الوحدة الرابعة

تطابق وتشابه المثلثات

Congruency and Similarity of Triangles

الفنون الجميلة

Fine Art

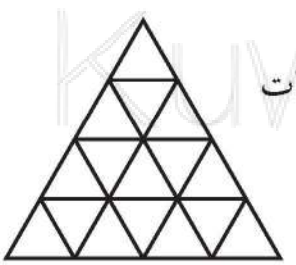
مشروع الوحدة :

(الفنان الصغير)

الفنون الجميلة هي أحد وأهمّ أنواع الفنون ، حيث تصف موهبة الإنسان ومقدرته على التعبير عن مكنونات نفسه وعقله وتجسيدها ، ليترجم بذلك جميع أحاسيسه وخواطره على شكل رسومات أو منحوتات أو أشعار أو أعمال يدوية وغيرها الكثير . وأغلب الفنّانين يستخدمون هندسة المثلّث في أعمالهم الفنّية .

خطة العمل :

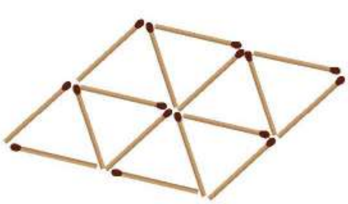
- رسم لوحة فنّية من الفسيفساء باستخدام نوع محدّد من المثلّثات .



خطوات تنفيذ المشروع :

باستخدام الأدوات الهندسية ، اصنع لوحة من الفسيفساء توظّف فيها المثلّثات التالية ومثلّثات من اختيارك (احرص على استخدام مثلّثات متطابقة أكثر)

- ارسم مثلّثًا فيه طول ضلعين وزاوية (٥ سم ، ٣ سم ، وقياس الزاوية المحدّدة بهما ١٢٠°)
- ارسم مثلّثًا متطابق الأضلاع طول ضلعه ٦ سم .
- ارسم مثلّثًا بمعلومية زاويتين وضلع واصل (٤٠° ، ٦٠° والضلع الواصل بينهما طوله ٧ سم)
- لوّن المثلّثات بطريقة مميّزة للحصول على لوحة مميّزة .



علاقات وتواصل :

- كلّ مجموعة تعرض لوحتها .
- تتبادل المجموعات اللّوحات للاطّلاع عليها .

عرض العمل :

- تعرض كلّ مجموعة اللّوحة الفنّية .
- تحدّد عدد المثلّثات المتطابقة المستخدمة .

مخطَّط تنظيمي للوحدة الرابعة

- **تطابق وتشابه المثلثات**
  - **التطابق**
    - تطابق مثلّثين بثلاثة أضلاع
    - تطابق مثلّثين بضلعين وزاوية بينهما
    - تطابق مثلّثين بزاويتين وضلع واصل بينهما
    - تطابق مثلّثين قائمين
    - تطبيقات على التطابق
  - **التشابه**
    - تشابه المثلّثات
    - تشابه مثلّثين بتطابق زاويتين
    - تشابه مثلّثين بتناسب أطوال الأضلاع
    - تشابه مثلّثين بزاوية وتناسب طولي الضلعين المحددين لها
    - تطبيقات على التشابه

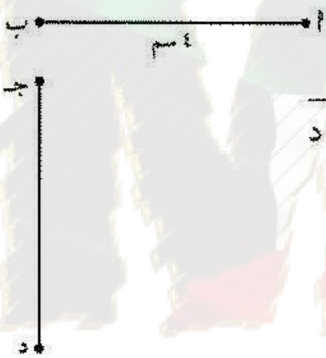
٤-١ التطابق
Congruency

سوف تتعلّم: تطابق قطعتين مستقيمتين ، زاويتين ، مثلّثين .

تطابق قطعتين مستقيمتين

نشاط (١) :

استعن بالورق الشفاف لتتحقّق من تطابق القطعتين أب ، جـد ثمّ أكمل ما يلي :



حاول مطابقة أب على جـد بحيث

أ تنطبق على ......جـ...... ، ب تنطبق على ......د......

إذًا أب تطابق جـد . ونرمز إلى ذلك بالرمز أب ≅ جـد

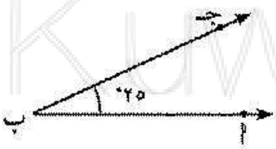
> العبارات والمفردات :
> التطابق
> **Congruency**
> رمز التطابق ≅
> **Congruency sign ≅**

> ملاحظة :
> - إذا كان :
> أب ≅ جـد تعني
> أب = جـد .
> - إذا كان :
> أ̂ ≅ ب̂ تعني
> ق(أ̂) = ق(ب̂) .

تطابق زاويتين

نشاط (٢) :

استعن بالورق الشفاف لتتحقّق من تطابق أب̂جـ ، وهـ̂د



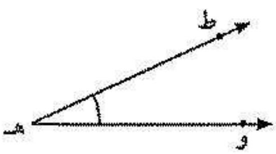
حاول مطابقة أب̂جـ مع وهـ̂د ثمّ أكمل ما يلي :

بحيث: تنطبق نقطة ب على نقطة ......هـ......

ب أ ≅ ......هـو......

ب جـ ≅ ......هـط......

إذًا أب̂جـ ≅ ......وهـ̂ط......



فكّر وناقش

١ متى تتطابق قطعتان مستقيمتان ؟

٢ متى تتطابق زاويتان ؟

تطابق مثلّثين

نشاط (٣) :

إِستعِن بالورق الشفّاف لتتحقق من تطابق المثلّثين ك ل م ، ح ى ط ، ثمّ أكمِل :

Δ ك ل م ≅ Δ ح ى ط

ك ل ≅ ح ى

ل م ≅ ى ط

ك م ≅ ح ط

ك̂ ≅ ح̂

ل̂ ≅ ى̂

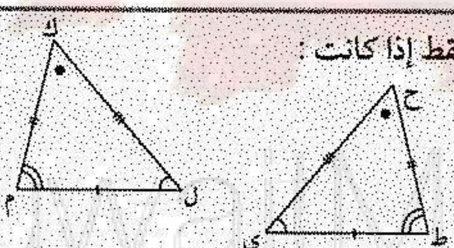
م̂ ≅ ط̂

> **تذكر أنّ :** نراعي ترتيب الرموز عند كتابة عبارة التطابق .

إذاً لأي مثلّثين :

المثلّث ك ل م ≅ المثلّث ح ى ط إذا وفقط إذا كانت :

1. أضلاعهما المتناظرة متطابقة .
2. زواياهما المتناظرة متطابقة .

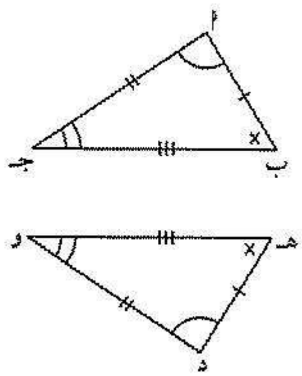


> **تذكّر أنّ :** للمثلّث ستة عناصر ، ثلاثة أضلاع ، ثلاث زوايا .

تدرّب (١) :

في الشكل المقابل Δ أ ب جـ ، Δ د هـ و .

أكمِل ما يلي حسب الشروط المعطاة بالرسم :

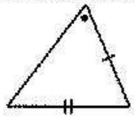
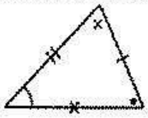
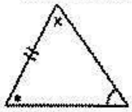
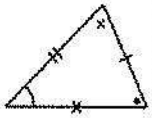
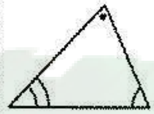
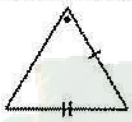
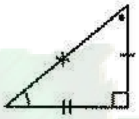
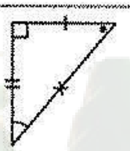


أ) أ̂ ≅ د̂	ب) هـ̂ ≅ ب̂
جـ) جـ̂ ≅ و̂	د) د هـ ≅ أ ب
هـ) ب جـ ≅ هـ و	و) أ جـ ≅ د و

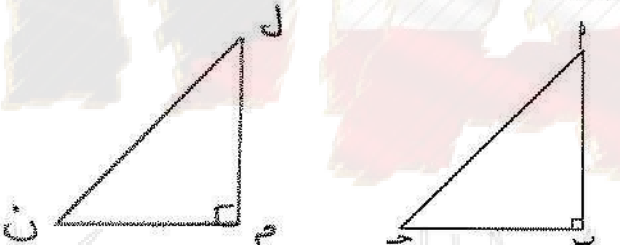
نستنتج أنّ : المثلّث أ ب جـ ≅ د هـ و

تمـــرّن :

١ في الجدول التالي حدّد المثلّثين المتطابقين :

المثلّث / المجموعة	أ	ب	جـ	د	المثلّثان المتطابقان
١					ب ، د
٢					جـ ، د

٢ في الشكل المقابل Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب
باستخدام الورق الشفاف ارسم Δ ل م ن المتطابقة مع Δ أ ب جـ
ثمّ حدّد العناصر المتطابقة فيهما.



ب̂ ≅ م̂ ، أ̂ ≅ ل̂ ، جـ̂ ≅ ن̂

$\overline{\text{أب}}$ ≅ $\overline{\text{لم}}$ ، $\overline{\text{بجـ}}$ ≅ $\overline{\text{من}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ ≅ $\overline{\text{لن}}$

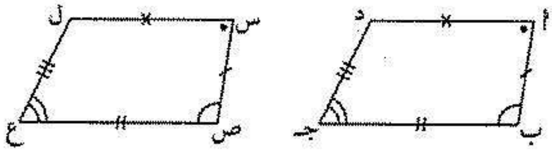
Δ أبجـ ≅ Δ لمن

٣ إذا كان Δ أ ب جـ ≅ Δ س ص ع ، فحدّد العناصر المتطابقة فيهما .

أ̂ ≅ س̂ ، ب̂ ≅ ص̂ ، جـ̂ ≅ ع̂

$\overline{\text{أب}}$ ≅ $\overline{\text{سص}}$ ، $\overline{\text{بجـ}}$ ≅ $\overline{\text{صع}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ ≅ $\overline{\text{سع}}$

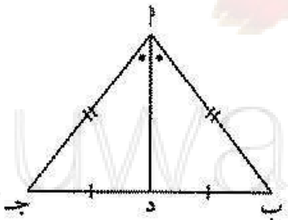
٤ في الشكل المقابل أب جـ د ، س ص ع ل شكلين رباعيين متطابقين



أكمِل ما يلي حسب الشروط المعطاة :

أ) أ̂ ≅ س̂	ب) ب̂ ≅ ص̂
جـ) جـ̂ ≅ ع̂	د) د̂ ≅ ل̂
هـ) أب ≅ س ص	و) ب جـ ≅ ص ع
ز) جـ د ≅ ع ل	ح) د أ ≅ ل س

٥ في الشكل المقابل : Δ أب جـ وبحسب الشروط المعطاة أكمل ما يلي :



أ) أب ≅ أجـ

ب) ب د ≅ جـ د

جـ) أد (ضلع مشترك)

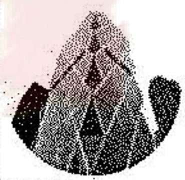
د) ب أ̂ د ≅ د أ̂ جـ

هـ) ب̂ ≅ جـ̂

و) أ د̂ ب ≅ أ د̂ جـ (قائمة)

العبارات والمفردات :
رمز التطابق (≅)
Congruency Symbol (≅)
ضلع: (ض) Side : S
زاوية (ز) Angle : A
تطابق مثلّثين بثلاثة أضلاع
Congruency Triangles with 3 Corresponding Sides .

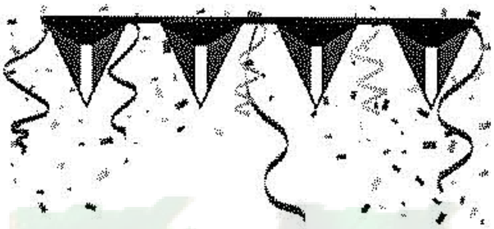
معلومات مفيدة :
يستخدم مصمّمو الواجهات الزجاجية الملوّنة المثلّثات المتطابقة في الإنشاءات .



اللوازم :
- ورق شفّاف
- مسطرة
- فرجار

٤-٢ الحالة الأولى : تطابق مثلّثين بثلاثة أضلاع
Congruent Triangles with SSS

سوف تتعلّم: تطابق مثلّثين بثلاثة أضلاع .



في شهر فبراير ، تتزيّن دولة الكويت بأعلامها الجميلة ذات الأشكال المتنوّعة .
في الصورة المقابِلة أحد هذه الأشكال .

نشاط

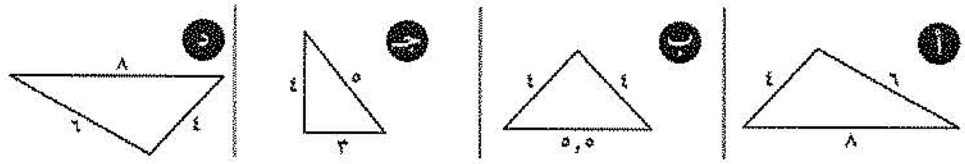
المجموعة الثانية	المجموعة الأولى
مثلث د هـ و	مثلث أ ب جـ
د هـ = ٦ سم	أ ب = ٧ سم
هـ و = ٥ سم	ب جـ = ٦ سم
د و = ٧ سم	أ جـ = ٥ سم

١ كل مجموعة ترسم المثلث المطلوب منها .
٢ يطابق أعضاء المجموعة المثلثات التي تم رسمها .
٣ تطابق المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية المثلثات المرسومة .
ماذا تلاحظ ؟ أطوال الأضلاع المتناظرة متطابقة

يتطابق المثلّثان إذا تطابق كلّ ضلع في المثلّث الأوّل مع نظيره في المثلّث الثاني .
يُعبّر عن ذلك بحالة (ضلع ، ضلع ، ضلع) ويرمز إليها (ض . ض . ض)

تدريب (١) :

عيّن المثلّثات المتطابقة في ما يلي :

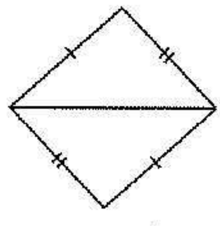


أ ، د

تدرّب (٢) :

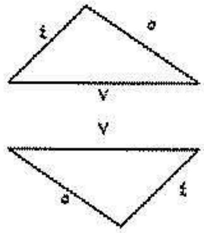
هل المثلّثان في كلّ من الأشكال التالية متطابقان ؟ ولماذا ؟

أ



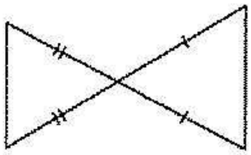
متطابقة

ب



متطابقة

جـ



غير متطابقة

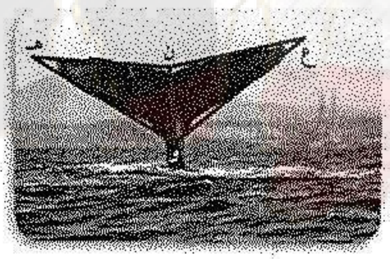
اعتبر أن الأضلاع لها نفس وحدة الطول أينما وجد.

مثال :

يبدو ذيل الحوت القاتل على شكل مثلّثين بينهما ضلع مشترَك إذا عُلِمَ أنّ :

$\overline{ع ن} \cong \overline{هـ ن}$ ، $\overline{ع و} \cong \overline{هـ و}$ ، $ق(\hat{ع}) = ٥٠°$

فأثبِت أنّ Δ ع ن و $\cong$ Δ هـ ن و ، ثمّ أوجد $ق(\hat{هـ})$



الحلّ :

المعطيات :

$\overline{ع ن} \cong \overline{هـ ن}$ ، $\overline{ع و} \cong \overline{هـ و}$ ، $ق(\hat{ع}) = ٥٠°$

المطلوب :

(١) إثبات أنّ : Δ ع ن و $\cong$ Δ هـ ن و ، (٢) إيجاد $ق(\hat{هـ})$

ملاحظة :
$\therefore$ تعني إذًا
$\because$ تعني بما أن

البرهان :

Δ ع ن و ، Δ هـ ن و فيهما :

(١) $\overline{ع ن} \cong \overline{هـ ن}$ (معطى)

(٢) ع و = هـ و (معطى)

(٣) $\overline{ن و}$ (ضلع مشترَك)

$\Leftarrow$ $\therefore$ Δ ع ن و $\cong$ Δ هـ ن و

بحالة (ض . ض . ض)

وينتج أنّ $ق(\hat{هـ}) = ق(\hat{ع}) = ٥٠°$

لاحِظ أنّ : عند إثبات تطابق مثلّثين نحتاج إلى إثبات تطابق ثلاثة عناصر مثل (ض . ض . ض) ونستنتج بعد ذلك تطابق الثلاثة عناصر الباقية (الزوايا الثلاث).

