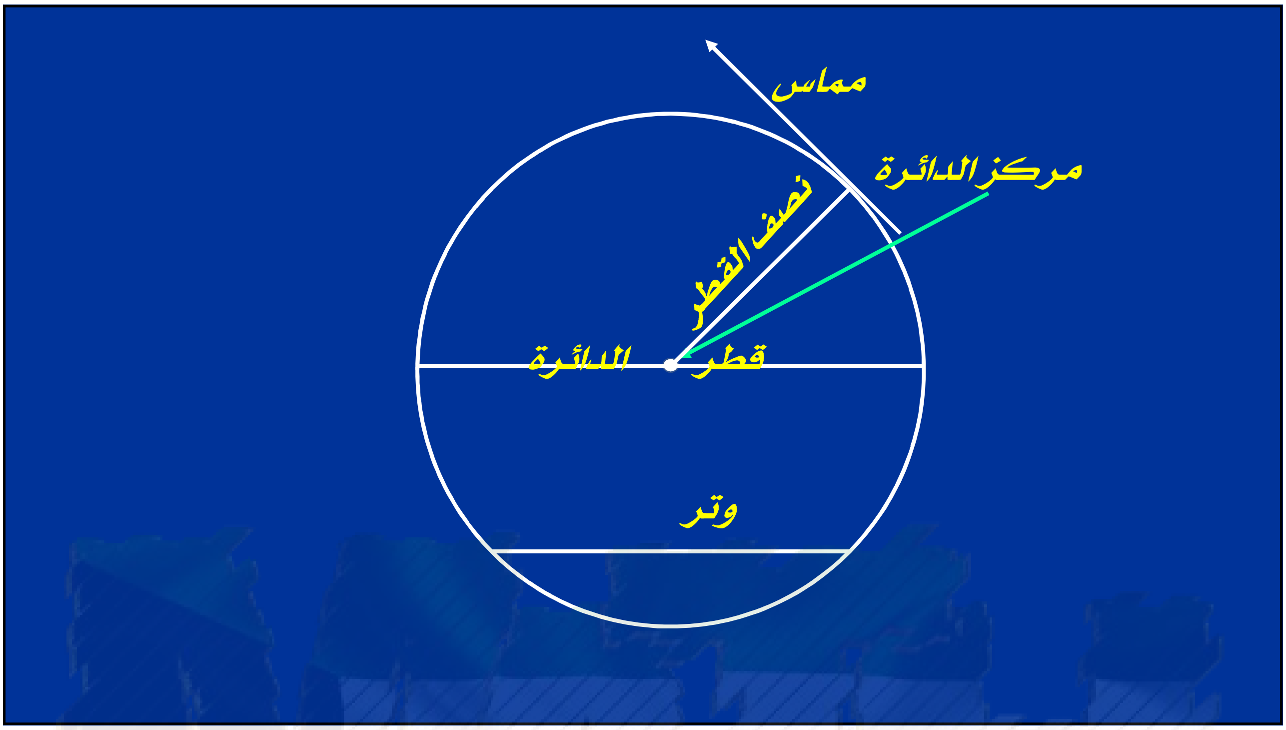
الريـــــاضيات

تمارين مراجعة للصف العاشر

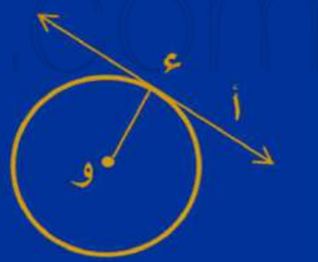
الفصل الدراسي الثاني

إعداد : أ . نهال هاشم عبد الحميد

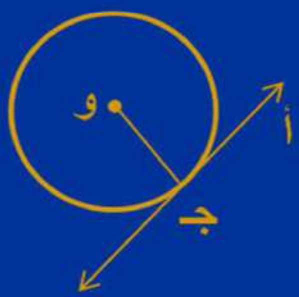
الدائـرة



الدائرة



$\overleftrightarrow{\text{أء}} \perp \overleftrightarrow{\text{ءو}}$ المماس عمودي على نصف قطر التماس

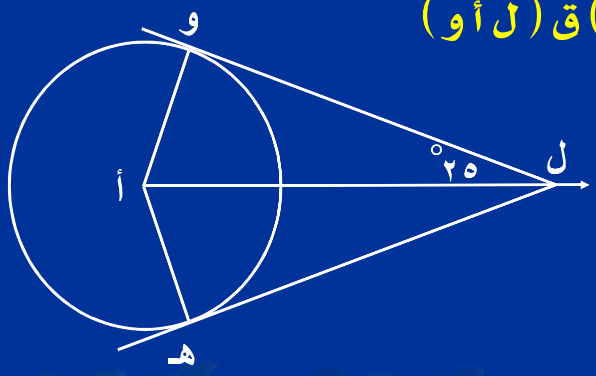


ق($\widehat{\text{و جـ أ}}$)= ٩٠°

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ مماساً

في الشكل المقابل دائرة مركزها أ اذا كانت $\overline{\text{ل هـ}}$ ، $\overline{\text{ل و}}$ تمسان الدائرة فأوجد :

١) ق (أ $\hat{\text{هـ}}$ ل) ٢) ق ($\hat{\text{ل}}$ أ و)



المعطيات:

١) دائرة مركزها أ

٢) $\overline{\text{ل هـ}}$ مماس للدائرة

٣) $\overline{\text{ل و}}$ مماس للدائرة

المطلوب:

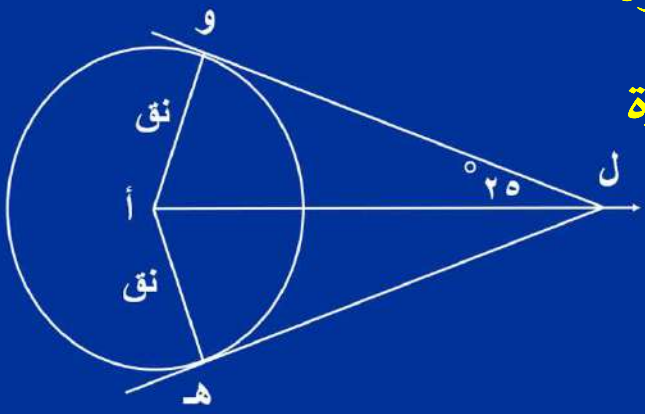
١) ق (أ $\hat{\text{هـ}}$ ل) ٢) ق (ل $\hat{\text{أ}}$ و)

المعطيات:

