# الوحدة العاشرة

## الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء)

## (10-1) الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء)

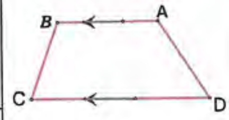
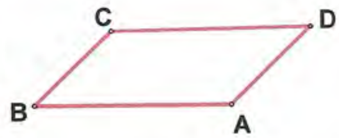
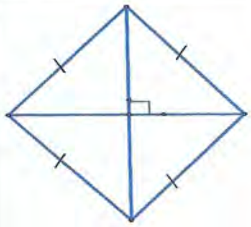
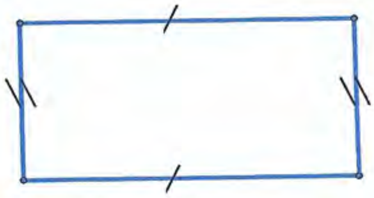
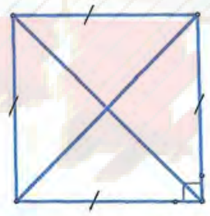
**Space Geometry**

| | |
|---|---|
| ( 10 – 1 ) | المستقيمات والمستويات في الفضاء |
| ( 10 – 2 ) | المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء |
| ( 10 – 3 ) | تعامد مستقيم مع مستو |
| ( 10 – 4 ) | الزاوية الزوجية |
| ( 10 – 5 ) | المستويات المتعامدة |

## أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

### <u>ملاحظات هامة في الهندسة المستوية</u>

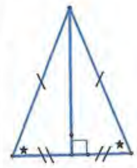
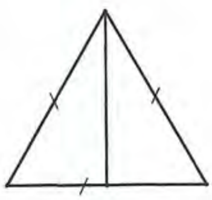
خواص الأشكال الرباعية :

| شبه المنحرف | متوازي الأضلاع | المعين | المستطيل |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| فيه ضلعان متقابلان متوازيان . | كل ضلعان متقابلان متوازيان. | **أضلاعه الأربعة متطابقة .** | **كل ضلعان متقابلان متطابقان** |
| | كل ضلعان متقابلان متطابقين. | كل زاويتان متقابلتان متطابقتان. | **كل ضلعان متقابلان متوازيان** |
| | كل زاويتان متقابلتان متطابقتان. | **القطران ينصف كل منهما الآخر و متعامدان و ينصفان زواياه .** | زواياه الأربع قوائم. |
| | القطران ينصف كل منهما الآخر . | | القطران ينصف كل منهما الآخر و متطابقان |
| **المربع** |  | أضلاعه الأربعة متطابقة . | القطران متطابقان و متعامدان و ينصف كل منهما الاخر |
| | | | القطر يصنع زاوية قياسها 45 مع أي ضلع من اضلاعه. |

**يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع في احدى الحالات التالية**

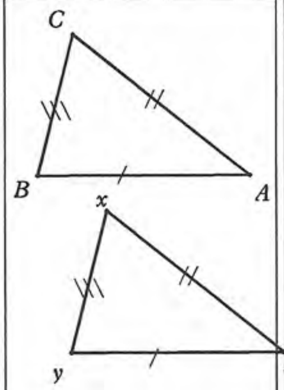
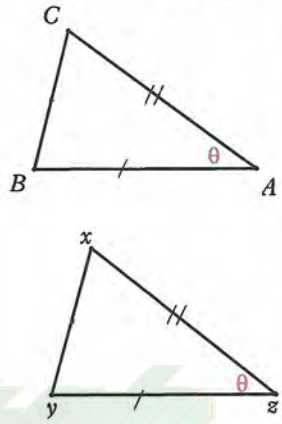
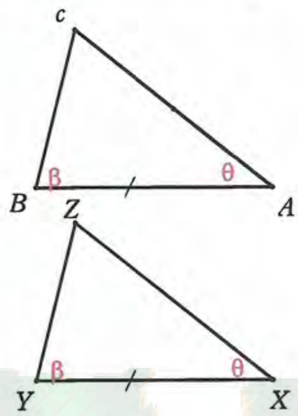
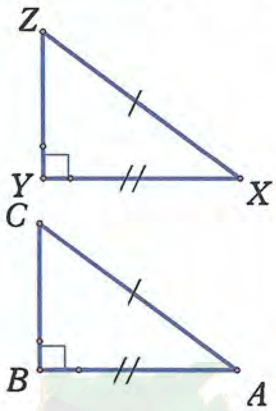
| | | | |
|---|---|---|---|
| **1)توازى كل ضلعين متقابلين فيه.** | **2)تطابق كل ضلعين متقابلين فيه.<br>3)تطابقت كل زاويتين متقابلتين فيه** | **4)تطابق و توازى ضلعان متقابلان فقط.** | **5)ينصف القطران كل منهما الآخر** |

| | |
|---|---|
| **<u>يكون الشكل الرباعي معينا إذا كان:</u>**<br>متوازي أضلاع و تطابق ضلعان متجاوران فيه. | **<u>يكون الشكل الرباعي مستطيلا إذا كان:</u>**<br>متوازي أضلاع و أحدى الزوايا قائمة. |

| في المثلث المتطابق الضلعين: | | في المثلث المتطابق الأضلاع: | |
|---|---|---|---|
|  | **زاويتا القاعدة متطابقتان.** |  | قياس كل زاوية 60 |
| | **المستقيم المار برأس المثلث و منتصف القاعدة يكون عموديا على القاعدة.** | | المستقيم المار برأس المثلث و منتصف الضلع المقابل له يكون عموديا على هذا الضلع. |
| | **العمود النازل من الرأس على القاعدة ينصف زاوية الرأس و ينصف القاعدة.** | | العمود من أي رأس على الضلع المقابل له ينصف زاوية هذا الرأس و ينصف الضلع المقابل. |

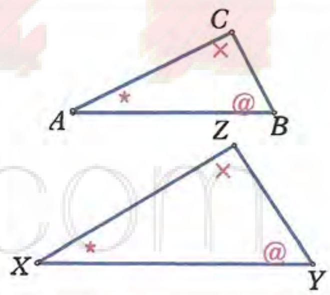
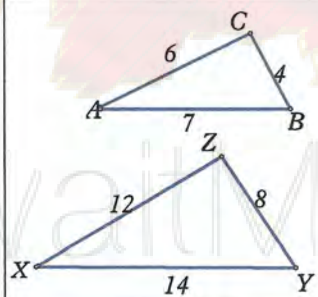
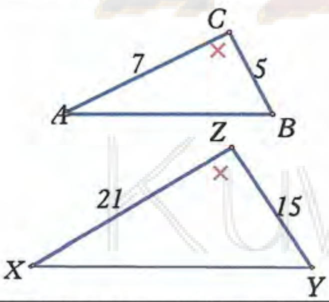
# حالات تطابق مثلثين:

## يتطابق مثلثان في إحدى الحالات التالية

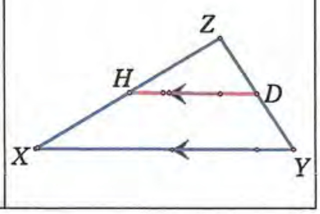
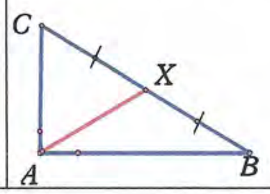
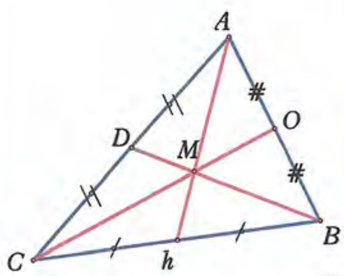
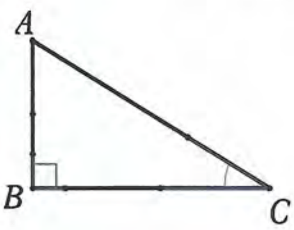
| إذا كانت أضلاعهما المتناظرة متطابقة. | إذا تطابق ضلعان و الزاوية المحددة بهما من أحدهما مع نظائرهما من الآخر | إذا تطابقت زاويتان و الضلع الواصل بين راسيهما من أحدهما مع نظائرهما من الآخر . | إذا تطابق ضلع و وتر من أحدهما مع نظائرهما من الآخر .(خاصة بالمثلثين قائمي الزاوية) |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| ( ض ،ض ،ض ) | ( ض ، ز، ض ) | ( ز ، ض ، ز ) | ( ∆، و، ض ) |

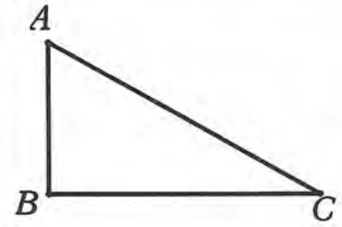
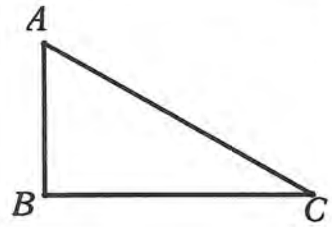
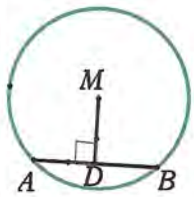
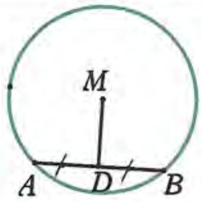
## حالات تشابه مثلثان: (نظريات التشابه)

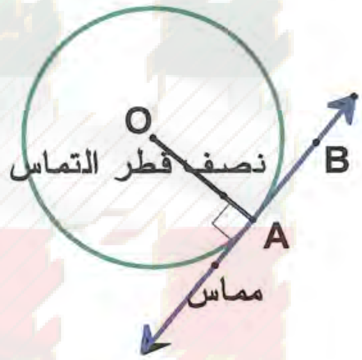
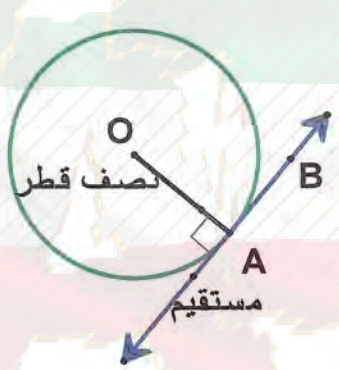
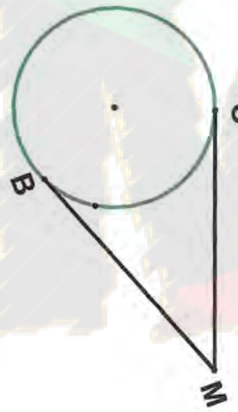
## يتشابه مثلثان في إحدي الحالات التالية:

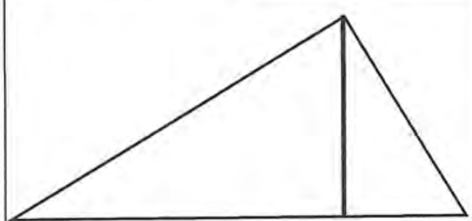
| نظرية (1) إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة. | نظرية (2) إذا كانت اطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة. | نظرية (3) إذا طابق زاوية في أحدهما زاوية في الآخر و تناسب طولا الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين. |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $\Delta\, XYZ \sim \Delta\, ABC$ | $\Delta\, XYZ \sim \Delta\, ABC$ | $\Delta\, XYZ \sim \Delta\, ABC$ |

## نظريات المثلث

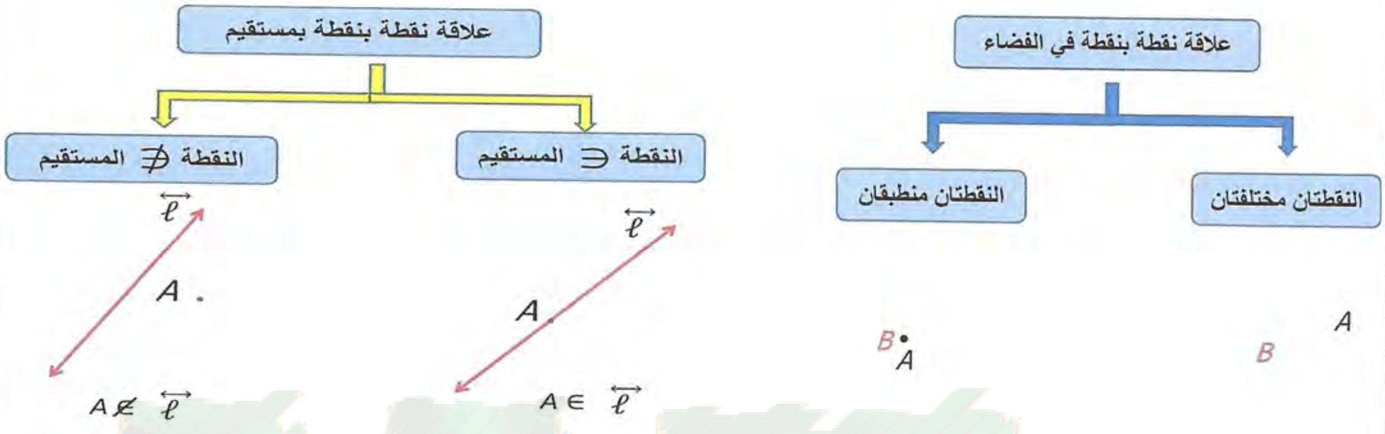
| القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصفها. | طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة في المثلث القائم الزاوية إلى منتصف الوتر تساوى نصف طول الوتر. | القطع المتوسطة للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة تقسم كل منها بنسبة 2: 1 من جهة الرأس. | في المثلث الثلاثيني الستيني طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها 30 يساوى نصف طول الوتر. |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |

<table>
<tr>
<td>إذا كان مربع طول الضلع الاكبر في مثلث مساويا مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فان الزاوية المقابلة لهذا الضلع تكون قائمة.</td>
<td>في أي Δ ا ب جـ في المثلث أ ب حـ القائم الزاوية في أ أذا كان أ ب ⊥ ب حـ فإن<br>$\boxed{(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2}$</td>
<td>القطر العمودي على وتر في الدائرة ينصفه.</td>
<td>القطعة المستقيمة الواصلة من مركز الدائرة إلى منتصف وتر فيها تكون عمودية على هذا الوتر.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>المماس عمودي على نصف قطر التماس</td>
<td>المستقيم العمودي على نصف القطر من نهايته يكون مماس للدائرة</td>
<td>القطعتان المماستان لدائرة من نقطة خارجها متطابقان</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">متى يتوازى مستقيمين .... إذا قطعهما ثالث ونتج أحدى الحالات التالية</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>زاويتان متبادلتان ومتطابقتان</td>
<td>زاويتان متناظرتان ومتطابقتان</td>
<td>زاويتان داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع متكاملتان</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود<br>$1)(AD)^2 = BD \, . DC$<br>$2)\ (AB)^2 = BD.BC$<br>$3)\ (AC)^2 = CD.BC$</td>
<td></td>
</tr>
</table>

# المستقيمات و المستويات فى الفضاء




---

**المسلمة ( الموضوعة )**

هي عبارة أولية ( رياضية ) نسلم بصحتها ( نقبلها ) دون برهان .

a

(i) أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد ( واحد فقط ) .

(ii) كل مستقيم في الفضاء يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين .

(iii) من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بالنقطة ويوازي المستقيم المعلوم.

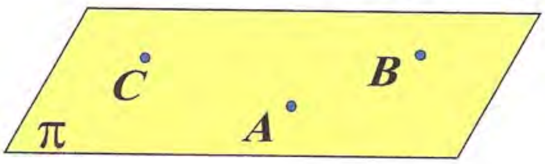


b

- في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة .


$A , B , C$ ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

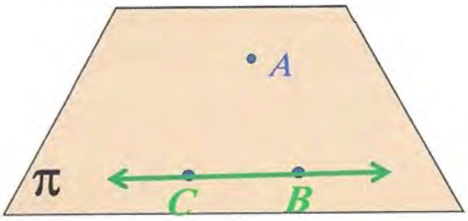
- أي ثلاث نقاط مختلفة و ليست على استقامة واحدة يحتويها مستو واحد .



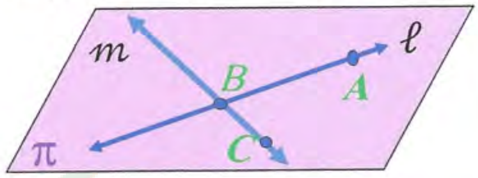
# حالات تعيين المستوى في الفضاء

- أي ثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة تعين مستويا واحدا فقط .

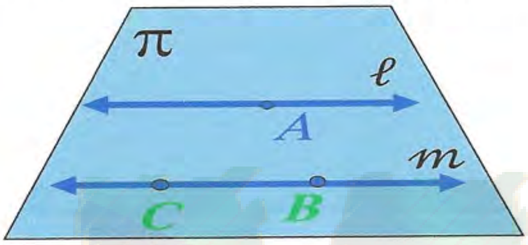

- أي مستقيم و نقطة خارجة عنه يعينان مستويا وحيدا فقط .




- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويا واحدا فقط .




- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويا واحدا فقط .

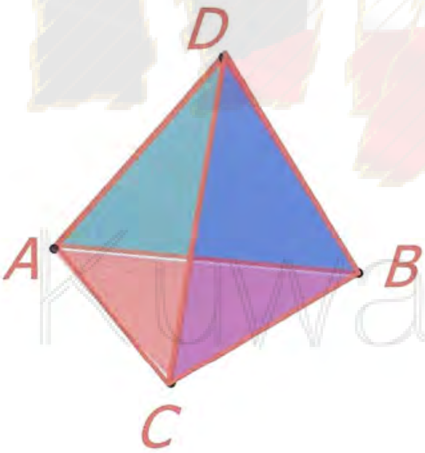



---

C

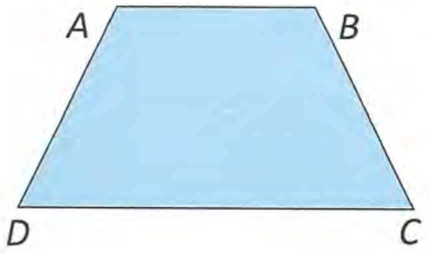
يحوي الفضاء على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية .

و على الأقل أربع مستويات مختلفة .



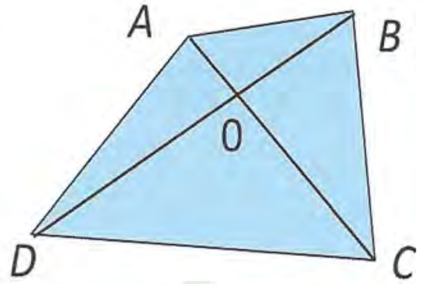

النقاط $D , C , B , A$ لا تقع في مستو واحد

### مثال : ( 1 ) صفحة 119




أثبت أن أضلاع أي شبه منحرف تقع جميعها في مستو واحد.

### حاول أن تحل : ( 1 ) صفحة 119




في الشكل المقابل $\overline{BD}$ , $\overline{AC}$ يتقاطعان في O .

أثبت أن أضلاع الرباعي ABCD تقع جميعا في مستو واحد

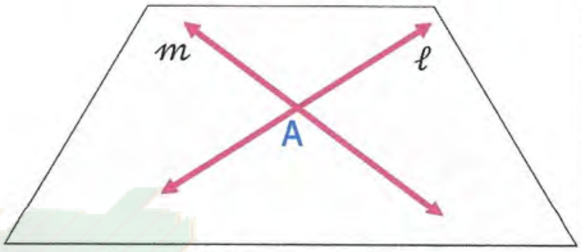
# أوضاع المستقيمات في الفضاء

يقال لمستقيمين مختلفين بالفضاء أنهما :

**- متقاطعان :**

**إذا وقعا في مستو واحد وكان**

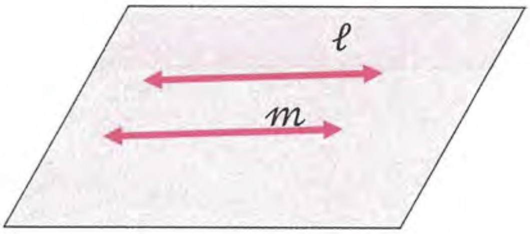
**بينهما نقطة واحدة مشتركة فقط .**




$\overleftrightarrow{\ell} \cap \overleftrightarrow{m} = \{A\}$

**- متوازيان :**

**إذا وقعا في مستو واحد و كانا غير متقاطعين .**

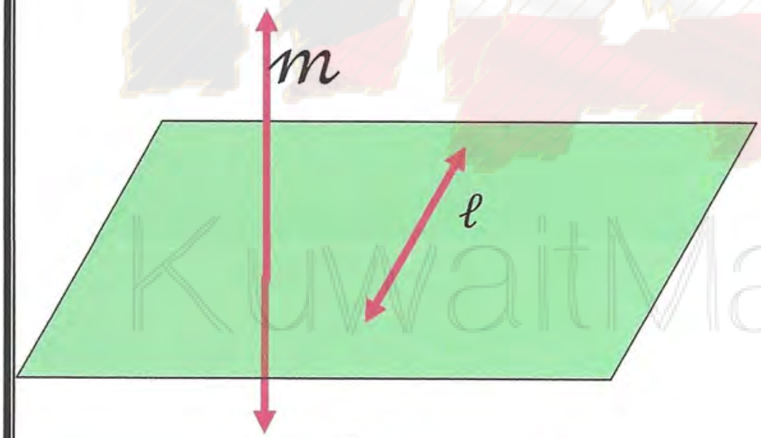



$\overleftrightarrow{\ell} \subset \pi \; , \overleftrightarrow{m} \subset \pi$

$\overleftrightarrow{\ell} \cap \overleftrightarrow{m} = \emptyset \Longrightarrow \overleftrightarrow{\ell} // \overleftrightarrow{m}$

**- متخالفان :**

**إذا كان لا يحتويهما مستو واحد .**



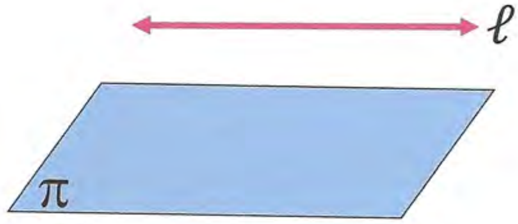

$\overleftrightarrow{\ell} \subset \pi \; , \overleftrightarrow{m} \not\subset \pi$

$\overleftrightarrow{\ell} \cap \overleftrightarrow{m} = \emptyset$

## أوضاع مستقيم و مستو في الفضاء

**إن معرفة عدد النقاط المشتركة بين مستقيم ومستوي تسمح بمعرفة أوضاعهما و هي :**

**- صفر نقطة مشتركة :**

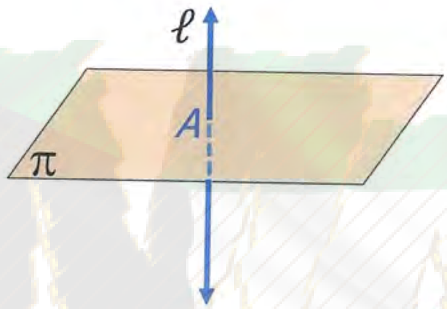



**المستقيم موازي للمستوي .**

$$\overleftrightarrow{\ell} \cap \pi = \emptyset \Rightarrow \overleftrightarrow{\ell} \mathbin{/\!/} \pi$$

***********

**- نقطة مشتركة واحدة :**

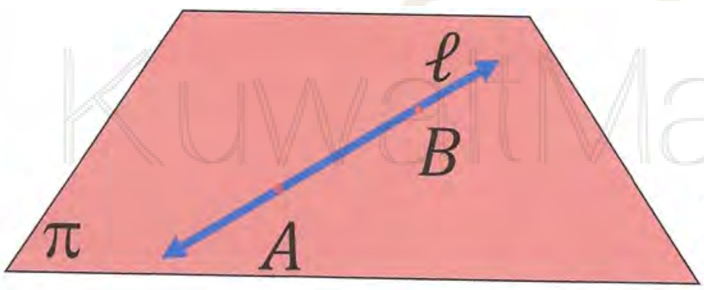



**المستقيم يقطع المستوى**

$$\overleftrightarrow{\ell} \cap \pi = \{A\}$$

*********

**- نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل :**




**المستقيم يقع بكامله ( بتمامه ) في المستوى**

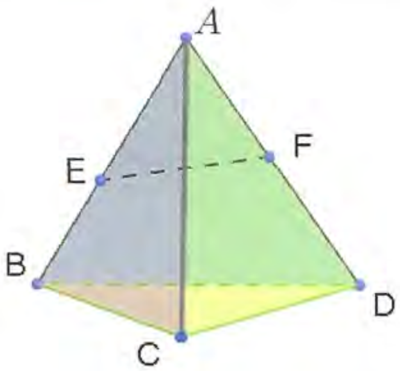
**( المستقيم يوازي المستوى )**

$$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi = \overleftrightarrow{AB}$$

$$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$$

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \pi$$

## مثال : ( 2 ) صفحة 121




إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة النقطة E تنتمي إلى $\overline{AB}$

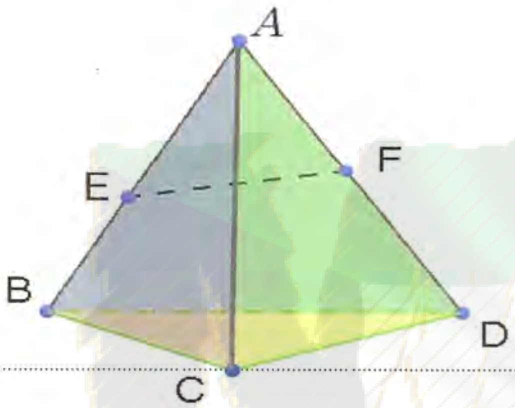
النقطة F تنتمي إلى $\overline{AD}$ , $\overleftrightarrow{EF}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{BD}$

أثبت أن:

a) $\overleftrightarrow{EF} \subset (ABD)$

b) $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع $(ACD)$

## حاول أن تحل : ( 2 ) صفحة 122




إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة النقطة E تنتمي إلى $\overline{AB}$

النقطة F تنتمي إلى $\overline{AD}$ , $\overleftrightarrow{EF}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{BD}$

أثبت أن : $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع $(BCD)$

## أوضاع مستويين في الفضاء

- إذا أشترك مستويان مختلفان في نقطة فإنه يوجد على الأقل نقطة أخرى مشتركة بين هذين المستويين.