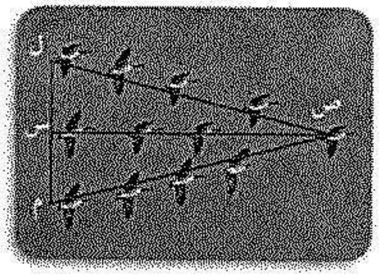
تدرّب (٣) :

يطير سرب من الإوزّ مشكِّلًا الرسم الذي في الصورة المجاوِرة .

إذا عُلِم أنّ : ص م ≅ ص ل ، س منتصف م ل

فأثبت أنّ : (١) Δ ص م س ≅ Δ ص ل س

(٢) ص س ينصف (ل صْ م)



المعطيات :

(١) ص م ≅ ص ل

(٢) س منتصف ل م

المطلوب :

إثبات أنّ :(١) Δ ص م س ≅ Δ ص ل س

(٢) ص س منصف (ل صْ م)

البرهان :

Δ ص س ل ، Δ ص س م فيهما :

(١) ص م ≅ ص ل (معطى)

(٢) ل س ≅ س م (س منتصف ل م)

(٣) ص س (ضلع مشترك)

∴ Δ ص س ل ≅ ص س م بحالة (ض . ض . ض)

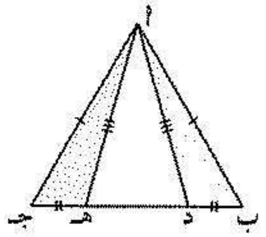
وينتج من التطابق أنّ ن (م صْ س) = ن (س ص ل)

∴ ص س ينصف (ل صْ م)

فكّر وناقش

هل كلّ المثلّثات المتطابقة الأضلاع متطابقة ؟ فسِّر ذلك .

تمــرّنْ :



(١) في الشكل المقابِل :

المعطيات: أب ≅ أجـ ، أد ≅ أهـ ، ب د ≅ جـ هـ

المطلوب: أثبِت أنّ : (١) Δ أ ب د ≅ Δ أ جـ هـ

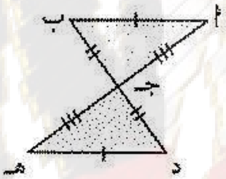
(٢) ب أ̂ د ≅ جـ أ̂ هـ

البرهان: Δ أ ب د ، Δ أ هـ جـ فيهما:

(١) أب ≅ أجـ (٢) أد ≅ أهـ (٣) ب د ≅ هـ جـ

∴ Δ أ ب د ≅ Δ أ هـ جـ وينتج من التطابق أن

ب أ̂ د ≅ جـ أ̂ هـ



(٢) في الشكل المقابِل :

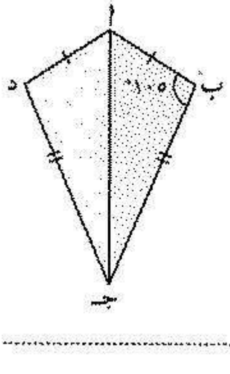
المعطيات: أب ≅ هـ د ، د جـ ≅ ب جـ ، أجـ ≅ هـ جـ

المطلوب: أثبِت أنّ : Δ أ ب جـ ≅ Δ هـ د جـ

البرهان: Δ أ ب جـ ، Δ هـ د جـ فيهما:

(١) أب ≅ هـ د ، د جـ ≅ ب جـ ، أجـ ≅ هـ جـ

∴ Δ أ ب جـ ≅ Δ هـ د جـ



(٣) الشكل المقابل أ ب جـ د شكل رباعي فيه

المعطيات: أب = أد ، ب جـ = د جـ ، ق (أ ب̂ جـ) = ١٠٥°

المطلوب: أثبِت أنّ : (١) Δ أ ب جـ ≅ Δ أ د جـ

(٢) ق (أ د̂ جـ) = ١٠٥°

(٣) أجـ منصف (ب أ̂ د)

البرهان: Δ أ ب جـ ، Δ أ د جـ فيهما

(١) أب = أد (٢) ب جـ = د جـ (٣) أجـ ضلع مشترك

∴ Δ أ ب جـ ≅ أ د جـ وينتج من التطابق أن

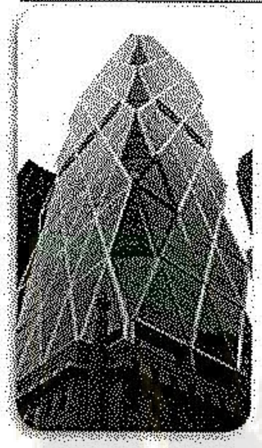
ق(أ ب̂ جـ) = ق(أ د̂ جـ) = ١٠٥° ، أجـ منصف (ب أ̂ د)

٤-٣ الحالة الثانية : تطابق مثلّثين بضلعين والزاوية المحدّدة بهما
Congruency Triangles with SAS

سوف تتعلّم: تطابق مثلّثين بضلعين والزاوية المحدَّدة بهما .

المعلومات المفيدة : يستخدم النجّارون الكثير من المثلّثات المتطابقة في تنفيذ الديكور .

نشاط



تمثّل المباني الحديثة جزءًا مهمًّا من الفنّ المعماري ، ويتمّ تصميم بعض واجهات المباني على شكل مثلّثات متطابقة كما في الصورة المجاوِرة .

المثلّث	طول الضلع الأوّل	قياس الزاوية	طول الضلع الثاني
أ ب جـ	أ ب = ٧ سم	ق ($\hat{ب}$) = ٨٠°	ب جـ = ٩ سم
س ص ع	س ص = ٨ سم	ق ($\hat{ص}$) = ١٤٠°	ص ع = ٦ سم

اللوازم :
- ورق شفّاف
- مسطرة
- منقلة
- فرجار

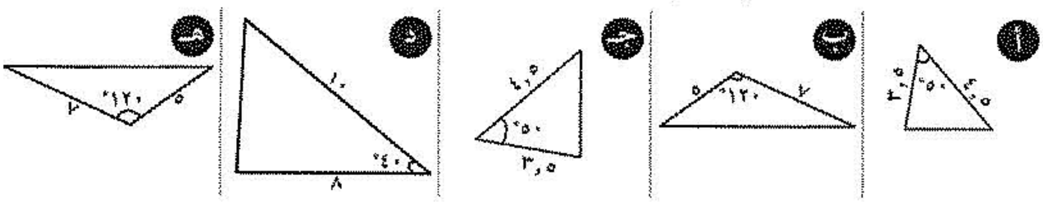
١ كلّ مجموعة تقوم برسم المثلّثين في الجدول أعلاه .

٢ على كلّ مجموعتين العمل معًا لمطابقة المثلّثات في ما بينها ، ماذا تلاحِظ ؟

يتطابق المثلّثان إذا تطابق ضلعان والزاوية المحدَّدة بهما في أحد المثلّثين مع نظائرها في المثلّث الآخر . يُعبَّر عن ذلك (ضلع ، زاوية ، ضلع) ويرمز إليها (ض . ز . ض)

تدرّب (١) :

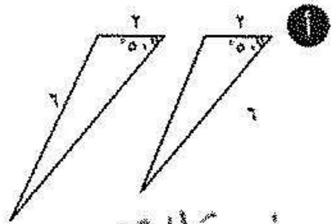
عيِّن المثلّثات المتطابقة في ما يلي :



أ، جـ ب، د

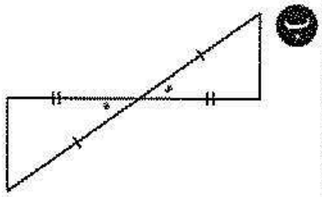
تدرّب (٢) :

هل المثلّثان في الأشكال التالية متطابقان ؟

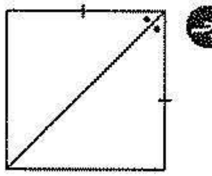
أ


غير متطابقة

لأن الزاوية غير محددة بالضلعين

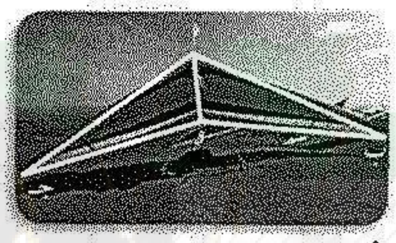
ب


متطابقه

جـ


متطابقه

مثال :



يبدو جناحا الطائرة الشراعية في الصورة المجاوِرة أنّهما مثلّثان متطابقان .

إذا كان $\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{أجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أو}}$ منصِّف زاوية الرأس ب $\hat{\text{أ}}$ جـ ،

فهل المعطَيات في الرسم كافية ليصبح المثلّثان متطابقين . أثبِت صحّة ذلك .

الحلّ :

المعطيات :

(١) $\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{أجـ}}$ ، (٢) $\overrightarrow{\text{أو}}$ منصِّف (ب $\hat{\text{أ}}$ جـ)

المطلوب :

إثبات أنّ : Δ ب أ و $\cong$ Δ جـ أ و

البرهان :

Δ ب أ و ، Δ جـ أ و فيهما :

(١) $\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{أجـ}}$ (معطى)

(٢) ق (ب $\hat{\text{أ}}$ و) = ق (جـ $\hat{\text{أ}}$ و) ($\overrightarrow{\text{أو}}$ منصِّف زاوية الرأس (ب $\hat{\text{أ}}$ جـ))

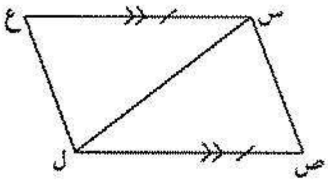
(٣) $\overline{\text{أو}}$ (ضلع مشترَك)

$\therefore$ Δ ب أ و $\cong$ Δ جـ أ و حالة (ض . ز . ض)

$\therefore$ نعم المعطَيات كافية لإثبات الحالة .

تدرّب (٣) :

في الشكل المقابل



$\overline{\text{س ع}} \cong \overline{\text{ص ل}}$ ، $\overline{\text{س ع}} \parallel \overline{\text{ص ل}}$.

أثبت أنّ : (١) Δ ل س ع $\cong$ Δ س ل ص

(٢) س ص = ع ل

المعطيات :

(١) $\overline{\text{س ع}} \cong \overline{\text{ص ل}}$ ، (٢) $\overline{\text{س ع}} \parallel \overline{\text{ص ل}}$

المطلوب :

إثبات أنّ : (١) Δ س ل ص $\cong$ Δ ل س ع ، (٢) س ص = ع ل

البرهان :

Δ ل س ع ، Δ س ل ص فيهما :

(١) س ع $\cong$ ص ل (معطى)

(٢) ق (ل $\hat{\text{س}}$ ع) = ق (س $\hat{\text{ل}}$ ص) (بالتبادل)

(٣) $\overline{\text{س ل}}$ (ضلع مشترَك)

$\therefore$ أنّ Δ ل س ع $\cong$ Δ س ل ص بحالة (ض . ز . ض)

وينتج من التطابق أنّ س ص = ع ل

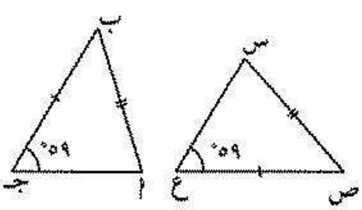
تذكّر أنّ :

- // رمز التوازي
- إذا توازى مستقيمان وقطعهما قاطع ، فإنّ :
  - الزوايا المتبادلة متطابقة .
  - الزوايا المتناظرة متطابقة .
  - الزوايا الداخلة متكاملة .

فكّر وناقش

قال أحمد إنّ Δ س ص ع $\cong$ Δ اب جـ بحالة (ض . ز . ض)

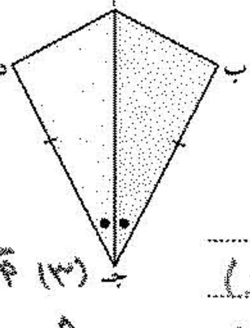
وقال خالد إنّ المعلومات غير كافية لبيان أنّ المثلّثين متطابقان .



أيّهما على صواب ؟ فسّر ذلك . خالد - لأن الزاوية غير محددة بين الضلعين

تمـــرَنْ :

١ في الشكل المجاوِر :



المعطيات :- ق (أجـ̂ب) = ق (أجـ̂د) ، ب جـ ≅ د جـ

المطلوب :- أ أثبِت أنّ: △ أ ب جـ ≅ △ أ د جـ .

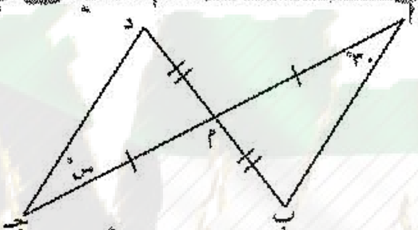
ب برهِن أنّ أب̂جـ ≅ أد̂جـ .

البرهان :- △ أ ب جـ ، △ أ د جـ فيهما

(١) ب جـ ≅ جـ د (٢) ق(أجـ̂ب) ≅ ق(أجـ̂د) (٣) أ جـ ضلع مشترك

∴ △ أ ب جـ ≅ △ أ د جـ وينتج من التطابق أن أب̂جـ ≅ أد̂جـ

٢ من خلال المعطيات على الشكل المقابِل .



أ أثبِت أنّ: △ أ م ب ≅ △ جـ م د .

ب أوجِد قيمة س .

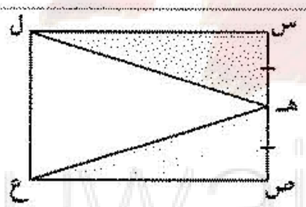
البرهان: △ أ م ب ، △ جـ م د فيهما

(١) أ م = م جـ (٢) ب م = م د (٣) ق(أم̂ب) = ق(جـم̂د) بالتقابل بالرأس

∴ △ أ م ب ≅ △ جـ م د وينتج من التطابق أن ق(بأ̂م) = ق(مجـ̂د)

أي أن س = ٣٠°

٣ في الشكل المقابِل :



المعطيات :- س ص ع ل مستطيل ، هـ منتصف س ص

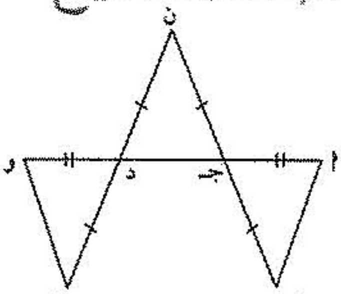
المطلوب :- أثبِت أنّ : هـ ل = هـ ع

△ س ل هـ ، △ هـ ع ص فيهما

(١) س هـ = هـ ص (٢) س ل = ص ع (٣) ق(هـس̂ل) = ق(هـص̂ع) = ٩٠°

∴ △ س ل هـ ≅ △ هـ ع ص وينتج أن هـ ل = هـ ع

٤ في الشكل المجاور :



المعطيات :- جـ منتصف ن ب ، د منتصف ن هـ

ن جـ ≅ ن د ، أ جـ ≅ و د

طول ب أ = ١٢ سم

المطلوب :- أ أثبِت أنّ :△ أ ب جـ ≅ △ و هـ د .

ب أوجِد طول هـ و .

ق(أجـ̂ب) = ق(نجـ̂د) ، ق(هـد̂و) = ق(ند̂جـ) بالتقابل بالرأس

△ ن هـ د متطابق الضلعين ∴ ق(نجـ̂د) = ق(ند̂جـ) —— (٢)

من (١) ، (٢) △ أ جـ ب ≅ △ و د هـ بحالة (ض.ز.ض)

وينتج أن ...

