (1)

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x & : x \le 0 \quad \text{يسار} \\ \dfrac{x^2}{x+1} & : x>0 \quad \text{يمين} \end{cases}$$

ابحث اتصال f عند $x=0$

الحل

$f(0)=(0)^3+0=0 \to ①$

اليمين:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0^+} x^2}{\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)}=\dfrac{0}{1}=0$

نهاية المقام:

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=0+1=1\neq 0$

اليسار:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^3+x)=(0)^3+0=0$

$\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0 \to ②$

من 1 و 2 ينتج أن

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$\therefore f$ متصلة عند $x=0$

مثال (2)

لتكن f:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & : x>3 \quad \text{يمين} \\ 7 & : x\le 3 \quad \text{يسار} \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=3$.

الحل

$f(3)=7 \to ①$

اليمين:

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to 3^+}(x+3)=3+3=6$

اليسار:

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(7)=7$

$\because \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 3} f(x)$ غير موجودة $\to ②$

من 1 و 2 ينتج أن

f ليست متصلة عند $x=3$

حاول أن تحل (2)

2 ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & : x < 2 \quad \text{يسار} \\ 1 & : x = 2 \\ x^2+1 & : x > 2 \quad \text{يمين} \end{cases}$$

الحل

$f(2) = 1 \longrightarrow (1)$

اليمين:

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2+1)$

$= (2)^2 + 1 = 5$

اليسار:

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2x+1)$

$= 2(2) + 1 = 5$

$\therefore \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 5$

$\therefore \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5 \longrightarrow (2)$

من 1، 2 نستنتج أن

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

$\therefore f$ ليست متصلة عند $x = 2$

مثال (3)

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$ حيث

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{|x-2|} & : x\neq 2\\ 1 & : x=2\end{cases}$$

الحل

اعادة تعريف : $\dfrac{x-2}{|x-2|}$

$\dfrac{x-2}{-(x-2)}$ ←—— 2 ——→ $\dfrac{x-2}{x-2}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-2}}=1 & : x>2\\ \dfrac{\cancel{x-2}}{-(\cancel{x-2})}=-1 & : x<2\\ -1 & : x=2\end{cases}$$

$f(2)=-1 \rightarrow (1)$

اليمين : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(1)=1$ || اليسار : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-1)=-1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة $\rightarrow (2)$

من 1 ، 2 ينتج أن

f ليست متصلة عند $x=2$

كل عسير اذااستعنت بالله فهو يسير

حاول أن تحل (2)

ابحث اتصال الدالة f عند $x=-1$ حيث

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x+1}-2x & : x\neq -1\\ 2 & : x=-1\end{cases}$$

الحل

إعادة تعريف : $\dfrac{|x+1|}{x+1}-2x$

$\dfrac{-(x+1)}{x+1}-2x$ ، $\dfrac{(x+1)}{x+1}-2x$ ، -1

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+1)}{x+1}-2x = 1-2x & : x>-1\\ \dfrac{-(x+1)}{x+1}-2x = -1-2x & : x<-1\\ 2 & : x=-1\end{cases}$$

$f(-1)=2 \rightarrow (1)$

اليمين :

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}(1-2x)$

$= 1-2(-1) = 3$

اليسار :

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}(-1-2x)$

$= -1-2(-1) = 1$

$\therefore \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to -1} f(x)$ غير موجودة $\rightarrow (2)$

من 1 ، 2 ينتج أن

f ليست متصلة عند $x=-1$

وفقك الله دائما

في التمرينين (6–9)، ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x = c$:

(8) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x}{|x|} & : x\neq 0\\ -3 & : x=0\end{cases}$, $x=0$

الحل

إعادة تعريف : $\dfrac{x^2-3x}{|x|}$

$\dfrac{x^2-3x}{-x}$ $\dfrac{x^2-3x}{x}$

0

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x}{x}=\dfrac{x(x-3)}{x}=(x-3) & : x>0\\ \dfrac{x^2-3x}{-x}=\dfrac{x(x-3)}{-x}=-(x-3) & : x<0\\ -3 & : x=0\end{cases}$$

$f(0)=-3 \longrightarrow$ (1)

اليمين :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-3)$

$=(0-3)=-3$

اليسار :

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}[-(x-3)]$

$=-(0-3)=3$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة $\longrightarrow$ (2)

من 1 ، 2 ينتج أن

f ليست متصلة عند $x=0$

تعلم ان تكون حليما صبورا

في التمرينين (6–9)، ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x = c$:

(7) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x+1} & : x \neq -1 \\ -1 & : x = -1 \end{cases}$, $x = -1$

الحل

$h(-1) = -1 \longrightarrow 1$

$\lim_{x \to -1} h(x) = \lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x+1}$

