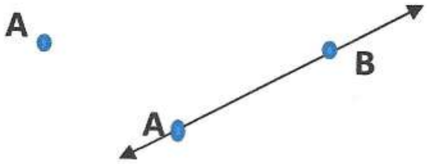
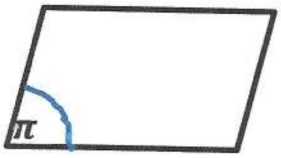
10–1 المستقيمات والمستويات في الفضاء

Lines and Planes in Space

علم هندسة الفضاء هو علم يهتم بدراسة الخصائص الهندسية للاشكال الهندسية ثلاثية الابعاد ويهتم بدراسة تقاطع المستقيمات والمستويات ببعضها وحجوم الاجسام ومساحات السطوح وهو مبنى على ثلاث كلمات أولية هي النقطة والمستقيم والمستوى والعلاقات بينها بالإضافة الى مجموعة مسلمات ونظريات

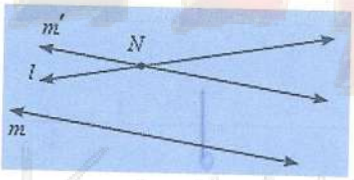


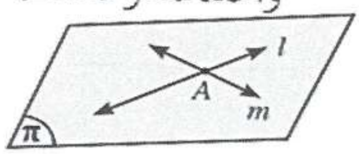
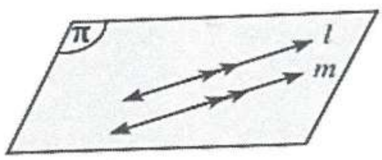
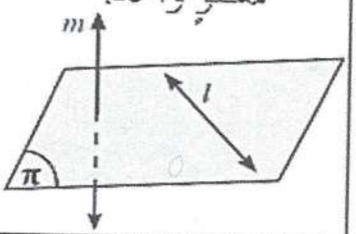


(1) علاقات الفضاء (العلاقات بين مكونات هندسة الفضاء)

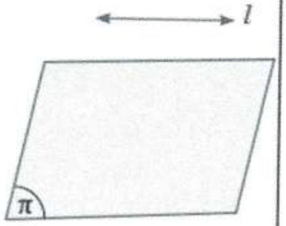
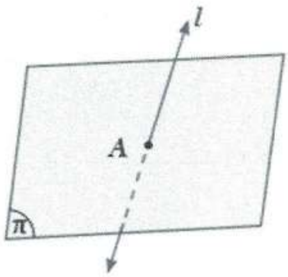
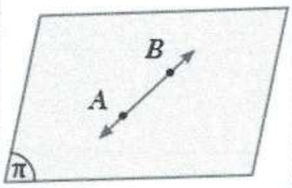
وضع مستقيمين في المستوى

- المستقيمان المتوازيان: هما مستقيمان يحويهما مستو واحد وغير متقاطعين.
- المستقيمان المتخالفان: هما مستقيمان لا يحويهما مستوى واحد.
- هناك فرق بين المستقيمان المختلفان والمتخالفان فالمختلفان هما غير المنطبقان والمتخالفان اللذان لا يحويهما مستو واحد
- الزاوية بين مستقيمان متخالفان هي الزاوية بين أحدهما ومستقيم قاطع له ويوازي الاخر



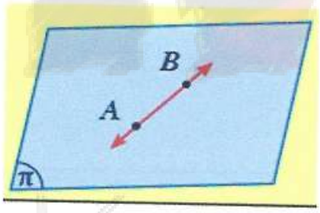
a متقاطعان	b متوازيان	c متخالفان
إذا وقعا في مستوٍ واحد وكان بينهما نقطة واحدة مشتركة فقط.	إذا وقعا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين.	إذا كان لا يحويهما مستوٍ واحد.
		
$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \{A\}$	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi \Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \,//\, \overleftrightarrow{m}$	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi$, $m \not\subset \pi$ $\Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$
مستقيمان متقاطعان	مستقيمان متوازيان	مستقيمان متخالفان

(أوضاع مستقيم ومستوى في الفضاء)

a صفر نقطة مشتركة: المستقيم موازٍ للمستوي (في هذه الحالة يكون البعد بينهما ثابت).	b نقطة مشتركة واحدة: المستقيم يقطع المستوي.	c نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل المستقيم يقع بكامله (بتمامه) في المستوي (المستقيم يوازي المستوي).
		
$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \pi$	$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \{A\}$	$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$

ملاحظة :

اذا اشترك مستقيم L ومستوى في اكثر من نقطة مختلفة فان المستقيم يقع بكامله داخل المستوى وفي هذه الحالة يكون المستقيم موازي للمستوى

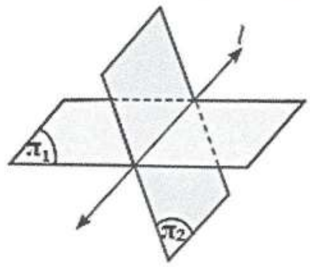
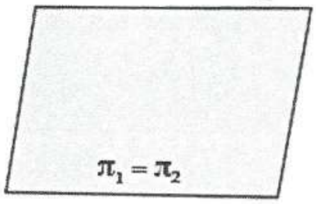
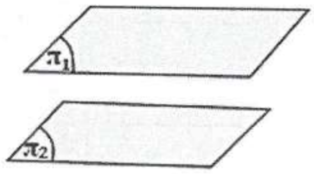


$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$

الأوضاع المختلفة لمستويين

يمكن حصر أوضاع مستويين في الفضاء بثلاث حالات:

(a) المستويان متقاطعان في مستقيم. 	(b) المستويان منطبقان (يشتركان في جميع النقاط). 	(c) المستويان متوازيان (لا توجد نقاط مشتركة بينهما). 
$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \Longrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$	$\pi_1 = \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 \mathbin{/\!/} \pi_2$	$\pi_1 \cap \pi_2 = \phi \Longrightarrow \pi_1 \mathbin{/\!/} \pi_2$

ملاحظات :

- إذا اشترك مستويان في نقطة فانه توجد نقاط أخرى مشتركة بينهما حيث لا يشترك مستويان في نقطة واحدة.
- إذا تقاطع مستويان فانهما يتقاطعان في خط مستقيم.
- إذا اشترك مستويان في ثلاث نقاط ليست على استقامة فانهما ينطبقان.

(2) مسلمات الفضاء

1- أي نقطتين مختلفتين في الفضاء تعينان مستقيما وحيدا وغير كافيتان لتعيين مستويا وحيدا في الفضاء ونقطة واحدة لا تعين مستقيما وحيدا

2- يحوي المستقيم على الأقل نقطتين مختلفتين أي اذا علم مستقيما فانه تكون هناك على الأقل نقطتين مختلفتين

3- ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة تعين مستويا وحيدا

4- يحوي المستوي على الأقل ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة أي اذا علم مستويا فانه تكون هناك على الأقل ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة موجودة

5- يتعين الفضاء بأربع نقاط مختلفة وغير مستوية على الأقل

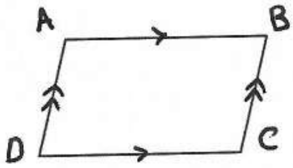
6- يحوى الفضاء على الأقل اربع نقاط مختلفة وليست مستوية

حالات تعيين مستوى وحيد في المستوى

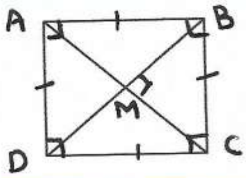
1. ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة تعين مستويا وحيدا
2. مستقيم ونقطه خارجه يعينان مستويا وحيدا
3. مستقيمان متقاطعان يعينان مستويا وحيدا
4. مستقيمان مختلفان متوازيان يعينان مستويا وحيدا

ثلاث نقاط غير مستقيمة — مستقيم ونقطة خارجة عنه — مستقيمان متقاطعان — مستقيمان متوازيان

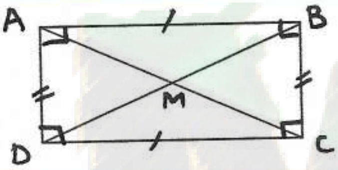
احتياجات هندسة الفضاء من الهندسة المستوية



متوازي الاضلاع هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين ومتطابقين

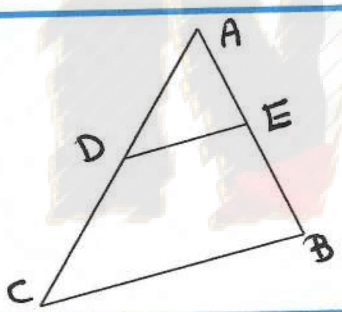


المربع هو متوازي أضلاع أضلاعه متطابقة وزواياه قائمة وقطراه متعامدان ومتطابقان

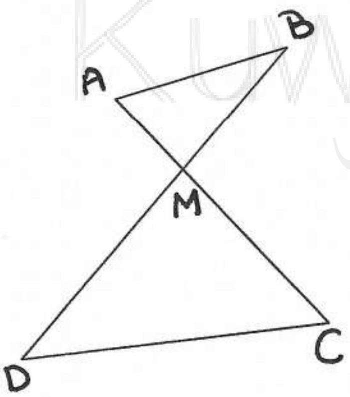


المستطيل هو متوازي أضلاع زواياه قائمة وقطراه متطابقان وغير متعامدان

المثلث



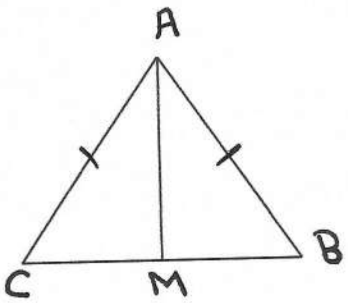
(1) في أي مثلث ABC اذا كان $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EB}$ فإن $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$ والعكس اذا كان $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$ فإن المثلثان متشابهان و $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{AC}$



(2) في الشكل المقابل اذا كان $\frac{BM}{MD} = \frac{AM}{MC}$ فإن المثلثان متشابهان ويكون $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ والعكس

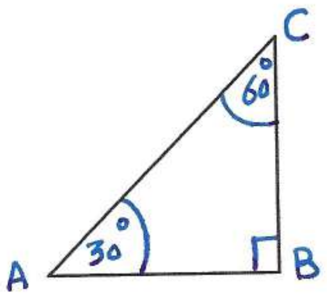
اذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ فإن المثلثان متشابهان ويكون

$$\frac{AM}{MC} = \frac{BM}{MD}$$



(3) اذا كان ABC مثلث متطابق الاضلاع وكان M منتصف $\overline{CB}$ فإن $\overline{AM} \perp \overline{CB}$

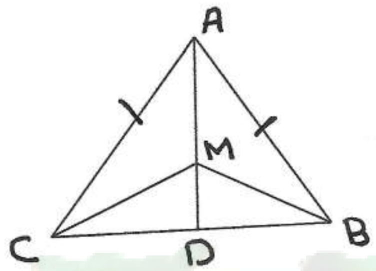
(4) في المثلث ABC الثلاثيني ستيني يكون



$$(AC)^2 = (AB)^2 + (CB)^2$$

$$BC = \frac{1}{2} AC \quad , \quad AB = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$$

(5) اذا كان ABC مثلث متطابق الاضلاع ، M مركزه فان

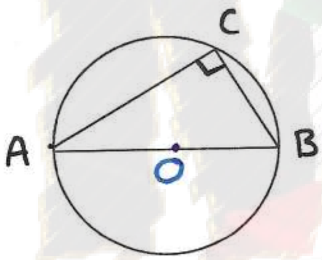


$$\overleftrightarrow{AM} \perp \overline{CB}$$

$$m(A\hat{M}B) = m(A\hat{M}C) = m(C\hat{M}B) = 120^\circ$$

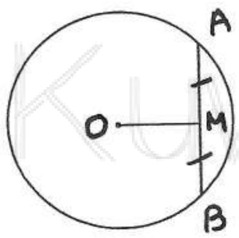
الدائرة

إذا كان $\overline{AB}$ قطرا في الدائرة O فان



$$m(A\hat{C}B) = 90^\circ \quad \therefore \overline{BC} \perp \overline{AC}$$

- وإذا كان $\overline{AB}$ وترا في الدائرة O فان

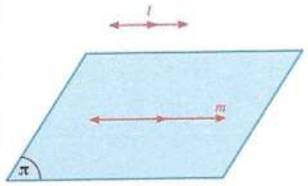


$$\overline{OM} \perp \overline{AB}$$

حيث M منتصف $\overline{AB}$

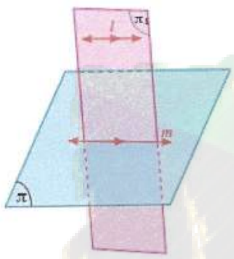
10-2 المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space



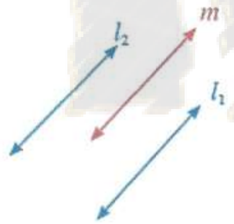
نظرية (1)

إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيمًا في المستوي، فإنه يوازي المستوي.



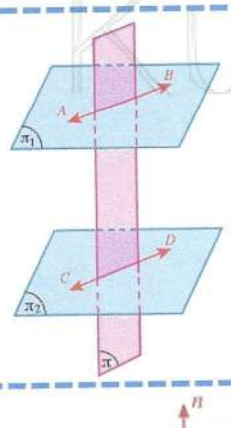
نظرية (2)

إذا وازى مستقيم مستويًا، فكل مستوٍ مار بالمستقيم ويقطع المستوي، يقطعه في مستقيم موازٍ للمستقيم المعلوم.



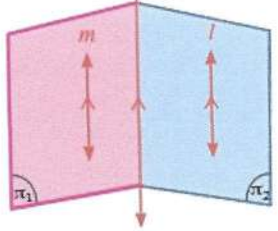
نظرية (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.



نظرية (4)

إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.