٤ - ٤ الحالة الثالثة : تطابق مثلثين بزاويتين وضلع واصل بين رأسيهما
Congruent Triangle with ASA

سوف تتعلّم: تطابق مثلّثين بتطابق زاويتين وضلع واصل بين رأسيهما .

نشاط (١) :

أُرسُم المثلّثات التالية وفقًا للمعلومات المعطاة في الجدول الموضّح :

	المثلّث	طول الضلع	قياس الزاوية (١)	قياس الزاوية (٢)
١	اب جـ	اب = ٦ سم	ق ($\hat{أ}$) = ٦٠°	ق ($\hat{ب}$) = ٧٠°
٢	س ص ع	س ص = ٧ سم	ق ($\hat{س}$) = ٦٠°	ق ($\hat{ص}$) = ٧٠°
٣	ل م ن	ل م = ٦ سم	ق ($\hat{ل}$) = ٦٠°	ق ($\hat{م}$) = ٧٠°

اللوازم :
- ورق شفّاف
- أدوات هندسية

١ أيّ المثلّثات المرسومة متطابقة ؟ Δ ابجـ ، Δ ل م ن

٢ حدِّد الشروط المتوفّرة في المثلّثات المتطابقة ؟

زاويتين وضلع واصل بين رأسيهما

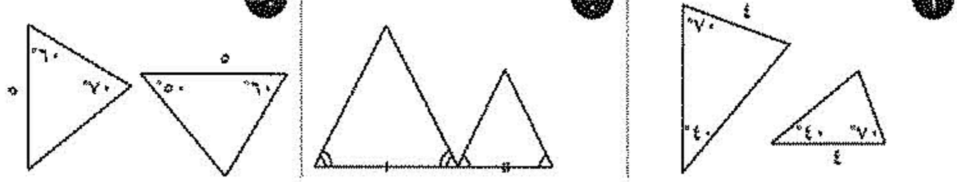
تذكّر أنّ :
المثلّثين يتطابقان بحالة
(١) (ض ، ض ، ض)
(٢) (ض ، ز ، ض)

يتطابق المثلّثان إذا تطابقت زاويتان والضلع الواصل بين رأسيهما في أحد المثلّثين مع نظائرهما في المثلّث الآخر ، ويُعبّر عن ذلك بحالة (زاوية ، ضلع ، زاوية) ويرمز إليها (ز ، ض ، ز) .

تدريب (١) :

هل المثلّثان في كلّ من أ ، ب ، جـ متطابقان ؟ فسّر ذلك .

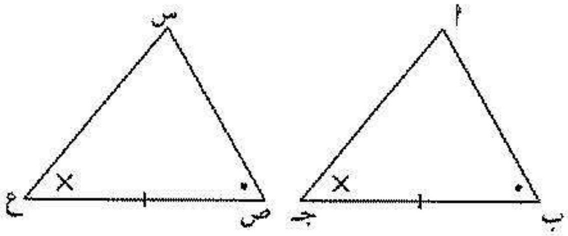
أ ب جـ



لا نعم لا

تدرّب (٢) :

من المعطَيات الموضَّحة في الرسم ، أكمِل كلًّا ممّا يلي :



في Δ أ ب جـ ، Δ س ص ع

(١) ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{ص}$)

(٢) ق ($\hat{جـ}$) = ق ($\hat{ع}$)

(٣) ب جـ = ص ع

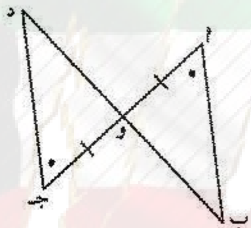
$\therefore$ يتطابق المثلثان بحالة (ز . ض . ز)

يتنتج من التطابق أن ق ($\hat{أ}$) = ق ($\hat{س}$) ، س ص $\cong$ $\overline{أ ب}$ ، أ جـ $\cong$ $\overline{س ع}$

تذكَّرْ أنّ :
- الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة .
- عندما يتوازى مستقيمان فإنّ:
  - كلّ زاويتين متبادلتين متطابقتان .
  - كلّ زاويتين متناظرتين متطابقتان .

تدرّب (٣) :

في الشكل المقابِل :



أثبِت أنّ : Δ أ ب و $\cong$ Δ جـ د و

المعطَيات :

(١) $\overline{أو}$ $\cong$ $\overline{وجـ}$

(٢) $\hat{أ}$ $\cong$ $\hat{جـ}$

المطلوب :

إثبات أنّ : Δ أ ب و $\cong$ Δ و د جـ

البرهان :

في Δ أ ب و ، Δ و د جـ فيهما :

(١) ق ($\hat{أ}$) = ق ($\hat{جـ}$) (معطى)

(٢) أو = وجـ (معطى)

(٣) ق (أ $\hat{و}$ ب) = ق (جـ $\hat{و}$ د) (تقابل بالرأس)

$\therefore$ يتطابق Δ أ ب و ، Δ جـ د و بحالة (ز . ض . ز)

فكر وناقش

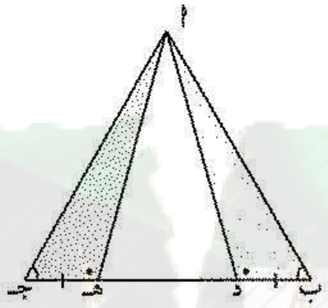
إذا تطابقت ثلاث زوايا في أحد المثلثين مع نظائرها في المثلث الآخر ، فهل يتطابق المثلثان ؟

ارسم مثلثين لدعم إجابتك .

تذكّر أنّ :
في Δ متطابق الضلعين زاويتا القاعدة متطابقة .

تدرّب (٤) :

في الشكل المقابل :



أثبت أنّ :

(١) Δ ا ب د $\cong$ Δ ا جـ هـ

(٢) ا ب = ا جـ

المعطيات : (١) $\overline{\text{ب د}}$ $\cong$ هـ جـ ،

(٢) ق (ا $\hat{\text{د}}$ ب) = ق (ا $\hat{\text{هـ}}$ جـ) ، (٣) ق ($\hat{\text{ب}}$) = ق ($\hat{\text{جـ}}$)

المطلوب :

إثبات أنّ :

(١) Δ ا ب د $\cong$ Δ ا جـ هـ ، (٢) ا ب $\cong$ ا جـ

البرهان :

Δ ا ب د ، Δ ا جـ هـ فيهما :

(١) $\overline{\text{ب د}}$ $\cong$ $\overline{\text{هـ جـ}}$ (معطى)

(٢) ق (ا $\hat{\text{د}}$ ب) = ق (ا $\hat{\text{هـ}}$ جـ) (معطى)

(٣) ق ($\hat{\text{ب}}$) = ق ($\hat{\text{جـ}}$) (معطى)

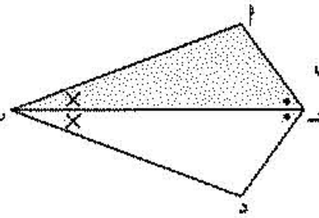
$\therefore$ يتطابق المثلثان بحالة (ز . ض . ز)

$\therefore$ ينتج أن ا ب $\cong$ ا جـ

فكر وناقش

هل يتطابق ضلعان في مثلث إذا تطابقت زوايا القاعدة منه ؟ فسر إجابتك .

تمـــرّنْ :



① في الشكل المقابِل ليكن $\overline{جـ ب}$ منصِّف الزاويتين جـ ، ب

(١) أثبت أنَّ Δ أجـ ب ≅ Δ دجـ ب .

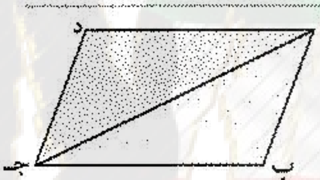
(٢) برهِن أنَّ أجـ = دجـ .

البرهان: Δ أجـ ب ، Δ دجـ ب فيهما

(١) ق(أجـ̂ ب) = ق(ب جـ̂ د)   (٢) ق(أ ب̂ جـ) = ق(جـ ب̂ د) معطى

(٣) جـ ب ضلع مشترك ∴ Δ أجـ ب ≅ Δ دجـ ب وينتج أن

أجـ = دجـ



② اب جـ د متوازي أضلاع . وظِّف حالة التطابق (زاويتان وضلع واصل بين رأسيهما) لإثبات تطابق Δ اب جـ ، Δ جـ د ا .

البرهان: ∵ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{أجـ}$ قطر فيه

∴ $\overline{أجـ}$ يقطع كلاً من أ̂ ، جـ̂

Δ أدجـ ، Δ أجـ ب فيهما:

(١) ق(ب أ̂ جـ) = ق(جـ أ̂ د)   (٢) ق(أجـ̂ ب) = ق(أجـ̂ د)

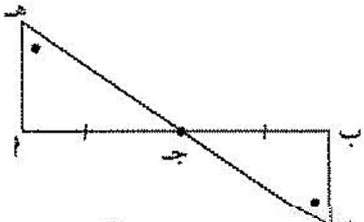
(٣) $\overline{أجـ}$ ضلع مشترك ∴ Δ أ ب جـ ≅ Δ جـ د أ بالـ(ز.ض.ز)

تذكر أنّ :
إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع نظائرهما في المثلث الآخر ، فإن الزاوية الثالثة فيهما تكون متطابقة. (لأن مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي ١٨٠°)

③ في الشكل المقابِل جـ منتصف $\overline{اب}$ ،
ق (د̂) = ق (هـ̂)

أثبِت أنّ : (١) Δ ب د جـ ≅ Δ اهـ جـ

(٢) $\overline{اهـ}$ ≅ $\overline{ب د}$.



البرهان: ∵ ق(ب جـ̂ د) = ق(هـ جـ̂ أ) تقابل بالرأس

ق(د̂) = ق(هـ̂)

∴ ق(د ب̂ جـ) = ق(هـ أ̂ جـ) (من خواص المثلث مجموع زواياه ١٨٠°)

Δ ب د جـ ، Δ أهـ جـ فيهما

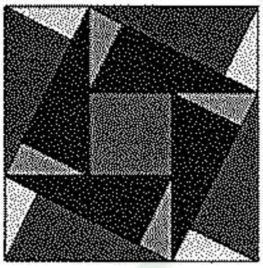
(١) ق(د ب̂ جـ) = ق(هـ أ̂ جـ)   (٢) ق(ب جـ̂ د) = ق(أجـ̂ هـ)

(٣) ب جـ = جـ أ ∴ Δ ب د جـ ≅ Δ أهـ جـ (ز.ض.ز)

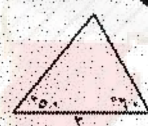
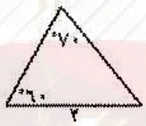
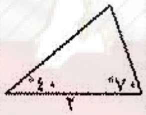
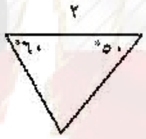
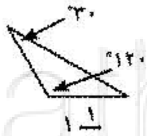
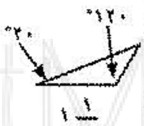
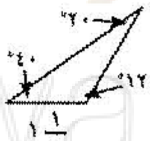
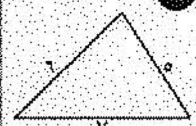
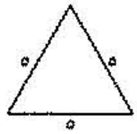
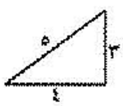
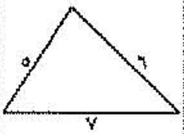
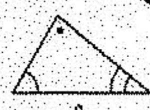
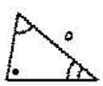
∴ $\overline{أهـ}$ ≅ $\overline{ب د}$

٤-٥ تطبيقات على تطابق المثلّثات
Congruent Triangles

نشاط :

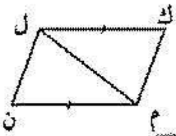


أراد مبارك عمل لوحة فنّية باستخدام المثلّثات . وبعد أن اكتملت اللوحة بلصق مثلّثات معيّنة وأثناء النقل ، سقطت بعض المثلّثات ، فحاول رسم مثلّثات تطابق المثلّثات المفقودة من اللوحة . **ساعِد مبارك على الوصول إلى المثلّثات التي يحتاج إليها بإكمال الجدول .**

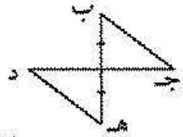
القطعة المثلثة المفقودة	الأنواع ١	الأنواع ٢	الأنواع ٣	رقم القطعة المتطابقة مع حالة التطابق
أ 				رقم (٣) (ز . ض . ز)
ب 				رقم (١) (ز . ض . ز)
جـ 				رقم (٣) (ض . ض . ض)
د 				رقم (٣) (ز . ض . ز)

تدرّب (١) :

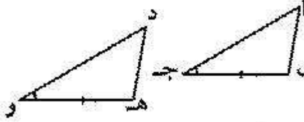
ما المعلومة الإضافية التي تحتاج إليها لإثبات أنّ المثلّثين في الأشكال التالية متطابقان ؟

أ


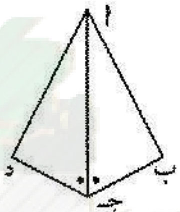
ل ك // م ن

ب


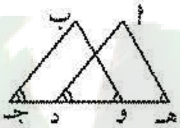
ب هـ ينصف هـ د

جـ


أجـ ≅ د و

د


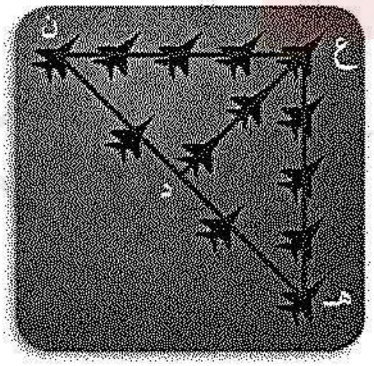
ب جـ ≅ جـ د

هـ


هـ د ≅ و جـ

تدرّب (٢) :

شكّلت الطائرات في العرض الذي أُقيم للطائرات النفّاثة سربًا على شكل مثلّثين .



إذا عُلِم أنّ $\overline{ع هـ} \cong \overline{ع ن}$ ، د منتصف $\overline{هـ ن}$.