١) دائرة مركزها أ

٢) $\overline{\text{ل هـ}}$ مماس للدائرة

٣) $\overline{\text{ل و}}$ مماس للدائرة

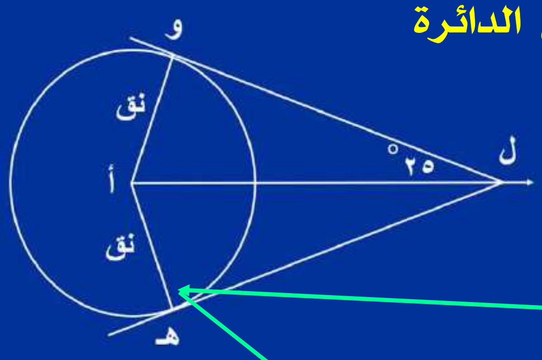


المطلوب:

١) ق (أ $\hat{\text{هـ}}$ ل)

البرهان:

∵ الدائرة مركزها أ ، و ، هـ نقاط تنتمي الى الدائرة



∴ $\overline{\text{أ و}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}}$ انصاف أقطار

∵ $\overline{\text{ل هـ}}$ مماس للدائرة

∴ زاوية (أ $\hat{\text{هـ}}$ ل)

زاوية المحصورة بين المماس و نصف القطر

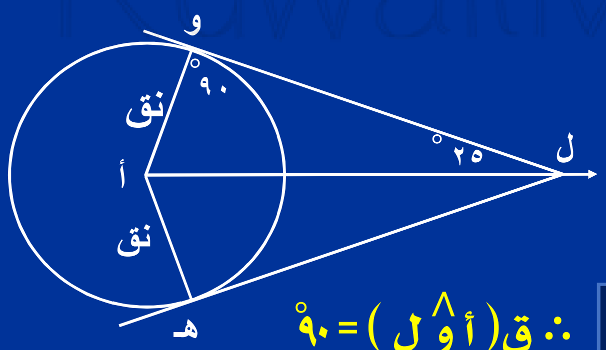
المماس عمودي على نصف قطر التماس

∴ ق(أ $\hat{\text{هـ}}$ ل) = ٩٠°

المعطيات: ١) دائرة مركزها أ ٣) $\overline{\text{ل و}}$ مماس للدائرة

المطلوب: ٢) ق (ل $\hat{\text{أ}}$ و)

البرهان: وبالمثل



∵ $\overline{\text{ل و}}$ مماس للدائرة

∴ زاوية (أ $\hat{\text{و}}$ ل) زاوية محصورة بين نصف القطر والمماس

المماس عمودي على نصف قطر التماس

∴ ق(أ $\hat{\text{و}}$ ل) = ٩٠°

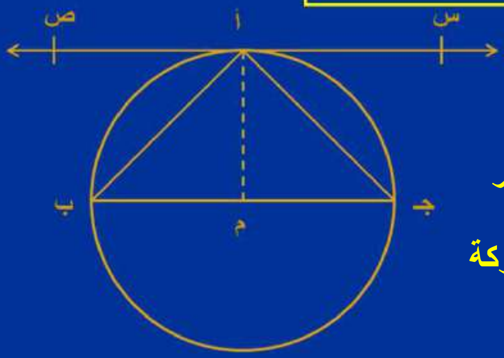
في المثلث ل و أ

∴ ق (ل $\hat{\text{أ}}$ و) = ١٨٠ − (٢٥ + ٩٠) = ٦٥°

لان مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

١٢/٠٨/١٤٣٩

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية والزوايا المماسية



- ق (أ مˆب) المركزية = قياس القوس الذي تحصره

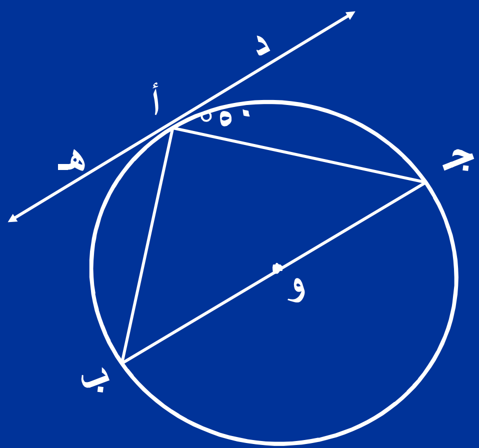
ق (أ جˆب) المحيطية = نصف قياس القوس (أ⌢ب) الأصغر

ق (أ بˆجـ) المحيطية =نصف ق (أ مˆ جـ) المركزية المشتركة معها في نفس القوس

ق (ص أˆب) المماسية = ق (أ جـˆب) المحيطية المشتركة معها في نفس القوس

ق (جـ أˆب) = ٩٠ ْ زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة.

في الشكل المقابل : دائرة مركزها و . اذا كان د هـ مماسا للدائرة عند أ ، ق (جـ أˆ د) = ٥٠° فأوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ



المعطيات:

١) دائرة مركزها و

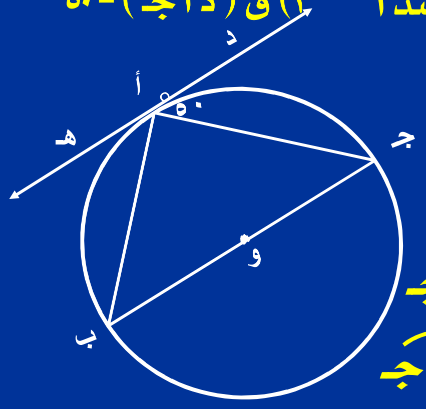
٢) د هـ مماس للدائرة عند أ

٣) ق (د أˆجـ) = ٥٠ °

المطلوب:

إيجاد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ

المعطيات: ١) دائرة مركزها و ٢) د هـ مماس للدائرة عند أ ٣) ق (د أ̂ جـ) = ٥٠°



المطلوب: إيجاد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ

البرهان:

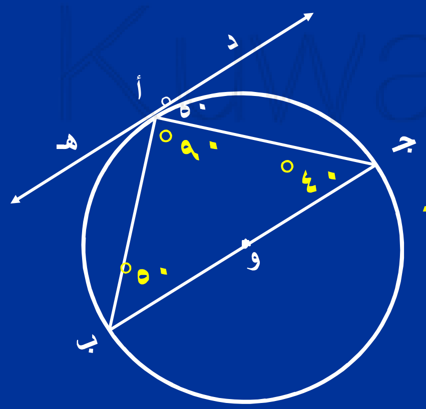
∵ د هـ مماسا للدائرة التي مركزها و

∵ زاوية (د أ̂ جـ) زاوية مماسية تحصر القوس أ جـ

∵ زاوية (أ ب̂ جـ) زاوية محيطية تحصر القوس أ جـ

قياس الزاوية المماسية = قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس

∴ ق (د أ̂ جـ) = ق (أ ب̂ جـ) = ٥٠°



∵ ب جـ قطر في الدائرة

∴ ق (ب جـ) = $\frac{360°}{2}$ = ١٨٠°

∵ زاوية (ب أ̂ جـ) زاوية محيطية تحصر القوس ب جـ

قياس الزاوية المحيطية = نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها

∴ ق (ب أ̂ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (ب جـ) = ٩٠°

في المثلث أ ب جـ

∴ ق (أ جـ̂ ب) = ١٨٠ − (٥٠+٩٠) = ٤٠°

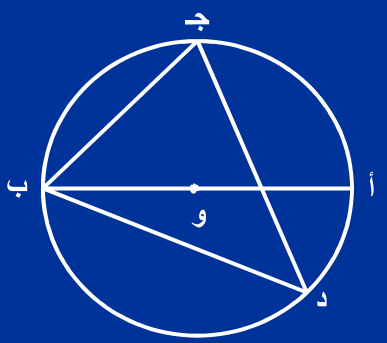
لان مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

في الشكل المقابل : دائرة مركزها و . اذا كان ق (جـ بَ أ) = ٥٠°

فأوجد ما يلي مع ذكر السبب : (١) ق (أ جـَ ب)

(٢) ق (جـ أَ ب)

(٣) ق (جـ دَ ب)



المعطيات:

١) دائرة مركزها و

٢) ق (جـ بَ أ) = ٥٠°

المطلوب:

إيجاد : ١) ق (أ جـَ ب)

٢) ق (جـ أَ ب)

٣) ق (جـ دَ ب)

نصل $\overline{\text{أ جـ}}$

البرهان:

∵ *زاوية (أ جـَ ب) زاوية محيطية تحصر نصف دائرة*

∴ *ق (أ جـَ ب) = ٩٠°* ١

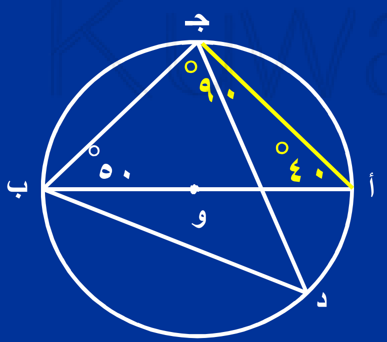
في المثلث أ ب جـ مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

∴ *ق (جـ أَ ب) = ١٨٠ − (٥٠+٩٠) = ٤٠°* ٢

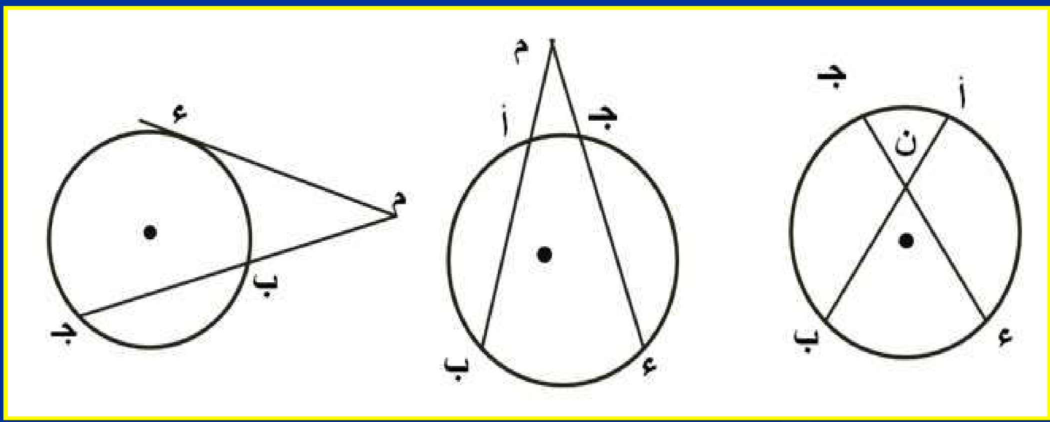
∵ *(أ جـَ ب)، (جـ دَ ب)*

زاويتان محيطيتان مرسومتان على ($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$)

∴ *ق (جـ أَ ب) = ق (جـ دَ ب) = ٤٠°* ٣



الدائرة، الأوتار المتقاطعة، المماس



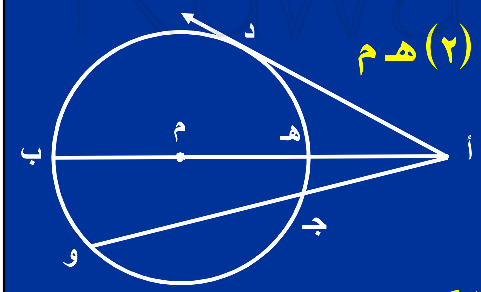
أ ن × ن ب
=
ن جـ × ن ء

م أ × م ب
=
م جـ × م ء

(م ء)٢
=
م ب × م جـ

في الشكل المقابل : دائرة مركزها م . $\overleftarrow{\text{أ د}}$ مماس للدائرة عند د ، أ جـ = ٣ سم ،
أ هـ = ٢ سم ، جـ و = ٩ سم

فأوجد كلا من : (١) أ د (٢) هـ م



المعطيات:

١) دائرة مركزها م

٢) $\overleftarrow{\text{أ د}}$ مماس للدائرة عند د

٣) أ جـ = ٣ سم ، أ هـ = ٢ سم ، جـ و = ٩ سم

المطلوب:

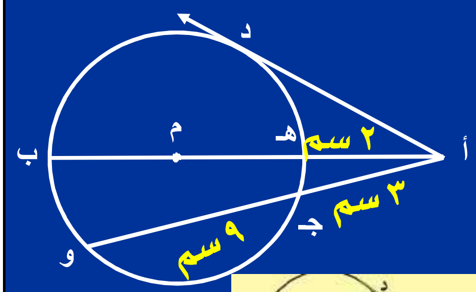
إيجاد : ١) أ د ٢) هـ م

البرهان:

∵ $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس للدائرة عند د

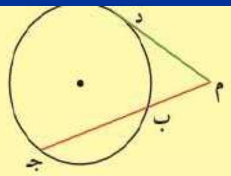
∵ $\overline{\text{أو}}$ قاطع للدائرة

أ و = ٣ + ٩ = ١٢ سم



إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

(م د)^{٢} = م ب × م جـ.