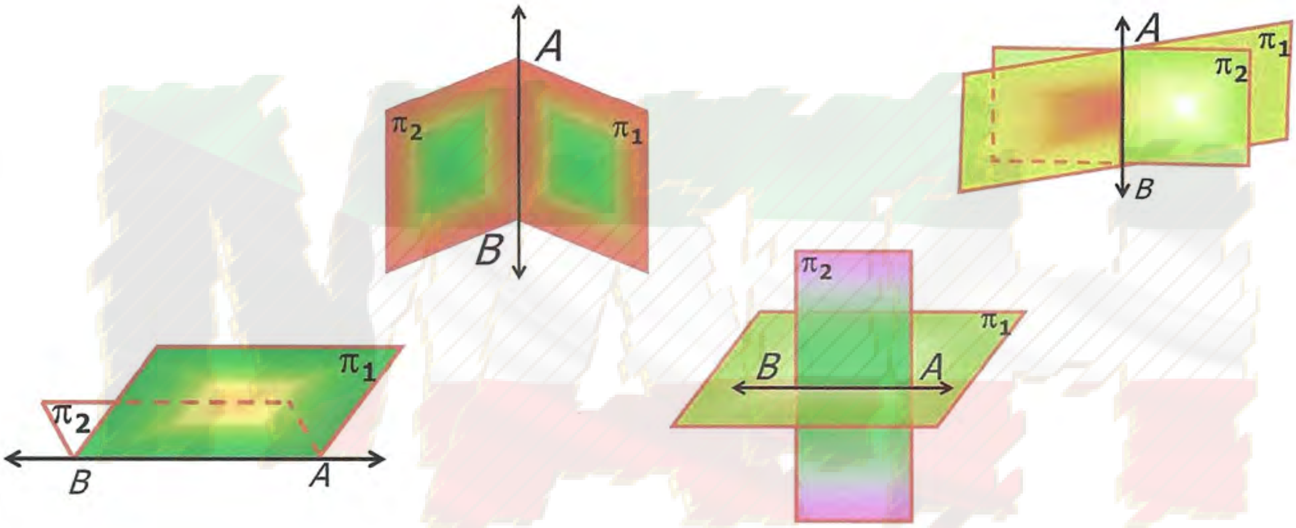
- إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستقيم.

- إذا أشترك مستويان في ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يكون المستويان منطبقين.

## أوضاع مستويين في الفضاء

### المستويان متقاطعان في مستقيم :

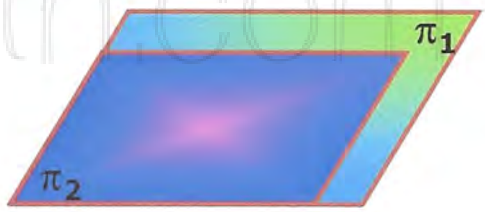
$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{AB}$




### المستويان منطبقان (يشتركان في جميع النقاط):

$\pi_1 = \pi_2$

$\pi_1 \parallel \pi_2$

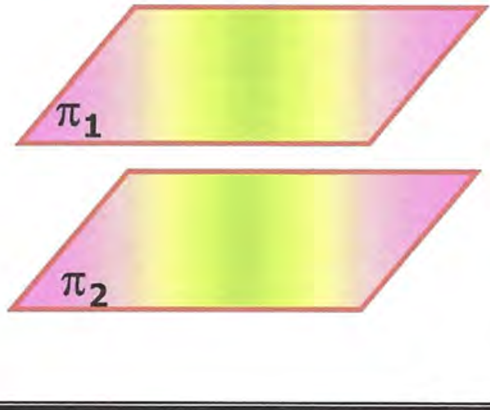





### المستويان لا يشتركان في أي نقطة :

$\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$

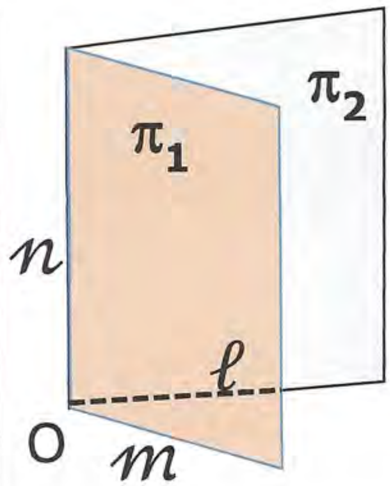
$\pi_1 \parallel \pi_2$



## مثال : ( 3 ) صفحة 123

$\ell$ , $m$ , $n$ ثلاثة مستقيمات لا تقع في مستوٍ واحد تتقاطع مثنى مثنى.

أثبت أن المستقيمات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة

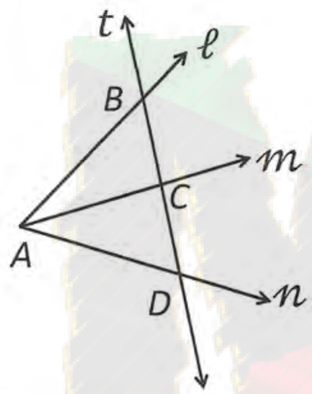



## حاول أن تحل : ( 3) صفحة 123

$\overleftrightarrow{\ell}$ , $\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{n}$ ثلاثة مستقيمات مختلفة تتقاطع في A .

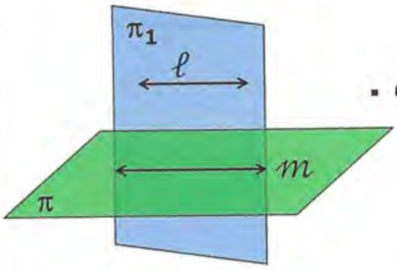
المستقيم $\overleftrightarrow{t}$ يقطع المستقيمات الثلاثة في B, C, D على الترتيب .

أثبت أن المستقيمات $\ell$, $m$, $n$,t تقع مستو واحد.



# المستقيمات و المستويات المتوازية في الفضاء

**نظرية (1)** تفيد في اثبات توازي مستقيم مع مستوي

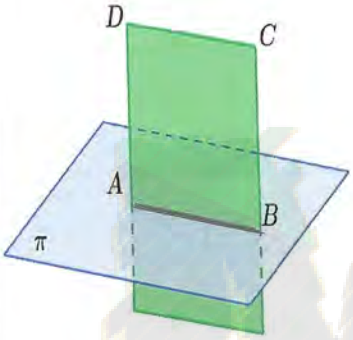



**إذا وازي مستقيم خارج مستو مستقيما في المستوي فإنه يوازي المستوي .**

$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{\ell} \,//\, \overleftrightarrow{m} \\ ,\overleftrightarrow{m} \subset \pi\end{array}\right\} \overleftrightarrow{\ell} \,//\pi$$

******************

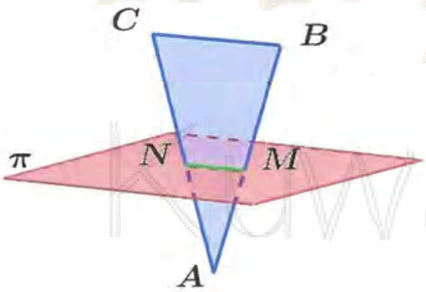
## مثال : ( 1 ) صفحة 125




في الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{AD} \,//\, \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset \boldsymbol{\pi}$ ، $AD = BC$

أثبت أن : $\overleftrightarrow{CD} \,//\, \boldsymbol{\pi}$

## حاول أن تحل : (1) صفحة 125




في الشكل المقابل : المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$ , N منتصف $\overline{AC}$

M , N تنتميان إلى المستوي $\boldsymbol{\pi}$

أثبت أن : $\overleftrightarrow{CB} \,//\, \boldsymbol{\pi}$



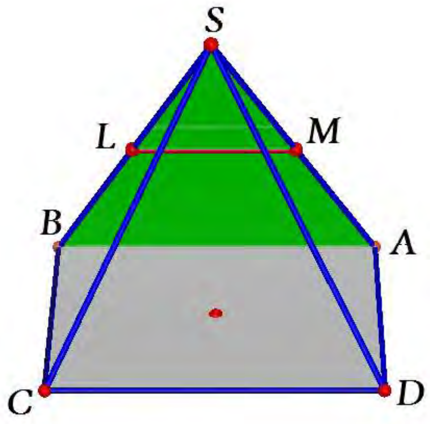


أ.محمد بشار

## تمرين 3 صفحة 51 "كراسة"

$SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل. $M$ منتصف $\overline{SA}$، $L$ منتصف $\overline{SB}$، أثبت أن:

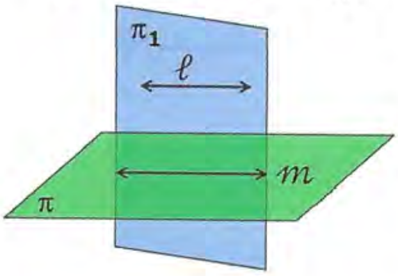
$\overleftrightarrow{ML} \parallel (ABCD)$




**الحل:**

**نظرية (2)** تفيد في اثبات توازي مستقيمين

إذا وازى مستقيم مستويا، فكل مستو مار بالمستقيم و يقطع المستوي، يقطعه في مستقيم مواز للمستقيم المعلوم .

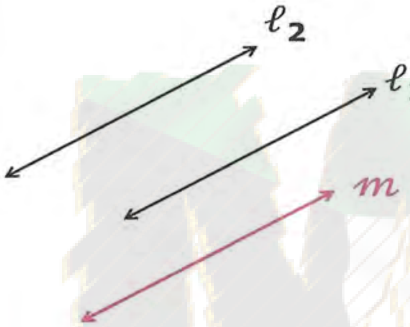



$$\left.\begin{array}{l} \because\ \overleftrightarrow{\ell} \parallel \pi \\ \overleftrightarrow{\ell} \subset \pi_1 \\ \pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{m} \end{array}\right\} \overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m}$$

*************

**نظرية (3)** تفيد في اثبات توازي مستقيمين

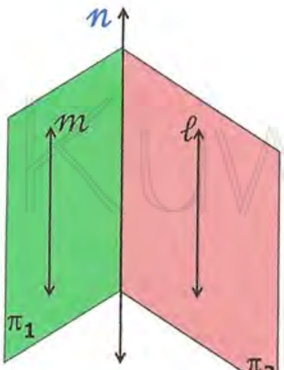
المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.




$$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{\ell_1} \parallel \overleftrightarrow{m} \\ \overleftrightarrow{\ell_2} \parallel \overleftrightarrow{m} \end{array}\right\} \therefore\ \overleftrightarrow{\ell_1} \parallel \overleftrightarrow{\ell_2}$$

*************

**نتيجة (1)** تفيد في اثبات توازي مستقيمين




إذا توازى مستقيمان و مر بهما مستويان متقاطعان ،

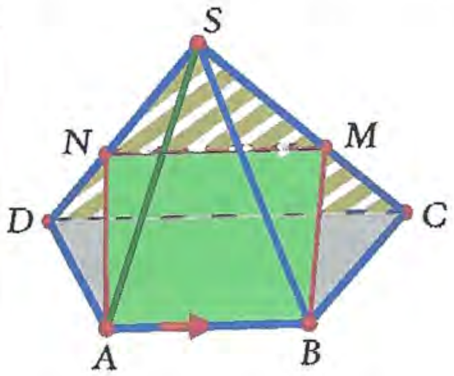
فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلا من هذين المستقيمين .

$$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m}\ , \\ \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1 , \\ \overleftrightarrow{\ell} \subset \pi_2 \\ \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n} \end{array}\right\} \overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$$

## تمرين 5 صفحة 51 "كراسة"

$SABCD$ هرم قاعدته شبه منحرف $ABCD$ حيث أن $\overleftrightarrow{DC} // \overleftrightarrow{AB}$، $M \in \overline{SC}$ المستوي $(ABM)$

يقطع $\overleftrightarrow{SD}$ في $N$




*a)* أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB}$ يوازي المستوي $(SDC)$

*b)* أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} // \overleftrightarrow{CD}$