$= \lim_{x \to -1} \dfrac{(x-4)(x+1)}{x+1}$

$= \lim_{x \to -1} (x-4)$

$= -1 - 4 = -5 \longrightarrow 2$

من 1، 2 ينتج أن

$\lim_{x \to -1} h(x) \neq h(-1)$

$\therefore$ h ليست متصلة عند $x = -1$

المنافسة الحقيقية بينك وبين نفسك

في التمرينين (6–9)، ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x = c$:

$$(9)\quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & : x = 1 \end{cases} \quad , \quad x = 1$$

الحل

$$g(1) = \frac{1}{2} \longrightarrow (1)$$

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} \times \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}$$

$$= \frac{x^2+3-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 1}(x+1)}{\lim_{x \to 1}\left[\sqrt{x^2+3}+2\right]} = \frac{1+1}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \longrightarrow (2)$$

نهاية ما تحت الجذر :

$$\lim_{x \to 1}(x^2+3) = (1)^2+3 = 4 > 0$$

نهاية الجذر :

$$\lim_{x \to 1}\sqrt{x^2+3} = \sqrt{\lim_{x \to 1}(x^2+3)} = \sqrt{4} = 2$$

نهاية المقام :

$$\lim_{x \to 1}\left[\sqrt{x^2+3}+2\right] = \lim_{x \to 1}\sqrt{x^2+3} + \lim_{x \to 1} 2$$

$$= 2 + 2 = 4 \neq 0$$

من (1) ,(2) ينتج أن

$$\lim_{x \to 1} g(x) = g(1) = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ g متصلة عند $x = 1$

لا تبحث عن الاخطاء بل ابحث عن الصواب

(6 – 1) نظريات الإتصال

نظرية (14): خواصّ الدوالّ المتّصلة

Properties of Continuous Functions

إذا كانت f, g دالتين متّصلتين عند $x = c$، فإنّ الدوال التالية هي دوالّ متّصلة عند $x = c$

الجمع:	① $f+g$	
الطرح:	② $f-g$	
الضرب في ثابت:	③ $k \cdot f$,	$k \in \mathbb{R}$
الضرب:	④ $f \cdot g$	
القسمة:	⑤ $\frac{f}{g}$,	$g(c) \neq 0$

دوال متّصلة — Continuous Functions

1. الدالة f: $f(x) = k$ حيث k ثابت متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
2. الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
3. الدالة الحدودية النسبية $\frac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.
4. الدالة f: $f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
5. الدوال المثلثية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.

ابحث اتصال الدالة f عند العدد المبين

1) $f(x)=5 \qquad ,x=-1$

f دالة ثابتة متصلة عند $x=-1$

2) $f(x)=x^2-3x+2 \qquad ,x=2$

f دالة كثيرة حدود متصلة عند $x=2$

3) $f(x)=|x| \qquad ,x=-3$

f دالة مطلق x متصلة عند $x=-3$

اول النخلة نواة

$4)\ f(x)=\sin x \qquad , x=\frac{\pi}{2}$

f دالة مثلثية متصلة عند $x=\frac{\pi}{2}$

$5)\ f(x)=\frac{3x-2}{x+3} \qquad , x=2$

f دالة حدودية نسبية متصلة عند $x=-2$

(لأن المقام $\neq$ صفر عند $x=-2$)

اتصال الدوال الجذرية عند نقطة

نظرية (15)

ⓐ الدالة الجذرية $y=\sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x=c : c\in\mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب،

ومتصلة عند كل $x=c : c\in\mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1.

ⓑ إذا كانت f دالة متصلة عند $x=c$ وكانت $f(c)>0$

فإن الدالة: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ متصلة عند $x=c$

$6)\ f(x)=\sqrt{x} \qquad , x=3$

f دالة جذرية ($n=2$ زوجي) متصلة عند $x=5\in\mathbb{R}^+$

$7)\ f(x)=\sqrt[3]{x} \qquad , x=-2$

f دالة جذرية ($n=3$ فردي) متصلة عند $x=-2$

$8)\ f(x)=\sqrt{x+3} \qquad , x=-1$

نفرض: $f(x)=\sqrt{g(x)}$

① $g(x)=x+3$

و دالة متصلة عند $x=-1$

② $g(-1)=-1+3=2>0$

من 1 و 2 ينتج أن f دالة متصلة عند $x=-1$

اننا نصنع مصائرنا،اننا نصبح ماتفعله

دراسة اتصال (جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة) دالتين من خلال نظرية (14)

مثال / حاول أن تحل (1)

