المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة)

مثال ١

في تجربة القاء قطعة نقود متماثلة ثلاث مرات متتالية وليكن المتغير العشوائي س يعبر عن عدد الصور أوجد ما يلي :

أ - فضاء العينة

ب - مدى المتغير العشوائي س.

جـ - نوع المتغير العشوائي س.

الحل :

فضاء العينة

فضاء العينة:

ف = { (ص،ص،ص)، (ص،ص،ك)، (ص،ك، ص)، (ص،ك،ك)،

(ك،ص،ص)، (ك، ص ،ك)، (ك، ك، ص)، (ك ،ك ،ك) }

عناصر فضاء العينة (ف)	عناصر مدى المتغير العشوائي س
(ص ، ص ، ص)	٣
(ص ، ص ، ك)	٢
(ص ، ك ، ص)	٢
(ص ، ك ، ك)	١
(ك ، ص، ص)	٢
(ك ، ص ، ك)	١
(ك ، ك ، ص)	١
(ك ، ك ، ك)	٠

∴ مدى التغير العشوائي س ={ ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ }

جـ - نوع المتغير العشوائي س :

متقـــــطع .

دالة التوزيع الاحتمالي

مثال ٢

عند إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين وبفرض أن المتغير العشوائي س يعبر عن «عدد الكتابات» أوجد دالة التوزيع الاحتمالي (د) للمتغير العشوائي س .

الحل: ١ـ فضاء العينة (ف) = {(ص،ص)،(ص،ك)،(ك،ص)،(ك،ك)}

عدد عناصر فضاء العينة ن(ف) = ٤

عناصر (ف)	عناصر مدى (س)
(ص، ص)	٠
(ص ، ك)	١
(ك ، ص)	١
(ك ، ك)	٢

∴ مدى التغير العشوائي س = { ٠ ، ١ ، ٢ }

عناصر (ف)	عناصر مدى (س)
(ص، ص)	٠
(ص ، ك)	١
(ك ، ص)	١
(ك ، ك)	٢

٣- د(٠) = ل (س=٠) = $\frac{١}{٤}$

د(١) = ل (س=١) = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

د(٢) = ل (س=٢) = $\frac{١}{٤}$

٤- دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س هي :

س	٠	١	٢
د (س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

لاحظ أن $\sum$ د(س) = $\frac{١}{٤} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤}$ = ١

مثال ٣

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س هي

س	٤	٣	٢	١	٠
د (س)	ك	٠,٢	٠,١	٠,١٥	٠,٣٥

أوجد : قيمة ك .

الحل: مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي د تساوي الواحد الصحيح

$$د(٤) + د(٣) + د(٢) + د(١) + د(٠) = ١$$

$$ك + ٠,٢ + ٠,١ + ٠,١٥ + ٠,٣٥ = ١$$

$$ك + ٠,٨ = ١$$

$$ك = ١ - ٠,٨$$

$$ك = ١ - ٠,٨$$

$$\therefore ك = ٠,٢$$

التوقع (الوسط) التباين للمتغيرات العشوائية المتقطعة

مثال ٤

الجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي د لمتغير عشوائي متقطع س

س	٠	١	٢	٢
د (س)	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٤}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$

أوجد :

أ) التوقع (μ)

ب) التباين ($\sigma^{٢}$)

جـ) الانحراف المعياري (σ)

(أ) التوقع $(\mu) = \sum س_ر \, د\,(س_ر)$

$$= ٠ \times \frac{١}{٩} + ١ \times \frac{٤}{٩} + ٢ \times \frac{١}{٣} + ٣ \times \frac{١}{٩} = \frac{١٣}{٩}$$

(ب) التباين $(\sigma^{٢}) = \sum س_ر^{٢} \, د(س_ر) - \mu^{٢}$

$$= (٠)^{٢} \times \frac{١}{٩} + (١)^{٢} \times \frac{٤}{٩} + (٢)^{٢} \times \frac{١}{٣} + (٣)^{٢} \times \frac{١}{٩} - \left(\frac{١٣}{٩}\right)^{٢} = \frac{٥٦}{٨١}$$

(جـ) الانحراف المعياري $(\sigma) = \sqrt{\text{التباين}} = \sqrt{\frac{٥٦}{٨١}} = \frac{\sqrt{١٤ \times ٤}}{٩}$

دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي س

مثال ٥

الجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع س

س	١	٢	٣	٤
د (س)	٠,٢	٠,٤	٠,١	٠,٣

أوجد : ت(٠) ، ت(٣) ، ت(٣,٥) ، ت(٥)

حيث ت دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي س

الحل:

ت(٠) = ل (س ≤ ٠) = ٠

ت(٣) = ل (س ≤ ٣) = د(٣) + د(٢) + د(١)