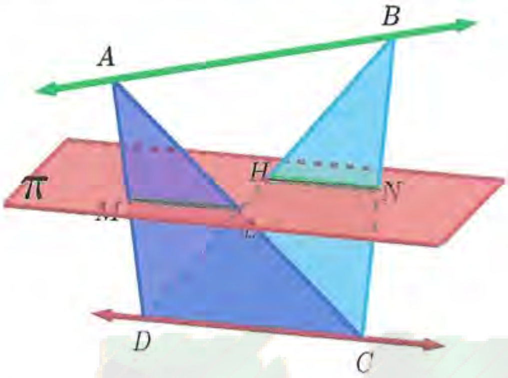
**الحل:**

## مثال : ( 2 ) صفحة 126

في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ , $\overleftrightarrow{CD}$ متخالفان، $\overleftrightarrow{CD}//\pi$

$\overleftrightarrow{AD}$تقطع $\pi$ في $M$، $\overleftrightarrow{AC}$تقطع $\pi$ في $L$،$\overleftrightarrow{BD}$تقطع $\pi$ في $H$، $\overleftrightarrow{BC}$تقطع $\pi$ في $N$،

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM}//\overleftrightarrow{NH}$



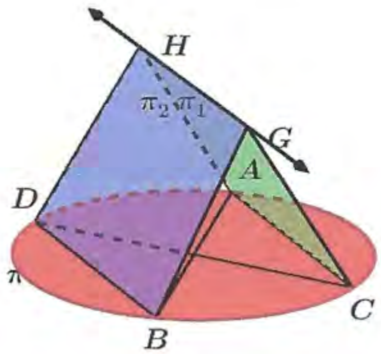

## حاول أن تحل: (2) صفحة 126

في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ , $\overleftrightarrow{CD}$ متخالفان، $\overleftrightarrow{AB}//\pi$

$\overleftrightarrow{AD}$تقطع $\pi$ في $M$، $\overleftrightarrow{AC}$تقطع $\pi$ في $L$،$\overleftrightarrow{BD}$تقطع $\pi$ في $H$،

$\overleftrightarrow{BC}$تقطع $\pi$ في $N$، أثبت أن: الشكل $MLNH$ متوازي أضلاع.

## مثال : ( 3 ) صفحة 127

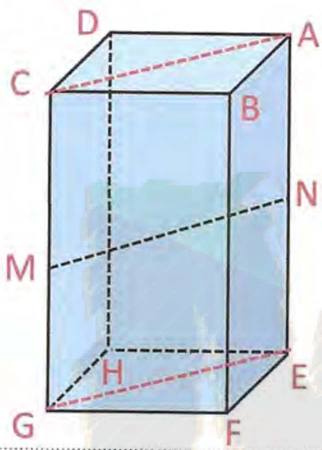



في الشكل المقابل : $\overline{AB}$ , $\overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة $\pi$ ،

. $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

المطلوب : اثبت أن مستوي الدائرة $\pi$ يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

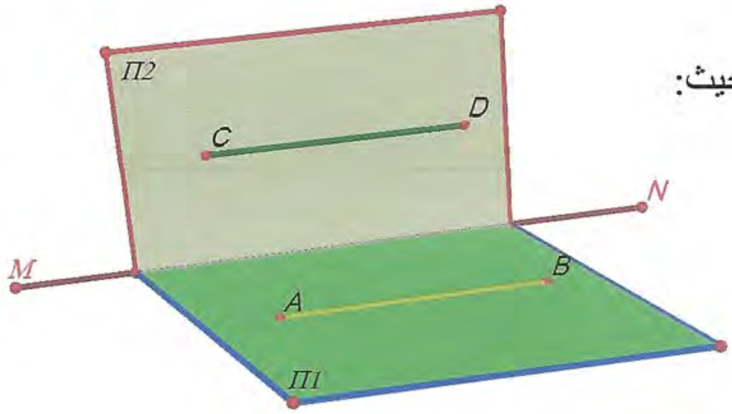
## حاول أن تحل : (3) صفحة 127




$ABCDEFGH$ شبه مكعب . $M$ منتصف $\overline{CG}$ ، $N$ منتصف $\overline{AE}$ ،

أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overleftrightarrow{MN}$.

## تمرين 7 صفحة 25 "كراسة"




**ليكن** $\pi_2 , \pi_1$ مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث:

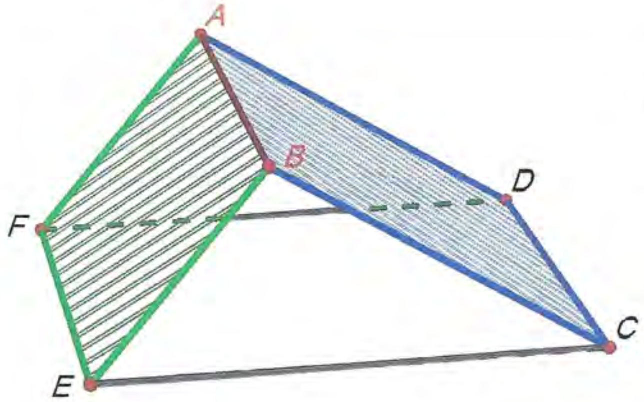
$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1 , \qquad \overleftrightarrow{AB} // \pi_2$

$\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2 , \qquad \overleftrightarrow{CD} // \pi_1$

أثبت أن $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$:

**الحل:**

## تمرين 8 صفحة 52 "كراسة"

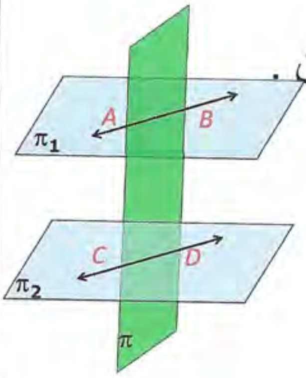



$ABCD$ , $ABEF$ متوازيا اضلاع غير مستويين معاً

ويتقاطعان في $\overleftrightarrow{AB}$ أثبت أن $CDEF$ متوازي أضلاع

**الحل:**

## نظرية (4)  تفيد في اثبات توازي مستقيمين

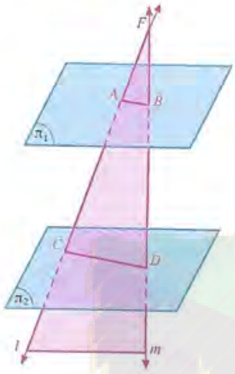



إذا قطع مستو مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين .

$$\left.\begin{array}{l}\pi_2 \,//\, \pi_1 \\ \pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB} \\ \pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}\end{array}\right\} \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$$

************

### مثال: ( 4 ) صفحة 128



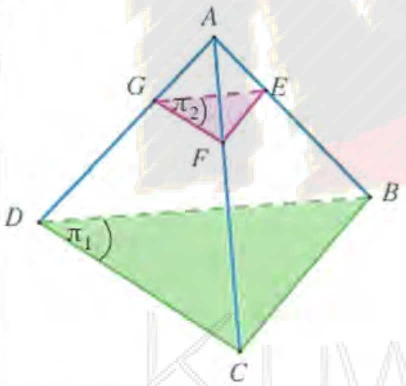

في الشكل المقابل: $\pi_2$ ، $\pi_1$ مستويين متوازيين . $\vec{l}$ , $\overleftrightarrow{m}$ , مستقيمان متقاطعان

في $F$ ويقطعان كلًّا من $\pi_1$ في A , B ، $\pi_2$ في C , D .

اذا كان : $BD = 4$ cm ، $AC = 6$ cm ، $CD = 9$ cm ، $FB = 5$ cm .

فأوجد محيط المثلث $FAB$ .

### حاول أن تحل : (4) صفحة 129

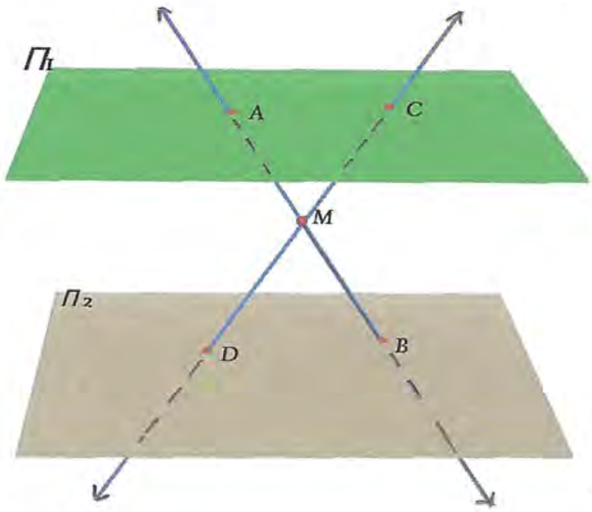



في الشكل المقابل : $ABCD$ هرم ثلاثي . المستويان $\pi_2$ ، $\pi_1$ متوازيان

إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ، $FG = 6$ cm .

فأوجد : $DC$

## تمرين 9 صفحة 52 "كراسة"




في الشكل المقابل $\pi_1$ , $\pi_2$ مستويان متوازيان، $M$ نقطة واقعة بينهما حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$ أثبت أن:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$$

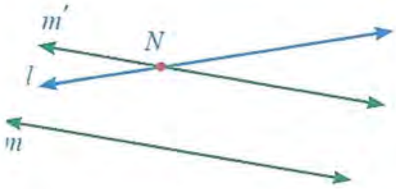
**الحل:**





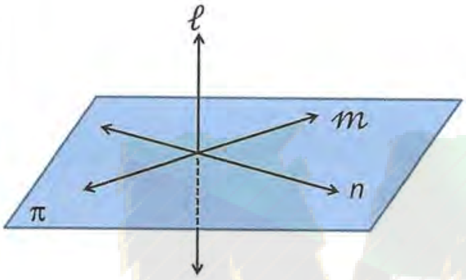
أ.محمد بشار

# تعامد مستقيم مع مستو




- **الزاوية بين مستقيمين متخالفين:** هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيم آخر قاطع له ومواز للآخر.

## تعريف




يكون المستقيم $\ell$ عموديا على المستوى $\pi$ إذا كان $\overleftrightarrow{\ell}$ عموديا على جميع المستقيمات الواقعة في $\pi$ و يرمز له بـ : $\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi$

............................

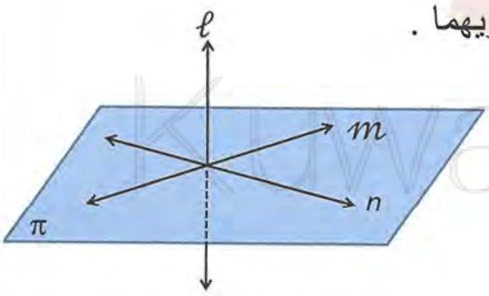
في الشكل المجاور : إذا كان $\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi$

فإن $\ell$ عموديا على كل المستقيمات في المستوى $\pi$

***********

## نظرية (5)

تفيد في اثبات تعامد مستقيم مع مستوي




المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديا على مستويهما .

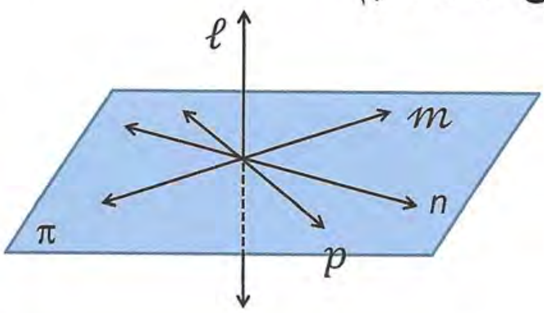
$$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m} \\ \overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n} \\ \overleftrightarrow{m} \cap \overleftrightarrow{n} = A \end{array}\right\} \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi$$

*************

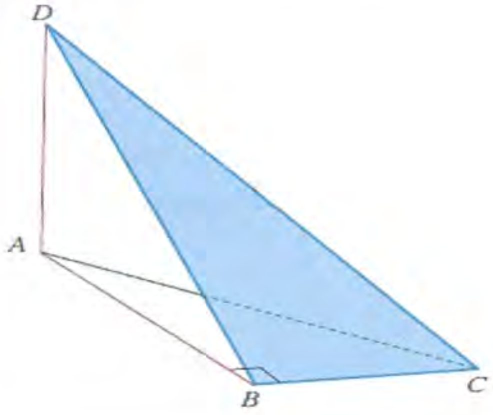
## نتيجة(2)

جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم

تكون محتواه في مستو واحد عموديا على المستقيم المعلوم.