نتيجة (1)

إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان،

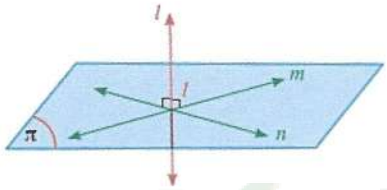
فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًا من هذين المستقيمين.

10-3

تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line With a Plane

فإذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$ فإن l عموديًا على كل المستقيمات في المستوي π

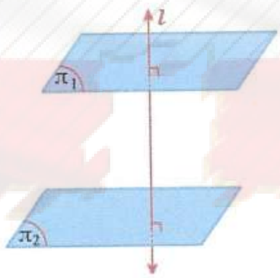


نظرية (5)

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًا على مستويهما.

نظرية (6)

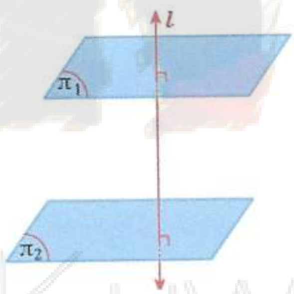
إذا كان مستقيم عموديًا على كلٍّ من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين.



$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2 \implies \pi_1 \parallel \pi_2$$

نظرية (7)

إذا كان مستقيم عموديًا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديًا على المستوي الآخر.



$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \pi_1 \parallel \pi_2 \implies \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2$$

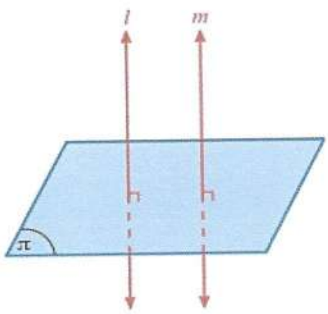
نظرية (8)

المستقيمان العموديان على مستوٍ متوازيان.

نظرية (9)

إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديًا على مستوٍ كان المستقيم الآخر عموديًا على المستوي أيضًا.

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi \ , \ \overleftrightarrow{m} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$$



$$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m} \ , \ \overleftrightarrow{l} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$

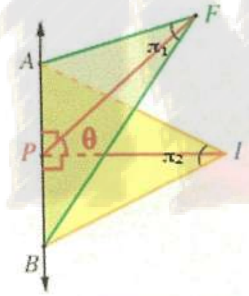
10-4

الزاوية الزوجية
The Dihedral Angle

الزاوية بين مستويين (الزاوية الزوجية)

هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع مستويين وتسمي خط تقاطع المستويين بحافة الزاوية الزوجية وكل من المستويين وجهي الزاوية

تعريف: الزاوية المستوية لزاوية زوجية
هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستوٍ عمودي على حافتها.



$\overline{FP} \perp \overline{AB}$, $\overline{IP} \perp \overline{AB}$

حافة الزاوية الزوجية ....

...... $\subset \pi_1$, ... $\perp \overline{AB}$

وكذلك .... $\subset \pi_2$, ... $\perp \overline{AB}$

$\therefore$ .... هي الزاوية المستوية
للزاوية الزوجية بين π_1 , π_2

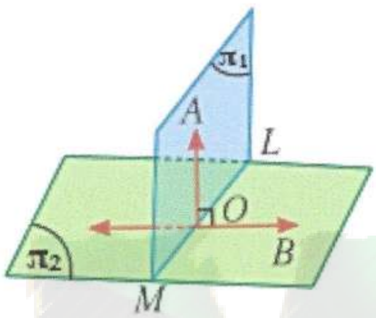
10-5

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

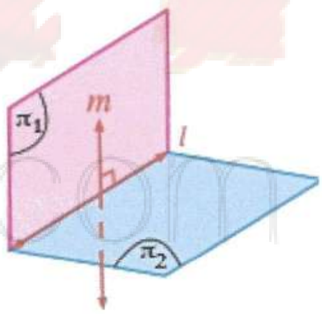
نظرية (10)

إذا كان مستقيم عموديًا على مستوٍ، فكل مستوٍ يمر بذلك المستقيم يكون عموديًا على المستوي.



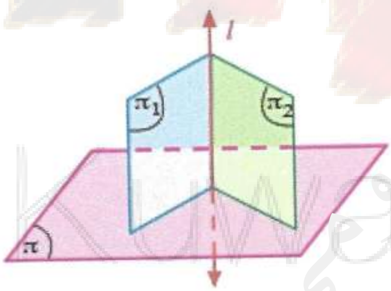
نتيجة (3)

إذا تعامد مستويان ورسم في أحدهما مستقيم عمودي على خط تقاطعهما فإنه يكون عموديًا على المستوي الآخر.



نتيجة (4)

إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودي على مستوٍ ثالث فإن خط تقاطع المستويين يكون عموديًا على هذا المستوي الثالث.



تمرَّنْ
10-1

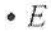
المستقيمات والمستويات في الفضاء

Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية

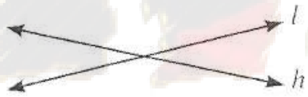
في التمارين (5—1)، هل الشكل يجب أن يكون موجودًا في مستوٍ واحد فقط؟

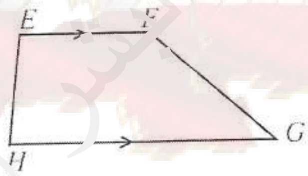
(1)

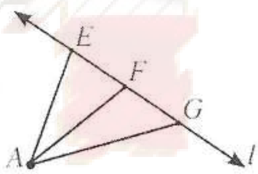

(2)


(١) مستقيم واحد لا يعين مستوٍ وحيد لذا فالمستقيم يمكن أن يكون في عدد لا نهائي من المستويات.

(٢) النقطة الواحدة لا تعين مستو وحيد لذا فالنقطة تكون موجودة في عدد لا نهائي من المستويات

(3)


(4)


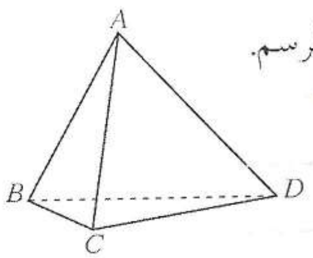
(5)


(3) مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط لذا فالمستقيمان المتقاطعان يجب أن يكونا في مستوٍ واحد فقط

(4) شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان والمستقيمان المتوازيان [illegible] يعينان مستو وحيد

(5) مستقيم ونقطة خارجة عنه يعينان مستويًا واحدًا فقط فالشكل يجب أن يكون موجودًا في مستوٍ واحد فقط

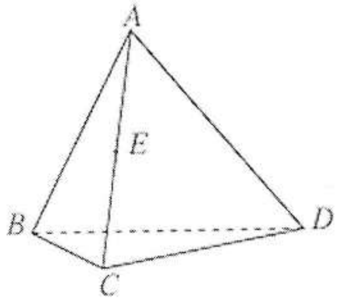
(6) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة. سمّ المستويات الأربعة التي تجدها في الرسم.



أربع نقاط مختلفة وليست مستوية يمر بها عدد من المستويات يساوي $4C_3 = 4$ حيث أن المستوى يتعين بثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة والمستويات هي

(ABC) , (ACD) , (ABD) , (BCD)

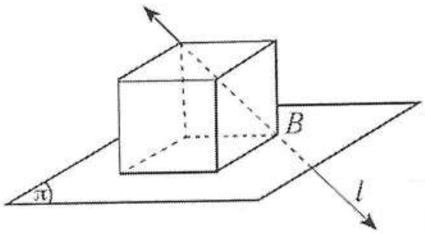
(7) أثبت أن النقطة E تقع في المستوي ADC وفي المستوي ABC



$E \in \overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AC} \subseteq (ABC)$, $\overleftrightarrow{AC} \subseteq (ADC)$

∴ E تقع في المستويين ABC , ADC

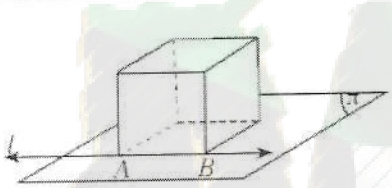
(8) (a) أوجد نقطة تقاطع المستوي π والمستقيم l.



المستقيم L هو قطر وجه من أوجه المكعب الذي أحد أوجهه محتوى في المستوى π ، B أحد رؤوس المكعب

∴ $B \in \overleftrightarrow{L}$, $B \in \pi$ ∴ $\overleftrightarrow{L} \cap \pi = \{B\}$

(b) أوجد تقاطع المستوي π والمستقيم l.

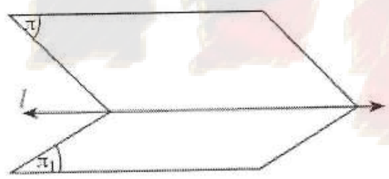


النقطتان A , B تنتميان إلى المستوى π وإلى المستقيم L

∴ L يقع بأكمله في المستوى π

∴ $\overleftrightarrow{L} \cap \pi = \overleftrightarrow{L}$

(c) أوجد تقاطع المستوي π والمستوي π_1.

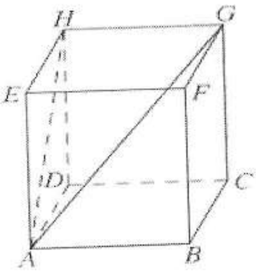


$\overleftrightarrow{L} \subseteq \pi$, $\overleftrightarrow{L} \subseteq \pi_1$

، π , π_1 مستويان مختلفان

∴ $\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{L}$

(9) في شبه المكعب المقابل، أكمل:



$(AGH) = (ABGH)$

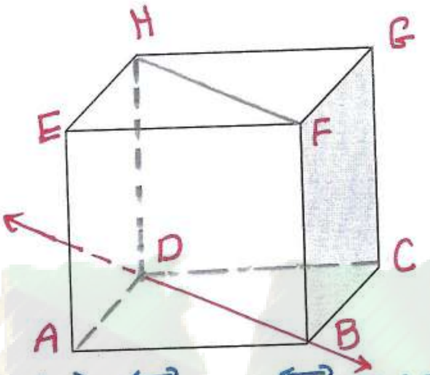
$(ABC) = (ABCD)$

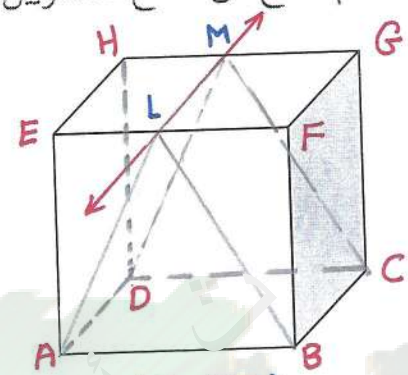
(a) $(AGH) \cap (ABC) = \overleftrightarrow{AB}$

(b) ارسم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين BFH, $ABCD$

(c) إذا كانت L نقطة تنتمي إلى $\overline{EF}$،

ارسم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين ADL, BCL





b) $\overleftrightarrow{BF} // \overleftrightarrow{DH}$ $\therefore \overleftrightarrow{HD} \subseteq (BFH)$ $\therefore (BFH) = (BFHD)$

$\overleftrightarrow{BD} \subseteq (ABCD)$, $\overleftrightarrow{BD} \subseteq (BFHD)$ $\therefore (ABCD) \cap (BFH) = \overleftrightarrow{BD}$

c) $\overline{LM} // \overline{GF} // \overline{EH}$ ← نأخذ $M \in \overline{HG}$ بحيث $EL = HM$

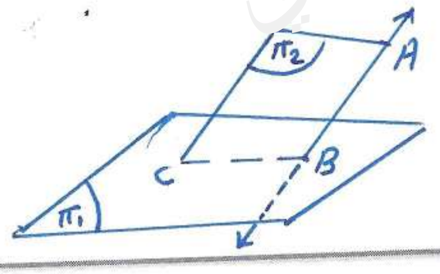
$\overleftrightarrow{LM}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ متوازيان يحويهما المستوى $BCML$

$\overleftrightarrow{LM}$ و $\overleftrightarrow{AD}$ متوازيان يحويهما المستوى $ADML$

$\therefore (BCML) \cap (ADML) = \overleftrightarrow{LM}$

$\therefore (ADL) \cap (BCL) = \overleftrightarrow{LM}$

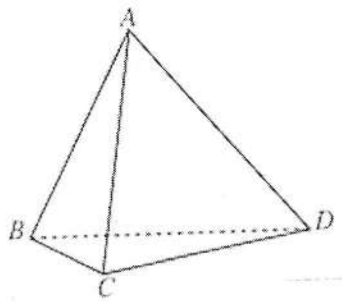
(10) ارسم $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع مستويًا π_1 في النقطة B، ثم ارسم المستوي π_2 يقطع المستوي π_1 في مستقيم يمر بالنقطة B.



$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi_1 = \{B\}$

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CB}$

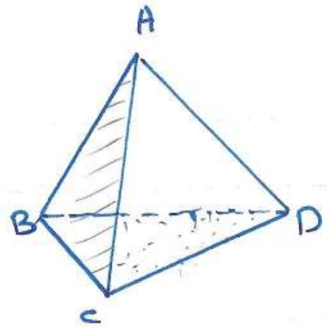
(11) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة أوجد.



