وزارة التربية
منطقة حولي التعليمية
التوجيه الفني للرياضيات

اختبار الفصل الأول
الصف / الثاني عشر علمي
للعام الدراسي (2017/2016)

المجال الدراسي/ الرياضيات
الزمن / ساعتين و45 دقيقة

أولاً : أسئلة المقال

$\frac{\quad}{14}$

أجب عن الأسئلة التالية

السؤال الأول :

(a) أوجد :

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$$

الحل :

بالتعويض المباشر عن $x = 2$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}\times\frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1} = \frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$\frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)} = \frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)} = \frac{2}{(\sqrt{2x-3}+1)}\ ,\ x \neq 2$$

$$\lim_{x\to 2}(2x-3) = 1 > 0 \Rightarrow \lim_{x\to 2}\sqrt{2x-3} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(2x-3)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 2}x\left(\sqrt{2x-3}+1\right) = \lim_{x\to 2}\left(\sqrt{2x-3}+1\right) = \left(\lim_{x\to 2}\sqrt{2x-3}+\lim_{x\to 2}1\right)$$

$$= 1 + (1) = 2 \neq 0$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2}{(\sqrt{2x-3}+1)} = \frac{\lim_{x\to 2}(2)}{\lim_{x\to 2}x\left(\sqrt{2x-3}+1\right)} = \frac{2}{2} = 1$$

تابع السؤال الأول :

(b) أوجد :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{4x^2+5x+6}}\right)$$

الحل :

$$f(x)=\frac{2x-3}{\sqrt{4x^2+5x+6}}=\frac{x(2-\frac{3}{x})}{\sqrt{x^2(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2})}}$$

$$=\frac{x(2-\frac{3}{x})}{|x|\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}$$, عندما $x<0$ يكون $|x|=-x$

$$=\frac{x(2-\frac{3}{x})}{-x\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}==\frac{-2+\frac{3}{x}}{\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-2+\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}(-2)+\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=-2+0=-2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}4+\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{6}{x^2}=4+0+0=4>0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}=\sqrt{4}=2\quad 2\neq 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{4x^2+5x+6}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2+\frac{3}{x}}{\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}=\frac{\lim_{x\to-\infty}\left(-2+\frac{3}{x}\right)}{\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}=\frac{-2}{2}=-1$$

السؤال الثاني :

$\overline{}$
14

(a) إذا كانت الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & : x = 2 \\ -x^2 + 4 & : 2 < x < 5 \\ 25 & : x = 5 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f على [5 ، 2]

الحل :

مجال الدالة f هو : [2 , 5]

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad : \quad x \in (2,5)$$

$$\forall C \in (2 , 5) , \quad f(c) = -c^2 + 4$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} -x^2 + 4 = -c^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to c} f(x) = f(c) \quad \forall C \in (2 , 5)$$

∴ f متصلة على (2 , 5) ....(1)

ندرس اتصال الدالة f عند x=2 من اليمين

$$f(2) = -1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (-x^2 + 4) = 0 \neq f(2) \Rightarrow$$

الدالة f ليست متصلة عند x=2 من اليمين ....(2)

ندرس اتصال الدالة f عند x=5 من اليسار

$$f(5) = 25$$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} (-x^2 + 4) = -25 + 4 = -21 \neq f(5) \Rightarrow$$

الدالة f ليست متصلة عند x=5 من اليسار ....(3)

أي أن من (1) ، (2) ، (3) f متصلة على (2 , 5) فقط

(تراعى الحلول الأخرى)

تابع السؤال الثاني :

(b) أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = \frac{\cos x}{1+\tan x}$ واكتب معادلة المماس على منحني الدالة عند $A(\,0\,,1\,)$

الحل :

$$y = \frac{\cos x}{1+\tan x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\tan x)\left(\frac{d}{dx}cos\ x\right)-(\cos x)(\frac{d}{dx}(1+\tan x))}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{(1+\tan x)(-\sin x)-(\cos x)(0+\sec^2 x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x-\sin x\cdot\tan x-\cos x\cdot\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

ميل المماس للمنحني عند النقطة $A(\,0\,,1\,)$ هو :

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\,0\,,1\,)} = \left.\frac{-\sin x-\sin x\cdot\tan x-\cos x\cdot\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}\right|_{(\,0\,,1\,)}$$

$$= \frac{-\sin(0)-\sin(0)\tan(0)-\cos(0)\big(\sec(0)\big)^2}{\big(1+\tan(0)\big)^2} = -1$$

فتكون معادلة المماس هي :

$$y-1 = -1\,(x-0)$$

$$y-1 = -x$$

$$y = 1-x$$

السؤال الثالث :

$\frac{\quad}{14}$

(a) تعطى الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم إسطوانة بدلالة ارتفاعها h .

① أوجد الارتفاع $h(\text{cm})$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة .

② ما قيمة هذا الحجم ؟

الحل :

①

$$V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$$
$$V'(h) = 2\pi(-3h^2 + 36)$$
$$V'(h) = -6\pi(h^2 - 12)$$
$$V'(h) = 0$$
$$-6\pi(h^2 - 12) = 0$$
$$h^2 - 12 = 0$$
$$h^2 = 12$$
$$h = \sqrt{12}\ ,\ \ h = -\sqrt{12}$$

$h = 2\sqrt{3} > 0$ مقبول

$h = -2\sqrt{3} < 0$ يتم استبعادها كون الارتفاع موجب

$$V''(h) = -6\pi(2h)$$
$$V''(h) = -12\pi h$$
$$V''(2\sqrt{3}) = -12\pi(2\sqrt{3}) = -24\sqrt{3}\pi < 0$$

$\therefore$ $V(2\sqrt{3})$ قيمة عظمى مطلقة عند $h = 2\sqrt{3}$

$\therefore$ حجم الاسطوانة أكبر ما يمكن عند $h = 2\sqrt{3}$

أي : الارتفاع للحصول على أكبر حجم للأسطوانة هو : $h = 2\sqrt{3}\text{cm}$

② حجم الاسطوانة عند $h = 2\sqrt{3}\text{cm}$

$$V(2\sqrt{3}) = 2\pi[-(2\sqrt{3})^3 + 36(2\sqrt{3})]$$
$$V(2\sqrt{3}) = 96\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^3$$

تابع السؤال الثالث :

(b) أوجد قيمة كل من الثوابت a , b بحيث يكون للدالة f :

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نقطة حرجة عند $x = 2$ ، نقطة انعطاف عند $x = \frac{1}{2}$.

الحل :

f دالة كثيرة حدود فهي متصلة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$\because$ للدالة نقطة حرجة عند $x = 2$ $\therefore f'(x) = 0$ عند $x = 2$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(2) = 0 \implies 0 = 3(2)^2 + 2a(2) + b$$

$$\implies 0 = 12 + 4a + b$$

$$\implies 4a + b = -12 \qquad ①$$

$\because$ للدالة نقطة انعطاف عند $x = \frac{1}{2}$ $\therefore f''(x) = 0$ عند $x = \frac{1}{2}$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$f''\frac{1}{2} = 0 \implies 0 = 6(\frac{1}{2}) + 2a$$

$$\implies 2a = -3$$

$$\implies a = -\frac{3}{2} \qquad ②$$

نعوض ② في ① نجد :

$$4(-\frac{3}{2}) + b = -12$$

$$-6 + b = -12$$

$$b = -6$$

$$\therefore a = -\frac{3}{2} , b = -6$$

السؤال الرابع :

$\frac{}{14}$

(a) ادرس تغيرات الدالة التالية $f(x) = -x^3 - 3x^2$ وارسم بيانها

الحل :

دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^3) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (-x^3) = -\infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f

f دالة كثيرة حدود فهي متصلة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = -3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0$$

$$-3x^2 - 6x = 0$$

$$-3x(x+2) = 0$$

$$-3x = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \quad \Rightarrow f(0) = -(0)^3 - 3(0)^2 = 0$$

$\therefore$ $(0,0)$ نقطة حرجة

$$x = -2 \quad \Rightarrow f(-2) = -(-2)^3 - 3(-2)^2 = -4$$

$\therefore$ $(-2,-4)$ نقطة حرجة

نكون الجدول لدراسة إشارة f' :

$-\infty \quad -2 \quad 0 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$
إشارة f'	$- -$	$+ +$	$- -$
سلوك الدالة f	↘↘	↗↗	↘↘

من الجدول :

f متزايدة على الفترة $(-2,0)$ ، f متناقصة على الفترتين $(0,\infty)$, $(-\infty,-2)$

نستطيع أن نلاحظ من الجدول أنه توجد قيمة صغرى محليا عند $x=-2$ وقيمتها $f(-2)=-4$

وتوجد قيمة عظمى محليا عند $x=0$ وقيمتها $f(0)=0$

نكون الجدول لدراسة إشارة f'' :

$$f''(x)=-6x-6$$

نضع $f''(x)=0$

$$-6x-6=0$$

$$6x=-6$$

$$x=-1$$

$$f(-1)=-(-1)^3-3(-1)^2=-2$$

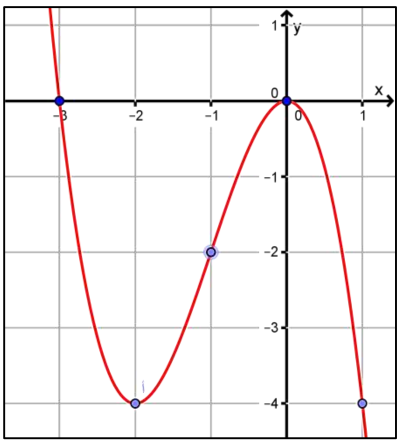
	$-\infty$	-1	∞
الفترات	$(-\infty,-2)$		$(-2,\infty)$
إشارة f''	$++$		$--$
بيان الدالة f	مقعر للأعلى		مقعر للأسفل