(أ د)^{٢} = أ جـ × أ و

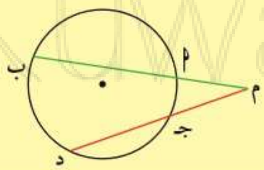
(أ د)^{٢} = ٣ × ١٢ = ٣٦

أ د = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ سم

البرهان: ∵ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أو}}$ قاطعان للدائرة مرسومان من نقطه خارج الدائره

إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

م أ × م ب = م جـ × م د.



أ هـ × أ ب = أ جـ × أ و

٢ × أ ب = ٣ × ١٢

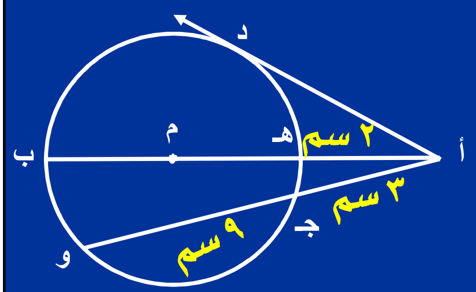
٢ × أ ب = ٣٦

أ ب = $\frac{٣٦}{٢}$ = ١٨ سم

هـ ب = أ ب – أ هـ = ١٨ – ٢ = ١٦ سم

هـ م = $\frac{١}{٢}$ هـ ب

∴ هـ م = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ = ٨ سم



في الشكل المقابل :اذا كان م د ، م ب يقطعان الدائرة التي مركزها و ، و كان
م أ = ٤ سم ، م جـ = ٣ سم ، نق = ٤ سم . فأوجد طول أ ب

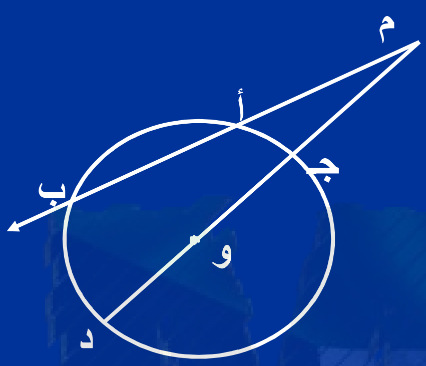
المعطيات:

١) م د ، م ب يقطعان الدائرة التي مركزها و

٢) م أ = ٤ سم ، م جـ = ٣ سم ، نق = ٤ سم

المطلوب:

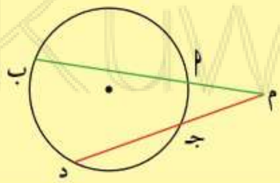
إيجاد طول أ ب



البرهان: ∵ م د ، م ب يقطعان الدائرة التي مركزها و

إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

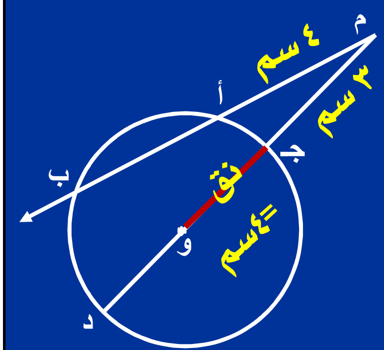
م أ × م ب = م جـ × م د.



∵ نق = ٤سم ∴ جـ و = ٤سم ∴ جـ د = ٢× ٤ = ٨ سم

م أ × م ب = م جـ × م د
٤ × م ب = ٣ × ١١
٤ × م ب = ٣٣
٤ × (م أ + أ ب) = ٣٣
٤ × (٤ + أ ب) = ٣٣
١٦ + ٤ أ ب = ٣٣

٤ أ ب = ٣٣ − ١٦
٤ أ ب = ١٧
أ ب = $\frac{١٧}{٤}$

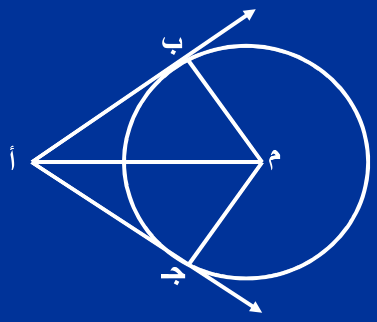


في الشكل المقابل دائرة مركزها م . و طول نصف قطرها ٣ سم ، أ نقطة خارج الدائرة حيث $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ على الترتيب

ق (ب $\hat{\text{م}}$ جـ) = ١٢٠ ° فأوجد : ١) ق (أ $\hat{\text{ب}}$ م)

٢) ق (ب $\hat{\text{أ}}$ جـ)

٣) طول $\overline{\text{أ م}}$



المعطيات:

١) دائرة مركزها م طول نصف قطرها ٣ سم

٢) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ

٣) ق (ب م جـ) = ١٢٠ °

المطلوب:

إيجاد : ١) ق (أ $\hat{\text{ب}}$ م)

٢) ق (ب $\hat{\text{أ}}$ جـ)

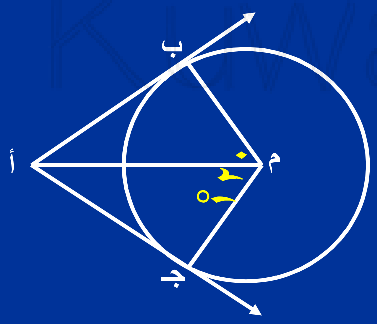
٣) طول $\overline{\text{أ م}}$

البرهان:

∵ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة التي مركزها م

∵ $\overline{\text{ب م}}$ نصف قطر التماس

∴ ق (م $\hat{\text{ب}}$ أ) = ٩٠ ° ١



المماس عمودي على نصف قطر التماس

وبالمثل ∵ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ مماس للدائرة التي مركزها م

∵ جـ م نصف قطر التماس

∴ ق (م $\hat{\text{جـ}}$ أ) = ٩٠ °

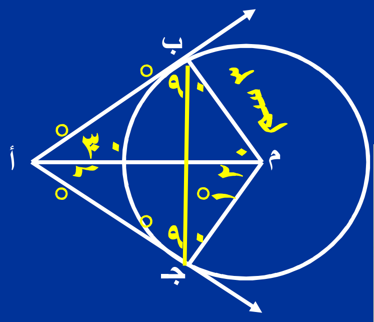
∵ الشكل أ ب م جـ شكل رباعي

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠ °

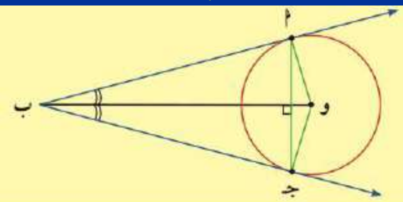
∴ ق (ب $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ٣٦٠ – (١٢٠ + ٩٠ + ٩٠) = ٦٠ ° ٢

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

$\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جـ ب}}$



∴ $\overline{\text{أجـ}}$ = $\overline{\text{أب}}$ ∴ المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين



Δب أجـ متطابق الضلعين من النظرية السابقة.