= ٠,١ + ٠,٤ + ٠,٢ = ٠,٧

ت(٣,٥) = ل (س ≤ ٣,٥) = د(٣) + د(٢) + د (١) = ٠,٧

ت(٥) = ل (س ≤ ٥) = د(٤) + د(٣) + د(٢) + د(١)

= ٠,٣ + ٠,١ + ٠,٤ + ٠,٢ = ١

مثال ٦

الجدول التالي يبين بعض قيم دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي المتقطع س

س	١	٢	٣	٥
ت (س)	٠,١٥	٠,٢	٠,٦	١

أوجد أ - ل (١ < س ≤ ٣)

ب - ل (٢ < س ≤ ٥)

جـ - ل (س > ٢)

أ - ل (١ < س ≤ ٣) = ت(٣) – ت(١)= ٠,٦ – ٠,١٥ = ٠,٤٥

ب - ل (٢ < س ≤ ٥) = ت(٥) – ت(٢) = ١ – ٠,٢ = ٠,٨

جـ - ل (س > ٢) = ١ - ل (س ≤ ٢)

= ١ – ت(٢)

= ١ – ٠.٢

= ٠,٨

توزيع ذات الحدين

مثال ٧

إذا كان س متغير عشوائي ذو حدين معلمتيه هما

ن = ٨ ، ل = ٠,٢

أوجد

أ - ل (س = ٢)

ب - ل (٢ ≤ س < ٤)

الحل : أ - ل (س = ٢) = د(٢) = ؟

لدينا ن = ٨ ، ل = ٠,٢ ، س = ٢

∴ نبحث في جدول الاحتمالات في توزيع ذات الحدين عن قيمة د(٢) فنجد أن

		ل		
	ن	س	٠,٠٥	٠,١	٠,٢
	٨	٠			
		١			
		٢			٠,٢٩٤
		٣			٠,١٤٧

د(٢) = ٠,٢٩٤

ب - ل (٢ ≤ س < ٤)

= ل (س=٢) + ل (س=٣)

= ٠,٢٩٤ + ٠,١٤٧

= ٠,٤٤١

مثال ٨ في تجربة القاء قطعة نقود متماثلة ٨ مرات أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري اذا كان المتغير العشوائي س هو ظهور صورة

الحل: ن = ٨ ، س = ظهور الصورة ل : هو احتمال ظهور صورة

$$ل = \frac{١}{٢} \quad ، \quad ١ - ل = \frac{١}{٢}$$

$$\text{التوقع } \mu = ن\,ل = ٨ \times \frac{١}{٢} = ٤$$

$$\text{التباين } \sigma^{٢} = ن\,ل\,(١ - ل)$$

$$= ٨ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = ٢$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\text{التباين}} = \sqrt{٢}$$

المتغيرات العشوائية المتصلة

مثال ٩ إذا كان س متغير عشوائيا متصلا ودالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٤} & : \text{عندما } ١ \leq س \leq ٥ \\ \text{صفر} & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد

أ - ل (١ < س ≤ ٥)

ب - ل (س < ٢)

ج - ل (س ≤ ١,٥)

د - ل (س = ٢)

الحل : أ - نرسم بيان الدالة د (س)

ل (١ < س ≤ ٥) = مساحة المنطقة المظللة (مستطيل)

= الطول × العرض

= ٤ × $\frac{١}{٤}$ = ١

ب- ل (س < ٣) = مساحة المنطقة المظللة

$$= (٣ - ١) \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$$

جـ ل (س ≤ ١,٥) = مساحة المنطقة المظللة

$$= \frac{١}{٤} \times (١,٥ - ٥) = \frac{٧}{٨}$$

د- ل (س = ٢) = صفر

مثال ١٠

إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلا دالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢} \text{ س} & \text{: عندما } ٠ \leq \text{س} \leq ٢ \\ \text{صفر} & \text{: في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