## مثال : ( 1 ) صفحة 130

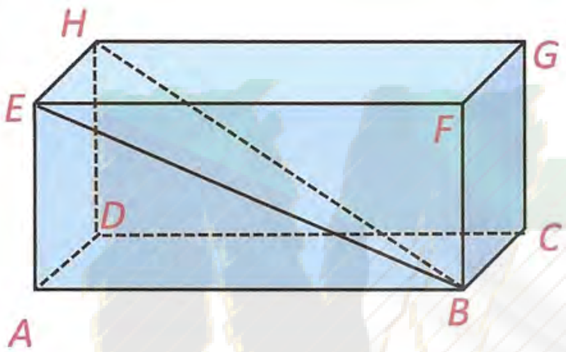



في الشكل المقابل :

المثلث $ABC$ قائم في $\hat{B}$ ، $\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$

المطلوب : اثبت أن المثلث $DBC$ قائم في $\hat{B}$

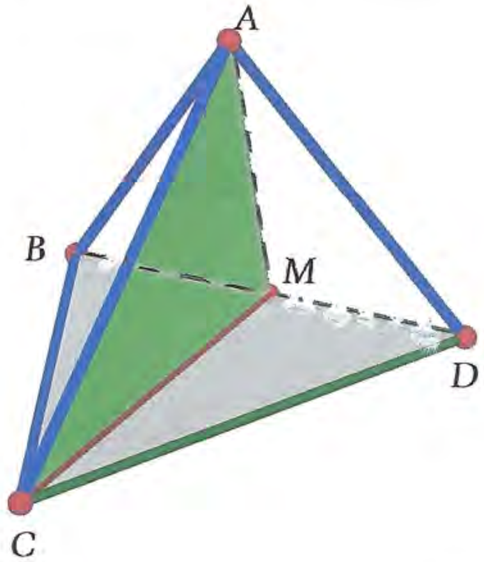
## حاول أن تحل : (1) صفحة 132




في شبه المكعب المقابل.

المطلوب : أثبت أن المثلث $BEH$ قائم في $\hat{E}$

## تمرين 3 صفحة 54 "كراسة"




$ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة فيه:

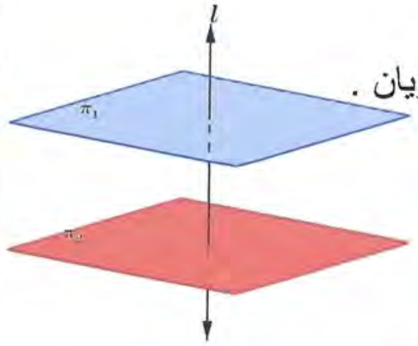
$\overline{BD}$ منتصف $M$ ، $AD = AB, CD = CB$

a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{DB} \perp (AMC)$

b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

**الحل:**

## نظرية (6) تفيد في اثبات توازي مستويين




إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستويين مختلفين، فإنهما يكونان متوازيان .

$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_1 \\ \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_2\end{array}\right] \pi_1 \ // \ \pi_2$$

*************

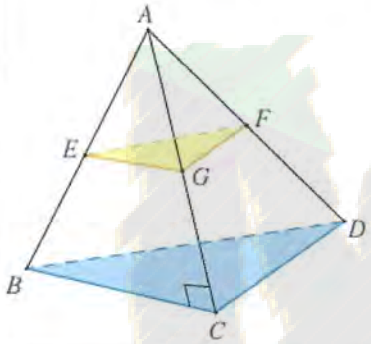
## نظرية (7) تفيد في اثبات تعامد مستقيم مع مستوي

إذا كان مستقيم عموديا على أحد مستويين متوازيين، فإنه يكون عموديا على المستوى الأخر.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \ // \ \pi_2 \\ \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_1\end{array}\right] \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_2$$

*********

### مثال : ( 2 ) صفحة 132



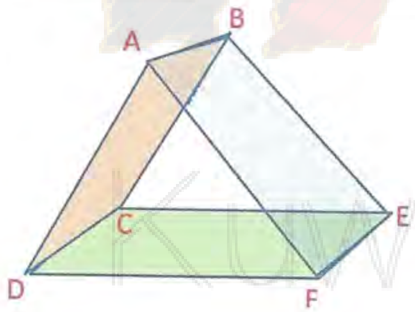

في الشكل المقابل : $A$ نقطة خارج المستوى $BCD$ ، و النقاط E , G , F

منتصفات $\overline{AB}$ , $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ على الترتيب . إذا كان $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

و كان $CD = 5cm$ , $AC = 12cm$ , $AD = 13cm$

فأثبت أن : $(EGF) \, // \, (BCD)$

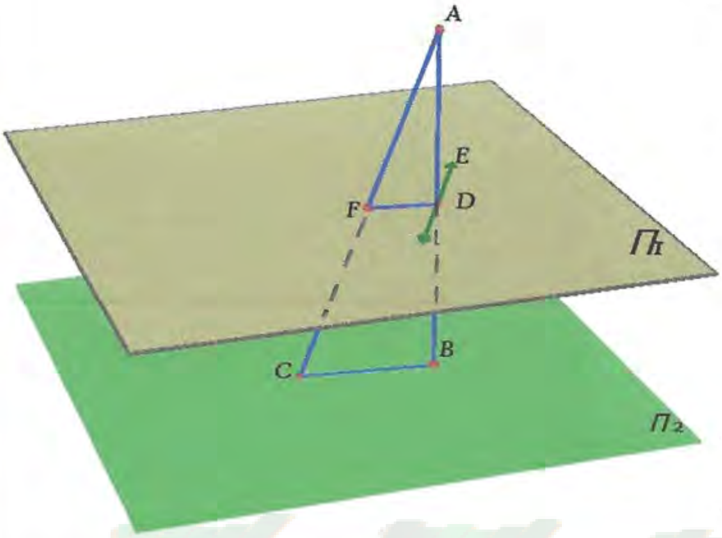
### حاول أن تحل : (2) صفحة 133




في الشكل المقابل : $ABEF$, $ABCD$ مستطيلان

أثبت أن : (AFD) // (BEC)

## تمرين 5 صفحة 54 "كراسة"




في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على المستوي $\pi_2$

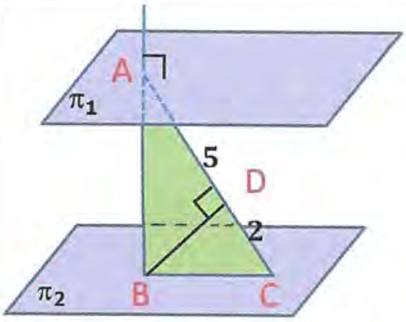
$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DE}, \qquad \overleftrightarrow{DE} \subset \pi_1$

فإذا كانت $D$ منتصف $\overline{AB}$ ، $F$ منتصف $\overline{AC}$

أثبت أن: $\pi_1 // \pi_2$

**الحل:**

## مثال: ( 3 ) صفحة 134



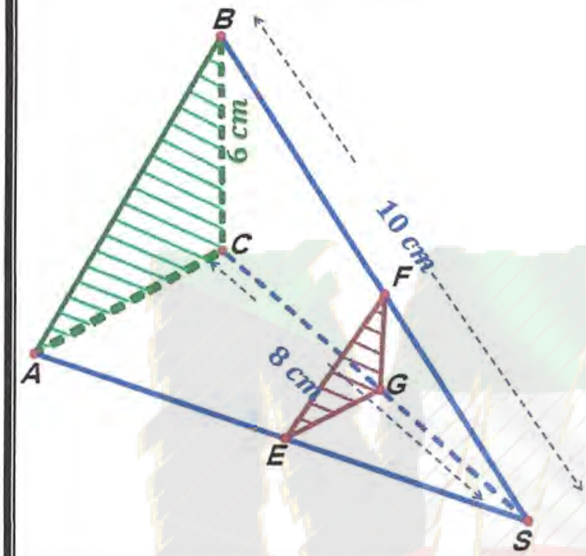

في الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$, $A \in \pi_1$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ، $\pi_1 // \pi_2$

، رسم $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$ في المستوى $ABC$،

إذا كان: $AD = 5\ cm,\ DC = 2\ cm$

المطلوب: أوجد طول $BD$

## تمرين 7 صفحة 55 "كراسة"




في الشكل المقابل، $(ABC)//(EFG)$ ، $\boldsymbol{S}$ نقطة خارج

$(ABC)$ ، $(EFG)$ بحيث $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{AC}$ فإذا كان:

$$SB = 10\ cm\ , SC = 8\ cm\ , BC = 6\ cm$$

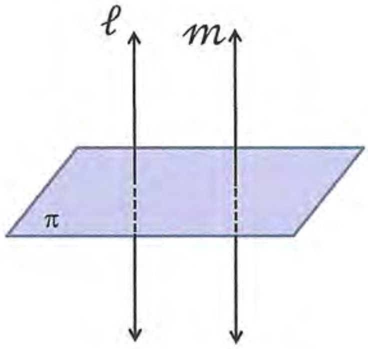
أثبت أن: $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{FE}$

الحل:

## نظرية (8)

تفيد في اثبات توازي مستقيم مع مستوي

المستقيمان العموديان على مستو متوازيان.




$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi \\ \overleftrightarrow{m} \perp \pi\end{array}\right] \quad \overleftrightarrow{\ell} \,//\, \overleftrightarrow{m}$$

***************

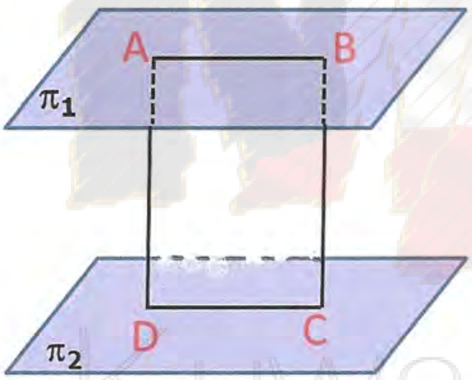
## نظرية (9)

تفيد في اثبات تعامد مستقيم مع مستوي

إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديا على مستو كان المستقيم الأخر عموديا على المستوى أيضا .

$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{\ell} \,//\, \overleftrightarrow{m} \\ \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi\end{array}\right] \quad \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$

********************




### حاول أن تحل: (3) صفحة 134

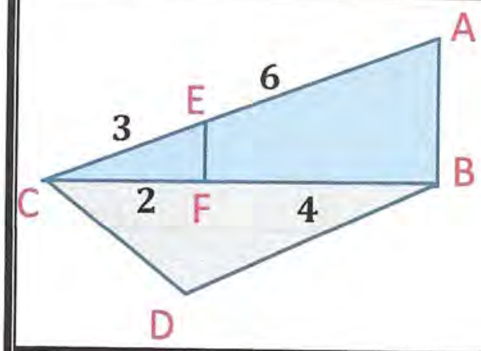
في الشكل المقابل: $\pi_1 \,//\, \pi_2$ ، $A , B$ نقطتان في $\pi_1$ ،

$C , D$ نقطتان في $\pi_2$ حيث: $A, B, C, D$ في مستو واحد

، $\overline{AD} \perp \pi_2, \ \overline{BC} \perp \pi_2$

اثبت أن $ABCD$ مستطيل

## مثال : ( 4 ) صفحة 135

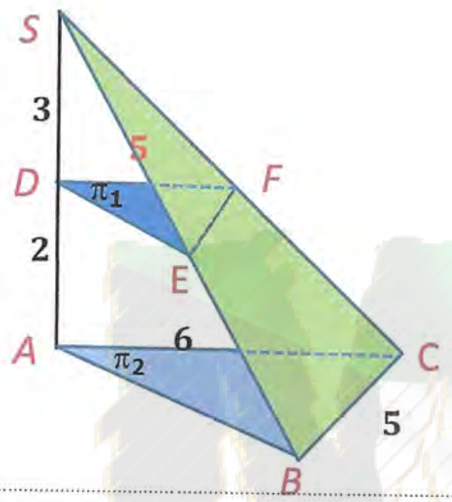



في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

وكان $CE = 3cm\ ,\ EA = 6cm\ ,\ CF = 2cm\ ,\ FB = 4cm$

اثبت أن : $\overline{EF} \perp \overline{DB}$

## حاول أن تحل: (4) صفحة 136




في الشكل المقابل :

المستويان $(ABC)\ ,\ (DEF)$ متوازيان ، $\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$

إذا كان $SD = 3cm\ ,\ DA = 2cm\ ,\ BC = 5cm$ ، ،

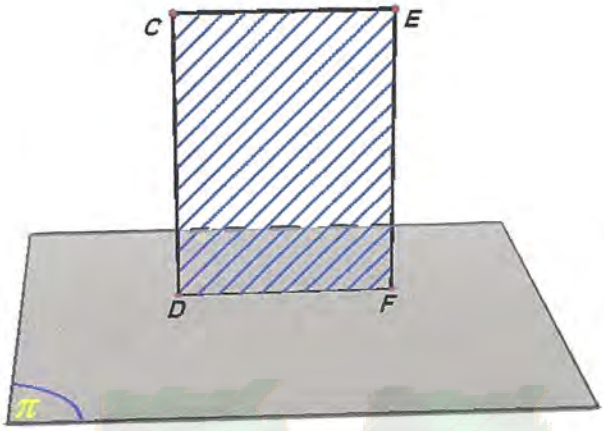
$AC = 6cm\ ,\ SE = 5cm$

فأوجد محيط المثلث $DEF$

## تمرين 8 صفحة 55 "كراسة"

ليكن $\overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{CD}$ عموديان على المستوي $\pi$، ويقطعانه في $D, F$ على الترتيب. فإذا كان $\overleftrightarrow{CE}$ يوازي $\pi$ أثبت أن:

$CDFE$ مستطيل.