١ ب و منصف الزاوية أ ب جـ

٢ و ب منصف الزاوية أ و جـ

٣ و ب ⊥ أجـ

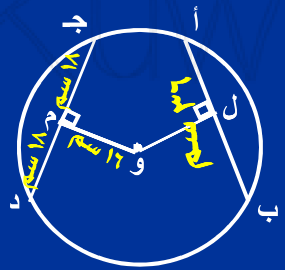
∵ $\overline{\text{أم}}$ ينصف (ب أ جـ) ∴ ق (ب أ م) = ٣٠°

∴ المثلث أ ب م ثلاثيني ستيني ∵ نق = ٣ سم ∴ ب م = ٣ سم

∴ أ م = ٦ سم

في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، أ ب = ٣٦ سم ، جـ م = د م = ١٨ سم ، و م = ١٦ سم

فأوجد : ١) ل و



المعطيات: ١) أ ب = ٣٦ سم ٢) جـ م = د م = ١٨ سم

٣) و م = ١٦ سم

المطلوب: إيجاد : طول $\overline{\text{ل و}}$

البرهان:

∵ جـ د ، أ ب وتران في الدائرة التي مركزها و

جـ د = ١٨ + ١٨ = ٣٦ سم ∵ جـ د = أ ب = ٣٦ سم

١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.

∴ وم = و ل = ١٦ سم

المصفوفات

اذا كانت $\begin{bmatrix} ٥ & ٣٨ \\ ٤ص - ١٠ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & س+٨ \\ -ص & ٣ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س ، ص

∵ المصفوفتين متساويتين فان عناصرهما المتناظره متساوية

∴ ٣٨ = س + ٨

∴ ٣٨ − ٨ = س +٨ − ٨

∴ ٣٠ = س

∴ ٤ ص − ١٠ = − ص

∴ ٤ص + ص = ١٠

∴ ٥ص = ١٠

∴ $\frac{١}{٥}$ × ٥ص = $\frac{١}{٥}$ × ١٠

∴ ص = ٢

اذا كانت س − $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٧ & ١٠ \\ ٤ & -٤ \end{bmatrix}$ فأوجد س

بإضافة $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ الى الطرفين

∴ س − $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٧ & ١٠ \\ ٤ & -٤ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

∴ س = $\begin{bmatrix} ٧ & ٩ \\ ٩ & -٢ \end{bmatrix}$

حل المعادلة ٢س = $\begin{bmatrix} ١٢ & ٤ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ٠ & -٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

٢س = $\begin{bmatrix} ١٢ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

$\frac{١}{٢}$ × ٢س = $\frac{١}{٢}$ × $\begin{bmatrix} ١٢ & ٤ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$

س = $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

اذا كانت ب = $\begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ٢س & ٤- \end{bmatrix}$ مصفوفة منفردة ، أوجد قيمة س

∵ ب مصفوفة منفردة ∴ |ب| = ٠

|ب| = $\begin{vmatrix} ١٠ & ٥ \\ ٢س & ٤- \end{vmatrix}$ = ٠

(٥ × ٢س) − (١٠ × −٤) = ٠

١٠س − (−٤٠) = ٠

١٠س + ٤٠ = ٠

١٠س = −٤٠ ⟸ س = −٤

أوجد س : $\begin{bmatrix} ٣- & ٥ \\ ٢- & ٤ \end{bmatrix}$ × س = $\begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix}$

بوضع :

أ = $\begin{bmatrix} ٣- & ٥ \\ ٢- & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix}$

أ × س = ب ⟵ س = $أ^{-١}$ × ب

|أ| = $\begin{vmatrix} ٣- & ٥ \\ ٢- & ٤ \end{vmatrix}$ = −١٠ + ١٢ = ٢ ، ٢ ≠ ٠

$\because$ | أ | = ٢ ≠ ٠

$$أ^{-١} = \frac{١}{|أ|}\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$$

$$س = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix}$$

$$س = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} (١٠\times٣)+(٥\times٢-) \\ (١٠\times٥)+(٥\times٤-) \end{bmatrix}$$

$$س = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٢٠ \\ ٣٠ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} ١٠ \\ ١٥ \end{bmatrix}$$

حل نظام معادلتين خطيتين باستخدام النظير الضربي لمصفوفة

أولاً .. نرتب المعادلتين

$$\begin{cases} أ_١ \, س + ب_١ \, ص = جـ_١ \\ أ_٢ \, س + ب_٢ \, ص = جـ_٢ \end{cases}$$

ثانياً .. نوجد المصفوفات التالية :

$$أ = \begin{bmatrix} \text{معاملات س} \\ \text{معاملات ص} \end{bmatrix}$$ **مصفوفة المعاملات**

المجاهيل

$$\underline{ع} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$ مصفوفة المجاهيل

الثوابت

$$\underline{ج} = \begin{bmatrix} ج_{١} \\ ج_{٢} \end{bmatrix}$$ مصفوفة الثوابت

يمكن كتابة المعادلتين بمعادلة مصفوفية واحدة

$$\underline{أ} \times \underline{ع} = \underline{ج}$$

ثالثاً .. لحل المعادلة المصفوفية :

نتأكد أن محدد $\underline{أ} \neq$ صفر

$$\boxed{\underline{ع} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{ج}}$$ حل النظام

أوجد مجموعة حل النظام التالي باستخدام النظير الضربي لمصفوفة

$$\begin{cases} ٤\ س + ٥\ ص = ١ \\ ٣\ س + ٦\ ص = ٢ \end{cases}$$

تأكد من ترتيب المعادلتين

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}^{-١} \times \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} = (٤ \times ٦) - (٣ \times ٥) = ٩$$ ، ٩ ≠ صفر