ابحث اتصال الدالة f عند x = 3

$$f(x)=x^2+4x+3+|x|$$

الحل

نفرض: $f(x) = g(x) + h(x)$

(I) $g(x) = x^2+4x+3$

g دالة كثيرة حدود متصلة عند $x=3$

(II) $h(x) = |x|$

h دالة مطلق x متصلة عند $x=3$

من I و II ينتج

$f(x) = g(x)+h(x)$ متصلة عند $x=3$

نظرية 14

ابحث اتصال الدالة f عند x=-3

$$f(x)=x^2+4x+3-\sqrt[5]{x}$$

الحل

نفرض: $f(x) = g(x) - h(x)$

(I) $g(x) = x^2+4x+3$

g دالة كثيرة حدود متصلة عند $x=-3$

(II) $h(x) = \sqrt[5]{x}$

h دالة جذرية ($n=5$ فردي) متصلة عند $x=-3$

من I و II ينتج أن

$f(x) = g(x) - h(x)$ متصلة عند $x=-3$

نظرية 14

مالم تبداه اليوم لن يكتمل الغد

مثال / حاول أن تحل (3)

ابحث اتصال الدالة f عند x=1

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+9}$$

الحل

بفرض : $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

(I) $g(x) = \sqrt[3]{x}$

g دالة جذرية (n=3 فردي) متصلة عند x=1

(II) $h(x) = x^2+9$

h دالة كثيرة حدود متصلة عند x=1

شرط المقام

(III) $h(1) = (1)^2+9 = 10 \neq 0$

من I ، II ، III ينتج أن

نظرية 14

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ متصلة عند $x=1$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=\frac{\pi}{4}$

$$f(x) = \frac{\tan x}{x+1}$$

الحل

بفرض : $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

(I) $g(x) = \tan x$

g دالة مثلثية متصلة عند $x=\frac{\pi}{4}$

(II) $h(x) = x+1$

h دالة كثيرة حدود متصلة عند $x=\frac{\pi}{4}$

شرط المقام :

(III) $h(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}+1 \neq 0$

من I ، II ، III ينتج أن

نظرية 14

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ متصلة عند $x=\frac{\pi}{4}$

ابحث اتصال الدالة f عند x=-2

$$f(x) = \sqrt{x^2-3}+|x|$$

الحل

بفرض : $f(x) = g(x)+h(x)$

(I) $g(x) = \sqrt{x^2-3}$

بفرض أن $g(x) = \sqrt{a(x)}$

(1) $a(x) = x^2-3$

a دالة متصلة عند $x=-2$

(2) $a(-2) = (-2)^2-3 = 1 > 0$

من 1 ، 2 ينتج أن

g متصلة عند $x=-2$

(II) $h(x) = |x|$

h دالة مطلق x متصلة عند $x=-2$

من I ، II ينتج أن

$f(x) = g(x)+h(x)$ متصلة عند $x=-2$

الفشل ليس عند الخسارة الفشل عند الانسحاب

مثال (4)

الدالتان g ، f معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 - 1$ ، $f(x) = 1 + x$ أوجد:

ⓐ $(g \circ f)(x)$ ⓑ $(g \circ f)(2)$ ⓒ $(f \circ g)(x)$ ⓓ $(f \circ g)(2)$

حاول أن تحل

4 إذا كانت g ، f معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 3$ ، $f(x) = 2x + 3$ أوجد:

ⓐ $(g \circ f)(x)$ ⓑ $(g \circ f)(-1)$ ⓒ $(f \circ g)(x)$ ⓓ $(f \circ g)(-1)$

ⓐ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+3) = (2x+3)^2 + 3$
$= 4x^2 + 12x + 9 + 3 = 4x^2 + 12x + 12$

ⓑ $(g \circ f)(-1) = 4(-1)^2 + 12(-1) + 12 = 4$

ⓒ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+3) = 2(x^2+3) + 3$
$= 2x^2 + 6 + 3 = 2x^2 + 9$

ⓓ $(f \circ g)(-1) = 2(-1)^2 + 9 = 11$

الطموح هو الوقود للوصول الي النجاح

مثال (5)

لتكن: $g(x) = x^4 + 2$ ، $f(x) = \sqrt{x}$

أوجد:

ⓐ $(f \circ g)(x)$ ⓑ $(f \circ g)(0)$ ⓒ $(g \circ f)(x)$ ⓓ $(g \circ f)(0)$

حاول أن تحل

(5) لتكن: $g(x) = \frac{3}{x^2+4}$ ، $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ أوجد:

ⓐ $(f \circ g)(x)$ ⓑ $(g \circ f)(\sqrt{3})$

ⓐ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{3}{x^2+4}\right) = \sqrt{1+\left(\frac{3}{x^2+4}\right)^2}$

ⓑ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{3}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2+4} = \frac{3}{x^2+5}$

$(g \circ f)(\sqrt{3}) = \frac{3}{(\sqrt{3})^2+5} = \frac{3}{8}$

اذا لم تجد طريق اصنع واحدا

فكرة الحل: بحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = c$

نظرية (16): اتصال الدوال المركّبة

إذا كانت f متصلة عند c ، و g متصلة عند $f(c)$ فإن الدالّة المركّبة $g \circ f$ متصلة عند c.