أثبت أنّ : Δ ع د هـ $\cong$ Δ ع د ن

المعطيات :

$\overline{ع هـ} \cong \overline{ع ن}$ ، د منتصف $\overline{هـ ن}$

المطلوب :

إثبات أنّ Δ ع د هـ $\cong$ Δ ع د ن

البرهان :

Δ ع د هـ ، Δ ع د ن فيهما :

(١) $\overline{ع هـ} \cong \overline{ع ن}$ (معطى)

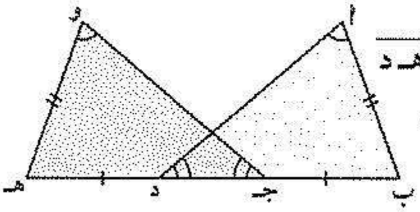
(٢) $\overline{ع د}$ (ضلع مشترك)

(٣) $\overline{هـ د} \cong \overline{د ن}$ (معطى)

$\Leftarrow$ بحالة (ض . ض . ض)

$\therefore$ نستنتج أنّ Δ ع د هـ $\cong$ Δ ع د ن

تدرب (٣) :



في الشكل المقابل : أب ≅ وهـ ، بجـ ≅ هـد

ق (أ̂) = ق (و̂) ، ق (وجـ̂هـ) = ق (أد̂ب)

أثبت أنّ : أد ≅ وجـ

ملاحظة:
خاصية المساواة :
لكل أ ، ب ، جـ ≠ ٠
إذا كان أ = ب
فإن : أ + جـ = ب + جـ

المعطيات :

أب ≅ وهـ ، بجـ ≅ هـد

ق (أ̂) = ق (و̂) ، ق (وجـ̂هـ) = ق (أد̂ب)

المطلوب : إثبات أنّ : أد ≅ وجـ

البرهان :

بجـ ≅ دهـ
(بجـ + جـد) ≅ (دهـ + جـد)
بد ≅ جـهـ

Δ أبد ، Δ وجـهـ فيهما :

(١) أب ≅ وهـ (معطى)

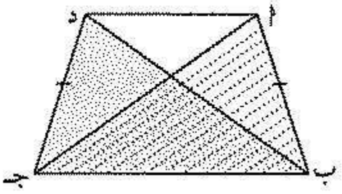
(٢) بد ≅ جـهـ (برهان)

(٣) ق (ب̂) = ق (هـ̂) (معطى المثلث)

∴ Δ أبد ≅ Δ وجـهـ (ض. ز. ض)

وينتج أنّ أد ≅ وجـ

تمــرين :



١ أ ب جـ د شبه منحرف متطابق الضلعين .
أثبت أنّ : Δ أ ب جـ ≅ Δ د جـ ب
(علمًا بأنّ قطري شبه المنحرف المتطابق الضلعين متطابقان)

المعطيات : أب = دجـ ، أجـ = بد

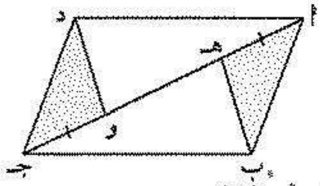
المطلوب : Δ أبجـ ≅ Δ دجـب

البرهان : Δ أبجـ ، Δ دجـب فيهما :

(١) أب = دجـ (٢) أجـ = بد (٣) بجـ ضلع مشترك

∴ Δ أبجـ ≅ Δ دجـب (ض. ض. ض)

② في الشكل المقابِل :



ا ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{أجـ}$ قطر فيه ،

اهـ = جـ و . أثبِت أنّ ب هـ = د و

المعطيات : اهـ = جـ و ، اب جـ د متوازي اضلاع
$\overline{أجـ}$ قطر فيه

المطلوب : ب هـ = د و

البرهان : $\triangle$ اب هـ ، $\triangle$ جـ د و فيهما : $\therefore \triangle$ اب هـ $\cong \triangle$ جـ د و (ض . ز . ض)

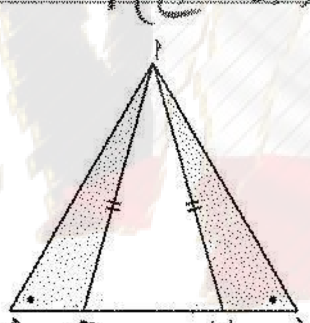
(١) اهـ = وجـ (معطى)

(٢) اب = دجـ (خواص متوازي الاضلاع)

(٣) ق(ب $\hat{أ}$ هـ) = ق(د $\hat{جـ}$ و) (خواص متوازي الاضلاع)

وينتج أن ب هـ = ود

③ في الشكل المقابِل :



مُلاحَظَةٌ:
مكملات الزوايا المتطابقة تكون متطابقة .

اب = اجـ ، ق($\hat{أد}$ ب) = ق($\hat{اهـ}$ جـ)

أثبِت أنّ : المثلّثين اب د ، اجـ هـ متطابقان .

المعطيات : (١) $\overline{أب} \cong \overline{أجـ}$

(٢) ق(أ $\hat{د}$ ب) = ق(أ $\hat{هـ}$ جـ)

المطلوب : إثبات أنّ : $\triangle$ اب د $\cong \triangle$ اجـ هـ

البرهان : $\triangle$ اب جـ متطابق الضلعين $\therefore$ ق(أ $\hat{ب}$ جـ) = ق(أ $\hat{جـ}$ ب)

$\because$ مكملات الزوايا متطابقة $\therefore$ ق(أ $\hat{ب}$ د) = ق(أ $\hat{جـ}$ هـ)

ومن خواص المثلث مجموع زواياه ١٨٠° $\therefore$ ق(د $\hat{أ}$ ب) = ق(هـ $\hat{أ}$ جـ) — (١)

$\because$ ق(أ $\hat{د}$ ب) = ق(أ $\hat{هـ}$ جـ) $\therefore$ أد = أهـ — (٢)

$\triangle$ أدب ، $\triangle$ اجـ هـ فيهما :

(١) أد = أهـ (برهان ٢)

(٢) أب = أجـ (معطى)

(٣) ق(د $\hat{أ}$ ب) = ق(جـ $\hat{أ}$ هـ) (برهان ١)

$\therefore \triangle$ أدب $\cong \triangle$ أجـ هـ (ض.ز.ض)

٤-٦ تطابق مثلثين قائمي الزاوية بضلع ووتر
Congruency of Two Right Triangles (HL)

العبارات والمفردات :
زاوية قائمة
Right Angle
مثلّث قائم الزاوية
Right-Angled Triangle
وتر **Hypotenuse**
ضلع الزاوية القائمة
Leg

سوف تتعلّم: تطابق مثلّثين قائمي الزاوية بتطابق وتر وأحد ضلعي القائمة .

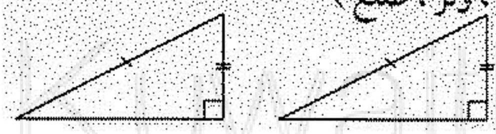
نشاط :

ارسم المثلثين القائمي الزاوية الآتيين وفقًا للمعلومات المعطاة في الجدول التالي :
ثمّ أجِب عن الأسئلة التالية :

المثلث	طول ضلع القائمة	طول الوتر
س ص ع	س ص = ٣ سم	س ع = ٥ سم
أ ب جـ	أ ب = ٤ سم	أ جـ = ٥ سم

١ هل يتطابق المثلثان المرسومان ؟ ......نعم......
٢ حدد الشروط المتوفرة في المثلثين المتطابقين . ...

يتطابق مثلّثان قائما الزاوية إذا تطابق وتر وضلع في أحدهما مع نظائرهما في المثلّث الآخر ويعبر عن ذلك بحالة (زاوية قائمة ، وتر ، ضلع)
ويرمز إليها (◺ . و . ض)

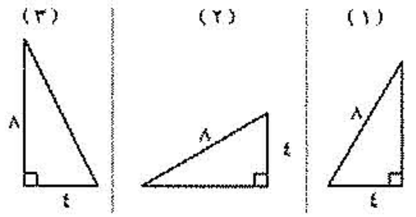


تذكّر أنّ :
لأيّ مثلّث أ ب جـ قائم الزاوية في ب
يكون $\overline{أب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ضلعا القائمة ، $\overline{أجـ}$ وتر المثلث .

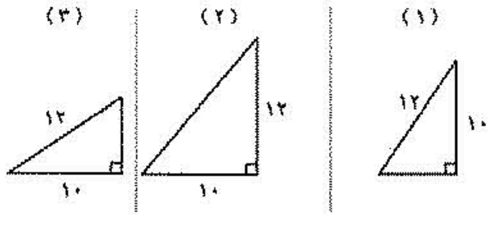
مُلاحَظةٌ:
≇ تعني لا يتطابق

تدريب (١) :

أكمل ما يلي لتصبح العبارة صحيحة :



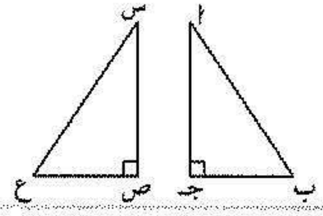
أ المثلّث (١) ≅ المثلّث ......(٢)......
المثلّث (١) ≇ المثلّث ......(٣)......



ب المثلّث (١) ≅ المثلّث ......(٣)......
المثلّث (١) ≇ المثلّث ......(٢)......

فكر وناقش

أمامك مثلّثان ، ما الحدّ الأدنى من المعلومات التي يمكن استخدامها لإثبات أن المثلّثين متطابقان ؟



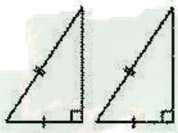
تدرّب (٢) :

في كلّ من الأشكال التالية المثلّثان متطابقان ، حدِّد حالة التطابق :

أ

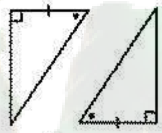
(ض . ز . ض)

ب



(△ . و . ض)

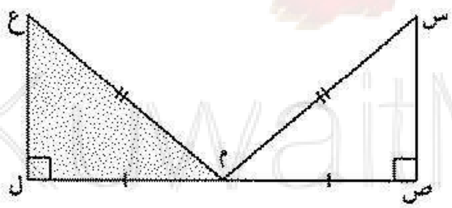
جـ



(ز . ض . ز)

تدرّب (٣) :

في الشكل المقابِل :



برهِن أنّ △ س ص م ≅ △ ع ل م

أكمِل ما يلي :

المعطيات : ($\hat{ص}$) ، ($\hat{ل}$) زوايا قائمة

$\overline{س م}$ ≅ $\overline{م ع}$

$\overline{ص م}$ ≅ $\overline{م ل}$

المطلوب : إثبات أنّ △ س ص م ≅ △ ع ل م

البرهان :

△ س ص م ، △ ع ل م فيهما :

(١) ق ($\hat{ص}$) = ق ($\hat{ل}$) = ٩٠° (معطى)

(٢) $\overline{س م}$ ≅ $\overline{م ع}$ (معطى)

(٣) $\overline{ص م}$ ≅ $\overline{ل م}$ (معطى)

∴ نستنتج أنّ △ س ص م ≅ △ ع ل م

⟸ وحالة التطابق هي (△ . و . ض)

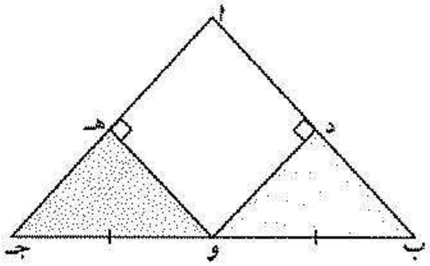
مثال :

في الشكل المقابِل :

أ د و هـ مربع ، ب و = جـ و

أثبِت أنّ (١) $\hat{ب} \cong \hat{جـ}$

(٢) Δ أ ب جـ متطابق الضلعين



تذكَّرْ أنّ :
من خواص المربّع
• زواياه الأربع قوائم
• أضلاعه الأربعة متطابقة .

الحل :

المعطيات : أ د و هـ مربّع ، ب و = جـ و

المطلوب : إثبات أنّ $\hat{ب} \cong \hat{جـ}$

البرهان : Δ د ب و ، Δ هـ جـ و فيهما :

(١) ب و = جـ و (معطى)

(٢) د و = هـ و (من خواص المربع)

(٣) ق (و $\hat{د}$ ب) = ق (و $\hat{هـ}$ جـ) = °٩٠ ⟸ { ق (و $\hat{د}$ ب) = °٩٠ بالتجاور مع (أ $\hat{د}$ و) ، ق (جـ $\hat{هـ}$ و) = °٩٠ بالتجاور مع (أ $\hat{هـ}$ و) }

∴ Δ د ب و $\cong$ Δ هـ جـ و وحالة تطابقهما هي (◺ . و . ض)

وينتج من التطابق أن : $\hat{ب} \cong \hat{جـ}$ .... (١)

مُلاحظةٌ:
في أي مثلث إذا تطابقت زاويتا القاعدة تطابق الضلعان المقابلان لهما .

∵ Δ أ ب جـ فيه :

ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{جـ}$) (زاويتا القاعدة متطابقة)

∴ Δ أ ب جـ متطابق الضلعين .... (٢)

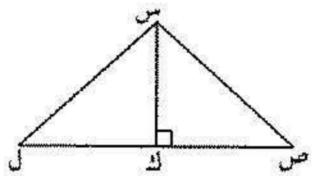
تعميم : زاويتي القاعدة في مثلث متطابقتان ⟺ المثلث متطابق الضلعين

تذكّر أنّ :
- في المثلّث المتطابق الضلعين، القطعة المستقيمة المرسومة من رأس المثلّث والعمودية على القاعدة تنصّفها.
- من خواصّ المستطيل
• زواياه الأربع قوائم
• كلّ ضلعين متقابلين متطابقان
• القطران متطابقان ، وينصف كلّ منهما الآخر .

فكّر وناقش

في Δ س ص ل ، $\overline{\text{س ك}} \perp \overline{\text{ص ل}}$

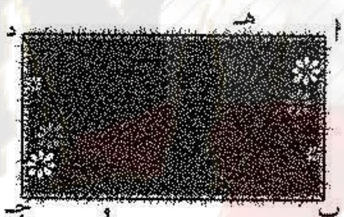
ما الحدّ الأدنى من المعلومات التي يمكن استخدامها لإثبات أن المثلّثين س ص ك ، س ل ك متطابقان .



تدرّب (٤) :

في الشكل المقابل مخطط لحديقة على شكل مستطيل ، يراد زراعة حوضين من الأزهار على شكل مثلثين . أثبت أنّ حوضي الزهور متطابقة موظفًا المعطيات الموجودة على الرسم .

أكمِل كلًّا ممّا يلي :



المعطيات : أ ب جـ د مستطيل، $\overline{\text{ب هـ}} \cong \overline{\text{د و}}$

المطلوب : إثبات أن Δ أ ب هـ $\cong$ Δ و د جـ

البرهان : Δ أ ب هـ ، Δ جـ د و فيهما :

(١) ق ($\hat{\text{أ}}$) = ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٩٠° من خواصّ المستطيل (زواياه الأربع قائمة)

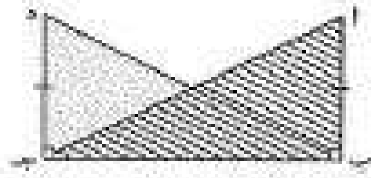
(٢) $\overline{\text{أ ب}} \cong \overline{\text{جـ د}}$ من خواصّ المستطيل (كلّ ضلعين متقابلين متطابقين)

(٣) $\overline{\text{ب هـ}} \cong \overline{\text{د و}}$ (معطى)

Δ أ ب هـ $\cong$ Δ جـ د و بحالة (... و ... ض)

وينتج أن الحوضان متطابقان .

تمارين :



(1) في الشكل المقابل: $\overline{أب} \perp \overline{بجـ}$ ، $\overline{دجـ} \perp \overline{بجـ}$ ، أجـ = ب د ،
أثبت أن: ب $\hat{أ}$ جـ ≡ جـ $\hat{د}$ ب .

المعطيات: $\overline{أب} \perp \overline{بجـ}$ ، $\overline{دجـ} \perp \overline{بجـ}$ ، أجـ = ب د

المطلوب: ب $\hat{أ}$ جـ ≡ جـ $\hat{د}$ ب

البرهان: ∵ $\overline{أب} \perp \overline{بجـ}$ ، $\overline{دجـ} \perp \overline{بجـ}$ ∴ ق(أ $\hat{ب}$ جـ) = ق(د $\hat{جـ}$ ب) = 90°

∆ أ ب جـ ، ب د جـ فيهما:

(1) أ جـ = ب د (معطى) (3) ق(أ $\hat{ب}$ جـ) = ق(د $\hat{جـ}$ ب) برهان

(2) $\overline{بجـ}$ ضلع مشترك ∴ ∆ أ ب جـ ≅ ب د جـ (ق، و، ض)

وينتج أن ب $\hat{أ}$ جـ ≡ جـ $\hat{د}$ ب

(2) في الشكل المقابل:
أثبت أن: (أ) ∆ ل و م ≅ ∆ م هـ ل
(ب) ع ل = ع م

المعطيات: ق(ل $\hat{هـ}$ م) = ق(ل $\hat{و}$ م) = 90°
ل هـ = و م

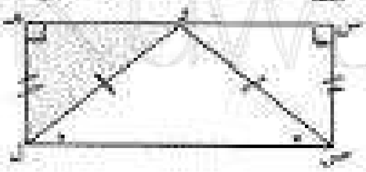
المطلوب: ∆ ل و م ≅ ∆ م هـ ل
ع ل = ع م

البرهان: ∆ ل هـ م ، ∆ ل و م القائما الزاوية فيهما

(1) $\overline{لم}$ ضلع مشترك (وتر)

(2) ل هـ = و م معطى

∴ ∆ ل هـ م ≅ ∆ م و ل (∆، و، ض) وينتج أن ع ل = ع م



(3) في الشكل المقابل:
س ص ل هـ مستطيل ، و ص ل مثلث متطابق الضلعين . وظف التطابق لإثبات أن:
و منتصف $\overline{سهـ}$.