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}^{-١} = \frac{١}{٩} \begin{bmatrix} ٦ & -٥ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix} = \frac{١}{٩}\begin{bmatrix}٦ & ٥-\\ ٣- & ٤\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}١\\٢\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix} = \frac{١}{٩}\begin{bmatrix}٤-\\٥\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{٤-}{٩}\\[4pt]\frac{٥}{٩}\end{bmatrix}$$

س $= \frac{٤-}{٩}$ ، ص $= \frac{٥}{٩}$

مجموعة الحل = { ($\frac{٤-}{٩}$ ، $\frac{٥}{٩}$) }

لحل نظام معادلتين من الدرجة الأولى في مجهولين

باستخدام المحددات (قاعدة كرامر) نتبع الخطوات التالية

أولاً .. نرتب المعادلتين

$أ_{١}$ س + $ب_{١}$ ص = $جـ_{١}$

$أ_{٢}$ س + $ب_{٢}$ ص = $جـ_{٢}$

ثانياً .. نحسب Δ كالتالي :

معاملات س معاملات ص

$$\Delta = \begin{vmatrix} أ_{١} & ب_{١} \\ أ_{٢} & ب_{٢} \end{vmatrix} = (أ_{١} \times ب_{٢}) - (ب_{١} \times أ_{٢})$$

ثالثاً .. نحسب $\Delta_{\text{س}}$ كالتالي :

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{array}{cc} \text{الثوابت} & \text{معاملات ص} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{vmatrix} \text{جـ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{جـ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}} \end{array} = (\text{جـ}_1 \times \text{ب}_2) - (\text{ب}_1 \times \text{جـ}_2)$$

رابعاً .. نحسب $\Delta_{\text{ص}}$ كالتالي :

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{array}{cc} \text{معاملات س} & \text{الثوابت} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{جـ}_2 \end{vmatrix}} \end{array} = (\text{أ}_1 \times \text{جـ}_2) - (\text{جـ}_1 \times \text{أ}_2)$$

خامساً .. نحسب قيمتي س ، ص كالتالي :

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta}$$

$$ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta}$$

مجموعة الحل = { (س ، ص) }

أوجد مجموعة حل النظام التالي باستخدام المحددات :

ص = ٥ – ٢ س

٣ س – ٢ ص – ٤ = ٠

نرتب المعادلتين

٢ س + ص = ٥

٣ س – ٢ ص = ٤

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} = (٢ \times -٢) - (١ \times ٣) = -٤ - ٣ = -٧ \neq \text{صفر}$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٤ & -٢ \end{vmatrix} = (٥ \times -٢) - (١ \times ٤) = -١٠ - ٤ = -١٤$$

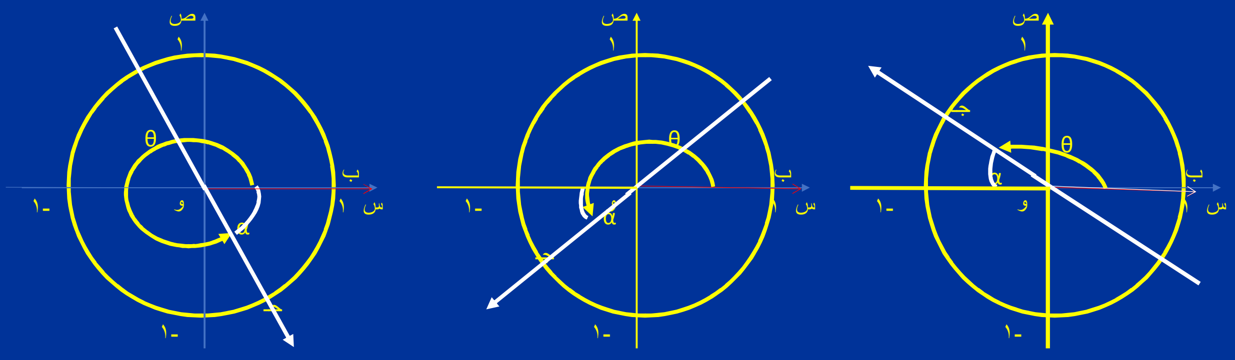
$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = (٢ \times ٤) - (٥ \times ٣) = ٨ - ١٥ = -٧$$

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-١٤}{-٧} = ٢ \qquad \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-٧}{-٧} = ١$$

مجموعة لحل = { (٢ ، ١) }

حساب المثلثات

الاشكال التالية توضح الحالات المختلفة لإيجاد زاوية الإسناد



عندما θ تقع في الربع الرابع	عندما θ تقع في الربع الثالث	عندما θ تقع في الربع الثاني
α° = ٣٦٠° − θ°	α° = θ° − ١٨٠°	α° = ١٨٠° − θ°
αء = ٢π - θء	αء = θء - π	αء = π - θء

قانون:

جتا(−θ) = جتاθ

جا(−θ) = −جاθ

وبالتالي ظا(−θ) = −ظاθ بشرط أن يكون ظاθ معرّف.

قانون:

جتا(π − θ) = −جتاθ

جا(π − θ) = جاθ

وبالتالي ظا(π − θ) = −ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

قانون:

جتا$(\pi + \theta)$ = −جتاθ

جا$(\pi + \theta)$ = −جاθ

وبالتالي ظا$(\pi + \theta)$ = ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = −جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = −ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

إذا كان ك عددًا صحيحًا فإن:

جا$(\theta + ٢ك\pi)$ = جاθ

جتا$(\theta + ٢ك\pi)$ = جتاθ

ظا$(\theta + ك\pi)$ = ظاθ حيث ظاθ معرّف

بسط كل التعبير التالي لأبسط صورة :

جـا س + جـا (٩٠ْ + س) + جـا (١٨٠ْ + س) + جـا (٩٠ْ − س)

= جا س + (+ جتا س) + (− جا س) + (+ جتا س)

= جا س + جتا س − جا س + جتا س

= ٢ جتا س

حل المعادلة المثلثية

حل المعادلة: جتا س = جتاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = −θ + ٢ك π (ك ∈ ص)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

حل المعادلة الاتية:-

جتا س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

جتا س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

جتا س = جتا $\frac{\pi}{6}$ (نعتمد على اصغر قياس غير سالب)

جتا س > ٠

الزاوية س تقع في الربع الاول او في الربع الرابع

الربع الاول: س = $\frac{\pi}{6}$ + ٢ ك π

أو

الربع الرابع: س = - $\frac{\pi}{6}$ + ٢ ك π

حيث ك $\in$ ص

حل المعادلة المثلثية

حل المعادلة جا س = جاθ

هو س = θ + ٢كπ أو س = ($\pi - \theta$) + ٢كπ ، (ك $\in$ ص)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