(a) تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ مع المستوي BCD؟

$B \in \overleftrightarrow{AB}$, $B \in (BCD)$

$\overleftrightarrow{AB} \cap (BCD) = \{B\}$



(b) تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ مع المستوي ACD؟

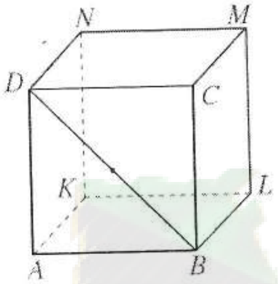
$A \in \overleftrightarrow{AB}$, $A \in (ACD)$, $B \notin (ACD)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \cap (ACD) = \{A\}$

(c) تقاطع (ABC) مع المستوي BCD؟

$\overleftrightarrow{BC} \subseteq (ABC)$, $\overleftrightarrow{BC} \subseteq (BCD)$

$\therefore (BCD) \cap (ABC) = \overleftrightarrow{BC}$



(12) في الرسم المقابل $ABCDKLMN$ مكعب أوجد إن أمكن العلاقة بين:

(a) $\overleftrightarrow{ND}$ ، $\overleftrightarrow{BD}$ ؟

مستقيمان متقاطعان في نقطة D

(b) $\overleftrightarrow{AD}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ ؟

من خواص المكعب أن كل وجه من أوجهه مربع

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AD}$ مستقيمان متوازيان حيث

$\overline{BC}$ ، $\overline{AD}$ متقابلتان في الوجه ABCD

(c) $\overleftrightarrow{BD}$ ، $\overleftrightarrow{ML}$ ؟

$\overleftrightarrow{BD}$ ، $\overleftrightarrow{ML}$ غير متقاطعان ولا يحويهما مستوى واحد

فهما مستقيمان متخالفان

(d) $\overleftrightarrow{ML}$ والمستوي $ABLK$؟

يشتركان في نقطة واحدة وهي النقطة L

فهما متقاطعان ويكون

$\overleftrightarrow{ML} \cap (ABLK) = \{L\}$

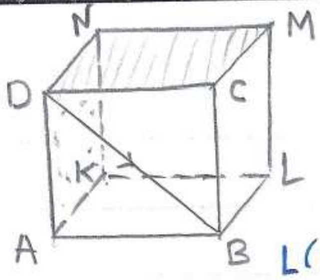
(e) سمّ المستقيم الذي هو تقاطع المستويين NBD، $ABCD$

يحويهما مستوٍ واحد فقط $\because \overleftrightarrow{NL} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

$(NBD) = (NLBD)$

$\because (NLBD) \cap (ABCD) = \overleftrightarrow{BD}$

$\therefore$ المستقيم $\overleftrightarrow{BD}$ هو تقاطع المستويين NBD ، ABCD



(f) أثبت أن النقاط L, B, D, N تنتمي إلى مستوٍ واحد.

$\because \overleftrightarrow{AK} \parallel \overleftrightarrow{LB}$ و $\overleftrightarrow{AK} \parallel \overleftrightarrow{ND}$

$\therefore \overleftrightarrow{LB} \parallel \overleftrightarrow{ND}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{LB}$ ، $\overleftrightarrow{ND}$ يعينان مستوٍ وحيد يحوي النقاط $L ، B ، D ، N$

(g) هل $\overleftrightarrow{ML}$, $\overleftrightarrow{ND}$ يعينان مستويًا واحدًا؟

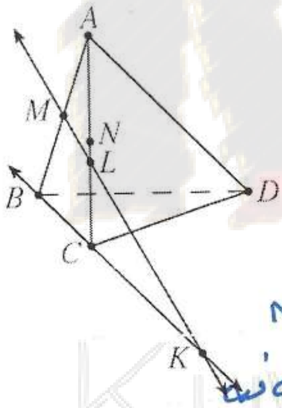
$\overleftrightarrow{ML}$ ، $\overleftrightarrow{ND}$ مستقيمان متخالفان لا يعينان مستوياً واحداً .

(h) أثبت أن المستويين ADK , CMN يتقاطعان.

$N \in (ADK)$, $D \in (CMN)$ $\therefore (ADK) = (ADNK)$, $(CMN) = (CMND)$

$\therefore (ADNK) \cap (CMND) = (\overleftrightarrow{ND})$

$\therefore$ المستويين ADK ، CMN يتقاطعان في المستقيم $\overleftrightarrow{ND}$



(13) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{AC}$، $L \in \overline{AC}$، $L \neq N$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{ML}$ يقع في المستوي ABC

$M \in \overleftrightarrow{AB}$ $\therefore M \in (ABC)$ ، $L \in \overleftrightarrow{AC}$ $\therefore L \in (ABC)$

$\therefore$ المستقيم $\overleftrightarrow{ML}$ يشترك مع المستوى ABC في نقطتين $\therefore$ فيقع بأكمله فيه

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{ML}$, $\overleftrightarrow{CB}$ يتقاطعان في النقطة K

$\because \overline{MN} \parallel \overline{BC}$ و $L \neq N$

$\overleftrightarrow{ML}$ ، $\overleftrightarrow{CB}$ يحويهما المستوى (ABC) وغير متوازيان فهما متقاطعان

$\because K \in \overleftrightarrow{ML}$, $K \in \overleftrightarrow{CB}$ $\therefore \overleftrightarrow{ML} \cap \overleftrightarrow{CB} = \{K\}$

(c) ما نقطة تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{ML}$ مع المستوي BCD؟

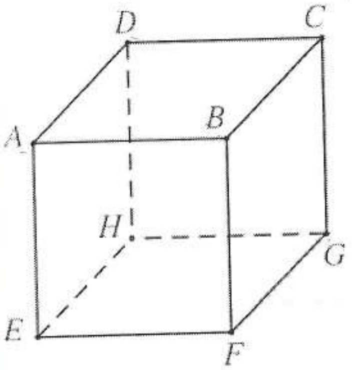
$\because K \in \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BC} \subseteq (CBD)$ $\therefore K \in (CBD)$, $M \notin (CBD)$

$\because K \in \overleftrightarrow{ML}$ $\therefore \overleftrightarrow{ML} \cap (BCD) = \{K\}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

ABCDEFGH مكعّب.



(1) المستقيمان AB ، HG يعينان مستويًا.   (a)   (b)

$\overleftrightarrow{HG} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ $\longrightarrow$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{HG}$

مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويًا

(2) النقاط B, D, H, F تعيّن مستويًا.   (a)   (b)

$\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{HF}$

مستقيمان متوازيان يعينان مستويًا يحوي النقاط B و D و H و F

(3) النقاط A, B, G, C تعيّن مستويًا.   (a)   (b)

$\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{GC}$ مستقيمان متخالفان فهما لا يعينان مستويًا

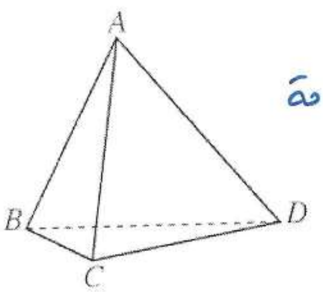
(4) المستقيمان GC, EF يعينان مستويًا.   (a)   (b)

$\overleftrightarrow{EF}$ ، $\overleftrightarrow{GC}$ متخالفان لا يعينان مستويًا

(5) المستقيمان BC, AB يعينان مستويًا.   (a)   (b)

$\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ متقاطعان في B فهما يعينان مستويًا

في التمرينين (7—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.



(6) النقاط B, C, D تعيّن: ثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة

(a) مستويًا واحدًا   (b) مستويين مختلفين

(c) عدد لا منته من المستويات المختلفة   (d) لا يمكن أن تعيّن مستويًا

(7) أوجه منشور قائم خماسي القاعدة يعيّن:

(a) خمسة مستويات مختلفة   (b) ستة مستويات مختلفة

(c) سبعة مستويات مختلفة   (d) ثمانية مستويات مختلفة

القاعدتين وخمسة أوجه

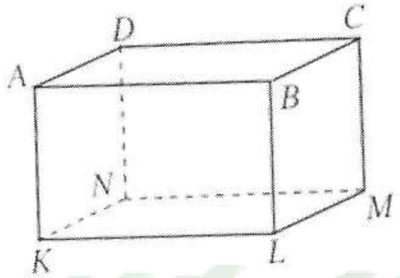
تمرين
10-2

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $ABCDKLMN$ شبه مكعب.



(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AK} \parallel \overleftrightarrow{CM}$

(b) أثبت أن النقاط A, K, M, C تنتمي إلى مستو واحد.

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AD}$ يوازي المستوي MKN

من خواص شبه المكعب

a) $\overleftrightarrow{CM} \parallel \overleftrightarrow{BL}$ و $\overleftrightarrow{BL} \parallel \overleftrightarrow{AK}$ ∴ $\overleftrightarrow{CM} \parallel \overleftrightarrow{AK}$

b) CM و AK يحويهما مستو واحد لأنهما متوازيان

∴ النقاط C و M و K و A تنتمي إلى مستو واحد

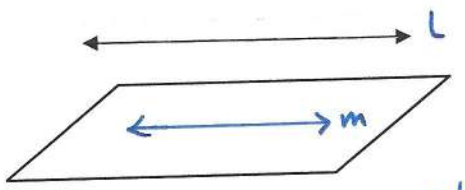
c) ∵ $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{KN}$ و $\overleftrightarrow{KN} \subseteq (MKN)$

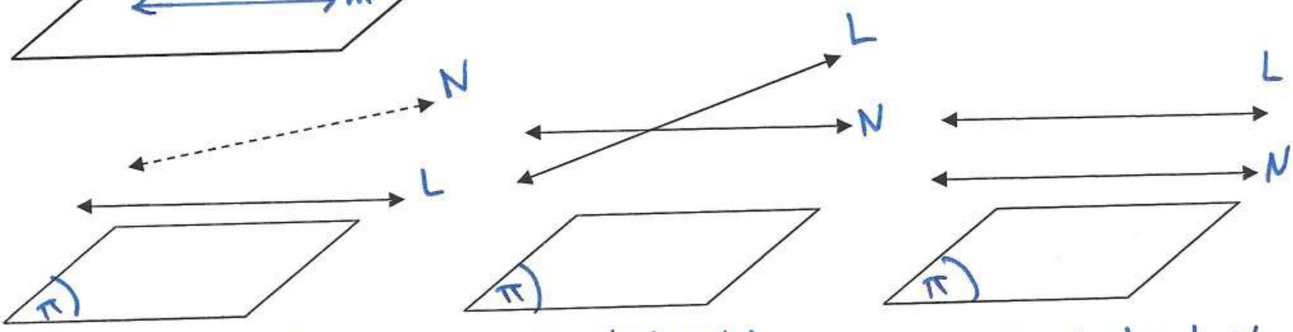
∴ $\overleftrightarrow{AD} \parallel (MKN)$

(2) (a) متى يكون المستقيم l موازيًا للمستوي π؟ وضح ذلك بالرسم.

(b) ارسم مستقيمًا آخرًا يوازي المستوي π

a) اذا وازى L مستقيماً في المستوى π فإنه يوازي π





L، N يوازيان π ومتخالفان

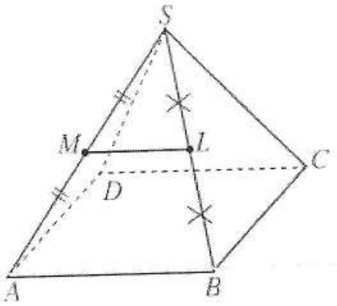
N، L يوازيان π ومتقاطعان

N، L يوازيان π ومتوازيان

(3) $SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل.

M منتصف $\overline{SA}$ ، L منتصف $\overline{SB}$

أثبت أن: $\overline{ML} \parallel (ABCD)$



$\because$ M منتصف $\overline{SA}$ ، L منتصف $\overline{SB}$

$\therefore \overline{ML} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

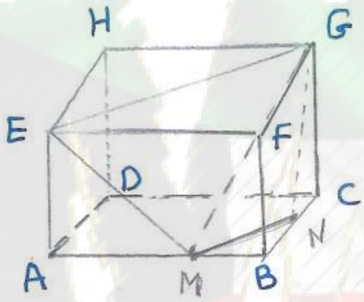
$\because \overleftrightarrow{AB} \subseteq (ABCD)$

$\therefore \overleftrightarrow{ML} \parallel (ABCD)$

(4) $ABCDEFGH$ مكعب

$M \in \overline{AB}$ ، المستوي GEM يقطع $\overline{BC}$ في النقطة N

أثبت أن: $\overline{GE} \parallel \overline{MN}$



$\because$ GEM يقطع $\overline{BC}$ في N

$\therefore N \in (GEM)$

المستويان $ABCD$ و $EFGH$ متوازيان يقطعهما المستوى $GEMC$ في المستقيمين $\overleftrightarrow{EG}, \overleftrightarrow{MN}$.

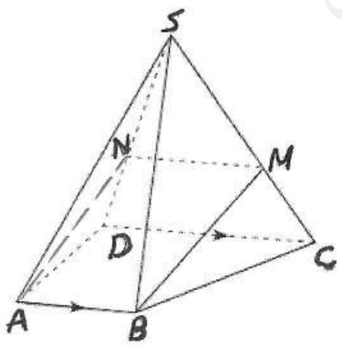
$\therefore \overleftrightarrow{EG} \parallel \overleftrightarrow{MN}$

(5) $SABCD$ هرم قاعدته شبه المنحرف $ABCD$ حيث إن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$M \in \overline{SC}$ ، المستوي ABM يقطع $\overline{SD}$ في N

(a) أثبت أن: $\overline{AB}$ يوازي المستوي SDC

(b) أثبت أن: $\overline{MN} \parallel \overline{CD}$



$N \in (ABM)$

$\because \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, $\overleftrightarrow{DC} \subseteq (SDC)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel (SDC)$

المستقيمان $\overleftrightarrow{DC}$ و $\overleftrightarrow{AB}$ متوازيان ويمر بهما المستويان $ABMN$, SDC ويتقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

(6) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة، $I \in \overline{AB}$

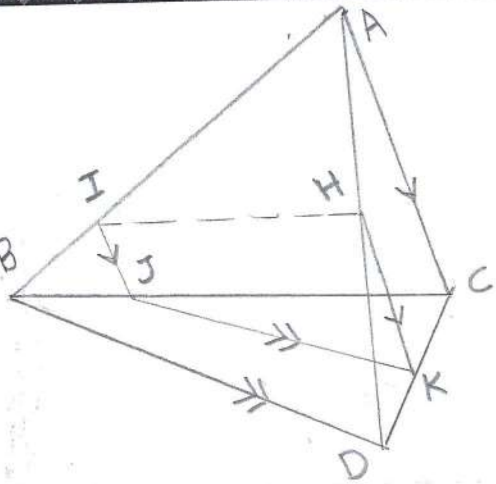
المستقيم الموازي لِـ $\overleftrightarrow{AC}$ والمار بالنقطة I يقطع $\overline{BC}$ في J

المستقيم الموازي لِـ $\overleftrightarrow{BD}$ والمار بالنقطة J يقطع $\overline{CD}$ في K

المستقيم الموازي لِـ $\overleftrightarrow{AC}$ والمار بالنقطة K يقطع $\overline{AD}$ في H

(a) ضع رسمًا مناسبًا.