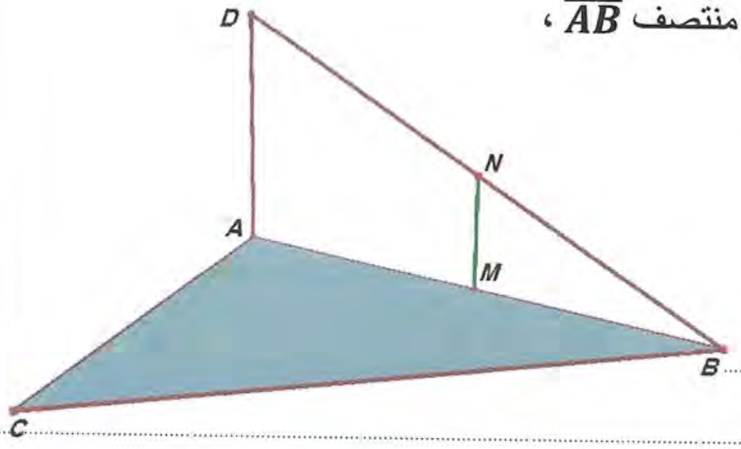

**الحل:**

## تمرين 9 صفحة 55 "كراسة"

$ABC$ مثلث، اخذت النقطة $A$ خارج مستوي المثلث بحيث كان:

$\overleftrightarrow{DA}$ عمودي على كل من $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AB}$ فإذا كانت $M$ منتصف $\overline{AB}$ ،

$N$ منتصف $\overline{DB}$ أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$.



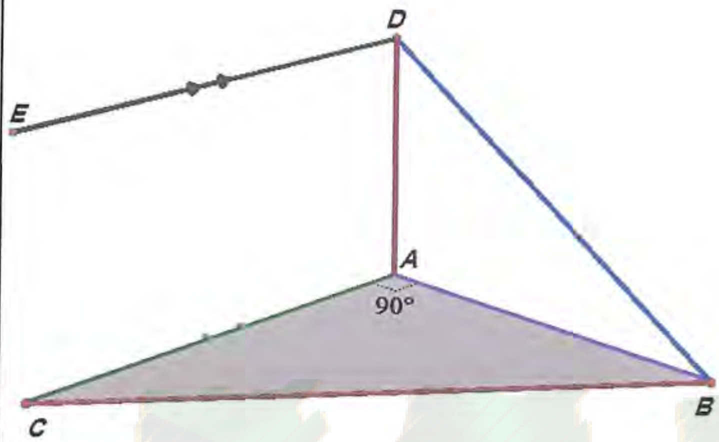

**الحل:**

## تمرين 10 صفحة 55 "كراسة"

في الشكل المقابل $ABC$ مثلث قائم الزاوية في $A$ رسم $\overleftrightarrow{AD}$

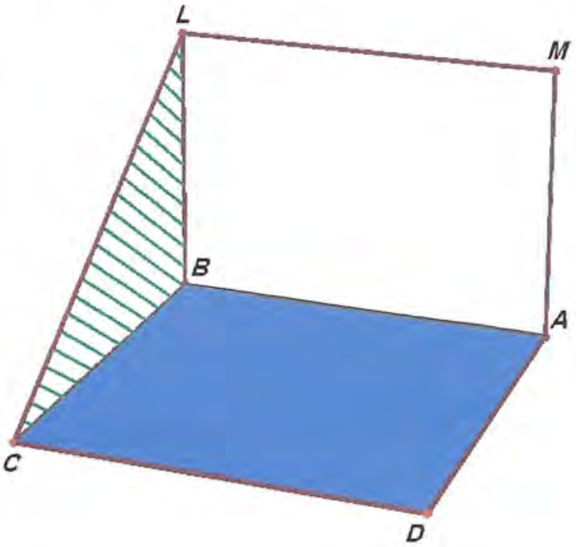
عمودي على مستوي المثلث $ABC$ ورسم $\overleftrightarrow{ED}//\overleftrightarrow{CA}$ أثبت أن:

$\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{DB}$.




**الحل:**

## تمرين 11 صفحة 55 "كراسة"



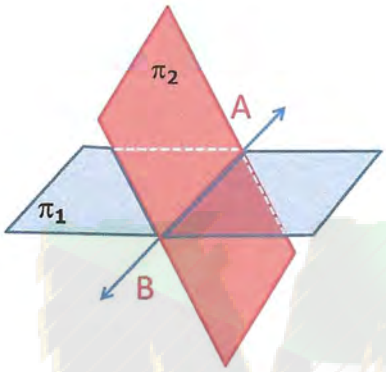

$ABCD$, $ABLM$ مربعان ليسا في مستو واحد، لهما ضلع مشترك $\overline{AB}$ أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$

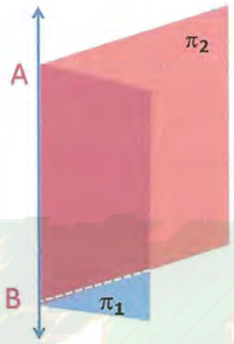
**الحل:**

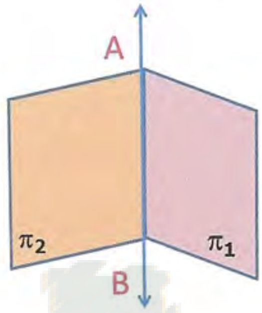
# الزاوية بين مستويين ( الزاوية الزوجية )

* إذا تقاطع مستويان مختلفان في الفضاء فإنهما يتقاطعان في مستقيم و ينتج من هذا التقاطع أربع زوايا زوجية .

* يقسم المستقيم المشترك كل مستوى إلى نصفين و يسمى المستقيم المشترك حافة الزاوية الزوجية أو الفاصل المشترك و يسمى كل من نصفي المستويين وجه الزاوية الزوجية.

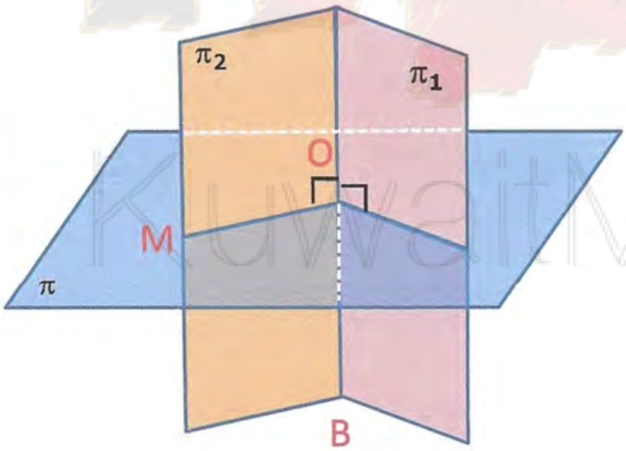



## الزوايا المستوية للزاوية الزوجية

هي الزوايا التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستو عمودي على حافتها .

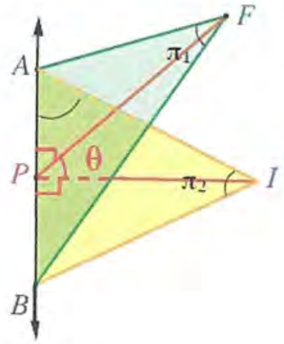



و تكون قياس الزاوية الزوجية
هو قياس إحدى زواياها المستوية
و دائما نأخذ قياس الزاوية الحادة

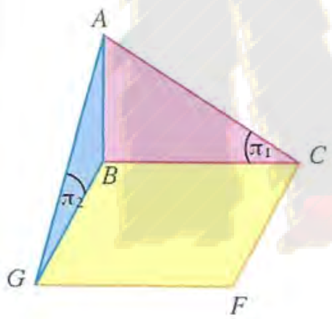
## تدريب (1) صفحة ( 138 )

في كل من الأشكال التالية عيّن الزاوية المستوية للزاوية الزوجيّة بين المستويين $\pi_2$ ، $\pi_1$

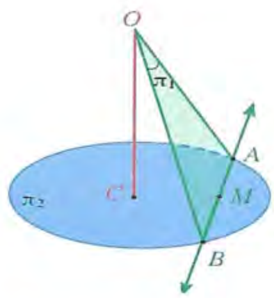
1. $\overline{FP} \perp \overline{AB}$ , $\overline{IP} \perp \overline{AB}$



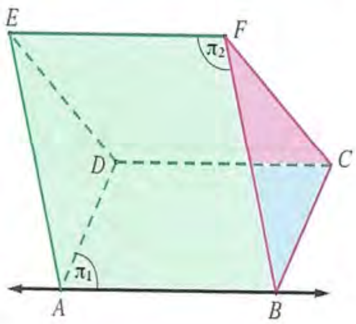

2. $\overline{AB} \perp (CBGF)$




3. $\overline{OC} \perp \pi_2$ ، $\overline{AB}$ منتصف $M$



4 $ABCD$ مستطيل، $\overleftrightarrow{FC} \perp (ABCD)$




مثال : ( 1 ) صفحة 139

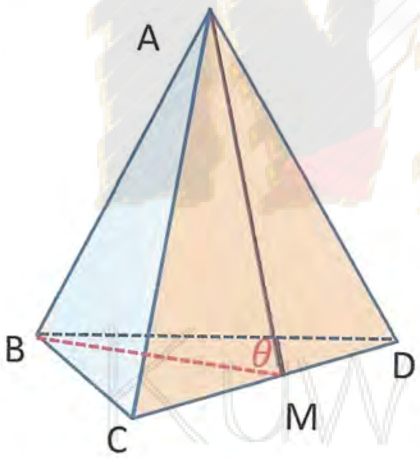
في الشكل المقابل :

هرم ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع طول حرفه 8 cm

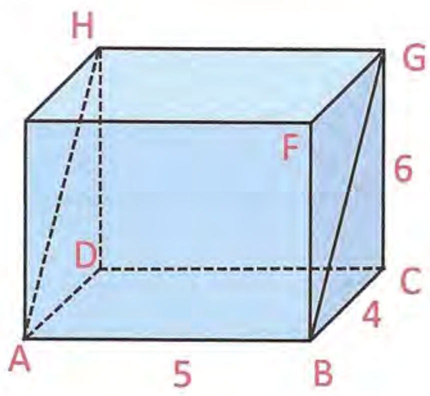
M منتصف DC

a حدد الزاوية المستوية بين المستويين $ADC, BDC$

b أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$



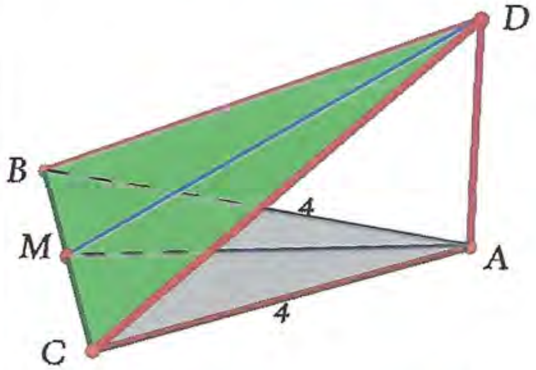
## حاول أن تحل : (1) صفحة 140

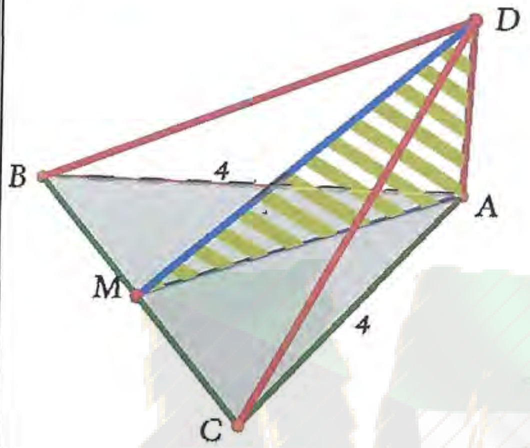



في شبه المكعب المقابل .