من الجدول نجد أنّ :

بيان الدالة f مقعر للأسفل على الفترة $(-1,\infty)$ ، بيان الدالة f مقعر للأعلى على الفترة $(-\infty,-1)$

النقطة $(-1,-2)$ نقطة انعطاف

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	0	-4	-2	0	-4
	نقطة إضافية	نقطة صغرى محلية	نقطة انعطاف	نقطة عظمى محلية	نقطة إضافية



تابع السؤال الرابع :

(b) في عينة من مجتمع إحصائي إذا كانت قيمة $\bar{x} = 40$ والانحراف المعياري $S = 7$ ، اختبر الفرض إذا كان $\mu = 35$ مقابل الفرض البديل $\mu \neq 35$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$ علماً أنّ : حجم العينة $n = 20$

الحل :

$\mu = 35$ ، $S = 7$ ، $n = 20$ ، $\bar{x} = 40$ ، $\alpha = 0.05$

① صياغة الفروض الإحصائية

$H_0 : \mu = 5$ مقابل $H_1 : \mu \neq 5$

② نوجد المقياس الإحصائي

$\because$ σ غير معلوم ، $n \leq 30$

$$\therefore t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{40 - 35}{\frac{7}{\sqrt{20}}} \approx 3.194$$

③ $\because$ مستوى الثقة 95 %

$$\therefore \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$\because n = 20$$

$\therefore$ درجات الحرية :

$$n - 1 = 20 - 1 = 19$$

من جدول توزيع t نجد :

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.025} = 2.093$$

④ منطقة القبول : $(-t_{\frac{\alpha}{2}} , t_{\frac{\alpha}{2}}) = (-2.093 , 2.093)$

⑤ اتخاذ القرار الإحصائي $\because 3.194 \notin (-2.093 , 2.093)$

نرفض فرض العدم $H_0 : \mu = 35$ ونقبل الفرض البديل $H_1 : \mu \neq 35$

ثانياً :البنود الموضوعية :

أولاً : في البنود (1-2) عبارات صحيحة وعبارات خاطئة ظلل في النموذج المخصص للإجابة الحرف ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة ، ⓑ إذا كانت العبارة غير صحيحة . (درجة لكل سؤال)

(1) الدالة f : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-3} & : x \le 2 \\ 3x-5 & : x > 2 \end{cases}$ متصلة عند $x = 2$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 3x}{5} = \frac{3}{5}$

ثانياً : في البنود (3-10) لكل بند أربع اختيارات . واحدة فقط منها صحيح ، اختر الإجابة الصحيحة ثم ظلل في النموذج المخصص للإجابة الحرف الدال عليها . (درجة ونصف لكل سؤال)

3	$\lim\limits_{x\to 2^-} \left(\frac{3}{x-2}\right)^5 =$			
	(a)0	(b)2	(c)∞	(d)$-\infty$
4	لتكن f : $f(x) = 3x-5$ ، $g(x) = x^2-3$ فإن $(f \circ g)(x) =$			
	(a) $3x^2-5$	(b) $3x^2-14$	(c) x^2-14	(d) $3x^2+14$
5	أبعاد أكبر مساحة لمستطيل قاعدته على محور السينات ورأساه العلويّان على القطع المكافئ $y = 4-x^2$ هي:			
	(a) $8, \frac{4\sqrt{3}}{3}$	(b) $\frac{8}{3}, \sqrt{3}$	(c) 4 , 4	(d) $\frac{8}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}$
6	إذا كانت f دالة كثير حدود ، $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لها فإن :			
	(a) $f''(c) = 0$	(b) $f'(c) = 0$	(c) $f(c) = 0$	(d) $f''(c)$ غير موجودة
7	إذا كانت $f(x) = (1+6x)^{\frac{2}{3}}$ فإن f'' يساوي			
	(a) $\frac{8}{27}(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$	(b) $8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$	(c) $-8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$	(d) $-64(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$
8	إذا كانت $f(x) = ax^2-25x$ لها قيمة قصوى محلية عند $x = \frac{5}{2}$ فإن a تساوي :			
	(a) 2	(b) 3	(c) 4	(d) 5
9	ميل مماس المنحني للدالة $f(x) = 9-x^2$ عند النقطة $x = 2$ هو:			
	(a) 4	(b) -4	(c) 5	(d) -5
10	إذا كان القرار رفض فرض العدم، وفترة الثقة $(-1.96 , 1.96)$فإن قيمة z المختارة ممكن ان تكون			
	(a) 1.5	(b) -2.5	(c) 1.87	(d)-1.5

0-0-0 انتهت الأسئلة 0-0-0

إجـــــابة الأســـــــــــئلة الموضوعية

1	ⓐ	ⓑ		
2	ⓐ	ⓑ		
3	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
4	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
5	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
6	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
7	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
8	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
9	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
10	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ

12