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{IH} \parallel \overleftrightarrow{BD}$



$\because \overleftrightarrow{IJ} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{HK} \parallel \overleftrightarrow{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{HK} \parallel \overleftrightarrow{IJ}$ يحويهما المستوى $(IJKH)$

$\overleftrightarrow{BD}$ و $\overleftrightarrow{JK}$ مستقيمان متوازيان ويمر بكل منهما المستويان

$BDHI$ و $JKHI$ على الترتيب وتقاطعا المستويان في $\overleftrightarrow{IH}$

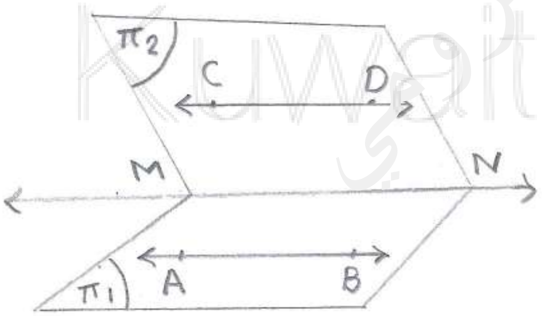
$\therefore \overleftrightarrow{IH} \parallel \overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{JK}$

(7) ليكن π_2, π_1 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث:

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi_2$

و $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi_1$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



$\because \overleftrightarrow{AB} \parallel \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{MN}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ .... (1)

$\because \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi_1$, $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{MN}$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ .... (2)

من (1) ، (2) نستنتج أن

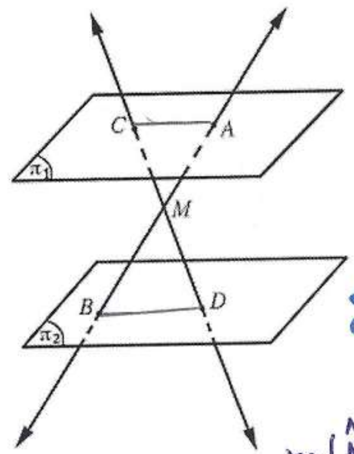
المستقيمان الموازيان لثالث في الفضاء متوازيان .

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

(9) في الشكل المقابل π_2 ، π_1 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،

حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

أثبت أن: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$



$\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ متقاطعان فهما يعينان مستوٍ واحد

وليكن π_3 يقطع π_1 ، π_2 على الترتيب في $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{CA}$

$\therefore \overleftrightarrow{CA} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

$\because$ في المثلثين ACM , BDM $\quad m(\hat{C}) = m(\hat{D})$, $m(\hat{A}) = m(\hat{B})$

$\therefore$ المثلثان ACM , BDM متشابهان

$\therefore \frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل. (a) (b)

يشترك المستويان في مستقيم (يتقاطعا)

أي أنه إذا اشترك المستويان في نقطة على الأقل يكونا متوازيين أو متقاطعين

(2) إذا وازى مستقيم مستويًا فإنهما لا يشتركان في أي نقطة من نقاطهما. (a) (b)

إذا وقع المستقيم بأكمله في المستوى فإنه يوازيه

وفي هذه الحالة يكون بينهما نقاط مشتركة

(3) إذا وازى مستقيم $\overleftrightarrow{l}$ مستوي π فإن $\overleftrightarrow{l}$ يوازي مستقيمًا وحيدًا في π (a) (b)

إذا وازى مستقيم مستويًا فإنه يوازي عدد لا نهائي

من المستقيمات داخل هذا المستوى

(4) إذا كان: $\overleftrightarrow{l} \parallel \pi$, $\overleftrightarrow{m} \parallel \pi$ فإن $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ (a) (b)

قد يكون $\overleftrightarrow{L}$, $\overleftrightarrow{m}$ متوازيان أو متقاطعان أو م

(5) إذا توازى مستقيمان ومر بهما مستويان متقاطعان فإن

تقاطعهما هو مستقيم يوازي كل من هذين المستقيمين

(a) (b)

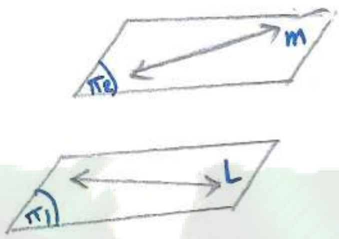
في التمارين (6–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا توازى مستويان مختلفان وقطعهما مستوٍ ثالث فإن خطّي التقاطع:

(a) متقاطعان (b) متخالفان

(c) متوازيان (d) متعامدان

(7) إذا كان $\pi_1 \parallel \pi_2$، $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_1$، $\overleftrightarrow{m} \subset \pi_2$ فإن:

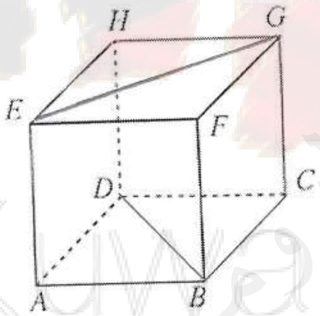


(a) $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ (b) $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$

(c) $\overleftrightarrow{l}, \overleftrightarrow{m}$ متخالفان (d) $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$

يمكن أن يكونا متوازيان أو متخالفان

(8) في المكعّب $ABCDEFGH$، $\overleftrightarrow{EG}$, $\overleftrightarrow{BD}$ هما:



(a) متوازيان (b) متقاطعان

(c) متخالفان (d) يحويهما مستوٍ واحد

تمرّن
10-3

تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line with a Plane

المجموعة A تمارين مقالية

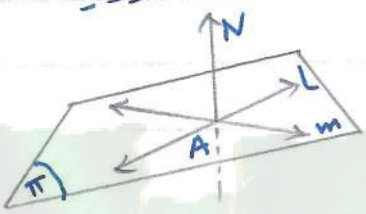
(1) (a) متى يكون المستقيم عموديًا على المستوي؟

(b) ارسم مستقيمًا عموديًا على مستوٍ.

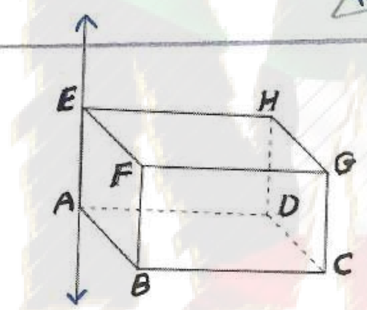
(a) يكون المستقيم عموديًا على المستوى اذا كان عموديًا على مستقيمين متقاطعين فيه.

(b) $\overleftrightarrow{L} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{M} \subset \pi$

$\overleftrightarrow{L} \cap \overleftrightarrow{M} = \{A\}$, $\overleftrightarrow{N} \perp \overleftrightarrow{L}$, $\overleftrightarrow{N} \perp \overleftrightarrow{M}$



(2) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.



(a) سمّ المستقيمات المتعامدة مع $\overleftrightarrow{AE}$

(b) سمّ المستويات المتعامدة مع $\overleftrightarrow{AE}$

(c) أثبت أن $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على المستوي CGH

(a) $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{FG}$, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{AD}$

وكذلك $\overleftrightarrow{AE}$ عموديًا على كل من $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{HG}$

(b) المستويات المتعامدة مع $\overleftrightarrow{AE}$ هي

$(EHFG)$, $(ABCD)$

(c) $\overleftrightarrow{CG} \parallel \overleftrightarrow{DH}$ يعينان مستوٍ واحد

$\therefore D \in (CGH)$ $\therefore (CGH) = (CGHD)$

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DH}$, $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DC}$

$\overleftrightarrow{HD} \cap \overleftrightarrow{DC} = \{D\}$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp (DCGH)$

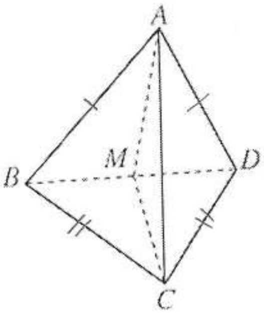
(3) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

$AD = AB$ ، $CD = CB$

النقطة M منتصف $\overline{DB}$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$

(b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$



في المثلث ABD ←

$\because AB = AD$, M منتصف $\overline{DB}$

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BD} \longrightarrow (1)$

في المثلث CBD ←

$CB = CD$, M منتصف $\overline{BD}$

$\therefore \overleftrightarrow{CM} \perp \overleftrightarrow{BD} \longrightarrow (2)$

$\because$ $\overleftrightarrow{AM}$ ، $\overleftrightarrow{CM}$ متقاطعان يعينان المستوى (ACM)

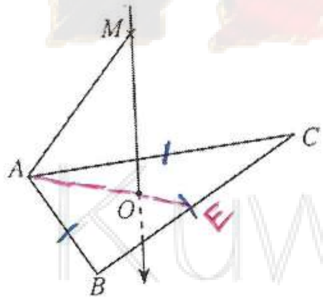
$\therefore \overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$

$\because \overleftrightarrow{AC} \subseteq (AMC)$

$\therefore \overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

(4) ABC مثلث متطابق الأضلاع مركزه O، $\overleftrightarrow{MO}$ متعامد مع (ABC)

أثبت أن: $\overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{AM}$



العمل: نصل $\overrightarrow{AO}$ يقطع $\overline{BC}$ في E

$\because$ المثلث ABC متطابق الأضلاع مركزه O

$\therefore \overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ....(1)

$\because \overleftrightarrow{OM} \perp (ABC)$, $\overleftrightarrow{BC} \subseteq (ABC)$

$\therefore \overleftrightarrow{OM} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ....(2)

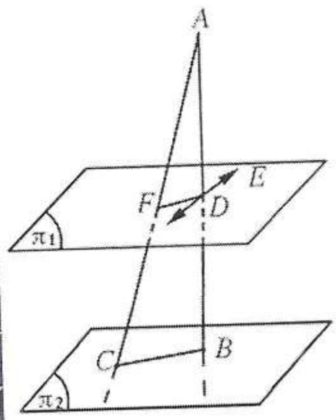
$\overleftrightarrow{OA}$ ، $\overleftrightarrow{OM}$ متقاطعان يعينان المستوى AOM

$\therefore \overleftrightarrow{CB} \perp (AOM)$

(5) في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على المستوي π_1, π_2 ، $\overleftrightarrow{DE} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DE}$

فإذا كانت D منتصف $\overline{AB}$، F منتصف $\overline{AC}$

أثبت أن: $\pi_1 \parallel \pi_2$



∵ D منتصف $\overline{AB}$ ، F منتصف $\overline{AC}$

∴ $\overleftrightarrow{FD} \parallel \overleftrightarrow{CB}$

∵ $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$ و $\overleftrightarrow{CB} \subseteq \pi_2$ ∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CB}$

∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{FD}$ ∵ $\overleftrightarrow{FD} \parallel \overleftrightarrow{CB}$

∵ $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{FD}$

$\overleftrightarrow{FD}$ و $\overleftrightarrow{ED}$ متقاطعان وكونهما محتوى في π_1

∴ $\overleftrightarrow{AD} \perp \pi_1 \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$

المستقيم العمودي على مستويين مختلفين يكونان متوازيين

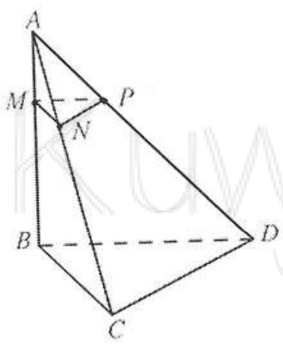
∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$

∴ $\pi_1 \parallel \pi_2$

(6) في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة حيث $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ فإذا كان:

$AB = 3\,AM$ ، $AC = 3\,AN$ ، $AD = 3\,AP$ ،

أثبت أن $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على (MNP)



∵ $AD = 3AP \Rightarrow \frac{AD}{AP} = 3$

$AC = 3AN \Rightarrow \frac{AC}{AN} = 3$

$AB = 3AM \Rightarrow \frac{AB}{AM} = 3$

∴ $\frac{AD}{AP} = \frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM} = 3$

∴ $\overleftrightarrow{NP} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{MP} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

∴ $(BCD) \parallel (MNP)$

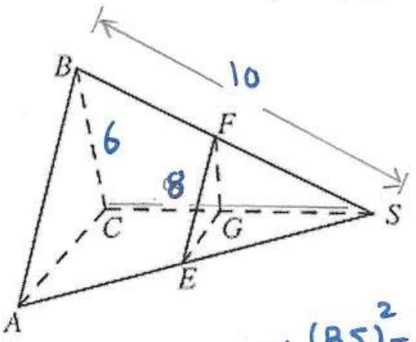
∵ $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp (MNP)$

(7) في الشكل المقابل، $(ABC) \parallel (EFG)$، S نقطة خارج (EFG), (ABC)
بحيث $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{AC}$

فإذا كان: $SB = 10\text{ cm}\,,\, SC = 8\text{ cm}\,,\, BC = 6\text{ cm}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{FE}$



في المثلث BCS

$\because (BS)^2 = 100 \quad , \quad (BC)^2 + (CS)^2 = 36 + 64 = 100$

$\therefore$ المثلث قائم الزاوية في C

$\left.\begin{array}{l} \therefore \overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{BC} \\ \because \overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{AC} \end{array}\right\} \therefore \overleftrightarrow{SC} \perp (ABC)$

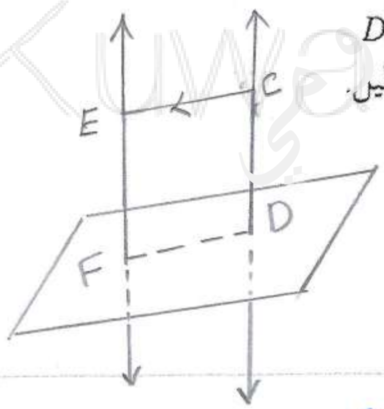
$\because (ABC) \parallel (EFG)$

$\therefore \overleftrightarrow{SC} \perp (EFG)$

$\because \overleftrightarrow{FE} \subseteq (EFG)$

$\therefore \overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{EF}$

(8) ليكن $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{CD}$ عموديان على المستوي π ويقطعانه في D, F على الترتيب. فإذا كان $\overleftrightarrow{CE}$ يوازي π. أثبت أن $CDFE$ مستطيل.