مثال (6) لتكن: $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \sqrt{x}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

الحل

$f(x) = x^2+5$ (I) دراسة اتصال f عند $x=-2$

f دالة متصلة عند $x=-2$

$f(-2) = (-2)^2+5 = 9$ (II) ايجاد $f(-2)$

$g(x) = \sqrt{x}$ (III) دراسة اتصال g عند $f(-2)$

g دالة متصلة عند $x = 9 \in R^+$

من I ، II ، III نجد أن

$g \circ f$ متصلة عند $x = -2$

كراسة التمارين (9) لتكن: $f(x) = 2x^2 - 3$ ، $g(x) = \sqrt{x+4}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$.

الحل

(I) $f(x) = 2x^2 - 3$

f دالة متصلة عند $x=-2$

(II) $f(-2) = 2(-2)^2 - 3 = 5$

(III) $g(x) = \sqrt{x+4}$

نفرض: $g(x) = \sqrt{a(x)}$

(1) $a(x) = x + 4$

a دالة متصلة عند $x = 5$

(2) $a(5) = 5 + 4 = 9 > 0$

من 1 ، 2 ينتج

g متصلة عند $x = 5$

من I ، II ، III ينتج أن

$g \circ f$ متصلة عند $x=-2$

يتبع

اليأس ليس من شيم الابطال

حاول أن تحل (6)

لتكن: $g(x)=2x+3$, $f(x)=\frac{|x|}{x+2}$. ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x=1$

الحل

(I) $g(x)=2x+3$

g دالة متصلة عند $x=1$

(II) $g(1)=2(1)+3=5$

(III) $f(x)=\frac{|x|}{x+2}$

بفرض: $f(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

(1) $f_1(x)=|x|$

f_1 دالة مطلق x متصلة عند $x=5$

(2) $f_2(x)=x+2$

f_2 دالة متصلة عند $x=5$

شرط المقام:

(3) $f_2(5)=5+2=7\neq 0$

من 1، 2، 3 ينتج أن

$f(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ متصلة عند $x=5$

من I، II، III ينتج أن

$f\circ g$ متصلة عند $x=1$

ثق في نفسك

فكرة الحل: نبحث اتصال مطلق عند $x=c$

مثال (6)

لتكن: $f(x)=|x^2-5x+6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$

الحل

نفرض: $f_1(x)=x^2-5x+6$ و $f_2(x)=|x|$

$\therefore f(x)=(f_2\circ f_1)(x)$

① $f_1(x)=x^2-5x+6$

f_1 دالة متصلة عند $x=2$

② $f_1(2)=(2)^2-5(2)+6=\underline{\underline{0}}$

③ $f_2(x)=|x|$

f_2 دالة متصلة عند $x=\underline{\underline{0}}$

من 1 ، 2 ، 3 ينتج أن

$f(x)=(f_2\circ f_1)(x)$ متصلة عند $x=2$

حاول أن تحل (6)

لتكن: $f(x)=|x^2-3x+2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=0$

الحل

نفرض: $f_1(x)=x^2-3x+2$ و $f_2(x)=|x|$

$\therefore f(x)=(f_2\circ f_1)(x)$

① $f_1(x)=x^2-3x+2$

f_1 دالة متصلة عند $x=0$

② $f_1(0)=(0)^2-3(0)+2=\underline{\underline{2}}$

③ $f_2(x)=|x|$

f_2 دالة متصلة عند $x=\underline{\underline{2}}$

من 1 ، 2 ، 3 ينتج أن

$f(x)=(f_2\circ f_1)(x)$ متصلة عند $x=0$

انت قادر ان تفعلها

(10) ابحث اتصال الدالة f : $f(x) = \left|\sqrt{x} - 3\right|$ عند $x = 4$

الحل

بفرض : $f_1(x) = \sqrt{x} - 3$ ، $f_2(x) = |x|$

$\therefore f(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$

(I) $f_1(x) = \sqrt{x} - 3$

بفرض : $f_1(x) = g(x) - h(x)$

① $g(x) = \sqrt{x}$
g دالة متصلة عند $x = 4 \in R^+$
دالة جذرية ($n = 2$ زوجي)

② $h(x) = -3$
h دالة متصلة عند $x = 4$
دالة ثابتة

من 1 ، 2 ينتج أن

$f_1(x) = g(x) - h(x)$ متصلة عند $x = 4$

(II) $f_1(4) = \sqrt{4} - 3 = -1$

(III) $f_2(x) = |x|$
f_2 دالة متصلة عند $x = -1$

من I ، II ، III ينتج أن

$f(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$ متصلة عند $x = 4$

حقق حلمك وحلم من احبوك

(11) ابحث اتصال الدالة g : $g(x)=\sqrt{x^2+1}-|x-3|$ عند $x=3$.