حل المعادلة الاتية :-

٢جا س = $\sqrt{2}$

جا س = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

جا س = جا $\frac{\pi}{4}$ (نعتمد على اصغر قياس غير سالب)

جا س > ٠

الزاوية س تقع في الربع الاول او في الربع الثاني

الربع اول: س = $\frac{\pi}{4}$ + ٢ ك π

أو

الربع الثاني: س = $(\pi - \frac{\pi}{4})$ + ٢ ك π

حيث ك ∈ ص

حل المعادلة المثلثية

حل المعادلة ظا س = ظاθ هو س = θ + ك π، (ك ∈ ص)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

حل المعادلة الاتية :- ظا س = $\sqrt{٣}$

ظا س = $\sqrt{٣}$

ظا س = ظا $\frac{\pi}{٣}$ (نعتمد على اصغر قياس غير سالب)

ظا س > ٠

الزاوية س تقع في الربع الاول او في الربع الثالث

س = $\frac{\pi}{٣}$ + ك π

حيث ك $\in$ ص

جا² θ + جتا² θ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث

١ + ظا² θ = قا² θ

١ + ظتا² θ = قتا² θ

بدون استخدام الالة الحاسبة ، إذا كان جتا θ = ٠,٤ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$

اوجد ١) جاθ ٢) اوجد ظاθ

من متطابقة فيثاغورث جا$^٢\theta$ + جتا$^٢\theta$ = ١

جا$^٢\theta$ + $(٠,٤)^٢$ = ١

جا$^٢\theta$ + ٠,١٦ = ١

جا$^٢\theta$ + ٠,١٦ − ٠,١٦ = ١ − ٠,١٦

جا$^٢\theta$ = ٠,٨٤

جا θ ≈ ٠,٩١٧ أو جا θ ≈ -٠,٩١٧ مرفوض لان ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$

ظاθ = $\frac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta}$ = $\frac{٠,٩١٧}{٠,٤}$ ≈ ٢,٢٩

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظاθ = $\frac{٣}{٤}$ ، جا θ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

من متطابقة فيثاغورث ١ + ظا$^٢\theta$ = قا$^٢\theta$

١ + $(\frac{٣}{٤})^٢$ = قا$^٢\theta$

١ + $\frac{٩}{١٦}$ = قا$^٢\theta$

قا$^٢\theta$ = $\frac{٢٥}{١٦}$

قا θ = $\frac{٥}{٤}$ أو قا θ = $-\frac{٥}{٤}$

جتا θ = $\frac{٤}{٥}$ أو جتا θ = $-\frac{٤}{٥}$

∵ ظا θ > ٠

∴ جا θ , جتا θ

لهما نفس الاشارة

جا θ < ٠

∴ جتا θ < ٠

∴ جتا θ = $-\frac{٤}{٥}$

$\text{جتا}\,\theta = -\frac{\text{٤}}{\text{٥}}$

$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$

$$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$$

$$\frac{\text{٣}}{\text{٤}} = \text{جا}\,\theta \div \left(-\frac{\text{٤}}{\text{٥}}\right)$$

$$\frac{\text{٣}}{\text{٤}} = \text{جا}\,\theta \times \left(-\frac{\text{٥}}{\text{٤}}\right)$$

$$\frac{\text{٣}}{\text{٤}} \times \left(-\frac{\text{٤}}{\text{٥}}\right) = \text{جا}\,\theta \times \left(-\frac{\text{٥}}{\text{٤}}\right) \times \left(-\frac{\text{٤}}{\text{٥}}\right)$$

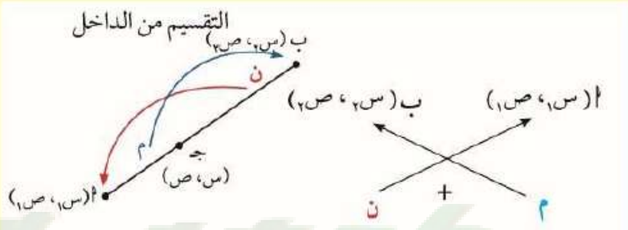
$$\text{جا}\,\theta = -\frac{\text{٣}}{\text{٥}}$$

الهندسة التحليلية

إذا كانت $\overline{\text{أب}}$ قطعة مستقيمة بحيث أ (س١، ص١)، ب(س٢، ص٢) ويراد تقسيمها من جهة أ بنسبة م:ن من الداخل وكانت نقطة التقسيم جـ (س، ص) فإن:

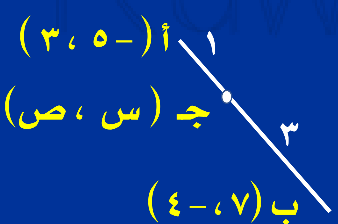
$$\text{س} = \frac{\text{م س}_٢ + \text{ن س}_١}{\text{م} + \text{ن}}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{م ص}_٢ + \text{ن ص}_١}{\text{م} + \text{ن}}$$



$$\text{جـ}\left(\frac{\text{م س}_٢ + \text{ن س}_١}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{م ص}_٢ + \text{ن ص}_١}{\text{م} + \text{ن}}\right)$$

اذا كان أ (−٥، ٣) ، ب (٧ ، −٤) فأوجد نقطة تقسيم أ ب من جهة أ بنسبة ١: ٣



$$\text{س} = \frac{\text{م س}_٢ + \text{ن س}_١}{\text{م} + \text{ن}} = \frac{(١ \times ٧) + (٣ \times -٥)}{١ + ٣} = \frac{-٨}{٤} = -٢$$

$$\text{ص} = \frac{\text{م ص}_٢ + \text{ن ص}_١}{\text{م} + \text{ن}} = \frac{(١ \times -٤) + (٣ \times ٣)}{١ + ٣} = \frac{٥}{٤} = ١,٢٥$$

جـ (−٢ ، ١,٢٥)

إيجاد ميل مستقيم

بيانياً

الميل = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$

جبرياً

الميل = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

: $س_2 - س_1 \neq 0$

الميل = ظا هـ
حيث هـ هي الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

المستقيم الأفقي ميله يساوي صفر

المستقيم الرأسي ليس له ميل

كتابة معادلة مستقيم

بمعلومية نقطة تنتمي للمستقيم و ميل

بمعلومية نقطتين تنتميان للمستقيم

من خلال الرسم البياني للمستقيم

تكون معادلة المستقيم: $ص - ص_1 = م(س - س_1)$.