المعطيات: س ص ل هـ مستطيل ، و ص ل مثلث متطابق الضلعين

المطلوب: و منتصف $\overline{سهـ}$ س ص = ل هـ

البرهان: ∵ س ص ل هـ مستطيل ∴ ق(ص $\hat{س}$ هـ) = ق(هـ $\hat{ل}$ ل) = 90° ــ (1)

∆ ص و ل متطابق الضلعين ∴ ص و = و ل ــ (2)

∆ س ص و ، ∆ و ل هـ القائما الزاوية فيهما:

(1) ص و = و ل ــ (برهان 2)

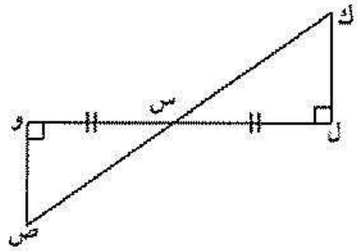
(2) س ص = هـ ل ــ (برهان 1)

∴ ∆ س ص و ≅ ∆ و ل هـ (∆، و، ض)

وينتج أن س و = و هـ أي أن و منتصف $\overline{سهـ}$

٤ في الشكل المقابِل :

برهِن أنّ Δ ك ل س ≅ Δ ص و س .



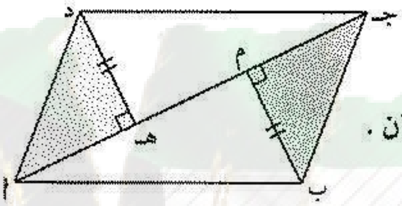
Δ ك ل س ، Δ ص و س فيهما :

(١) ل س = س و (معطى)

(٢) ق(لˆ) = ق(وˆ) (معطى) ∴ Δ ك ل س ≅ Δ ص و س

(٣) ق(ك سˆ ل) = ق(ص سˆ و) (بالتقابل بالرأس) (ز، ض، ز)

٥ صمم عبد الكريم لوحة من الفسيفساء كما في الشكل المقابل ،
وأراد إثبات أن : Δ جـ م ب ، Δ أ هـ د متطابقان .
ساعده في إثبات ذلك.
(علمًا بأن الشكل جـ ب أ د متوازي أضلاع)



المعطيات :- جـ ب أ د متوازي أضلاع ، ق(جـ مˆ ب) = ق(د هـˆ أ) = ٩٠°

م ب = د هـ

المطلوب :- Δ جـ م ب ≅ Δ أ هـ د

البرهان :- Δ جـ م ب ، Δ أ هـ د القائمة الزاوية فيهما

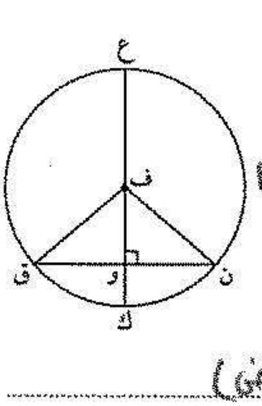
(١) ب م = د هـ (٢) جـ ب = د أ خواص متوازي الأضلاع

∴ Δ جـ م ب ≅ Δ أ هـ د (Δ، و، ض)

٦ دائرة مركزها ف ، $\overline{ع ك}$ ⊥ $\overline{ن ق}$ ،

وظف التطابق لاثبات أنّ :

و منتصف $\overline{ن ق}$.



Δ ن ف و ، Δ ف و ق القائمة الزاوية فيهما

(١) ن ف = ف ق (نصف قطر)

(٢) $\overline{ف و}$ ضلع مشترك

∴ Δ ن ف و ≅ Δ ف و ق (Δ، و، ض)

ينتج أن ن و = و ق أي أن و منتصف $\overline{ن ق}$

٤-٧ تشابه المثلّثات
Similarity of Triangles

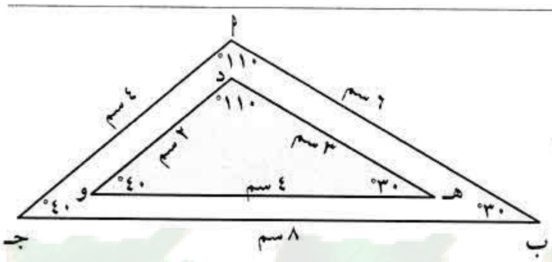
العبارات والمفردات :
التشابه
Similarity
رمز التشابه ~
Symbol of Similarity ~

معلومات مفيدة :
للتشابه أهمّية كبيرة في كثير من تصاميم المباني والأجهزة والاستحقاقات الحياتية المتنوّعة .

تذكر أنّ :
يتشابه المضلعان إذا وفقط إذا كانت :
– زواياهما المتناظرة متطابقة .
– أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة .

سوف تتعلّم: تشابه المثلّثات .

نشاط :



في الشكل المقابِل المثلّثان أب جـ ، د هـ و لهما الشكل نفسه ولكن ليس بالضرورة القياسات نفسها.

من المعلومات على الرسم أكمل ما يلي :

١ ق ($\hat{\text{أ}}$) = ق ($\hat{\text{د}}$) ، ق ($\hat{\text{ب}}$) = ق ($\hat{\text{هـ}}$) ، ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ق ($\hat{\text{و}}$)

∴ الزوايا المتناظرة متطابقة

٢ $\frac{\text{أب}}{\text{د هـ}} = \frac{٦}{٣} = \frac{٢}{١}$ ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{٨}{٤} = \frac{٢}{١}$ ، $\frac{\text{أجـ}}{\text{د و}} = \frac{٤}{٢} = \frac{٢}{١}$

∴ الأضلاع المتناظرة متناسبة

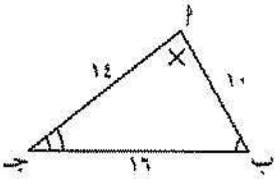
∴ Δ أب جـ يشابه Δ د هـ و وترمز لذلك Δ أب جـ ~ Δ د هـ و

Δ أب جـ ~ Δ د هـ و ⟺

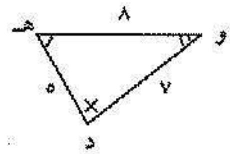
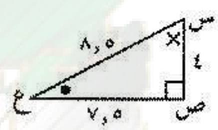
الزوايا المتناظرة المتطابقة	الأضلاع المتناظرة متناسبة
ق ($\hat{\text{أ}}$) = ق ($\hat{\text{د}}$) ق ($\hat{\text{ب}}$) = ق ($\hat{\text{هـ}}$) ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ق ($\hat{\text{و}}$)	$\frac{\text{أب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{د و}}$ (نسبة التشابه)

ملاحظة : **نراعي ترتيب رؤوس المثلثين عند كتابة عبارة التشابه .**

تدرّب (١) :

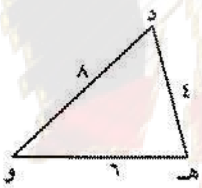


في الجدول التالي حدّد أيًّا من المثلّثات يشابه Δ أ ب جـ مع ذكر السبب .

م	المثلّث	يشابه أو لا يشابه	السبب
أ		يشابه	الزوايا المتناظرة متطابقة و أطوال الأضلاع المتناظرة ....
ب		لا يشابه	الزوايا المتناظرة غير متطابقة و أطوال الأضلاع غير متناظرة

مثال :

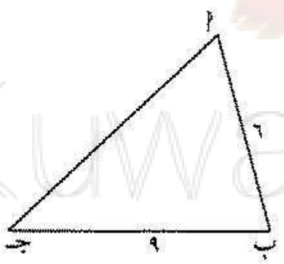
في الشكل المقابِل : Δ أ ب جـ $\sim$ Δ د هـ و :



تذكَّرْ أنّ :
مجموع قياسات زوايا المثلّث يساوي °١٨٠

أ اذكر الزوايا المتناظرة المتطابقة .

ب أُكتب نسبة التشابه .



جـ أوجِد طول $\overline{\text{أجـ}}$ ؟

الحلّ :

$\because$ Δ أ ب جـ $\sim$ Δ د هـ و :

أ $\therefore$ الزوايا المتناظرة والمتطابقة هي :

$\hat{أ} \cong \hat{د}$ ، $\hat{ب} \cong \hat{هـ}$ ، $\hat{جـ} \cong \hat{و}$

ب أطوال الأضلاع المتناظرة المتناسبة هي :

$\frac{\text{أب}}{\text{دهـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{د و}} \Longleftarrow$ نسبة التشابه $= \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

ملاحظة :
لتحديد الأضلاع المتناظرة ، يمكن ترتيب أطوال الأضلاع تصاعديًّا أو تنازليًّا في كلّ من المثلّثين .

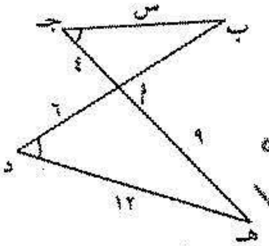
جـ $\frac{٦}{٤} = \frac{٩}{٦} = \frac{\text{أجـ}}{٨}$

$\frac{٦}{٤} = \frac{\text{أجـ}}{٨}$

$\text{أجـ} = \frac{٦ \times ٨}{٤}$

$\text{أجـ} = ١٢$

تدرّب (٢) :



في الشكل المقابِل : Δ أ ب جـ ~ Δ أ هـ د . أوجد قيمة س ؟

المعطيات : ق(هـ^) = ق(د^)   أهـ = ٤   أب = ٩
أد = ٦   هـد = ١٢

المطلوب : قيمة س

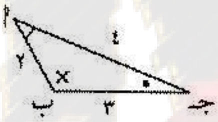
البرهان : ∵ Δ أبجـ ~ Δ أهـد

∴ $\frac{\text{بجـ}}{\text{هـد}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أد}}$

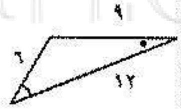
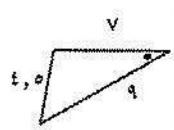
$\frac{\text{س}}{١٢} = \frac{٤}{٦}$ ⟸ س = $\frac{٤ \times ١٢}{٦}$ = ٨

تذكر أنّ : إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع نظائرهما في المثلث الآخر ، فإن الزاوية الثالثة فيهما تكون متطابقة. (لأن مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي ١٨٠°)

تمـرّن :

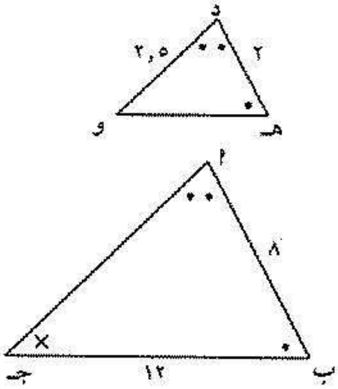


(١) في الجدول التالي حدِّد أيًا من المثلّثات يشابه Δ أ ب جـ مع ذكر السبب .

م	المثلّث	يشابه أو لا يشابه	السبب
أ		يشابه	لأن الزوايا المتناظرة متطابقة وأطوال الأضلاع متناظرة
ب		لا يشابه	لأن الزوايا المتناظرة غير متطابقة وأطوال الأضلاع غير متناظرة

٢ في الشكل المقابل : Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و .

أُحسب طول كلٍّ من $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{هـو}}$.



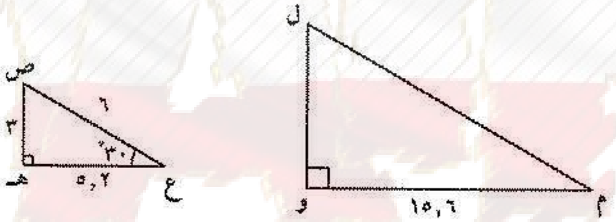
البرهان: ∵ Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و

∴ $\frac{\text{دهـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{دو}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{هـو}}{\text{بجـ}}$

$\frac{٢}{٨} = \frac{٢,٥}{\text{أجـ}} = \frac{\text{هـو}}{١٢}$

أجـ = ١٠ ، هـو = ٣

٣ في الشكل أدناه :



Δ ل م و ~ Δ ص ع هـ . أُحسب طول كلٍّ من $\overline{\text{ل م}}$ ، $\overline{\text{ل و}}$ ، ق($\hat{\text{ل}}$) .

البرهان: ∵ مجموع زوايا المثلث الداخلية = ١٨٠° ∴ ق($\hat{\text{ص}}$) = ٦٠°

∵ Δ ل م و ~ Δ ص ع هـ ∴ ق($\hat{\text{ل}}$) = ٦٠°

$\frac{\text{ع هـ}}{\text{م و}} = \frac{\text{هـ ص}}{\text{و ل}} = \frac{\text{ع ص}}{\text{م ل}}$

$\frac{٥,٢}{١٥,٦} = \frac{٣}{\text{و ل}} = \frac{٦}{\text{م ل}}$

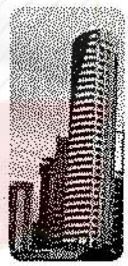
ل و = ٩ ، ل م = ٢٧

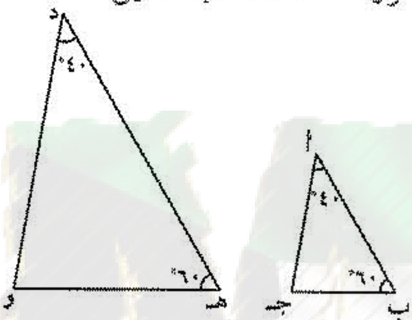
٤-٨ تشابه مثلّثين بتطابق زاويتين
Similarity of 2 Triangles with 2 Congruent angles

سوف تتعلّم: تشابه مثلّثين بتطابق زاويتين فقط .

في دراستنا لتشابه المثلثات استخدمنا العلاقة بين ٣ زوايا و ٣ أضلاع . نبحث الآن عن عدد أقلّ من الشروط لتشابه مثلّثين ، تُسمّى هذه الشروط حالات تشابه مثلّثين .

معلومات مفيدة : يستخدم المهندسون حالات تشابه المثلثات للمساعدة في إيجاد ارتفاع مبنى وكذلك معرفة عمق المياه عند نقطة محددة .





نشاط :

في الشكل المقابِل :

△ أ ب جـ فيه ق (أ̂) = ٤٠° ، ق (ب̂) = ٦٠° ،

△ د هـ و فيه ق (د̂) = ٤٠° ، ق (هـ̂) = ٦٠°

لمعرفة أطوال أضلاع المثلّثين نستخدم المسطرة وفرجار القياس لإكمال الجدول التالي :

المثلّث	قياسات الزوايا	أطوال الأضلاع
△ أ ب جـ	ق (أ̂) = ٤٠° ، ق (ب̂) = ٦٠° ، ق (جـ̂) = ٨٠°	أ ب = ٢ ، ب جـ = ١,٥ ، أ جـ = ١,٨
△ د هـ و	ق (د̂) = ٤٠° ، ق (هـ̂) = ٦٠° ، ق (و̂) = ٨٠°	د هـ = ٤ ، هـ و = ٣ ، د و = ٣,٦
النتائج	ق (أ̂) = ق (د̂) ق (ب̂) = ق (هـ̂) ق (جـ̂) = ق (و̂)	$\frac{أب}{دهـ} = \frac{٢}{٤}$ ، $\frac{ب جـ}{هـ و} = \frac{١,٥}{٣}$ $\frac{أجـ}{د و} = \frac{١,٨}{٣,٦}$

اللوازم :
- مسطرة
- فرجار قياس .

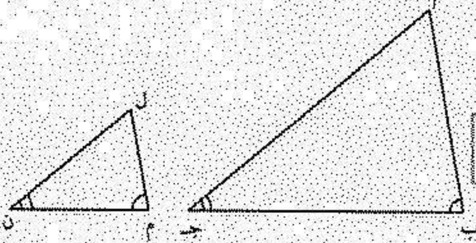
ما العلاقة بين الزوايا المتناظرة ؟ متطابقة ، الأضلاع المتناظرة ؟ متناسبة

هل المثلّثان متشابهان ؟ نعم

نظرية (١) :

يتشابه المثلّثان إذا تطابقت زاويتان في أحدهما مع نظائرهما في المثلّث الآخر .