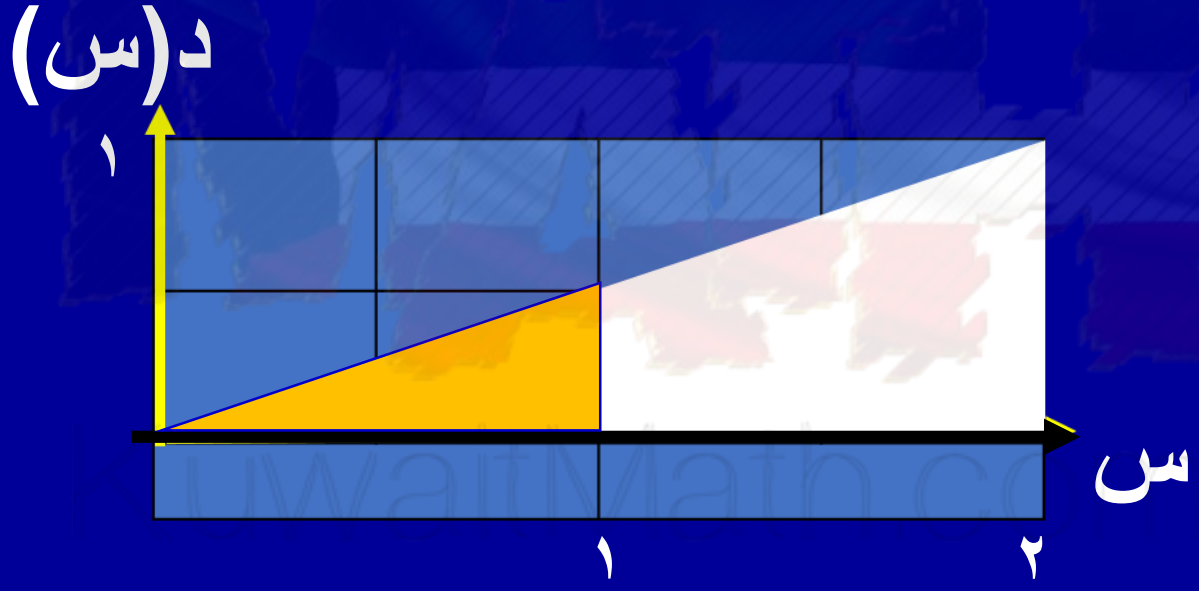
أوجد :أ - ل (س < ١)

ب - ل (س ≤ ١)

جـ - ل (س = ١)

الحل :

س	٠	١	٢
د (س)	٠	$\frac{١}{٢}$	١



أ- ل (س > ١) = مساحة المنطقة المظللة (المثلثة)

$$= \frac{1}{2} \times \text{ق} \times \text{ع}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ب - ل (س ≤ ١) = ١ – ل (س < ١)

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

جـ - ل (س = ١) = صفر

مثال ١١

لتكن الدالة د : د (س) =

$$\begin{cases} \frac{1}{3} & : \text{عندما } 0 \leq س \leq 3 \\ \text{صفر} & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

١) أثبت أن هذه الدالة هي دالة كثافة احتمال .

٢) أوجد التوقع والتباين .

الحل : ١) د هي دالة كثافة احتمال إذا كانت المساحة تحت المنحنى تساوي ١

المساحة تحت المنحنى تساوي مساحة المنطقة المستطيلة.

$$= ٣ \times \frac{١}{٣} = ١$$

الحل : ١) د هي دالة كثافة احتمال إذا كانت المساحة تحت المنحنى تساوي ١

المساحة تحت المنحنى تساوي مساحة المنطقة المستطيلة.

$$= ٣ \times \frac{١}{٣} = ١$$

٢) التوقع : $\mu = \frac{أ + ب}{٢} = \frac{٣ + ٠}{٢} = \frac{٣}{٢}$

التباين : $\sigma^{٢} = \frac{(ب - أ)^{٢}}{١٢} = \frac{(٣ - ٠)^{٢}}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

التوزيع الطبيعي المعياري

مثال ١٢

متغير عشوائي متصل س يتبع توزيعاً طبيعياً

التوقع $\mu = ٣٧$ ، التباين $\sigma^{٢} = ١٦$

أوجد أ - ل (٣٥ < س < ٤٠)

ب - ل (س < ٣٥)

الحل : أ) $\mu = ٣٧$ $\sigma^{٢} = ١٦$ $\sigma = ٤$

بوضع $س_{١} = ٣٥$

$$ق_{١} = \frac{س_{١} - \mu}{\sigma} = \frac{٣٥ - ٣٧}{٤} = -٠,٥$$

$س_{٢} = ٤٠$

$$ق_{٢} = \frac{س_{٢} - \mu}{\sigma} = \frac{٤٠ - ٣٧}{٤} = ٠,٧٥$$

ل (٣٥ < س < ٤٠) = ل (-٠,٥ < ق < ٠,٧٥)

= ل (ق < ٠,٧٥) - ل (ق< -٠,٥)

من جدول ق رقم (٤) رقم (٥)

= ٠,٧٧٣٣٧ – ٠,٣٠٨٥٤ = ٠,٧٣٤٨٣

ب - ل (س > ٣٥) = ل(ق > -٠,٥) = ١ - ل(ق< -٠,٥)

= ١ – ٠,٣٠٨٥٤

= ٠,٩٦١٤٦

مثال ١٣

مثل بيانياً منطقة الحل المشترك للمتباينتين

س – ص ≥ ٢ ، س + ص < ٢

الحل :