الحل

بفرض أن : $g(x)=h(x)-f(x)$

(I) $h(x)=\sqrt{x^2+1}$

بفرض : $h(x)=\sqrt{a(x)}$

① $a(x)=x^2+1$

a دالة متصلة عند $x=3$

② $a(3)=(3)^2+1=10>0$

من 1 ، 2 ينتج أن

الدالة h متصلة عند $x=3$

(II) $f(x)=|x-3|$

بفرض :

$f_2(x)=|x|$ و $f_1(x)=x-3$

$\therefore f(x)=(f_2\circ f_1)(x)$

① $f_1(x)=x-3$

f_1 دالة متصلة عند $x=3$

② $f_1(3)=3-3=0$

③ $f_2(x)=|x|$

f_2 دالة متصلة عند $x=0$

من 1 ، 2 ، 3 ينتج

f متصلة عند $x=3$

$\therefore$ من I ، II ينتج

$g(x)=h(x)-f(x)$ متصلة عند $x=3$

حاول ثم حاول لكي تحقق هدفك

(7 – 1) الإتصال على فترة

الاتّصال على فترة — Continuity on an Interval

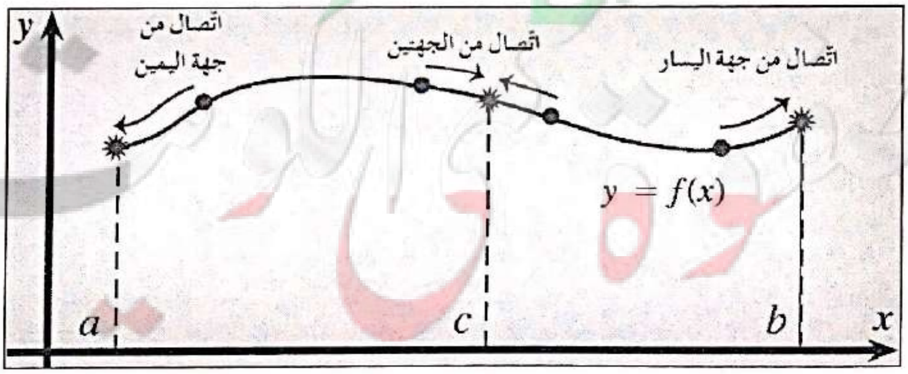
تعريف (9) الاتّصال على فترة مفتوحة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة (a , b) فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a , b) إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة (a , b)

تعريف (10) الاتّصال على فترة مغلقة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $[a, b]$ فإنّنا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1. الدالة f متّصلة على الفترة المفتوحة (a, b)
2. الدالة f متّصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
3. الدالة f متّصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$



الاتصال عند النقاط a, b, c للدالة $y = f(x)$ والمتصلة على الفترة $[a, b]$.

ملاحظات:

أوّلًا: إذا تحقق الشرطان 2 , 1 من التعريف (10) نقول إن الدالة f متصلة على $[a , b)$.

ثانيًا: إذا تحقق الشرطان 3 , 1 من التعريف (10) نقول إن الدالة f متصلة على $(a , b]$.

ثالثًا: تبقى النظرية (14) صحيحة إذا استبدلنا النقطة بفترة بحيث تكون هذه الفترة مجموعة جزئية من مجال الدالة.

رابعًا: إذا كانت الدالة متصلة على فترة ما فإنها متصلة على أي فترة جزئية منها.

خامسًا: إذا كانت الدالة متصلة على كل من الفترتين $[c , b]$, $[a , c]$ فإن الدالة متصلة على $[a , b]$.

سادسًا: يبقى التعريف (10) صحيحًا في حالة الفترات على الصورة $[a , \infty)$, $(-\infty , b]$.