أ ب جـ ، ل م ن مثلّثان فيهما :



$\boxed{ق(\hat{ب}) = ق(\hat{م})،\ ق(\hat{جـ}) = ق(\hat{ن})}$

$\Updownarrow$

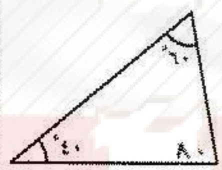
$\boxed{\therefore \triangle أ ب جـ \sim \triangle ل م ن}$

ومنها نستنتج أن $\frac{أ ب}{ل م} = \frac{ب جـ}{م ن} = \frac{أ جـ}{ل ن}$

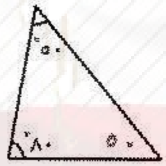
تدريب (١) :

حدِّد المثلّثات المتشابهة في ما يلي حسب الشروط المعطاة .

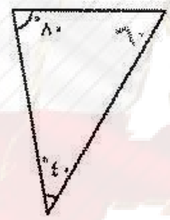
أ



ب

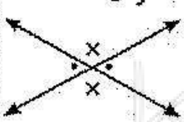


جـ



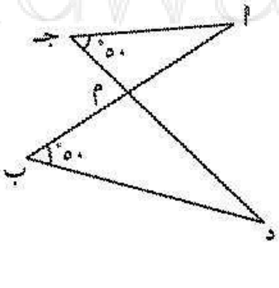
د

تذكَّر أنّ :



الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان .

تدريب (٢) :



في الشكل : ق ($\hat{جـ}$) = ق ($\hat{ب}$) = ٥٠°

أثبت أنّ : $\triangle$ أ م جـ $\sim$ $\triangle$ د م ب .

المعطيات : ق ($\hat{جـ}$) = ٥٠° ، ق ($\hat{ب}$) = ٥٠°

المطلوب : إثبات أنّ $\triangle$ أ م جـ $\sim$ $\triangle$ د م ب

البرهان : $\triangle$ أ م جـ ، $\triangle$ د م ب فيهما :

(١) ق ($\hat{جـ}$) = ق (٥٠°) (معطى)

(٢) ق (أ $\hat{م}$ جـ) = ق (ب $\hat{م}$ د) (المتقابل بالرأس)

$\therefore \triangle$ أ م جـ $\sim$ $\triangle$ د م ب

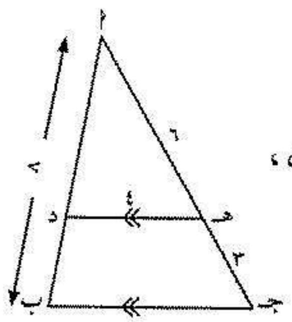
مثال :

في الشكل المقابل :

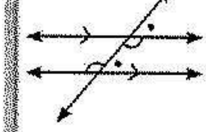
$\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أهـ = ٦ وحدة طول ، هـ جـ = ٣ وحدة طول ،

أب = ٨ وحدة طول ، هـ د = ٤ وحدة طول

أوجد طول كلّ من : $\overline{\text{أد}}$ ، $\overline{\text{د ب}}$



تذكَّرْ أنّ :



إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإنّ الزوايا:

(١) المتناظرة متطابقة

(٢) المتبادلة متطابقة

(٣) المتحالفة متكاملة

الحلّ :

المعطيات : $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أهـ = ٦ ، هـ جـ = ٣ ، أب = ٨ ، هـ د = ٤

المطلوب : إيجاد طول $\overline{\text{أد}}$ ، $\overline{\text{د ب}}$

البرهان : Δ أهـ د ، Δ أجـ ب فيهما :

(١) (أ̂) (زاوية مشتركة)

(٢) ق (أهـ̂ د) = ق (أجـ̂ ب) (بالتناظر والتوازي)

من (١) و (٢) ينتج أنّ Δ أهـ د ~ Δ أجـ ب

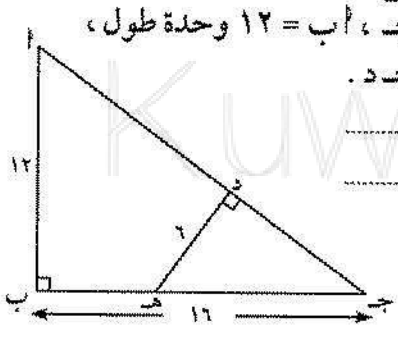
$\therefore \frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{هـ د}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{أد}}{\text{أب}}$ ، $\frac{٦}{٩} = \frac{٤}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{أد}}{٨}$

$\therefore$ أد $= \frac{\cancel{٦}^{٢} \times ٨}{\cancel{٩}_{٣}} = \frac{١٦}{٣} = ٥\frac{١}{٣}$ ، $\therefore$ د ب $= ٨ - ٥\frac{١}{٣} = ٢\frac{٢}{٣}$

تدرّب (٤) :

في الشكل المقابل : Δ أب جـ قائم في ب ، $\overline{\text{هـ د}} \perp \overline{\text{أجـ}}$ ، أب = ١٢ وحدة طول ،

ب جـ = ١٦ وحدة طول ، هـ د = ٦ وحدة طول ، أوجد جـ د .



المعطيات : م(ب̂) = ٩٠° ، م(هـ د̂ جـ) = ٩٠°

أب = ١٢ ، ب جـ = ١٦ ، هـ د = ٦

المطلوب : طول جـ د

البرهان : Δ أجـ ب ، Δ هـ جـ د فيهما :

(١) (جـ̂) زاوية مشتركة (معطى)

(٢) ق (جـ د̂ هـ) = ق (أب̂ جـ) (معطى)

$\therefore$ Δ أجـ ب ~ Δ هـ جـ د

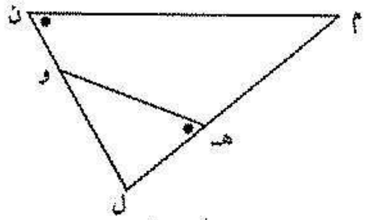
وينتج عنهم التناسب أطوال الأضلاع المتناظرة .

$\therefore \frac{\text{أجـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ د}} = \frac{\text{أب}}{\text{هـ د}}$

$\frac{\text{أجـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{١٦}{\text{جـ د}} = \frac{١٢}{٦}$

١٢ جـ د = ٦ × ١٦ ، $\therefore$ جـ د = ٨ وحدة طول

تمـــرّن :



① في الشكل المقابِل : أثبِت أنّ المثلّثين
ل هـ و ، ل ن م متشابهان .

المعطيات : ق(ل هـ̂ و) = ق(م ن̂ ل)

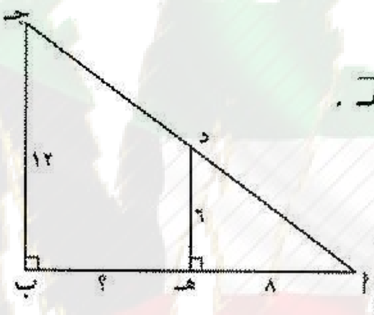
المطلوب : Δ ل هـ و ~ Δ ل ن م

البرهان : Δ ل هـ و ، Δ ل ن م فيهما :

(١) (ل̂) مشتركة (معطى)

(٢) ق(ل هـ̂ و) = ق(م ن̂ ل) (معطى)

∴ Δ ل هـ و ~ Δ ل ن م



② في الشكل المقابِل : أثبِت أنّ المثلّثين
أ ب جـ ، أ هـ د متشابهان . ثمّ أوجِد طول $\overline{\text{ب هـ}}$.

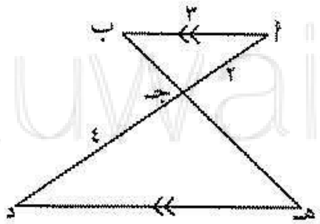
البرهان : Δ أ ب جـ ، Δ أ هـ د فيهما :

(١) (أ̂) مشتركة (معطى)

(٢) ق(أ هـ̂ د) = ق(أ ب̂ جـ) (معطى)

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ أ هـ د وينتج أن $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{هـ د}}{\text{ب جـ}}$ ، $\frac{٨}{\text{أ ب}} = \frac{٦}{١٢}$ ، أ ب = ١٦

∴ هـ ب = ٨



③ في الشكل :
$\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{هـ د}}$ ، أ جـ = ٢ وحدة طول ،
أ ب = ٣ وحدة طول ، جـ د = ٤ وحدة طول
أثبِت أنّ : Δ أ جـ ب ~ Δ د جـ هـ
ثمّ أوجِد هـ د .

المعطيات : $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{هـ د}}$ ، أ جـ = ٢ ، أ ب = ٣ ، جـ د = ٤

المطلوب : Δ أ جـ ب ~ Δ د جـ هـ ، أوجد هـ د

البرهان : Δ أ جـ ب ، Δ د جـ هـ فيهما :

(١) ق(جـ ب̂ أ) = ق(جـ هـ̂ د) بالتبادل

(٢) ق(جـ أ̂ ب) = ق(جـ د̂ هـ) بالتبادل

∴ Δ أ جـ ب ~ Δ د جـ هـ وينتج أن

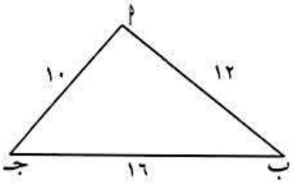
$\frac{\text{أ ب}}{\text{هـ د}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ د}}$ ، $\frac{٣}{\text{هـ د}} = \frac{٢}{٤}$ ، هـ د = ٦

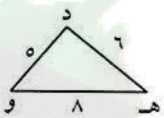
٤-٩ تشابه مثلّثين بتناسب أطوال الأضلاع المتناظرة
Similarity of 2 Triangles with Proportional Sides

سوف تتعلّم: تشابه مثلّثين بتناسب أطوال أضلاعهما المتناظرة .

معلومات مفيدة : يستخدم صانعوا المراكب الشراعية تشابه المثلثات في صناعة الأشرعة ، لأهميتها في عملية الإبحار وقدرتها على زيادة سرعة القارب .

نشاط :





في الشكل المقابِل :

Δ أب جـ فيه :

أب = ١٢ ، ب جـ = ١٦ ، أجـ = ١٠

Δ د هـ و فيه :

د هـ = ٦ ، هـ و = ٨ ، د و = ٥

من الرسم المقابل أكمل الجدول التالي :

المثلّث	أطوال الأضلاع	النتائج
Δ أب جـ	أب = ١٢ ، ب جـ = ١٦ ، أجـ = ١٠	$\frac{أب}{د هـ}$ = $\frac{١٢}{٦}$ = $\frac{٢}{١}$ $\frac{ب جـ}{هـ د}$ = $\frac{١٦}{٨}$ = $\frac{٢}{١}$ $\frac{أجـ}{د و}$ = $\frac{١٠}{٥}$ = $\frac{٢}{١}$
Δ د هـ و	د هـ = ٦ ، هـ و = ٨ ، د و = ٥	

١ ∴ الأضلاع المتناظرة متناسبة

اللوازم : – منقلة

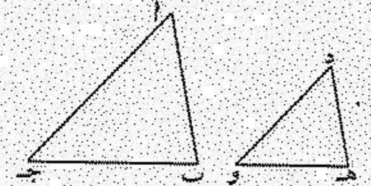
أكمل الجدول التالي باستخدام المنقلة :

المثلّث	أطوال الأضلاع	النتائج
Δ أب جـ	ق ($\hat{أ}$) = ٩٠° ، ق ($\hat{ب}$) = ٤٠° ق ($\hat{جـ}$) = ٥٠°	ق ($\hat{أ}$) = ق ($\hat{د}$) ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{هـ}$) ق ($\hat{جـ}$) = ق ($\hat{و}$)
Δ د هـ و	ق ($\hat{د}$) = ٩٠° ، ق ($\hat{هـ}$) = ٤٠° ق ($\hat{و}$) = ٥٠°	

٢ ∴ الزوايا المتناظرة متطابقة

هل Δ أب جـ ، Δ د هـ و متشابهان ؟ فسر ذلك .

نظرية (٢) :



يتشابه مثلّثان إذا تناسبت أطوال أضلاعهما المتناظرة .

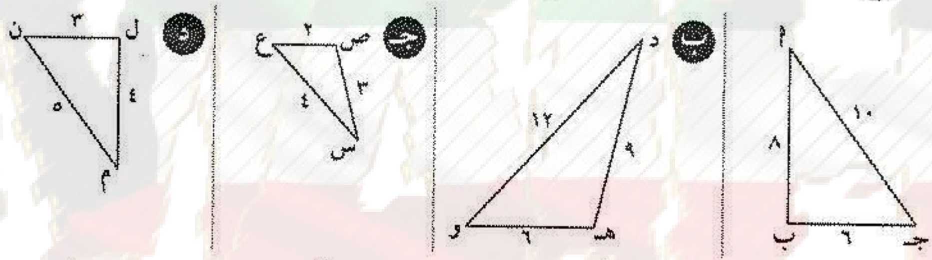
Δ د هـ و ، Δ أ ب جـ فيهما :

$\frac{\text{د هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{د و}}{\text{أ جـ}}$ ⟺ Δ د هـ و ~ Δ أ ب جـ

و منها نستنتج أن الزوايا المتناظرة متطابقة .

تدرّب (١) :

حدِّد أزواج المثلّثات المتشابهة فيما يلي :



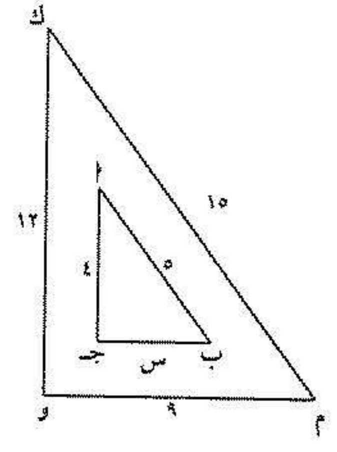
Δ أ ب جـ ~ Δ ل م ن   Δ د هـ و ~ Δ س ص ع

تدرّب (٢) :

في الشكل المقابل وبحسب المعطيات ، أوجِد قيمة س التي تجعل المثلثان متشابهان .

قيمة س التي تجعل المثلثان أ ب جـ ، ك م و متشابهان .

تحقق شرط تناسب الأضلاع المتناظرة .

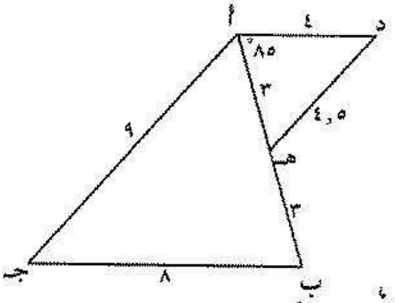


$\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{ك م}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{م و}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ك و}}$

$\boxed{\frac{٥}{١٥} = \frac{\text{س}}{٩}} = \frac{٤}{١٢}$

$\text{س} = \frac{٥ \times ٩}{١٥}$

$\therefore$ س = ٣



تدرّب (٣) :

في الشكل المقابل وحسب المعطيات المدونة عليه :

(أ) أثبِت أنّ : Δ أ د هـ ~ Δ ب جـ أ

(ب) أوجد قياس (أبَ جـ)

المعطيات : هـ د = ٤,٥ ، د أ = ٤ ، هـ أ = ٣ ، XX

أ جـ = ٩ ، جـ ب = ٨ ، أ ب = ٦ ، ق (أ^) = ٨٥°

المطلوب : إثبات أنّ Δ أ د هـ ~ Δ أ ب جـ ق (د أ^ هـ) = ٨٥°

البرهان : Δ أ د هـ ، Δ أ ب جـ فيهما :

(١) $\frac{\text{أ د}}{\text{ب جـ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

(٢) $\frac{\text{د هـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{٤,٥}{٩} = \frac{١}{٢}$

(٣) $\frac{\text{هـ أ}}{\text{أ ب}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

الأضلاع المتناظرة متناسبة ⟸ ∴ Δ أ د هـ ~ Δ أ ب جـ

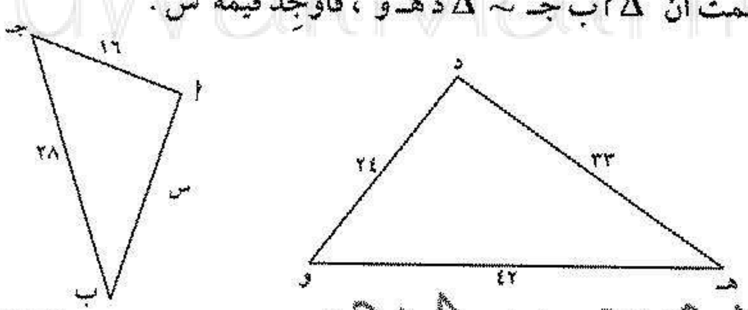
ق (أبَ جـ) = ق (د أ^ هـ) = ٨٥°

فكر وناقش

هل كل المثلثات المتطابقة متشابهة؟ وهل العكس صحيح؟

تمــرّن :

(١) إذا علمت أنّ Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و ، فأوجِد قيمة س .