إذا كان المستقيم ل: ص = ٢س + ١، فأوجد:

أ معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٢، −٣).

ب معادلة المستقيم ف العمودي على المستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٤، −٣).

أ)

∵ المستقيمان ل ، هـ متوازيان ∴ ميل المستقيم ل = ميل المستقيم هـ

∵ ميل المستقيم ل = ٢ ∴ ميل المستقيم هـ = ٢

∴ معادلة المستقيم هـ : ص − $ص_١$ = م (س − $س_١$)

∵ المستقيم هـ يمر بالنقطة (٢ ، −٣)

∴ معادلة المستقيم هـ : ص − (−٣) = ٢ (س − ٢)

∴ معادلة المستقيم هـ : ص +٣ = ٢ س − ٤

∴ معادلة المستقيم هـ : ص = ٢ س − ٤ − ٣

∴ معادلة المستقيم هـ : ص = ٢ س − ٧

يمكن الحصول على الميل مباشرة من الصورة العامة أس + ب ص + جـ = ٠ حيث أ ، ب لا يساويا الصفر معاً بالقانون :

الميل = $\frac{-أ}{ب}$: ب ≠ ٠

إذا كان المستقيم ل: ص = ٢س + ١، فأوجد:

أ معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٢، −٣).

ب معادلة المستقيم ف العمودي على المستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٤، −٣).

ب)

∵ المستقيمان ل ، ف متعامدان ∴ ميل المستقيم ل × ميل المستقيم ف = −١

∵ ميل المستقيم ل = ٢ ∴ ميل المستقيم ف = $\frac{-١}{٢}$

∴ معادلة المستقيم ف : ص − $ص_١$ = م (س − $س_١$)

∵ المستقيم ف يمر بالنقطة (٤ ، −٣)

∴ معادلة المستقيم ف : ص − (−٣) = $\frac{-١}{٢}$ (س − ٤)

∴ معادلة المستقيم ف : ص +٣ = $\frac{-١}{٢}$ س + ٢

∴ معادلة المستقيم هـ : ص = $\frac{-١}{٢}$ س + ٢ − ٣

∴ معادلة المستقيم هـ : ص = $\frac{-١}{٢}$ س − ١

يمكن الحصول على الميل مباشرة من الصورة العامة أس + ب ص + جـ = ٠ حيث أ ، ب لا يساويا الصفر معاً بالقانون :

الميل = $\frac{-أ}{ب}$: ب ≠ ٠

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل: أ س + ب ص + جـ = ٠، فإن البعد ف بين النقطة د $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ والمستقيم ل تعطى بالصيغة: $\text{ف} = \dfrac{|\text{أ}\,\text{س}_1 + \text{ب}\,\text{ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$.

إذا كانت النقطة د تنتمي إلى المستقيم ل فالبعد بينهما يساوي صفرًا.

أوجد البعد من النقطة ب (-٤ ، -٣) الى المستقيم ل: ٢ ص = ٣ س - ٧

١) نكتب معادلة المستقيم ل على الصورة العامة : أ س + ب ص + جـ = ٠

∴ ل: ٣ س − ٢ ص − ٧ = ٠

أ = ٣   ب = -٢   جـ = -٧

س_1 = -٤ ص_1 = -٣

$$\text{البعد ف} = \frac{|\text{أ}\,\text{س}_1 + \text{ب}\,\text{ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}} = \frac{|(3 \times -4) + (-2 \times -3) + (-7)|}{\sqrt{(3)^2 + (-2)^2}}$$

$$\text{البعد ف} = \frac{|-13|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة بمعلومية المركز
م (د ، هـ) وطول نصف القطر نق .
(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها نق هي:

س^{٢} + ص^{٢} = نق ^{٢}

إذا كانت الدائرة التي مركزها م (د ، هـ)

١) تمس المحور السيني فإن نق = ا هـ ا

٢) تمس المحور الصادي فإن نق = ا د ا

٣) تمس المحورين السيني والصادي معا فإن نق = ا د ا = ا هـ ا

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (-٤ ، ٠) وطول نصف قطرها ٣ وحدات .

معادلة الدائرة على الصورة القياسية :

(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

[س − (-٤)]^{٢} + (ص − ٠)^{٢} = (٣)^{٢}

(س + ٤)^{٢} + ص^{٢} = ٩

- أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٢ ، -٦) و تمس المحور السيني.
- بما أن الدائرة تمس المحور السيني ∴ نق = | هـ |

نق = | -٦ | = ٦

معادلة الدائرة : $(\text{س} - \text{د})^{٢} + (\text{ص} - \text{هـ})^{٢} = \text{نق}^{٢}$

$$(\text{س} - ٢)^{٢} + [\text{ص} - (-٦)]^{٢} = (٦)^{٢}$$

$$(\text{س} - ٢)^{٢} + (\text{ص} + ٦)^{٢} = ٣٦$$

الصورة العامة لمعادلة هي :-

س٢ + ص٢ + ل س + ك ص + ب = ٠ حيث ل ، ك ، ب ثوابت.

وتسمى الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها $\left(\frac{-\text{ل}}{٢} ، \frac{-\text{ك}}{٢}\right)$

طول نصف قطر الدائرة :-

نق = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - ٤\,\text{ب}}$.

أوجد معادلة المماس للدائرة التي معادلتها

$(س - ١)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٥$ عند نقطة التماس أ (٣، ١) .

النقطة أ (٣، ١) تنتمي للدائرة احداثيات مركز الدائرة و (١، ٢) .

ميل و أ $= \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{١ - ٢}{٣ - ١} = - \frac{١}{٢}$

نصف قطر التماس $\overline{وأ}$ عمودي على مماس الدائرة

ميل المماس × ميل $\overline{وأ}$ = −١

ميل المماس = ٢

معادلة المماس الذي ميله ٢ ويمر بالنقطة (٣، ١) هي

$ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$

ص − ١ = ٢ (س − ٣)

معادلة المماس هي ص − ١ = ٢ س − ٦

٢س − ص − ٥ = ٠

الاحصاء

إذا كان أ ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان

ل (أ) = ٠,٧ ، ل (ب) = ٠,٤ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣

أوجد ل (أ ∪ ب) ، ل (أ̅)

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب)

٠,٧ + ٠,٤ – ٠,٣

= ٠,٨

ل (أ̅) = ١ - ل (أ)

١- ٠,٧ = ٠,٣


وختاما
أشكر لكم حسن المتابعة
وأتمنى لكم التوفيق