أثبت أن الزاوية $GBC$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين $(ABCD)$ , $(ABGH)$ ، ثم أوجد قياسها

## تمرين 1 صفحة 57 "كراسة"




$ABC$ مثلث متطابق الاضلاع وطول ضلعه $4\ cm$،

$\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على مستوي المثلث $ABC$ بحيث

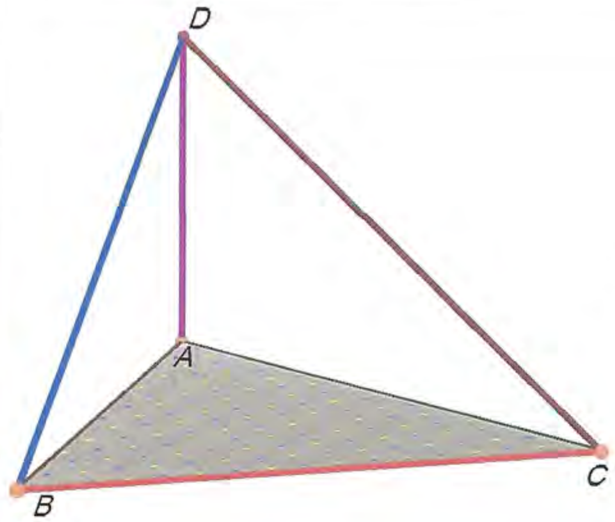
$AD = 2\sqrt{3}$ ، $M$ منتصف $\overline{BC}$

a) أثبت أن $\overleftrightarrow{CB}$ متعامد مع المستوي $AMD$

b) أوجد الزاوية الزوجية $(DCB, \overleftrightarrow{BC}, ACB)$.

c) أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DCB, \overleftrightarrow{BC}, ACB)$.

**الحل:**



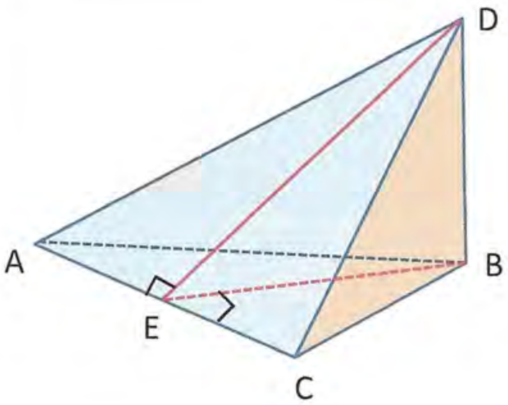

## تمرين 2 صفحة 57 "كراسة"

$ABC$ مثلث متطابق الاضلاع $\overleftrightarrow{DA}$ متعامد مع المستوي $(ABC)$

a) أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$.

**الحل:**

## مثال : ( 2 ) صفحة 140




في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC ،

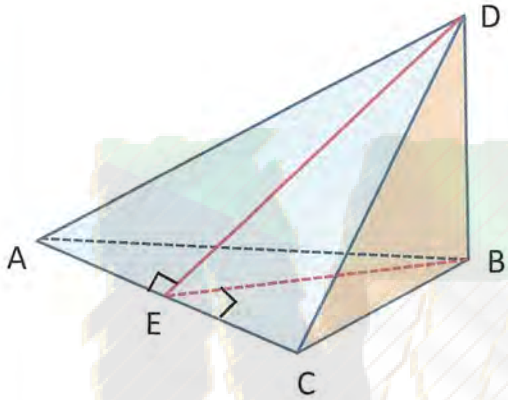
DB=5cm , AB=10cm , $m(\hat{BAC}) = \frac{\pi}{6}$

$\overline{BD} \perp (ABC)$ ، $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{DE} \perp \overline{AC}$

أوجد : 1 ) $BE , DE$

2 ) قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC

## حاول أن تحل : (2) صفحة 141




في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC ،

DB=5cm , AB=10cm , $m(\hat{BAC}) = 45$

$\overline{BD} \perp (ABC)$ ، $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{DE} \perp \overline{AC}$

أوجد قياس الزاوية بين المستويين (DAC) , (BAC)

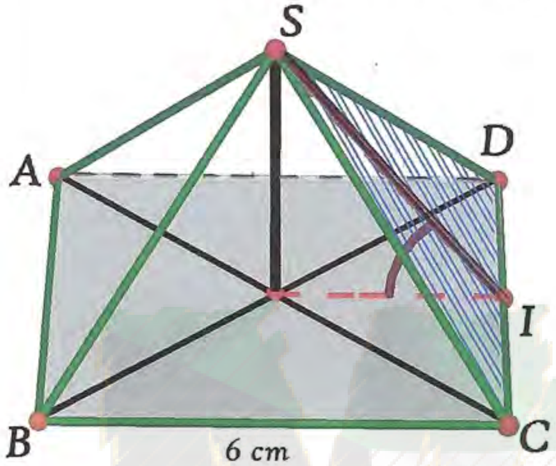
## تمرين 5 صفحة 57 "كراسة"

$SABCD$ هرم مربع القاعدة طول ضلعها $6\ cm$ ومركزها $M$ بحيث إن

$\overleftrightarrow{SM} \perp (ABCD)$ ، $I$ منتصف $\overline{CD}$

a) أثبت أن $(\widehat{MIS})$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(ABCD, \overleftrightarrow{CD}, SCD)$

b) أوجد $m(\widehat{MIS})$ إذا كان $SM = \sqrt{3}\ cm$.

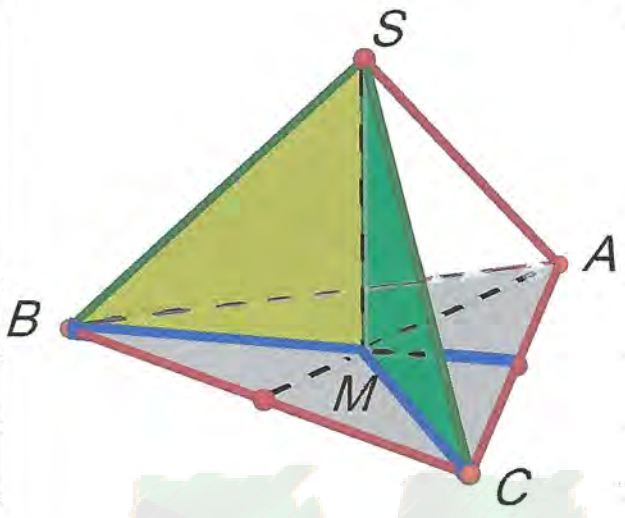



**الحل:**

## تمرين 6 صفحة 58 "كراسة"

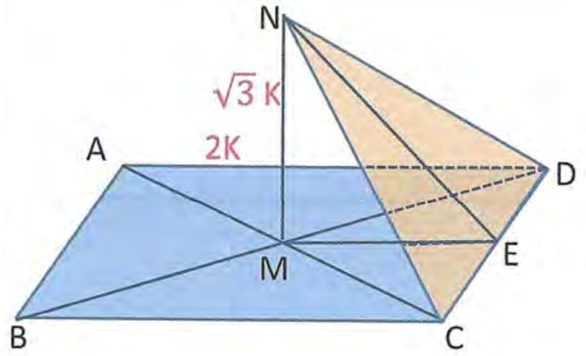
$SABCD$ هرم قاعدته مثلث متطابق الأضلاع ومركزه $M$ بحيث إن $\overleftrightarrow{SM} \perp (ABC)$

اوجد قياس الزاوية الزوجية $(SMB, \overleftrightarrow{SM}, SMC)$



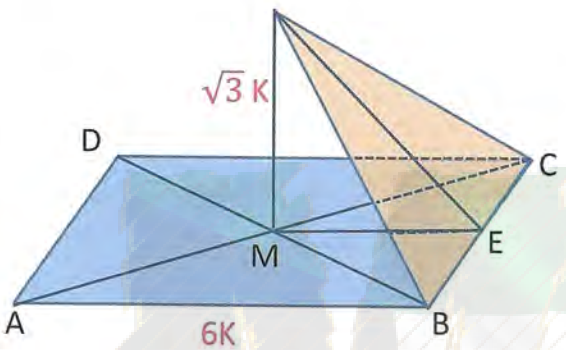

**الحل:**

## مثال : ( 3 ) صفحة 142




ABCD مستطيل تقاطع قطراه في M ، و فيه AD= 2K
أقيم NM عمودا على (ABCD) حيث N خارج مستواه
بحيث $MN = \sqrt{3}$ K
أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ABCD , NCD

## حاول أن تحل : (3) صفحة 142




ABCD مستطيل تقاطع قطراه في M ، و فيه AB = 6K
أقيم NM عمودا على (ABCD) حيث N خارج مستواه
بحيث $MN = \sqrt{3}$ K
أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ABCD , NBC

# المستويات المتعامدة

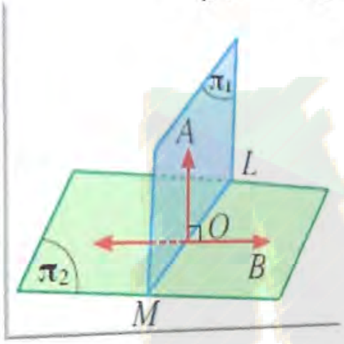
## يكون المستويان متعامدان

إذا كانت الزاوية المستوية بينهما زاوية قائمة

أي أن قياس الزاوية الزوجية بين المستويين 90

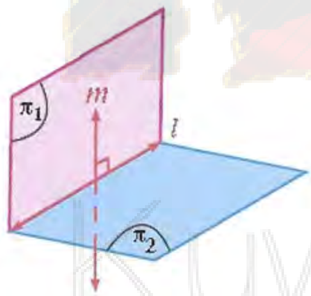
**نظرية (10)** تفيد في اثبات تعامد مستويين

إذا كان مستقيم عموديا على مستو ، فكل مستو يمر بذلك المستقيم يكون عموديا على المستوي .




$$\left.\begin{aligned}\overleftrightarrow{OA} &\perp \pi_2\\ \overleftrightarrow{OA} &\subseteq \pi_1\end{aligned}\right\} \pi_1 \perp \pi_2$$

**نتيجة(3)** تفيد في اثبات تعامد مستقيم مع مستوي




إذا تعامد مستويان و رسم في أحدهما مستقيم عمودي على خط تقاطعهما،

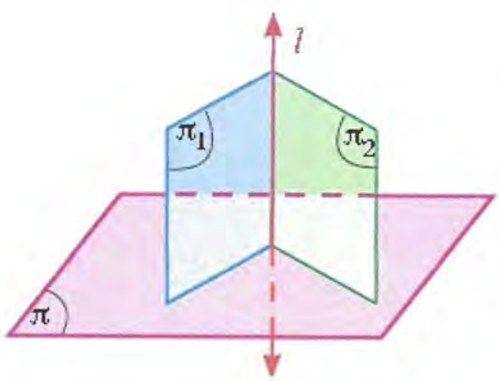
فإنه يكون عموديا على المستوي الآخر.



**نتيجة(4)** تفيد في اثبات تعامد مستقيم مع مستوي

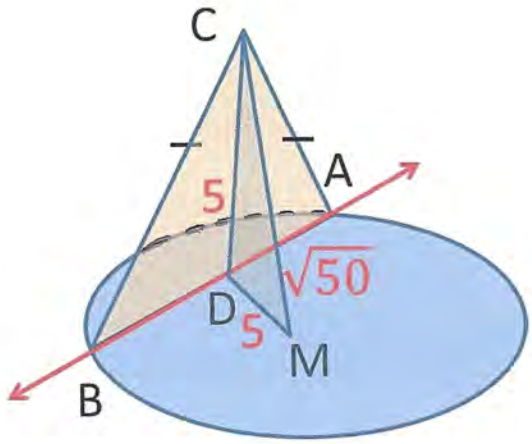
إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودي على مستو ثالث ،

فإن خط تقاطع المستويين يكون عموديا على هذا المستوي الثالث .




$$\left.\begin{aligned}\pi_1 &\perp \pi\\ \pi_2 &\perp \pi\\ \pi_1 \cap \pi_2 &= \overleftrightarrow{l}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \pi$$

## مثال : ( 1 ) صفحة 144




في الشكل المقابل :

C نقطة خارج مستوى الدائرة التي مركزها $M$ ،

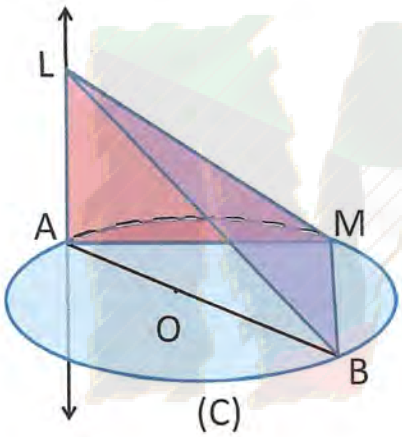
$D$ منتصف $\overline{AB}$ ، ABCمثلث فيه CA = CB.