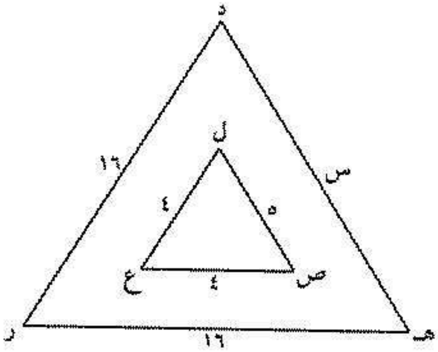


∵ Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و

$\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}}$ $\frac{٢٨}{٤٢} = \frac{\text{س}}{٣٣}$

س = ٢٢

② في الشكل المقابل وبحسب المعطيات ، أوجِد قيمة س التي تجعل المثلثان متشابهان .



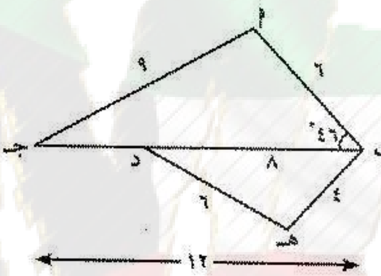
البرهان : لكي يتشابه المثلثان لابد أن

$\frac{ص ع}{هـ ر} = \frac{ل ع}{د ر} = \frac{ص ل}{هـ د}$

$\frac{٤}{١٦} = \frac{٤}{١٦} = \frac{٥}{س}$

$س = \frac{١٦ \times ٥}{٤} = ٢٠$

③ في الشكل المقابل :
إذا كان أب = ٦ ، ب جـ = ١٢ ،
أجـ = ٩ ، ق (أ ب̂ جـ) = ٤٦°
هـ ب = ٤ ، ب د = ٨ ، هـ د = ٦



أ أثبِت أنّ Δ أ ب جـ ~ Δ هـ ب د .

$\frac{ب هـ}{ب أ} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{هـ د}{أ جـ} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{ب د}{ب جـ} = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{ب هـ}{ب أ} = \frac{هـ د}{أ جـ} = \frac{ب د}{ب جـ}$

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ هـ ب د

ب أوجد ق (هـ ب̂ د) .

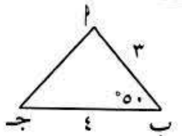
∵ Δ أ ب جـ ~ Δ هـ ب د

∴ ق (هـ ب̂ د) = ق (أ ب̂ جـ) = ٤٦°

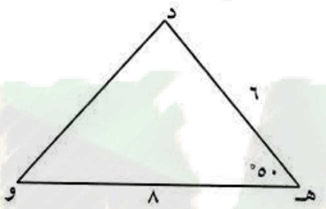
٤ ـ ١٠ تشابه مثلّثين بتطابق زاوية وتناسب طولي الضلعين المحددين لها

Similarity of 2 Triangles with a pair of Congruent angles and 2 pairs of Proportional Sides

سوف تتعلّم: تشابه مثلّثين بتطابق زاوية في كلٍّ منهما وتناسب طولي الضلعين المحددين لهما .



نشاط :



في الشكل المقابِل :

Δ أب جـ فيه : أب = ٣ ، ب جـ = ٤ ، ق ($\hat{ب}$) = ٥٠° ،

Δ د هـ و فيه : د هـ = ٦ ، هـ و = ٨ ، ق ($\hat{هـ}$) = ٥٠°

أكمِل الجدول التالي :

المثلّث	أطوال الأضلاع	تناسب الأضلاع
Δ أب جـ	أب = ٣ ، ب جـ = ٤	$\frac{أب}{د هـ}$ = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$
Δ د هـ و	د هـ = ٦ ، هـ و = ٨	$\frac{ب جـ}{هـ و}$ = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

∵ ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{هـ}$) = ٥٠°

اللوازم :
- منقلة

باستخدام الأدوات الهندسية (المنقلة) . أكمِل الجدول التالي :

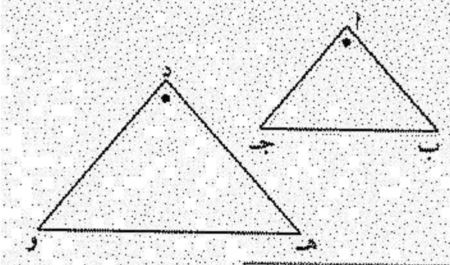
المثلّث	قياسات الزوايا	الزوايا المتناظرة
Δ أب جـ	ق ($\hat{أ}$) = ٨١°	ق ($\hat{أ}$) = ق ($\hat{د}$) الزوايا المتناظرة متطابقة
Δ د هـ و	ق ($\hat{د}$) = ٨١°	

من الحالة الأولى (تشابه مثلثين بتطابق زاويتين في كلّ منهما) .

ينتج أنّ : Δ أب جـ ~ Δ د هـ و

نظرية (٣) :

يتشابه المثلّثان إذا طابقت زاوية في أحدهما زاوية في المثلّث الآخر وتناسب طولا ضلعي هاتين الزاويتين .



اب جـ ، د هـ و مثلّثان فيهما :

ق ($\hat{أ}$) = ق ($\hat{د}$)
$\frac{\text{اب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{د و}}$

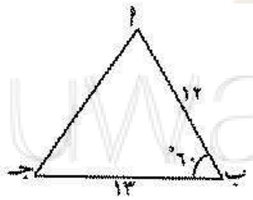
$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\Delta \text{ اب جـ} \sim \Delta \text{ د هـ و}}$

وينتج أن : ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{هـ}$) ،
ق ($\hat{جـ}$) = ق ($\hat{و}$) ،
$\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}}$ يساوي نسبة التشابه .

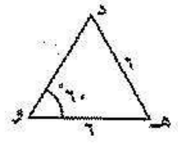
ملاحظة : نستطيع من النشاط السابق إثبات التشابه من تناسب أطوال الأضلاع .

تدرّب (١) :

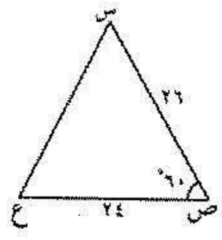
أيّ من المثلّثات أدناه متشابهة مع Δ اب جـ ؟



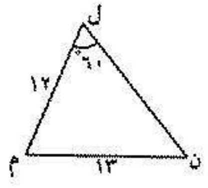
أ



ب



جـ

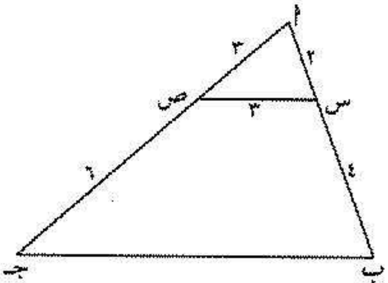


✗ ✓ ✗

$\frac{\text{ب جـ}}{\text{س ص}} = \frac{\text{اب}}{\text{ص ع}}$

ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{ص}$)

تدرّب (٢) :



في الشكل المقابل : أس = ٢ ، س ب = ٤ ،
أص = ٣ ، ص جـ = ٦

أ) أثبت أنّ : Δ أس ص يشابه Δ أب جـ

ب) أوجِد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.

المعطَيات : أس = ٢ ، س ب = ٤ ، أص = ٣ ، ص جـ = ٦

المطلوب : أ) إثبات أنّ Δ أس ص ~ Δ أب جـ | ب) طول $\overline{\text{ب جـ}}$

البرهان : Δ أس ص ، Δ أب جـ فيهما :

(١) (أ̂) مشتركة

(٢) $\frac{\text{أس}}{\text{أب}} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

(٣) $\frac{\text{أص}}{\text{أجـ}} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

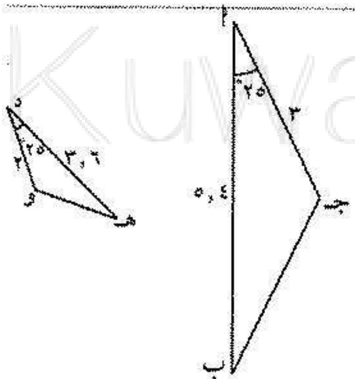
⟸ الأضلاع المتناظرة متناسبة

∴ Δ أس ص ~ Δ أب جـ

ينتج أن:

$\frac{\text{س ص}}{\text{ب جـ}} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{٣}{\text{ب جـ}} = \frac{١}{٣}$ ، ب جـ = ٣ × ٣ = ٩

تدرّب (٣) :



هل المثلّثان في الشكل المقابِل متشابهان ؟

المعطَيات :

ق(أ̂) = ٢٥° ، أجـ = ٣ ، أب = ٥,٤

ق(د̂) = ٢٥° ، د و = ٢ ، د هـ = ٣,٦

المطلوب :

أثبِت أنّ المثلّثان متشابهان .

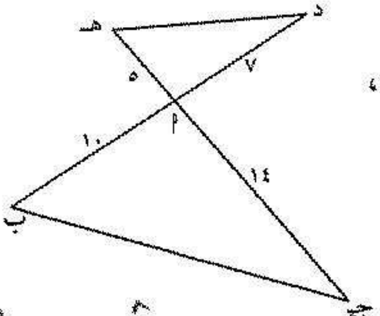
البرهان :

ق(أ̂) = ق (د̂) = ٢٥°

$\frac{\text{أب}}{\text{د هـ}} = \frac{٥,٤}{٣,٦} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{\text{أجـ}}{\text{د و}} = \frac{٣}{٢}$

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و

تمـــرّنْ :



① في الشكل المقابل وبحسب المعلومات المعطاة ،
أثبِت أنّ : Δ أ د هـ يشابه Δ أ جـ ب

البرهان: Δ أ د هـ ، Δ أ جـ ب فيهما:

(١) $\frac{\text{د أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{٧}{١٤} = \frac{١}{٢}$

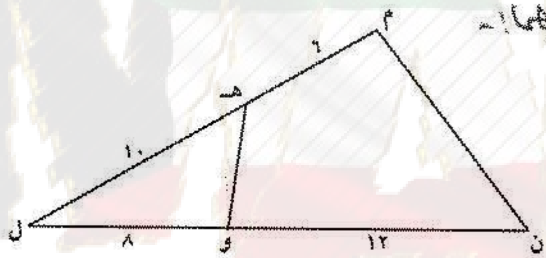
(٢) $\frac{\text{هـ أ}}{\text{أ ب}} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$ (٣) ق(د أ̂ هـ) = ق(جـ أ̂ ب) بالتقابل بالرأس

∴ أضلاع المتناظرة متناسبة

∴ Δ أ د هـ ~ Δ أ جـ ب

② في الشكل المقابل : أثبِت أنّ : Δ ل هـ و ~ Δ ل ن م .

البرهان: Δ ل هـ و ، Δ ل ن م فيهما:



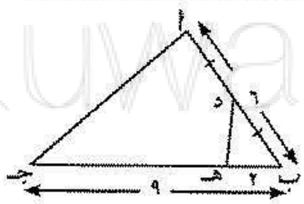
(١) (لَ) مشتركة

(٢) $\frac{\text{ل هـ}}{\text{ل ن}} = \frac{١٠}{٢٠} = \frac{١}{٢}$

(٣) $\frac{\text{ل و}}{\text{ل م}} = \frac{٨}{١٦} = \frac{١}{٢}$

∴ الأضلاع المتناظرة متناسبة

∴ Δ ل هـ و ~ Δ ل ن م



③ أ ب جـ مثلّث فيه أ ب = ٦ ، ب جـ = ٩
د منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث ب هـ = ٢
أثبِت أنّ Δ د ب هـ ~ Δ جـ ب أ .

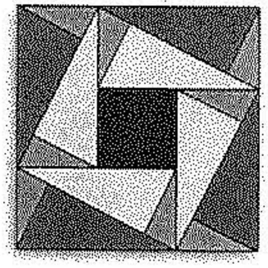
البرهان: Δ د ب هـ ، Δ جـ ب أ فيهما:

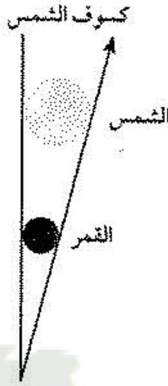
(١) (بَ) مشتركة ∴ الأضلاع المتناظرة متناسبة

(٢) $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب أ}} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$ ∴ Δ د ب هـ ~ Δ جـ ب أ

(٣) $\frac{\text{ب د}}{\text{ب جـ}} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

٤-١١ تطبيقات على تشابه المثلثات
Applications on the Similarity of Triangles





- في بعض الحالات يصعب قياس مسافة أو ارتفاع معيّن مباشرة . في هذه الحالة يمكن استخدام تشابه المثلّثات لإيجاد هذا القياس بطريقة غير مباشرة .
- وأيضًا من تصاميم المباني أو إيجاد بعد فلكي عن مركز الأرض عند مراقبة كسوف الشمس .

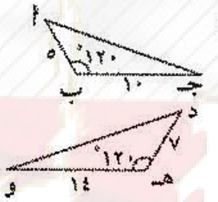
معلومات مفيدة :
يُقال إنّ الفيلسوف الإغريقي أرسطو هو أوّل من قاس ارتفاع الأهرامات في مصر باستعمال خصائص الشكل .
يبيّن النسبة الثابتة بين ارتفاعي جسمين وطولي ظليهما في الوقت نفسه .

تذكَّر أنّ :
البعد بين المستقيمات المتوازية ثابت ، فهما لا يتقاطعان مهما امتدّا .

تدرّب (١) :

حدِّد ما إذا كانت أزواج المثلّثات التالية متشابهة وفقًا للمعطيات الموضحة في كل شكل ، ثم اكتب عبارة التشابه والنظرية المستخدمة .

أ



∵ ق(ب̂) = ق(هـ̂)

أب / ده = ٥ / ٧

بجـ / هو = ١٠ / ١٤ = ٥ / ٧

نظرية (٣)

ب

في △ م ل ك

ق(ل̂) = ١٨٠° − ١٠٠°

= ٨٠°

في △ م ل ك ، △ س ص ع

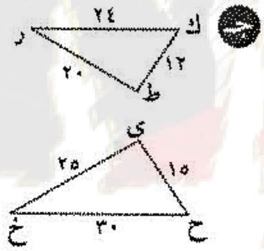
∵ ق(ل̂) = ق(س̂)

ق(م̂) = ق(ع̂)

∴ المثلثان متشابهان

نظرية (١)

جـ



∵ ك ط / ي ح = ١٢ / ١٥ = ٤ / ٥

ط ر / ي خ = ٢٠ / ٢٥ = ٤ / ٥

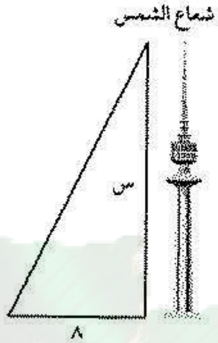
ك ر / ح خ = ٢٤ / ٣٠ = ٤ / ٥

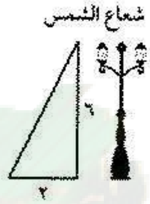
∴ المثلثان متشابهان

نظرية (٢)

تدرّب (٢)

قاس وليد طول ظلّ بناية فوجده ٨ وحدة طول ، وفي الوقت نفسه قاس طول ظلّ عمود إنارة قريب من البناية فوجده ٢ وحدة طول ، إذا كان إرتفاع عمود الإنارة ٦ وحدة طول ، فما ارتفاع البناية ؟





بما أنّ عمود الإنارة والبناية يشكلان مع الأرض زاوية قائمة ، وأشعة الشمس متوازية لذا فهي تشكل زوايا متطابقة مع الأرض ، إذًا يكون المثلثان في الرسم متشابهين .