مثال (1) ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبينة :

$$a)\ f(x)=\frac{x}{x^2+1},\quad [-1,5]$$

الحل

$\because$ f دالة حدودية نسبية ، $x^2+1\neq 0$

$\therefore$ f متصلة على R

$\therefore$ f متصلة على $[-1,5]$ ⟵ $[-1,5]\subseteq R$

$$b)\ f(x)=\frac{x}{x^2-4},\quad [0,5]$$

الحل

$\because$ f دالة حدودية نسبية متصلة $\forall x\in R-\{-2,2\}$

$\therefore$ الدالة f متصلة $\forall x\in[0,5]-\{2\}$

$\therefore$ الدالة f متصلة على كل من $[0,2)$ ، $(2,5]$

حاول أن تحل (1)

$$a)\ f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2},\quad [0,3]$$

الحل

$\because$ f دالة حدودية نسبية ، $x^2+2\neq 0$

$\therefore$ f متصلة على R

$\therefore$ f متصلة على $[0,3]$

$$b)\ f(x)=\frac{x}{x^2-1},\quad [0,2]$$

$\because$ f دالة حدودية نسبية متصلة $\forall x\in R-\{-1,1\}$

$\therefore$ الدالة f متصلة $\forall x\in[0,2]-\{1\}$

$\therefore$ الدالة f متصلة على كل من $[0,1)$ ، $(1,2]$

دراسة اتصال f على $[a,b]$

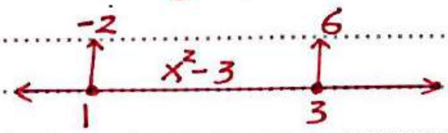
① دراسة اتصال f على (a,b)
② دراسة اتصال f عند $x=a$ من اليمين
③ دراسة اتصال f عند $x=b$ من اليسار

مثال (2)

ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}-2 & : x=1\\ x^2-3 & : 1<x<3\\ 6 & : x=3\end{cases}$$

الحل



نفرض: $g(x)=x^2-3$

g دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\because g(x)=f(x) \quad \forall x\in(1,3)$

$\therefore$ f متصلة على $(1,3)$ $\leftarrow$ I

دراسة اتصال f عند $x=1$ من اليمين

① $f(1)=-2$

② $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x^2-3)$

$=(1)^2-3=-2$

من 1، 2 نستنتج أن

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)$

$\therefore$ f متصلة عند $x=1$ من اليمين

II

دراسة اتصال f عند $x=3$ من اليسار

① $f(3)=6$

② $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}(x^2-3)$

$=(3)^2-3=6$

من 1، 2 نستنتج أن

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=f(3)$

$\therefore$ f متصلة عند $x=3$ من اليسار

III

من I، II، III نستنتج

f متصلة على $[1,3]$

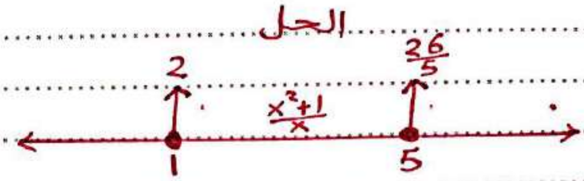
الخطا يسبق الصواب والفشل يسبق النجاح

حاول أن تحل (2)

ادرس اتصال الدالة f على $[1,5]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & : \ x=1 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & : \ 1<x<5 \\ \dfrac{26}{5} & : \ x=5 \end{cases}$$

الحل



نفرض : $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

g دالة حدودية نسبية متصلة لكل $x\in R-\{0\}$

$g(x)=f(x) \quad \forall x\in(1,5)$

$\therefore f$ متصلة على $(1,5)$ $\longleftarrow$ I

دراسة اتصال f عند $x=1$ من اليمين

① $f(1)=2$

② $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$

نهاية المقام : $\lim\limits_{x\to1^+} x=1\neq0$

$=\dfrac{1+1}{1}=2$

من 1 ، 2 ينتج أن

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)$

$\therefore f$ متصلة عند $x=1$ من اليمين II

دراسة اتصال f عند $x=5$ من اليسار

① $f(5)=\dfrac{26}{5}$

② $\lim\limits_{x\to5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to5^-}\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$

نهاية المقام : $\lim\limits_{x\to5^-} x=5\neq0$

$=\dfrac{(5)^2+1}{5}=\dfrac{26}{5}$

من 1 ، 2 ينتج

$\lim\limits_{x\to5^-} f(x)=f(5)$

$\therefore f$ متصلة عند $x=5$ من اليسار III

من I ، II ، III ينتج

f متصلة على $[1,5]$

ان الله لا يغير مابقوم حتي يغيروا ما بانفسهم

① دراسة اتصال f على الفترة الأولى
② دراسة اتصال f على الفترة الثانية
③ دراسة اتصال f عند النقطة الفصلية من الجهة المفتوحة

دراسة اتصال f على مجالها

مثال (3) ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\le -1 \ \text{(يسار)} \\ \dfrac{4}{x+3} & : \quad x > -1 \ \text{(يمين)} \end{cases}$$