إذا كان DM = DC = 5cm , MC = $\sqrt{50}$ cm

أثبت ان : 1 ) $\overline{MC} \perp \overline{AB}$

2 ) مستوي الدائرة $\perp$ (ACB)

## حاول أن تحل : (1) صفحة 145




في الشكل المقابل :

C دائرة مركزها O ، $\overline{AB}$ قطر فيها ،

M نقطة تنتمي إلى الدائرة ، $\overleftrightarrow{LA}$ متعامد مع مستوي الدائرة

أثبت ان : 1) $\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$

2) $(LBM) \perp (LAM)$

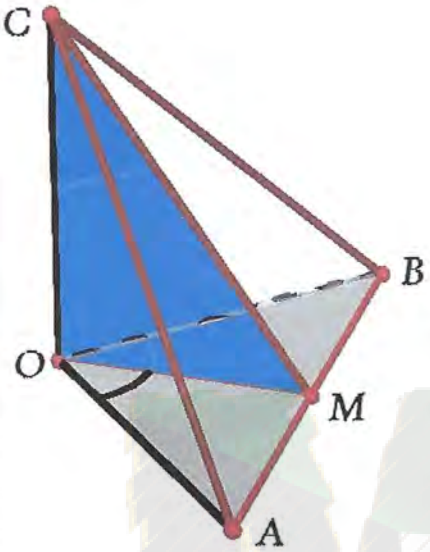
## تمرين 1 صفحة 60 "كراسة"

$OAB$ مثلث قائم في $\widehat{O}$ ، $OA = OB = 1$

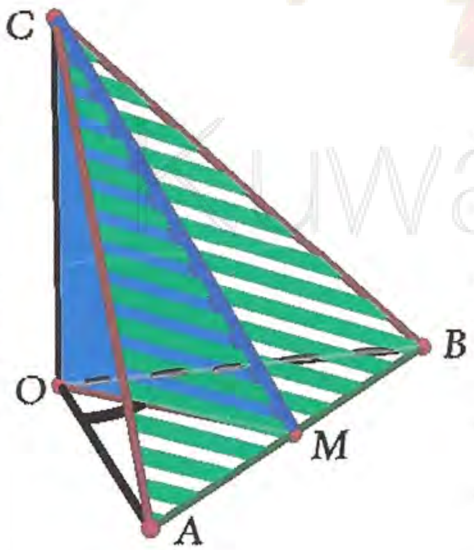
$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي $OAB$، $OC = 1$، $M$ منتصف $\overline{AB}$

a) أثبت أن المستوي $COM$ متعامد مع المستوي $OAB$

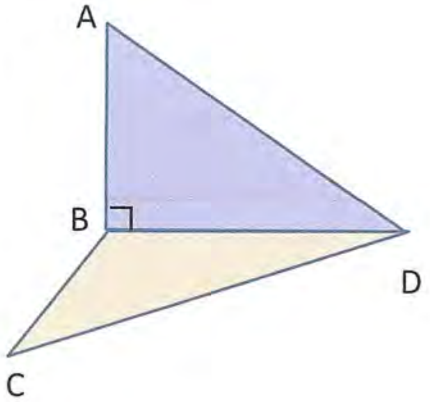
b) أثبت أن المستوي $COM$ متعامد مع المستوي $CAB$




الحل:



## مثال : ( 2 ) صفحة 145




A,B,C,D أربع نقاط ليست مستوية معا .

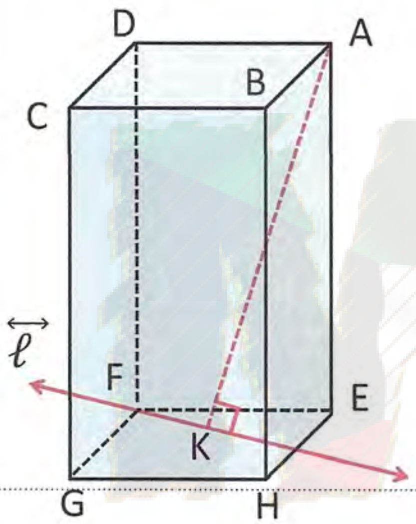
إذا كان: $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ ،

و كان $(CD)^2+(AB)^2+(BC)^2=(AD)^2$

أثبت ان: 1) $\overline{BC} \perp \overline{DC}$

2) $(ABD) \perp (CBD)$

## حاول أن تحل : (2) صفحة 146




في شبه المكعب $ABCDEFGH$ المقابل :

$\overleftrightarrow{\ell}$ مستقيم في $(EFGH)$ يمر في F ، $\overleftrightarrow{AK} \perp \overleftrightarrow{\ell}$

أثبت ان : $\overline{EK} \perp \overleftrightarrow{\ell}$

$(FDK) \perp (AEK)$

# ملخص

**1) طرق اثبات وقوع نقاط او مستقيمات في مستوي واحد:**

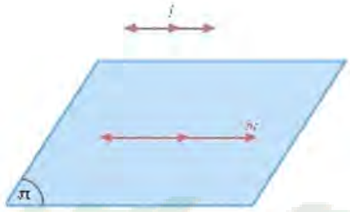
I) اثبات ان المستقيمين متقاطعين.

II) اثبات أن المستقيمين متوازيين.

III) اثبات أن النقاط لا تقع على استقامة واحدة "رؤوس مثلث أو رباعي"

IV) اثبات وجود مستقيم ونقطة خارجة عنه "لا تنتمي اليه"

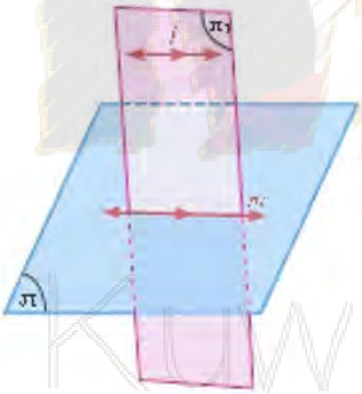
**2) طرق اثبات توازي مستقيم مع مستوي:**



I) اثبات أن هذا المستقيم يوازي مستقيم ما في ذلك المستوي "نكتفي بمستقيم واحد فقط". **(نظرية$_1$)**

**3) اثبات توازي مستقيم مع مستقيم:**

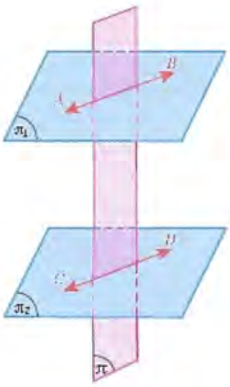
I) نثبت وقوع المستقيمين في مستوي واحد ثم نستخدم الهندسة المستوية لإثبات التوازي. **(مسلمات)**



II) نثبت أن أحد المستقيمين فاصل مشترك لمستويين والمستقيم الآخر يقع في أحد المستويين ويوازي المستوي الآخر. **(نظرية$_2$)**

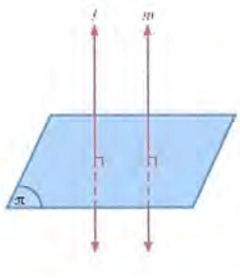
$$\left.\begin{array}{r}\overleftrightarrow{l} // \pi \\ \overleftrightarrow{l} \subset \pi_1 \\ \pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{m}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m}$$

III) اثبات أن المستقيمان يوازيان مستقيم ثالث. **(نظرية$_3$)**



IV) اثبات أنهما فاصلان مشتركان ناتجان من تقاطع مستوي مع مستويين متوازيين. **(نظرية$_4$)**

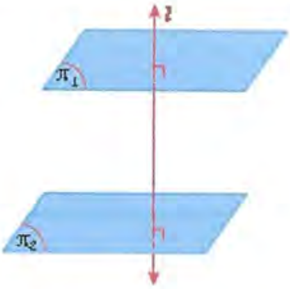
$$\left.\begin{array}{r}\pi_2 // \pi_1 \\ \pi_2 \cap \pi = \overleftrightarrow{l} \\ \pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{m}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m}$$



V) اثبات أنهما عموديان على مستوي واحد **(نظرية$_8$)**

$$\left.\begin{array}{r}\overleftrightarrow{m} \perp \pi \\ \overleftrightarrow{l} \perp \pi\end{array}\right\} \Longrightarrow \overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m}$$

4) اثبات توازي مستوي مع مستوي:

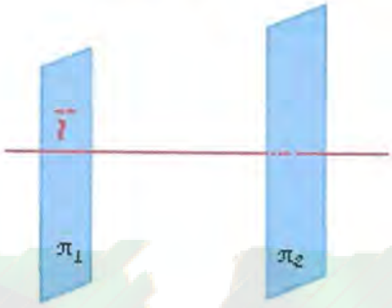



I) اثبات أن هناك مستقيم عمود على كلا المستويين. (نظرية 6)

5) اثبات تعامد مستقيم مع مستوي:

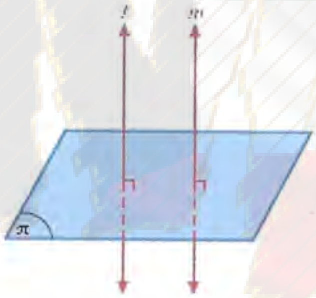
I) نثبت أن هذا المستقيم عمودي على مستقيمين متقاطعين في ذلك المستوي. (نظرية 5)

II) نثبت أن هذا المستقيم عمودي على مستوي آخر يوازي ذلك المستوي المطلوب. (نظرية 7)



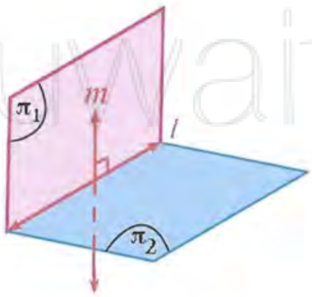

$$\left.\begin{array}{r}\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \\ \pi_2 // \pi_1\end{array}\right\} \Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2$$

III) اثبات أن هذا المستقيم يوازي مستقيم آخر عمودي على ذلك المستوي. (نظرية 9)



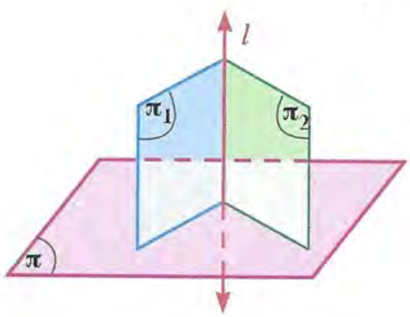

$$\left.\begin{array}{r}\overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m} \\ \overleftrightarrow{l} \perp \pi\end{array}\right\} \Longrightarrow \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$

IV) نثبت أن هذا المستقيم محتوى في أحد مستويين متعامدين وعمود على فاصلهما المشترك (نتيجة)



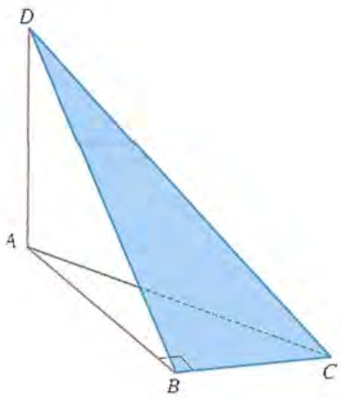

$$\left.\begin{array}{r}\pi_2 \perp \pi_1 \\ \overleftrightarrow{m} \subset \pi_2 \\ \overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{l}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overleftrightarrow{m} \perp \pi_2$$

V) اثبات أن هذا المستقيم هو فاصل مشترك لمستويين عمودين على ذلك المستوي. (نتيجة)




$$\left.\begin{array}{r}\pi_1 \perp \pi \\ \pi_2 \perp \pi \\ \pi_2 \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{l}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \pi$$

6) اثبات تعامد مستقيم مع مستقيم:




I) اثبات أن أحدهما عمود على مستوي الآخر. (تعريف)

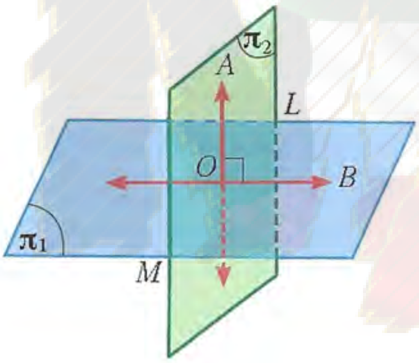
$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{BC} \perp (DAB) \\ \overleftrightarrow{DA} \subset (DAB)\end{array}\right\} \Longrightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{DA}$$

II) اثبات وقوع قطعتين مستقيمتين في مستوي واحد واستخدام الهندسة المستوية "عكس فيثاغورث". (مسلمات)

7) اثبات تعامد مستوي مع مستوي:

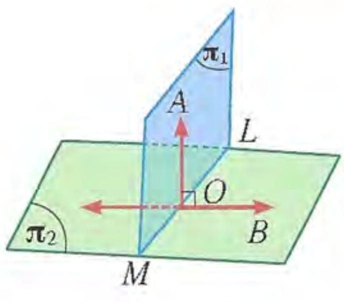
I) اثبات أن الزاوية "الزوجية" بينهما 90°. (تعريف)

$$m(\widehat{AOB}) = 90°$$






II) اثبات أن مستقيم يقع في أحدهما وعمودي على المستوي الآخر. (نظرية$_{10}$)




$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{AO} \perp \pi_2 \\ \overleftrightarrow{AO} \subset \pi_1\end{array}\right\} \Longrightarrow \pi_1 \perp \pi_2$$

**The End**