$\frac{\text{طول ظل البناية}}{\text{طول ظل العمود}} = \frac{\text{ارتفاع البناية}}{\text{ارتفاع عمود الإنارة}}$ اكتب تناسبًا

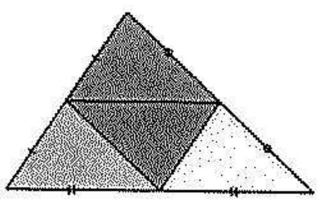
$\frac{٨}{٢} = \frac{س}{٦}$ عوّض

س = $\frac{٨ \times ٦}{٢}$ = ٢٤

ارتفاع البناية = ٢٤ وحدة طول

فكر وناقش

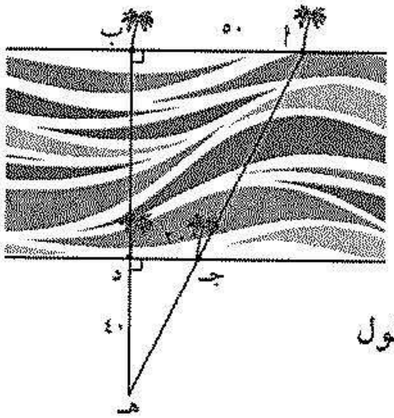
1. في الشكل المقابِل :
تمّ تقسيم المثلّث الكبير إلى مثلّثات صغيرة .
كيف يمكن إثبات أنّ المثلّثات الصغيرة متشابهة مع المثلّث الكبير .



2. هل كلّ المثلّثات المتطابقة الضلعين تكون متشابهة .

تمــرّنْ :

① أ ، ب شجرتان على شاطئ قناة ، البعد بينهما ٥٠ وحدة طول .
جـ ، د شجرتان على الشاطئ الآخر المقابل والموازي للشاطئ الأوّل والبعد بينهما ٢٠ وحدة طول . كما في الشكل المقابِل بحيث كان هـ د ⊥ جـ د ، هـ د = ٤٠ وحدة طول
استخدم التشابه لإيجاد عرض القناة د ب .

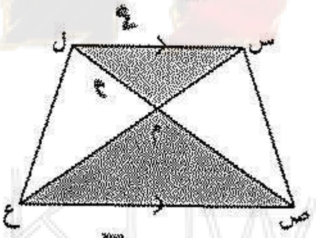


البرهان : ∵ Δ هـ د جـ ∼ Δ هـ أ ب

∴ $\frac{هـ د}{هـ ب} = \frac{جـ د}{أ ب}$ $\frac{٢٠}{٥٠} = \frac{٤٠}{هـ ب}$ هـ ب = ١٠٠

∴ عرض القناة = ١٠٠ − ٤٠ = ٦٠ وحدة طول

② في الشكل المقابِل : س ص ع ل شبه منحرف فيه $\overline{س ل} // \overline{ص ع}$
إذا كان س ل = ٤ ، ص ع = ٦ ،
ل م = ٢ فأثبِت أنّ : Δ س ل م ∼ Δ ع ص م ،
ثمّ أوجِد طول $\overline{ص ل}$.



البرهان : Δ س ل م ، Δ ع ص م فيهما

(١) ق(م ع ص) = ق(م ل س) بالتبادل

(٢) ق(م ع ص) = ق(م س ل) بالتبادل

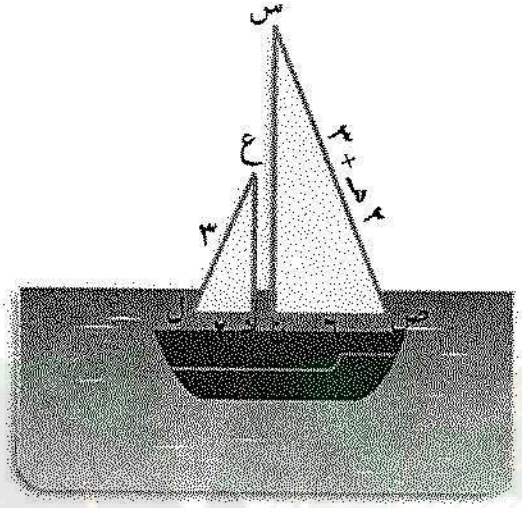
∴ Δ س ل م ∼ Δ ع ص م نظرية (١)

ونستنتج أنّ $\frac{س ل}{ص ع} = \frac{ل م}{ص م}$ $\frac{٤}{٦} = \frac{٢}{ص م}$ ص م = ٣

∴ ص ل = ٢ + ٣ = ٥

③ في الشكل المقابل شراعي المركب س ص ن ، ع ل د مثلثين متشابهين.

أوجد قيمة هـ ، ثم أوجد طول $\overline{\text{س ص}}$.



البرهان: ∵ △ س ص ن ، ع ل د متشابهين

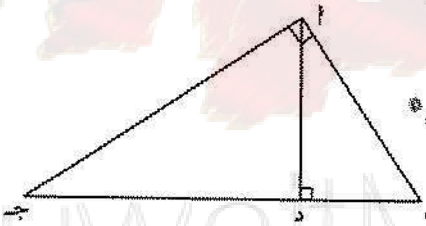
$\therefore \frac{\text{د ل}}{\text{ص ن}} = \frac{\text{ع ل}}{\text{ص س}}$

$\frac{٢}{٦} = \frac{٣}{٢هـ + ٣}$ ، ٢هـ + ٣ = ٩

هـ = ٣

∴ ص س = ٩

④ في الشكل المقابِل: أثبِت أنّ △ اب جـ ~ △ د ب ا.



البرهان: △ اب جـ ، △ د ب ا فيهما:

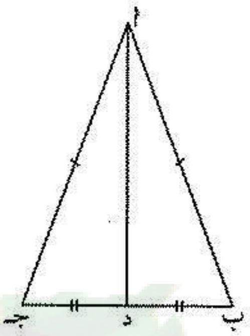
(١) (ب̂) مشتركة

(٢) ق (ب̂اد) = ق (ب̂اجـ) = ٩٠°

∴ △ اب جـ ~ △ د ب ا

نظرية (١)

١٢-٤ مراجعة الوحدة الرابعة
Revision Unit Four



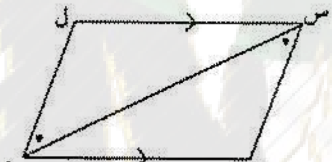
١ أكمِل كلًّا ممّا يلي :

لإثبات تطابق Δ أ ب د ، Δ أ جـ د بثلاثة أضلاع فإنّ :

أ) $\overline{أب} \cong$ ....أجـ....

ب) $\overline{أد} \cong$ ....أد.... (ضلع مشترك) XX

جـ) $\overline{ب د} \cong$ ....د جـ....

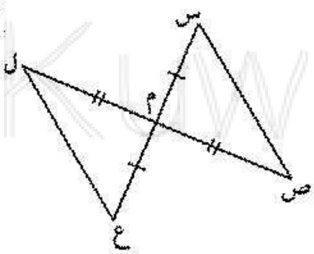


٢ في الشكل المقابِل أثبِت أنّ :

أ) Δ س ص ع ≅ Δ ع ل س ، ب) ق ($\hat{ص}$) = ق ($\hat{ل}$)

أ) ق (ص س ع) = ق (س ع ل) (معطى)
ق (ص ع س) = ق (ع س ل) (تبادل وتوازي)
س ع ضلع مشترك
(ز ، ض ، ز)

ب) ينتج من التطابق ق ($\hat{ص}$) = ق ($\hat{ل}$)

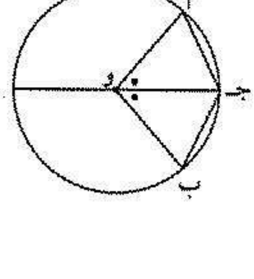


٣ في الشكل المقابِل: أثبِت أنّ Δ س م ص ≅ Δ ع م ل

ص م = م ل ، م ع = م س

ق (ص م س) = ق (ع م ل) التقابل بالرأس

∴ Δ س م ص ≅ Δ ع م ل (ض ، ز ، ض)



٤ في الشكل المقابِل : دائرة مركزها و ، أثبِت أنّ أجـ = ب جـ .

Δ أ و جـ ، Δ جـ ب و فيهما

(١) أ و = و ب (نصف قطر)

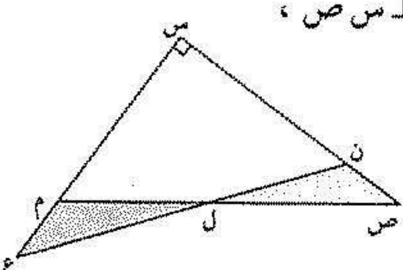
(٢) جـ و (ضلع مشترك)

(٣) ق (جـ و أ) = ق (جـ و ب) (معطى)

∴ Δ أ و جـ ≅ Δ جـ ب و وينتج أن أجـ = ب جـ

(ض ، ز ، ض)

٥ في الشكل المقابِل : إذا كان $\overline{\text{س ن}}$ = $\overline{\text{س م}}$ ، ن ع = ص م ، $\overline{\text{س ع}} \perp \overline{\text{س ص}}$ ،
فأثبِت أنّ Δ س ص م ≅ Δ س ع ن .



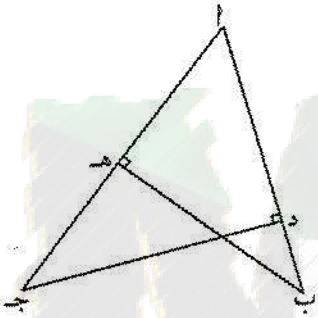
في Δ س ص م ، Δ س ع ن فيهما :

(١) ق(ص س̂ م) = ق(ع س̂ ن) = ٩٠° (معطى)

(٢) س ن = س م (معطى)

(٣) ص م = ن ع (معطى) ∴ Δ س ص م ≅ Δ س ع ن (Δ ، و ، ض)

٦ في الشكل المقابل : أثبِت أنّ : Δ ا د جـ يشابه Δ ا هـ ب



(١) ق(ا د̂ جـ) = ق(ا هـ̂ ب) = ٩٠°

(٢) (ا̂) مشتركة

∴ Δ ا د جـ ~ Δ ا هـ ب نظرية (١)

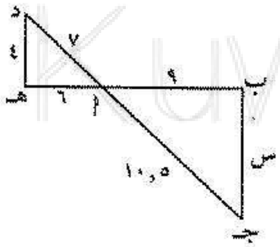
٧ في الشكلِ المقابل :

أ أثبِت أنّ المثلّثين متشابهان .

$\frac{\text{اهـ}}{\text{اب}} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{\text{اد}}{\text{اجـ}} = \frac{٧}{١٠,٥} = \frac{٢}{٣}$

ق(ب ا̂ جـ) = ق(هـ ا̂ د) بالتقابل بالرأس

∴ Δ ا ب جـ ~ Δ ا هـ د نظرية (٣)



ب أوجِد قيمة س .

$\frac{\text{اهـ}}{\text{اب}} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{\text{دهـ}}{\text{بجـ}} = \frac{٤}{\text{س}} = \frac{٢}{٣}$ ∴ س = ٦

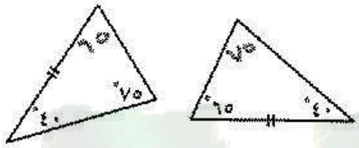
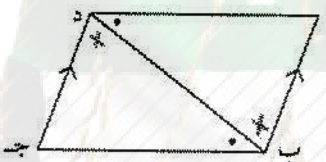
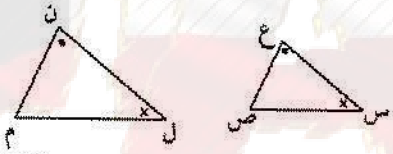
جـ أوجد محيط Δ ا ب جـ .

محيط Δ ا ب جـ = ٩ + ٦ + ١٠,٥

= ٢٥,٥

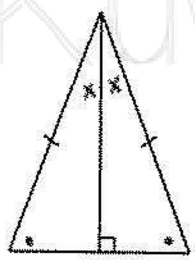
اختبار الوحدة الرابعة

أوّلًا : في البنود (١ – ٤) ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ يتشابه المثلّثان إذا تناسب طولا ضلعين في أحدهما مع نظائرهما في الآخر .	أ	ب
٢ المثلّثان في الشكل المقابِل متطابقان 	أ	ب
٣ في الشكل المقابِل : $\overline{أب} \cong \overline{جـد}$ 	أ	ب
٤ Δ س ص ع ، Δ ل م ن متشابهان 	أ	ب

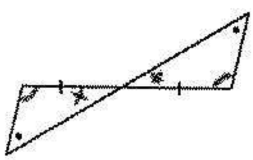
ثانيًا : لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة .

٥ في الشكل المقابِل : يتطابق المثلّثان وحالة تطابقهما هي :



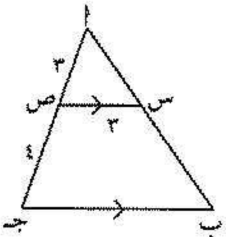
(أ) (ض . ض . ض) فقط
(ب) (ض . ز . ض) فقط
(جـ) (ز . ض . ز) فقط
(د) كل حالات التطابق

٦ في الشكل المقابِل : يتطابق المثلّثان وحالة تطابقهما هي :



(أ) (ض . ض . ض)
(ب) (ض . ز . ض)
(جـ) (ز . ض . ز)
(د) (⊿ . و . ض)

$\frac{أص}{أجـ} = \frac{س ص}{ب جـ}$ $\frac{٣}{٧} = \frac{٣}{ب جـ}$



٧ إذا كان $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$ فإنّ ب جـ يساوي :

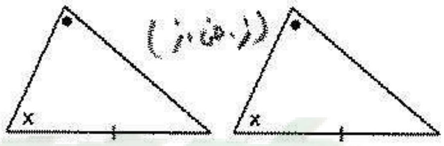
(أ) ٣ وحدة طول (ب) ٤ وحدة طول

(جـ) ٧ وحدة طول (د) ١٢ وحدة طول

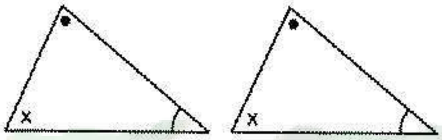
---

٨ المثلّثان المتطابقان في ما يلي هما :

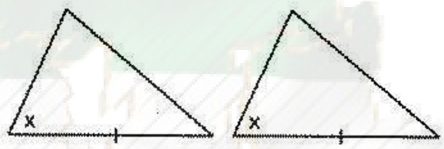
(أ) (أ، هـ، ز)



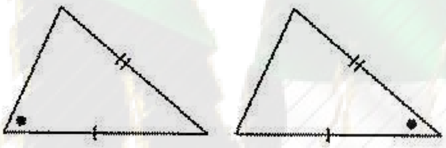
(ب)



(جـ)

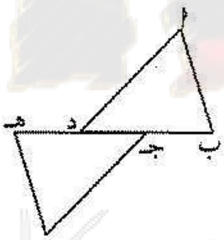


(د)



---

٩ في الشكل المقابِل ، إذا كان Δ أب د ≅ Δ و هـ جـ فإنّ :



(أ) ب جـ = د هـ (ب) $\hat{(أ)} \cong \hat{(هـ)}$

(جـ) ب جـ = جـ د (د) ق (أ $\hat{د}$ جـ) = ق (جـ $\hat{هـ}$ و)

---

١٠ إذا كان قياسا زاويتين في أحد مثلّثين متشابهين هما ٣٢° ، ٥٤° فإنّ قياسي زاويتين في المثلّث الآخر هما :

١٨٠ − (٣٢ + ٥٤)

(أ) ٣٢° ، ٩٥° (ب) ٨٤° ، ٥٤°

(جـ) ٣٢° ، ٨٤° (د) ٩٤° ، ٥٤°