نرسم خط الحدود للمتباينة س – ص ≥ ٢

من المعادلة المناظرة ل١ :س – ص = ٢

س	٠	١	٢
د(س)	- ٢	- ١	٠

نعوض بنقطة الأصل (٠ ، ٠) في المتباينة

فنجد: ٠ – ٠ ≤ ٢ ، ٠ ≤ ٢ عبارة صحيحة

اذن تظلل المنطقة التي تحوي نقطة الأصل

٢- نرسم خط حدود المتباينة س + ص > ٢

من المعادلة المناظرة س + ص = ٢

س	٠	١	٢
د(س)	٢	١	٠

نعوض نقطة الأصل (٠،٠) في المتباينة

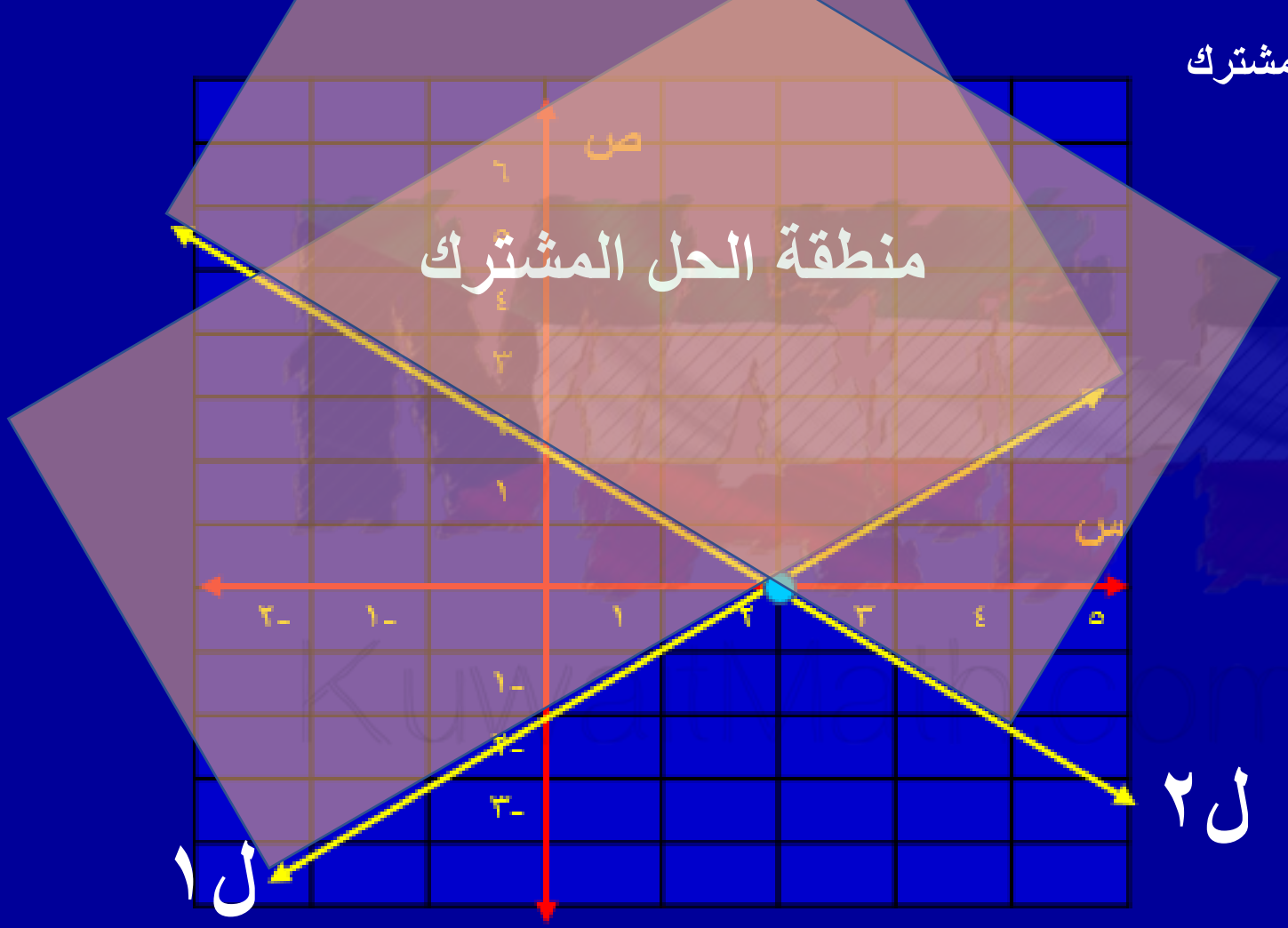
س + ص > ٢

فنجد ٠ + ٠ > ٢

٠ > ٢ عبارة غير صحيحة

إذن نظلل المنطقة التي لا تحوي نقطة الأصل

٣- نظلل منطقة الحل المشترك



Kwalwam.com