$\because \overleftrightarrow{CD} \perp \pi \,,\, \overleftrightarrow{EF} \perp \pi$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF} \Rightarrow$ CDFE يعينان المستوى

$\because \overleftrightarrow{CE} \parallel \pi \,,\, \overleftrightarrow{FD} \subseteq \pi$

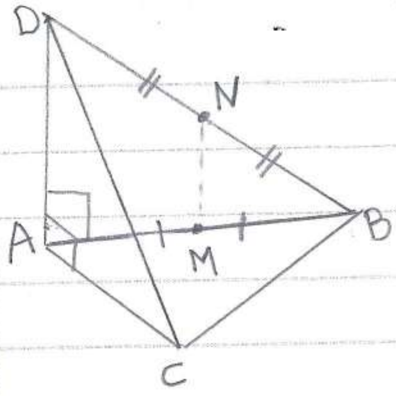
$\therefore \overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{FD}$

من (1) ، (2) ECDF متوازي أضلاع

$\overleftrightarrow{EF} \perp \pi \,,\, \overleftrightarrow{FD} \subset \pi \Rightarrow \overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{FD} \quad m(E\hat{F}D) = 90^\circ$

$\therefore$ ECDF مستطيل

(9) ABC مثلث، أخذت النقطة D خارج مستوي المثلث بحيث كان: $\overleftrightarrow{DA}$ عموديًا على كل من $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AC}$
فإذا كانت M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{DB}$ ، أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$



$\because \overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{DA} \perp (ABC)$ ....(1)

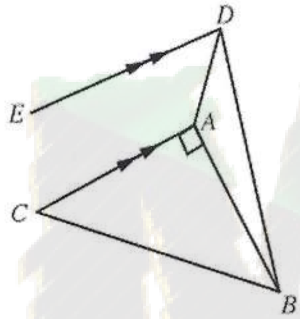
$\because$ M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{BD}$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{DA}$ .....(2)

من (1)، (2) نستنتج أن

$\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$

(10) في الشكل المقابل، ABC مثلث قائم الزاوية في A
رسم $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على مستوي المثلث ABC، ورسم $\overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{CA}$
أثبت أن: $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{B}$



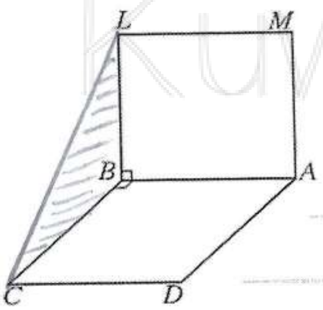
$\because \overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$, $\overleftrightarrow{AC} \subseteq (ABC)$

$\left.\begin{array}{l} \therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AC} \\ \because \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AB} \end{array}\right\} \therefore \overleftrightarrow{AC} \perp (ABD)$

$\therefore \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$ $\because \overleftrightarrow{BD} \subseteq (ABD)$

$\because \overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{CA}$ $\therefore \overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{BD}$

(11) $ABCD$ ، $ABLM$ مربعان ليسا في مستو واحد، لهما ضلع مشترك $\overline{AB}$،
أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$



من خواص المربع

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BL}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (LBC)$ $\because \overleftrightarrow{LB} \cap \overleftrightarrow{CB} = \{B\}$

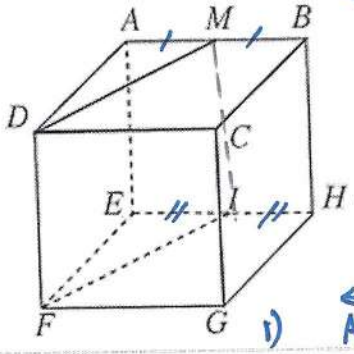
$\because \overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمرينين (1–2)، على الشكل المقابل حيث $ABCDEHGF$ مكعّب
النقطة M منتصف $\overline{AB}$، I منتصف $\overline{EH}$.



(1) $\overleftrightarrow{MI} \perp (EFGH)$ — a b

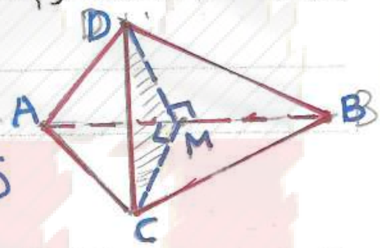
(2) $\overleftrightarrow{MD} \perp (BCGH)$ — a b

1) $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{EF}$ $\therefore \overleftrightarrow{AE} \perp (EFGH)$ $\therefore \overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{AE}$

2) $\overleftrightarrow{DC}$ ، $\overleftrightarrow{MD}$ متقاطعان ، $\overleftrightarrow{DC}$ متعامد مع $(BCGH)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{MD}$ ليس عموديًا على $(BCGH)$

(3) إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة جميع أحرفه متطابقة فإن: $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ — a b

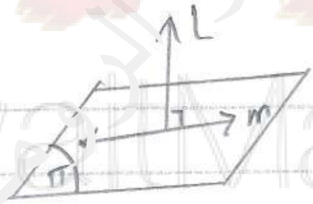


نأخذ M منتصف $\overline{AB}$

$\overline{CM} \perp \overline{AB}$, $\overline{DM} \perp \overline{AB}$

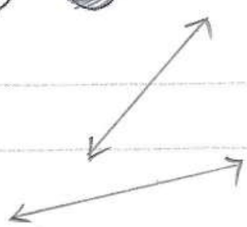
$\therefore \overline{AB} \perp (CMD)$ $\therefore \overline{AB} \perp \overline{CD}$

(4) إذا كان $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \subset \pi$ — a b



(5) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان وكان $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n}$ — a b

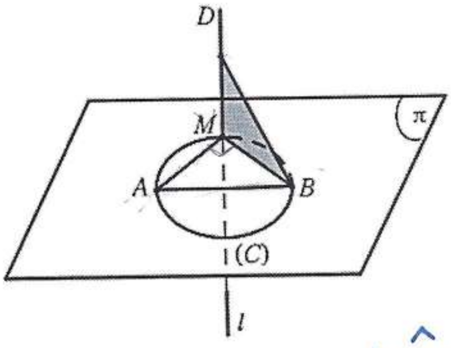
$\overleftrightarrow{n}$ ، $\overleftrightarrow{l}$ قد يكونا متوازيان أو متخالفان أو متعامدان



(6) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان وكان $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{n}$ متخالفان. — a b

متخالفان أو متوازيان أو متقاطعان

في التمارين (8–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.



(7) في الشكل المقابل :

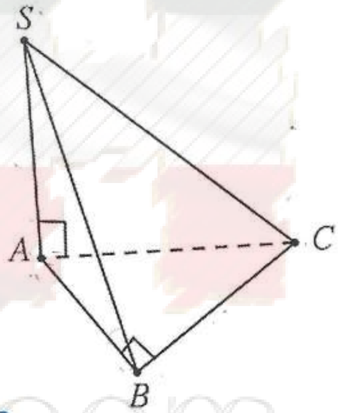
إذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp (AMB)$ ، $\overline{AB}$ قطر في الدائرة (C) فإن:

ⓐ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$ ⓑ $\overleftrightarrow{l} \perp (BMD)$

ⓒ $\overleftrightarrow{AM} \perp (BMD)$ ⓓ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BM}$

$m(A\hat{M}B) = 90^\circ \quad \therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{MB} \quad ....(1)$

$\because \overleftrightarrow{L} \perp (AMB) \quad \therefore \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{AM} \Rightarrow \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AM}$



(8) في الشكل المقابل إذا كان $m(\widehat{B}) = 90^\circ$ ، $\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$ فإن:

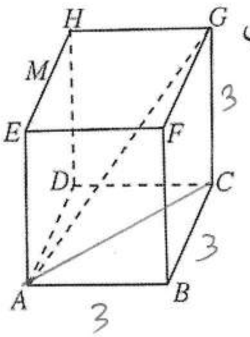
ⓐ المثلث SAB قائم في $\widehat{B}$

ⓑ $\overleftrightarrow{CB} \perp (SAB)$

ⓒ المثلث SAB متطابق الضلعين.

ⓓ المثلث SCB قائم في $\widehat{C}$

$\overleftrightarrow{SA} \perp \overleftrightarrow{BC} \quad , \quad \overline{AB} \perp \overline{BC} \quad \therefore \overleftrightarrow{BC} \perp (ASB)$



(9) يمثل الشكل المقابل مكعبًا، إذا كان طول حرفه 3 cm فإن طول قطره $\overline{AG}$ يساوي

ⓐ $\sqrt{3}$ cm ⓑ $3\sqrt{3}$ cm

ⓒ 9 cm ⓓ 18 cm

طول قطر وجه المكعب $AC = $ طول الحرف $\times \sqrt{2}$

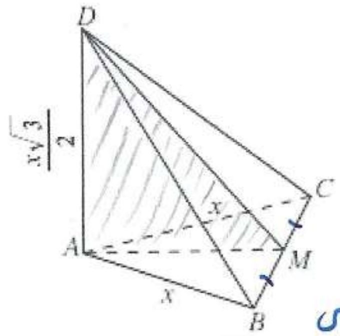
طول قطر المكعب $AG = $ طول الحرف $\times \sqrt{3}$

تمرّن
10−4

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

المجموعة A تمارين مقالية



(1) ABC مثلث متطابق الأضلاع وطول ضلعه x

$\overline{AD}$ متعامد مع المستوي ABC، $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$،

M منتصف $\overline{BC}$

(a) أثبت أن $\overline{CB}$ متعامد مع المستوي AMD

نثبت أن $\overline{BC}$ عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوى

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$, $\overleftrightarrow{BC} \subseteq (ABC)$ $\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ①

المثلث ABC متطابق الأضلاع ، M منتصف $\overline{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ②

من ①، ② $\overleftrightarrow{BC}$ عموديا على المستقيمين $\overleftrightarrow{AD}$ ، $\overleftrightarrow{AM}$ المتقاطعين

$\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp (AMD)$

(b) عيّن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(DCB, \overline{BC}, ACB)$

$\overleftrightarrow{BC}$ هو خط تقاطع المستويين (ACB)، (DCB)

$\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AM}$ في المستوى ACB

$\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{DM}$ في المستوى DCB

$\therefore$ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية هي $A\hat{M}D$

(c) أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DCB, \overline{BC}, ACB)$

المثلث AMC ثلاثيني ستيني طول وتره x ، $\overline{AM}$ مقابل للزاوية $60°$

$\therefore AM = \frac{\sqrt{3}}{2} x$

المثلث DAM قائم الزاوية متطابق الضلعين فيه $DA = AM$

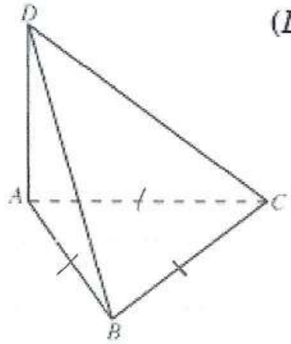
$\therefore m(A\hat{M}D) = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $= \frac{\pi}{4}$

(2) ABC مثلث متطابق الأضلاع.

$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC

أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$



$\overleftrightarrow{DA}$ هو خط تقاطع المستويين DAB , DAC

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوى ADC

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ في المستوى ADB

$\therefore$ الزاوية $(B\hat{A}C)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$

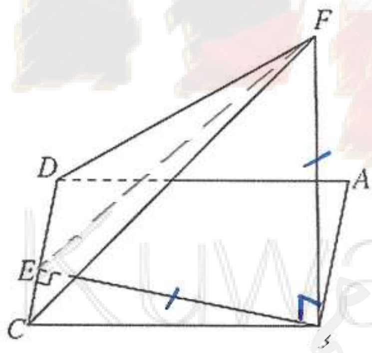
$\because$ المثلث ABC متطابق الأضلاع زواياه متطابقة .

$\therefore m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{3}$

(3) في الشكل المقابل $ABCD$ شكل رباعي، $\overleftrightarrow{FB}$ عمودي على المستوي $ABCD$.

$\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ فإذا كان $FB = BE$،

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين $(ABCD)$، (FCD)



$\overleftrightarrow{CD}$ خط التقاطع بين FCD, $ABCD$

① $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{EB}$ في المستوى $(ABCD)$

② $\because \overleftrightarrow{BF} \perp (ABCD)$ فهو عمودي ع $\overleftrightarrow{DC}$ فيه

من ①، ② $\overleftrightarrow{DC} \perp (FBE)$

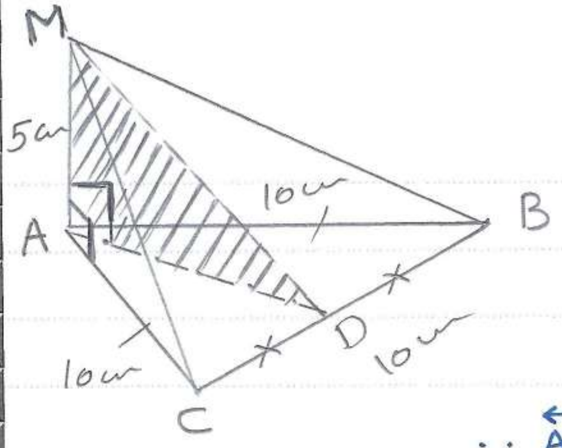
③ $\therefore \overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{EF}$ في المستوى FCD

من ①، ③ $(F\hat{E}B)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية .

المثلث EFB قائم الزاوية فيه $BE = FB$

$\therefore m(F\hat{E}B) = \frac{\pi}{4}$

(4) $MABC$ هرم ثلاثي رأسه M وقاعدته مثلث متطابق الأضلاع ABC،
طول ضلعه $10\,cm$ ، إذا كان $m(M\hat{A}B) = m(M\hat{A}C) = 90°$ ، $MA = 5\,cm$ ، D منتصف $\overline{BC}$



(a) أثبت أن: $\overline{BC} \perp (MAD)$

نثبت أن $\overleftrightarrow{BC}$ عمودي على متقاطعين في المستوى

$\because$ المثلث ABC متطابق الأضلاع

، M منتصف CB

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC} \longrightarrow (1)$

$\because \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{AC}$ $\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp (ACB)$

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC} \dashrightarrow (2)$

من (1) ، (2)

$\overleftrightarrow{BC} \perp (MAD)$

(b) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين (MBC), (ABC)

$\overleftrightarrow{BC}$ خط التقاطع بين المستويين MBC ، ABC

المستوى AMD يقطع الزاوية الزوجية في $\overleftrightarrow{MD}$ ، $\overleftrightarrow{AD}$

وعمودي على الحافة $\overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ $(M\hat{D}A)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

المثلث ABC متطابق الأضلاع ، D منتصف $\overline{BC}$

$\therefore AD = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \longrightarrow AD = \frac{\sqrt{3}}{2}(10) = 5\sqrt{3}$

$\therefore \tan(A\hat{D}M) = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

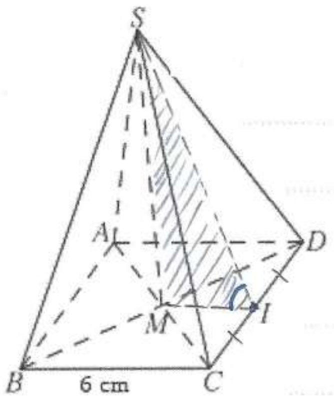
$\therefore m(A\hat{D}M) = \frac{\pi}{6}$

(5) $SABCD$ هرم مربع القاعدة طول ضلعها $6\,cm$ ومركزها M

بحيث إن $\overline{SM} \perp (ABCD)$ ، I منتصف $\overline{CD}$

(a) أثبت أن: $(M\hat{I}S)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(ABCD, \overleftrightarrow{CD}, SCD)$

(b) أوجد: $m(M\hat{I}S)$ إذا كان $SM = \sqrt{3}\,cm$



(a) $\overleftrightarrow{CD}$ خط تقاطع المستويين $ABCD$, SCD

$\because$ I منتصف $\overleftrightarrow{CD}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{MI}$

$\overleftrightarrow{SM} \perp (ABCD)$: $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{SM}$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (SMI)$

في المستوى SCD $\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{SI}$

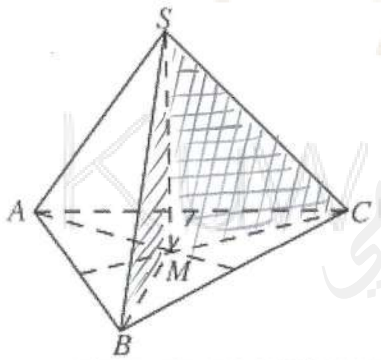
في المستوى $ABCD$ $\overleftrightarrow{CD} \perp MI$

$\therefore$ (SIM) هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية .

(b) في المثلث MIS القائم الزاوية في M فيه $SM = \sqrt{3}$

$\because$ M مركز المربع $\Leftarrow$ $MI = \frac{1}{2} BC = 3$

$\therefore \tan(M\hat{I}S) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow m(M\hat{I}S) = \frac{\pi}{6}$



(6) $SABC$ هرم قاعدته مثلث متطابق الأضلاع مركزه M

بحيث إن $\overline{SM} \perp (ABC)$

أوجد قياس الزاوية الزوجية $(SMB, \overline{SM}, SMC)$

$\overleftrightarrow{SM}$ هو خط التقاطع بين المستويين

$\overleftrightarrow{SM} \perp \overleftrightarrow{MC}$ في المستوى SMC

$\overleftrightarrow{SM} \perp \overleftrightarrow{MB}$ في المستوى SMB

$\therefore$ $(B\hat{M}C)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(SMB, \overleftrightarrow{SM}, SMC)$

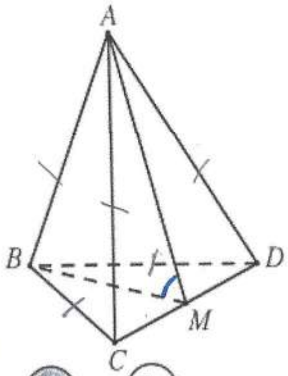
$\because$ المثلث ABC متطابق الأضلاع ، M مركز المثلث

$\therefore m(B\hat{M}C) = 120^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية يساوي $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

حيث أن قياس الزاوية بين مستويين هو الزاوية الحادة

المجموعة B تمارين موضوعية



في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمرينين (1–2)، على الشكل المقابل.

إذا كان $ABCD$ هرم جميع حروفه متساوية الطول، M منتصف $\overline{CD}$

فإن:

(1) $\overline{CD}$ عمودي على $\overline{AB}$ (a) (b)

(2) الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(BDC , \overleftrightarrow{DC} , ADC)$ هي $A\widehat{M}D$ $A\widehat{M}B$ (a) (b)

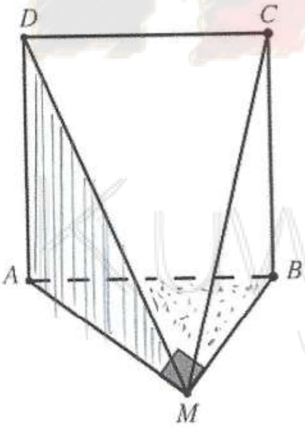
(1) (a) $\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (AMB)$, $\overline{AB} \subseteq (ABM)$

(2) (a) $\overleftrightarrow{DC}$ خط التقاطع بين المستويين ،

$\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{CD}$ في المستوى ADC

$\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{CD}$ في المستوى BDC



أسئلة التمرينين (3–4)، على الشكل المقابل.

المثلث AMB قائم الزاوية في M، $\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي AMP

إذا أخذنا النقطة C بحيث يكون $ABCD$ مربعًا فإن:

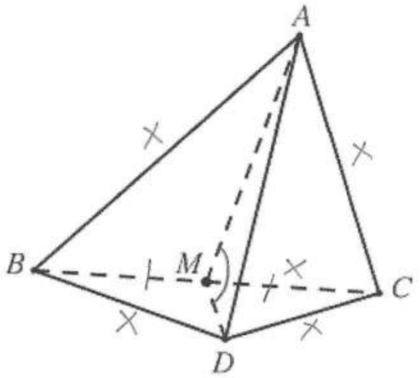
(3) $\overleftrightarrow{BM}$ متعامد مع (MAD) (a) (b)

(4) $\overleftrightarrow{CB}$ متعامد مع (AMB) (a) (b)

(3) $\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{DA} \longrightarrow \overleftrightarrow{BM} \perp (MAD)$

(4) $\overleftrightarrow{AD} \perp (AMB)$, $\overleftrightarrow{CB} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ $\therefore \overleftrightarrow{CB} \perp (AMB)$

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.



أسئلة التمارين (5–7)، على الشكل المقابل. حيث إن:

M منتصف $\overline{BC}$

ABC، DBC مثلثان لهما ضلع مشترك $\overline{BC}$ حيث $BC = x$

وهما متطابقا الأضلاع ولا يحويهما مستو واحد.

(5) الزاوية الزوجية $(BAC\ ,\ \overline{BC}\ ,\ BCD)$ هي:

a $A\widehat{M}D$ b $B\widehat{M}C$ c $A\widehat{M}B$ d $B\widehat{A}M$

في المثلث ABC متطابق الأضلاع و M منتصف $\overline{BC}$ ← $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$

في المثلث BDC متطابق الأضلاع و M منتصف $\overline{BC}$ ← $\overleftrightarrow{DM} \perp \overleftrightarrow{BC}$

∴ زاوية $(A\hat{M}D)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BC}$

(6) إذا كان: $m(A\widehat{M}D) = 60°$ فقيمة AD بدلالة x هي:

a $\frac{x}{2}$ b $\frac{x\sqrt{2}}{2}$ c $x\sqrt{3}$ d $\frac{x\sqrt{3}}{2}$

∵ المثلثان ABC و DBC مثلثان متطابقا الأضلاع وطول ضلع كل منهما x

$\therefore AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

في المثلث AMD $DM = AM$, $m(A\hat{M}D) = 60°$

$\therefore m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 60°$ فيكون AMD مثلث متطابق الأضلاع $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

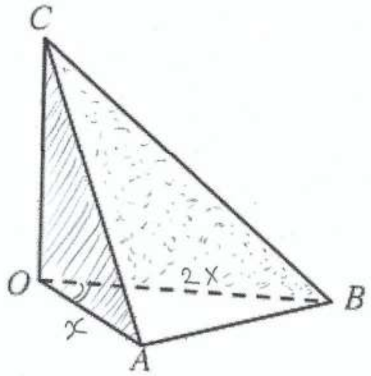
(7) إذا كان $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$، فإنّ: $m(A\widehat{M}D)$ يساوي:

a $90°$ b $45°$ c $60°$ d $30°$

$\because AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

$\therefore DA = AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, $m(A\hat{M}D) = 60°$

حيث يكون المثلث AMD متطابق الأضلاع.



أسئلة التمرينين (9–8) على الشكل المقابل.

إذا كان OAB مثلث فيه:

$m(A\widehat{O}B) = 60°$ ، $OB = 2x$ ، $OA = x$

$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي OAB

(8) طول $\overline{AB}$ يساوي:

ⓐ x ⓑ $x\sqrt{2}$ ⓒ $x\sqrt{3}$ ⓓ $\frac{x}{2}$

في المثلث OAB من قاعدة جيب التمام

$(AB)^2 = (2x)^2 + x^2 - 2(2x)(x)\cos 60° = 3x^2$

$\therefore AB = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}\,x$

(9) قياس الزاوية الزوجية $(AOC, \overleftrightarrow{OC}, BOC)$ هو:

ⓐ $30°$ ⓑ $45°$ ⓒ $60°$ ⓓ $90°$

$\overleftrightarrow{OC}$ خط التقاطع أو حافة الزاوية الزوجية

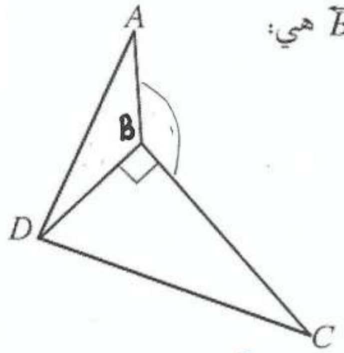
$\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{OC}$ في المستوى OBC

$\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{OC}$ في المستوى AOC

$\therefore$ زاوية $(A\hat{O}B)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية وقياسها معطى $60°$

(10) في الشكل المقابل، المثلث DBC قائم الزاوية في B،

فإذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على (DBC) فإن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BD}$ هي:



ⓐ $D\widehat{B}C$ ⓑ $A\widehat{B}C$ ⓒ $A\widehat{B}D$ ⓓ $A\widehat{D}C$

$\overleftrightarrow{BD}$ حافة الزاوية الزوجية

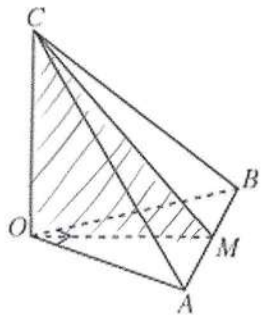
$\overleftrightarrow{AB} \perp (DBC)$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$ ، $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ الزاوية $(A\hat{B}C)$ بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ هي الزاوية المستوية .