الحل

$-\infty \xleftarrow{x+3} -1 \xrightarrow{\frac{4}{x+3}} \infty$

المجال: $D_f = (-\infty,-1] \cup (-1,\infty) = R$

نفرض: $g(x)=\dfrac{4}{x+3}$

و الة حدودية نسبية متصلة لكل $x\in R-\{-3\}$

$\therefore g(x)=f(x) \quad \forall x\in(-1,\infty)$

$\therefore f$ متصلة على $(-1,\infty)$ ← I

نفرض: $h(x)=x+3$

h دالة كثيرة حدود متصلة على R

$\therefore h(x)=g(x) \quad \forall x\in(-\infty,-1]$

$\therefore f$ متصلة على $(-\infty,-1]$ ← II

دراسة اتصال f عند $x=-1$ من اليمين

① $f(-1)=(-1)+3=2$

② $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(\dfrac{4}{x+3}\right)=\dfrac{4}{-1+3}=2$

نهاية المقام: $\lim\limits_{x\to -1^+}(x+3)=-1+3=2\neq 0$

من 1، 2 نستنتج أن

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$

$\therefore f$ متصلة عند $x=-1$ من اليمين ← III

من I، II، III نستنتج

f متصلة على مجالها R

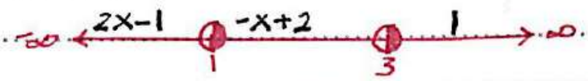
لكل نجاح بداية ولكل فشل نهاية

لتكن f :

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & , \quad x<1\\ -x+2 & , \quad 1\le x<3\\ 1 & , \quad x\ge 3\end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f على مجالها.

الحل



المجال: $D_f = (-\infty,1) \cup [1,3) \cup [3,\infty) = \mathbb{R}$

نفرض: $K(x)=1$
K دالة ثابتة متصلة على $\mathbb{R}$
$\therefore K(x)=f(x) \quad \forall x\in[3,\infty)$
$\therefore$ f متصلة على $[3,\infty)$
III

نفرض: $h(x)=-x+2$
h دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$
$\therefore h(x)=f(x) \quad \forall x\in[1,3)$
$\therefore$ f متصلة على $[1,3)$
II

نفرض: $g(x)=2x-1$
g دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$
$\therefore g(x)=f(x) \quad \forall x\in(-\infty,1)$
$\therefore$ f متصلة على $(-\infty,1)$
I

دراسة اتصال f عند $x=3$ من اليسار
(1) $f(3)=1$
(2) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(-x+2) = -(3)+2 = -1$
من 1، 2 نستنتج أن
$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \neq f(3)$
$\therefore$ f ليست متصلة عند $x=3$ من اليسار
IV

دراسة اتصال f عند $x=1$ من اليسار
(1) $f(1) = -(1)+2 = 1$
(2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2x-1) = 2(1)-1 = 1$
من 1، 2 نستنتج أن
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$
$\therefore$ f متصلة عند $x=1$ من اليسار
V

من I، II، III، IV، V نستنتج أن
f متصلة على كل من الفترات $[3,\infty)$، $(-\infty,3)$
وليست متصلة عند $x=3$

لن تسقط السماء ذهبا فلا تنتظر

فكرة الحل: ايجاد قيمة b و a

مثال (4)

لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a & : \quad x<0 \\ 2 & : \quad x=0 \\ ax+b & : \quad x>0 \end{cases}$$ متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

أوجد قيمة الثابتين a , b

الحل

$\because$ f متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة عند $x=0$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} (ax+b) = 2$$

$$a(0)+b=2$$

$$\boxed{b=2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} (x^2-a) = 2$$

$$(0)^2-a=2$$

$$\boxed{a=-2}$$

احسن استغلال وقتك

فكرة الحل : ايجاد قيمة a و b

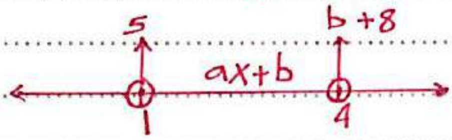
حاول أن تحل

4 لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}5 & : \quad x=1\\ ax+b & : \quad 1<x<4\\ b+8 & : \quad x=4\end{cases}$$

متصلة على $[1,4]$. أوجد قيم الثابتين $a\,,\,b$

الحل



$\because$ f متصلة على $[1,4]$

$\because$ f متصلة عند $x=1$ من اليمين

$\therefore \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1)$

$\lim\limits_{x\to1^+}(ax+b) = 5$

$a(1)+b=5$

$a+b=5$

$2+b=5$

$\boxed{b=3}$

$\because$ f متصلة عند $x=4$ من اليسار

$\therefore \lim\limits_{x\to4^-} f(x) = f(4)$

$\lim\limits_{x\to4^-}(ax+b) = b+8$

$a(4)+\cancel{b}=\cancel{b}+8$

$\frac{4a}{4}=\frac{8}{4}$

$\boxed{a=2}$

بالتعويض

الصعب ليس في الوصول الي القمة الصعب في الحفاظ عليها

فكرة الحل: دراسة اتصال دالة جذر تربيعي على فترة

مثال (6)

لتكن f : $f(x)=\sqrt{9-x^2}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[-3,3]$.