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

المجموعة A تمارين مقالية



(1) OAB مثلث قائم في $\widehat{O}$، $OA = OB = 1$

$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي OAB، $OC = 1$،

M منتصف $\overline{AB}$

(a) أثبت أن المستوي COM متعامد مع المستوي OAB

$\overleftrightarrow{OC} \perp (OAB)$, $\overleftrightarrow{CO} \subseteq (COM)$

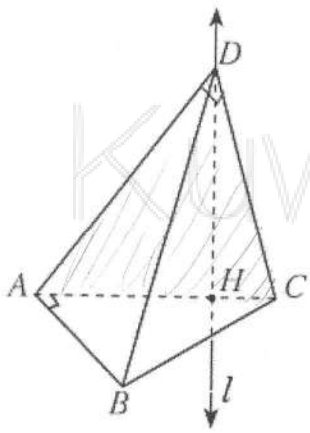
$\therefore (COM) \perp (OAB)$

(b) أثبت أن المستوي COM متعامد مع المستوي CAB

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{OC}$, $\because OA = OB$, $MA = MB$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{OM}$

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp (COM)$ $\because \overleftrightarrow{AB} \subseteq (CAB)$

$\therefore (COM) \perp (CAB)$



(2) ABC مثلث قائم في $\widehat{A}$، $H \in \overline{AC}$

نأخذ المستقيم l المتعامد مع المستوي ABC والمار بالنقطة H

$D \in \overleftrightarrow{l}$ حيث يكون المثلث ADC قائم الزاوية في D

(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{AB}$ متعامد مع (ACD)

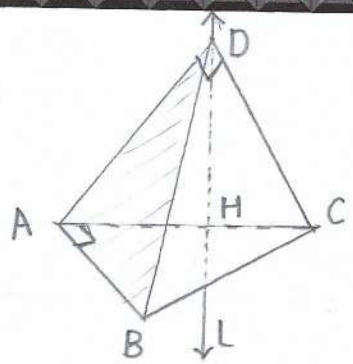
معطى $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ ..... (1)

$\because \overleftrightarrow{DH} \perp (ABC)$ $\therefore \overleftrightarrow{DH} \perp \overleftrightarrow{AB}$ .... (2)

من (1)، (2)

$\overleftrightarrow{AB} \perp (ADC)$

حيث $\overleftrightarrow{DH}$, $\overleftrightarrow{AC}$ متقاطعان يعينان مستوى وحيد هو ADC



(b) استنتج أن $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{CD}$ متعامدان وأن المثلث ABD قائم في $\widehat{A}$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (ADC)$, $\overleftrightarrow{DC} \subset (ADC)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AD}$ متعامدان

$\because \overleftrightarrow{AD} \subset (ADC)$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$

$\therefore$ المثلث ABD قائم فى $\hat{A}$

(c) أثبت أن $\overleftrightarrow{CD}$ متعامد مع (ADB)

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{CD}$ معطى .... (1)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (ADC)$, $CD \subseteq (ADC)$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ....(2)

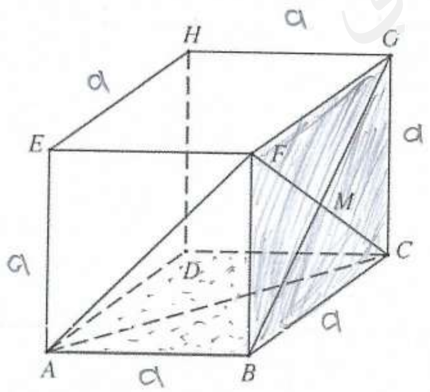
من (1) ، (2)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (ADB)$

(d) استنتج أن (CDB), (BDA) متعامدان.

$\because \overleftrightarrow{CD} \perp (ADB)$, $\overleftrightarrow{CD} \subseteq (CDB)$

$\therefore (ADB) \perp (CDB)$



(3) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a:

(a) أثبت أن: $(ABCD) \perp (FBCG)$

من خواص المكعب

$\overleftrightarrow{FB} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{FB} \perp \overleftrightarrow{BC} \longrightarrow \overleftrightarrow{FB} \perp (ABCD)$

$\because \overleftrightarrow{FB} \subseteq (FBCG)$

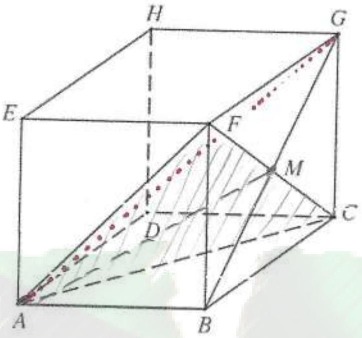
$\therefore (ABCD) \perp (FBCG)$

(b) أثبت أن المثلث ACF متطابق الأضلاع.

$\overline{AC}$, $\overline{CF}$ و $\overline{AF}$ هي أوتار لمثلثات قائمة أطوال أضلاع القائمة فيها جميعًا متطابقة وكل منها يساوي ضلع القائمة a

$\therefore AC = CF = AF = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$

أو أقطار لأوجه مكعب



(c) M نقطة تقاطع $\overline{FC}$ ، $\overline{BG}$ ،

أثبت أن: $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{FC}$

∵ المثلث AFC متطابق الأضلاع

M منتصف $\overline{FC}$

$\therefore \overline{AM} \perp \overline{FC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{FC}$

(d) أثبت أن: $(BCGF) \perp (ABG)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BF} \longrightarrow \overleftrightarrow{AB} \perp (BCGF)$

$\overleftrightarrow{AB} \subseteq (ABG)$

$\therefore (BCGF) \perp (ABG)$

(e) أثبت أن: $(ABG) \perp \overleftrightarrow{FC}$

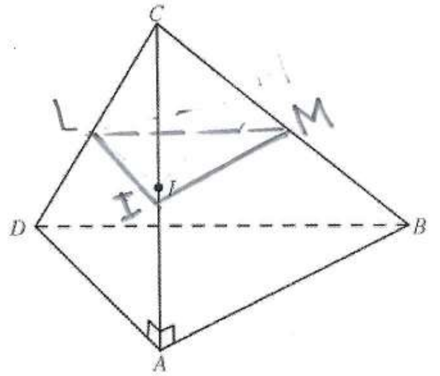
$\overleftrightarrow{AB} \perp (BCGF)$, $\overleftrightarrow{FC} \subseteq (BCGF)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{FC}$ ..... (1)

قطرا المربع متعامدان $\overleftrightarrow{BG} \perp \overleftrightarrow{FC}$ ..... (2)

من (1) ، (2)

$\overleftrightarrow{FC} \perp (ABG)$



(4) $CABD$ هرم ثلاثي القاعدة فيه:

$\overleftrightarrow{CA} \perp (ABD)$ ، I منتصف $\overline{AC}$

أثبت أن المستوي العمودي من I على $\overleftrightarrow{AC}$ يقطع (ADC) بمستقيم يمر في منتصف $\overline{DC}$ ويقطع (ABC) بمستقيم يمر في منتصف $\overline{BC}$

نفرض ILM مستوى عمودي على $\overleftrightarrow{AC}$ ويقطع $\overleftrightarrow{DC}$ في L ويقطع $\overleftrightarrow{BC}$ في M

$\because \overleftrightarrow{AC} \perp (ABD) \ , \ \overleftrightarrow{AC} \perp (ILM)$

$\therefore (ABD) \parallel (ILM)$

المستويين ILM و ABC متوازيان ؟ ABC قاطع لهما في $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{IM}$ على الترتيب.

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{IM} \quad \therefore \frac{CM}{MB} = \frac{CI}{IM} = 1$

$\therefore CM = MB$

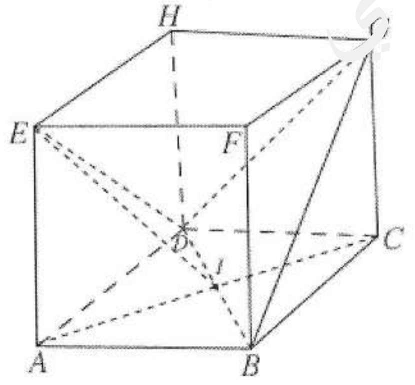
$\therefore$ M منتصف BC

بالمثل المستوى ADC قاطع للمستويين المتوازيين في $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{IL}$ على الترتيب

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{IL} \Rightarrow \frac{CI}{IA} = \frac{CL}{LD}$

$\therefore CL = LD$

$\therefore$ L منتصف DC



(5) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 5 cm

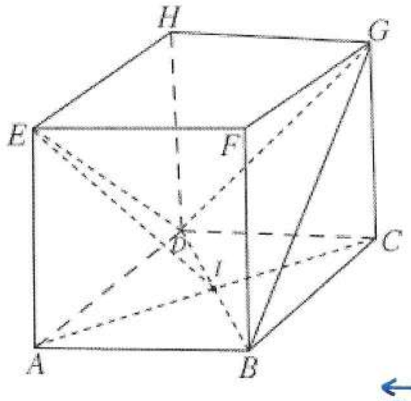
(a) أثبت أن المثلث EDB متطابق الأضلاع.

$\overline{ED}$ ، $\overline{BD}$ و $\overline{EB}$ أوتار في مثلثات قائمة أضلاعها القائمة فيها جميعاً تساوي طول ضلع المكعب 5

$\therefore ED = BD = EB = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$

$\therefore$ المثلث EDB متطابق الأضلاع.

أو هي أقطار لأوجه مكعب فهي متساوية في الطول.



(b) I نقطة تقاطع القطرين في المربع $ABCD$،

أثبت أن: $(DBG) \perp (AEI)$

المستويان AEI , $AEGC$ متطابقان

$\therefore AEI = AEGC$

قطر مربع $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ ..... (1)

$\because \overleftrightarrow{EA} \perp (ABCD)$, $\overleftrightarrow{BD} \subseteq (ABCD)$

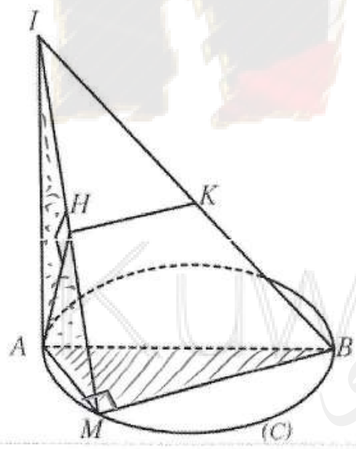
$\therefore \overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{EA}$ ..... (2)

من (1) ، (2) نستنتج أن $\overleftrightarrow{DB} \perp (ACGE)$

$\because \overleftrightarrow{DB} \subseteq (DBG)$

$\therefore (DBG) \perp (ABCD)$

$\therefore (DBG) \perp (AEI)$



(6) في الشكل المقابل:

(C) دائرة قطرها $\overline{AB}$، M نقطة على الدائرة مختلفة عن A و B

$\overleftrightarrow{IA}$ عمودي على مستوى الدائرة.

(a) أثبت أن: $(IMB) \perp (IAM)$

$\overline{AB}$ قطر في الدائرة $\longrightarrow m(\hat{AMB}) = 90^\circ$

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{MB}$ .... (1)

$\overleftrightarrow{IA}$ عمودي على مستوى الدائرة ، $\overleftrightarrow{MB}$ محتوى في مستوى الدائرة

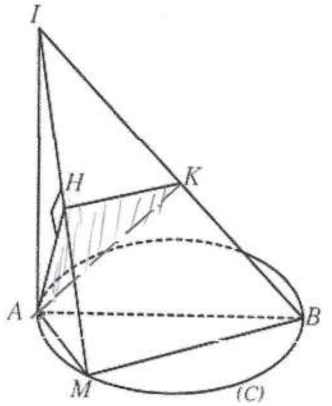
$\therefore \overleftrightarrow{IA} \perp \overleftrightarrow{MB}$ .... (2)

من (1) ، (2)

$\overleftrightarrow{MB} \perp (IAM)$ .... *

$\therefore \overleftrightarrow{MB} \subseteq (IMB)$ .... **

من * ، ** $(IAM) \perp (IMB)$



(b) إذا كان $\overline{AH} \perp \overline{IM}$, K نقطة على $\overline{IB}$

أثبت أن: $(IMB) \perp (AHK)$

$\overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{IA}$

$\therefore \overleftrightarrow{MB} \perp (IAM)$

$\overleftrightarrow{AH} \subseteq (IAM)$ $\quad \therefore \overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{AH}$ .... (1)

$\because \overleftrightarrow{AH} \perp \overleftrightarrow{IM}$ .... (2)

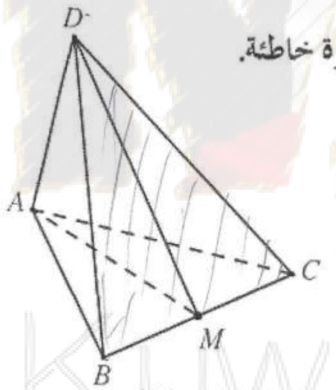
من (1)، (2) نستنتج أن

$\overleftrightarrow{AH} \perp (IMB)$

$\overleftrightarrow{AH} \subseteq (AHK)$

$\therefore (AHK) \perp (IMB)$

المجموعة B تمارين موضوعية



في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمارين (1–5)، على الشكل المقابل.

إذا كان $\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع (ABC)، $AB = AC$، M منتصف $\overline{BC}$ فإن:

(1) $(ABC) \perp (DAC)$ (a) (b)

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$, $\overleftrightarrow{AD} \subseteq (DAC)$

(2) $(DBC) \perp (DAC)$ (a) (b)

(3) $(AMD) \perp (ABC)$ (a) (b)

$\overleftrightarrow{BC} \perp (AMD)$, $\overleftrightarrow{BC} \subseteq (ABC)$

(4) $(AMD) \perp (DBC)$ ⓐ ⓑ

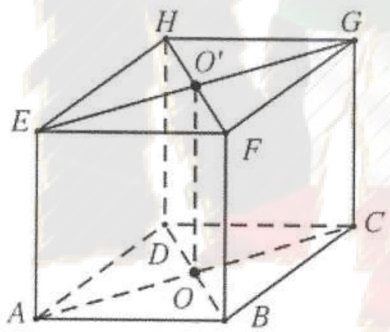
$\overleftrightarrow{BC} \perp (AMD)$, $\overleftrightarrow{BC} \subseteq (DBC)$

(5) $DC = DB$ ⓐ ⓑ

$\overleftrightarrow{DM} \perp \overleftrightarrow{BC}$, M منتصف $\overline{BC}$

(6) المستويان العمودان على ثالث متوازيان. ⓑ ⓐ

ممكن يكونا متوازيان أو متقاطعان



في التمارين (7–12)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

أسئلة التمرينين (7–8)، على الشكل المقابل حيث إن:

$ABCDEFGH$ شبه مكعب فيه:

O مركز المستطيل $ABCD$، O' مركز المستطيل $EFGH$

(7) $(EFGH)$، $(FGCB)$ هما:

ⓐ متعامدان ⓑ متوازيان ⓒ منطبقان ⓓ ليس أيًا مما سبق

$\overleftrightarrow{EF}$ $(FGCB)$, $\overleftrightarrow{EF} \subseteq (EFGH)$

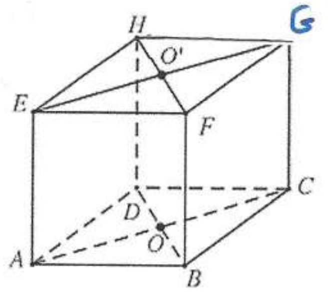
(8) $(DBFH)$، $(ABCD)$ هما:

ⓐ متوازيان ⓑ منطبقان ⓒ متعامدان ⓓ ليس أيًا مما سبق

$\overleftrightarrow{FB} \perp (ABCD)$, $\overleftrightarrow{FB} \subseteq (FGCB)$

أسئلة التمرينين (10–9)، على الشكل المقابل حيث إن: $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a.