الحل

نفرض: $f(x)=\sqrt{g(x)}$

الاتصال	المجال
① $g(x)\geq 0 \quad \forall x\in[-3,3]$	$9-x^2\geq 0$
② $g(x)=9-x^2$	المعادلة المناظرة: $9-x^2=0$
g دالة متصلة على $[-3,3]$	الأصفار: $x_1=3$ أو $x_2=-3$
من 1 و 2 نستنتج أن	$- - - [+ + + + +] - - -$ (-3 ، 3)
f دالة متصلة $[-3,3]$	$D_f=[-3,3]$
	$\therefore [-3,3]\subseteq D_f$

حاول أن تحل (6)

لتكن f : $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$.

الحل

نفرض: $f(x)=\sqrt{g(x)}$

الاتصال	المجال
① $g(x)\geq 0 \quad \forall x\in[1,3]$	$-x^2+4x-3\geq 0$
② $g(x)=-x^2+4x-3$	المعادلة المناظرة: $-x^2+4x-3=0$
$\therefore g$ دالة متصلة على $[1,3]$	الأصفار: $x_1=1$ و $x_2=3$
من 1 و 2 نستنتج أن	$- - - - [+ + + + +] - - - -$ (1 ، 3)
f متصلة على $[1,3]$	$D_f=[1,3]$
	$\therefore [1,3]\subseteq D_f$

العلم هو الخير والجهل هو الشر

تعميم:

إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما، $g(x) \geqslant 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة.

مثال (5)

لتكن f: $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5,0]$.

الحل

نفرض: $f(x)=\sqrt{g(x)}$

المجال

$x^2-2x \geqslant 0$

المعادلة المناظرة: $x^2-2x=0$

الأصفار: $x_1=2$ أو $x_2=0$

$-5 \quad [+++++] \quad 0 \quad --- \quad 2 \quad +++$

$D_f=(-\infty,0]\cup[2,\infty)$

$=\mathbb{R}-(0,2)$

$\therefore [-5,0]\subseteq D_f$

الاتصال

① $g(x)\geqslant 0 \quad \forall x\in[-5,0]$

② $g(x)=x^2-2x$

g دالة متصلة على $[-5,0]$

من 1، 2 ينتج أن:

f متصلة على $[-5,0]$

حاول أن تحل (5)

لتكن f: $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6,10]$.

الحل

نفرض: $f(x)=\sqrt{g(x)}$

المجال

$x^2-7x+10\geqslant 0$

المعادلة المناظرة: $x^2-7x+10=0$

الأصفار: $x_1=5$ أو $x_2=2$

$+++ \quad 2 \quad ---- \quad 5 \quad + \quad 6 \quad [+++] \quad 10$

$D_f=(-\infty,2]\cup[5,\infty)=\mathbb{R}-(2,5)$

$\therefore [6,10]\subseteq D_f$

الاتصال

① $g(x)\geqslant 0 \quad \forall x\in[6,10]$

② $g(x)=x^2-7x+10$

g دالة متصلة على $[6,10]$

من 1، 2 ينتج أن

f متصلة على $[6,10]$

من لم يتعلم في صغره لم يتقدم في كبره

فكرة الحل: دراسة اتصال دالة جذر تكعيبي على R

ملاحظة:

ناتج تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$ هو دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

مثال (7)

لتكن: $f(x) = \sqrt[3]{\underbrace{x^2 - 5x + 4}_{f_1}}$. ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

الحل

نفرض: $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$ و $f_1(x) = x^2 - 5x + 4$

$(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(x^2 - 5x + 4) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4} = f(x)$

$\because$ f_1 دالة متصلة على R

$\because$ f_2 دالة متصلة على R

$\therefore$ f دالة متصلة على R

السبب: حاصل تركيب دالتين كل منهما متصلة على R هو دالة متصلة على R

حاول أن تحل (7)

لتكن: $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$.

ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

الحل

نفرض: $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$ و $f_1(x) = -x^2 + 2x + 5$

$(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(-x^2 + 2x + 5) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5} = f(x)$

$\because$ f_1 دالة متصلة على R

$\because$ f_2 دالة متصلة على R

$\therefore$ f دالة متصلة على R

السبب: حاصل تركيب دالتين كل منهما متصلة على R هو دالة متصلة على R

نطمح
نحلم
نتامل
نحاول
نجتهد
ننجح
ننال
المستحيل