O مركز المربع $ABCD$، O' مركز المربع $EFGH$



(9) $(EACG)$، $(DHFB)$ هما:

(a) منطبقان (b) متعامدان

(c) متوازيان (d) ليس أيًا مما سبق

$\overleftrightarrow{AC} \perp (DHFB)$, $\overleftrightarrow{AC} \subseteq (EACG)$

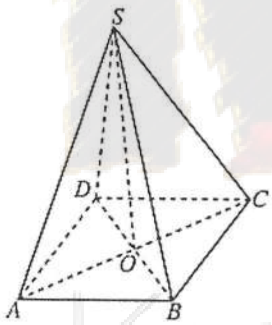
$\because \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{OO'}$, $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DB} \longrightarrow \overleftrightarrow{AC} \perp (DHFB)$

(10) (HGE)، (OAB) هما:

(a) متعامدان (b) متوازيان (c) منطبقان (d) ليس أيًا مما سبق

$$\left.\begin{array}{l} HGE = HGFE \\ OAB = ABCD \end{array}\right\} \therefore HGFE \parallel ABCD$$

$\therefore HGE \parallel OAB$



(11) إذا كان $ABCD$ مربع مركزه O، $\overleftrightarrow{SO} \perp (ABCD)$ فإن:

(a) $(SAB) \perp (SBC)$ (b) $(SAC) \perp (SBD)$

(c) $(SAB) \parallel (SCD)$ (d) $(SAD) \perp (ABCD)$

$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DB}$, $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{SO}$ $\therefore \overleftrightarrow{AS} \perp (SBD)$

$\overleftrightarrow{AS} \subseteq (SAC)$

$\therefore (SAC) \perp (SBD)$

(12) إذا كان: $\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1$, $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_2$ فإن:

(a) $\pi_1 \parallel \pi_2$ (b) $\pi_1 \perp \pi_2$ (c) $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$ (d) $\pi_1 = \pi_2$

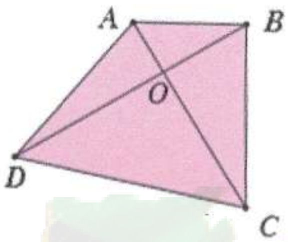
اذا تعامد مستقيم على مستو فكل مستوى آخر يحوي هذا المستقيم يكون عمودياً مع المستو الأول .

حاول ان تحل هندسة الفضاء

المستقيمات والمستويات في الفضاء
Lines and Planes in Space

مسلمات الفضاء-حالات تعيين مستوى في الفضاء –أوضاع المستقيمات في الفضاء – أوضاع مستويين في الفضاء

حاول أن تحل



1 في الشكل المقابل $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ يتقاطعان في O
أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد.

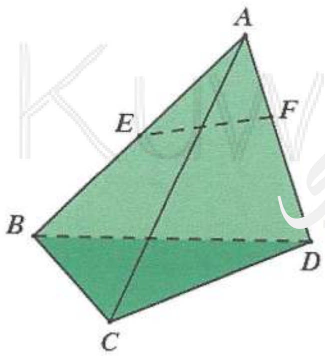
$\overline{BD}$ و $\overline{AC}$ متقاطعان فهما يعينان مستوى وحيد وليكن π

النقطتان B و A تقعان في هذا المستوى فيكون $\overline{AB} \subset \pi$

بالمثل B و C تقعان في π فيكون $\overline{BC} \subset \pi$

بالمثل $\overline{CD} \subset \pi$ ، $\overline{AD} \subset \pi$

حاول أن تحل



2 إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.
النقطة E تنتمي إلى $\overline{AB}$ ، النقطة F تنتمي إلى $\overline{AD}$.
$\overleftrightarrow{EF}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{BD}$. أثبت أن $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (BCD).

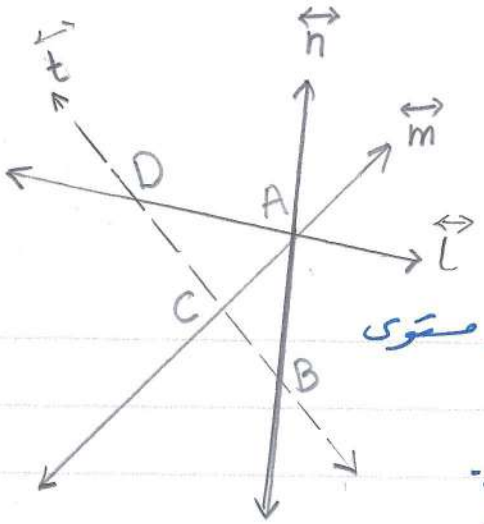
$\overleftrightarrow{EF}$ و $\overleftrightarrow{BD}$ غير متوازيان ويحويهما مستوى واحد هو (ABD) فهما متقاطعان في نقطة ولتكن K

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \cap \overleftrightarrow{BD} = \{K\}$

$\because \overleftrightarrow{BD} \subset (BCD) \qquad \therefore K \in (BCD)$

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \cap (BCD) = \{K\}$

حاول أن تحل



3 $\overleftrightarrow{l}, \overleftrightarrow{m}, \overleftrightarrow{n}$ ثلاثة مستقيمات مختلفة تتقاطع في A.

المستقيم t يقطع المستقيمات الثلاثة في B, C, D على الترتيب.

أثبت أن المستقيمات l, m, n, t تقع في مستوٍ واحد.

$\overleftrightarrow{l}$ و $\overleftrightarrow{m}$ متقاطعان في A فهما يعينان مستوى وحيد وليكن π

$\because \overleftrightarrow{t} \cap \overleftrightarrow{m} = \{C\} \quad , \quad \overleftrightarrow{t} \cap \overleftrightarrow{l} = \{D\}$

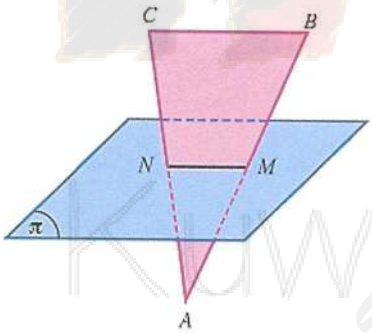
$\therefore \{C, D\} \subset \overleftrightarrow{t} \cap \pi \qquad \therefore \overleftrightarrow{t} \subset \pi$

$\because \overleftrightarrow{t} \cap \overleftrightarrow{n} = \{B\} \quad , \quad \overleftrightarrow{m} \cap \overleftrightarrow{n} = \{A\}$

$\therefore \{A, B\} \subset \overleftrightarrow{n} \cap \pi \qquad \therefore \overleftrightarrow{n} \subset \pi$

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء
Parallel Lines and Planes in Space

حاول أن تحل



1 في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{AC}$،

M ، N تنتميان إلى المستوي π .

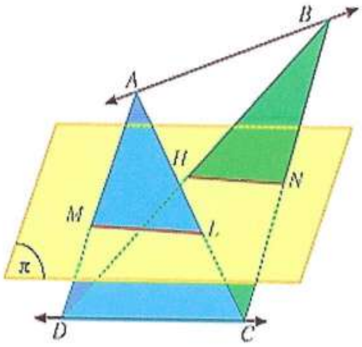
أثبت أن $\overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$.

$\because$ M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CB} \quad , \quad \overleftrightarrow{MN} \subset \pi$

$\therefore \overleftrightarrow{CB} \parallel \pi$

حاول أن تحل



2 في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متخالفان، $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$.

$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L.

$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N.

، إذا كان $\pi \parallel \overleftrightarrow{AB}$ فأثبت أن $LMHN$ متوازي أضلاع.

$\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$, $\overleftrightarrow{DC} \subset (ADC)$, $(ADC) \cap \pi = \overleftrightarrow{ML}$

$\therefore \overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{ML}$ ... (1)

بالمثل $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$, $\overleftrightarrow{DC} \subset (DCB)$, $(DCB) \cap \pi = \overleftrightarrow{HN}$

$\therefore \overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{HN}$ ... (2) $\therefore \overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{HN}$ *

بالمثل:

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$, $\overleftrightarrow{AB} \subset (ABC)$, $(ABC) \cap \pi = \overleftrightarrow{NL}$

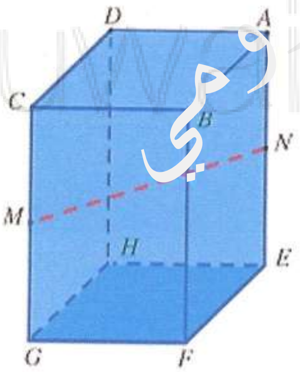
$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{NL}$

بالمثل نستطيع اثبات أن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{MH}$

$\therefore \overleftrightarrow{NL} \parallel \overleftrightarrow{MH}$

$\therefore$ الشكل $LMHN$ متوازي أضلاع

حاول أن تحل



3 $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$.

أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overleftrightarrow{MN}$.

من خواص شبه المكعب $AEGC$ مستطيل

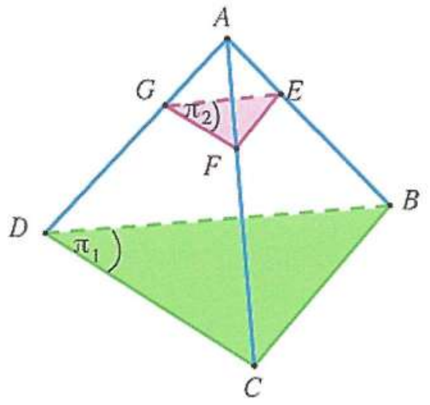
$\because$ M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$

$\therefore$ الشكل $MNEG$ مستطيل

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{GE}$, $\overleftrightarrow{GE} \subset (EFGH)$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel (EFGH)$

حاول أن تحل



4 في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي.

المستويان π_2 , π_1 متوازيان.

إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ، $FG = 6$ cm

فأوجد DC

π_2 و π_1 متوازيان والمستوى ADC يقطعهما في $\overleftrightarrow{DC}$, $\overleftrightarrow{GF}$

$\therefore \overleftrightarrow{GF} // \overleftrightarrow{DC} \longrightarrow \frac{FG}{DC} = \frac{AF}{AC}$ ---- (1)

بالمثل π_2 , π_1 يقطعهما المستوى ABC في $\overleftrightarrow{FE}$ و $\overleftrightarrow{CB}$

$\therefore \overleftrightarrow{FE} // \overleftrightarrow{CB} \longrightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ ---- (2)

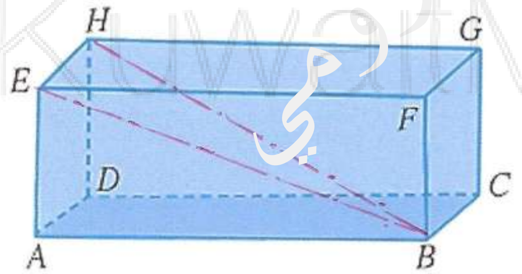
من (1) ، (2) نستنتج أن

$\frac{AF}{AC} = \frac{FG}{DC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$ $\therefore DC = 18$ سم

تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line With a Plane

حاول أن تحل



1 في شبه المكعب المقابل،

أثبت أن المثلث BEH قائم في $\widehat{E}$.

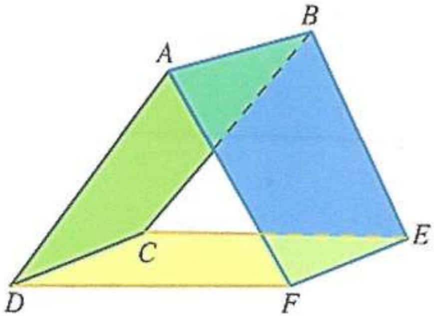
$\overleftrightarrow{EH} \perp \overleftrightarrow{EA}$, $\overleftrightarrow{EH} \perp \overleftrightarrow{EF}$ $\therefore \overleftrightarrow{EH} \perp (ABFE)$

$\because \overleftrightarrow{EB} \subset (ABFE)$

$\therefore \overleftrightarrow{EH} \perp \overleftrightarrow{EB}$ $\therefore m(B\hat{E}H) = 90^\circ$

$\therefore$ المثلث BEH قائم في $\hat{E}$

حاول أن تحل



2 في الشكل المقابل:

$ABEF, ABCD$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD) \parallel (BEC)$

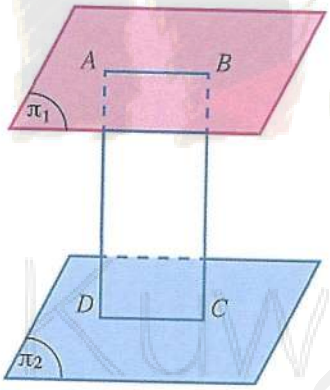
$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (BEC)$ ...1

بالمثل $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AF}$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (AFD)$ ...2

إذا كان مستقيم عمودياً على مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين

$\therefore (BEC) \parallel (AFD)$

حاول أن تحل



3 في الشكل المقابل: $\pi_1 \parallel \pi_2$

A, B نقطتان في π_1،

C, D نقطتان في π_2 حيث: A, B, C, D في مستوى واحد

$\overline{BC} \perp \pi_2$, $\overline{AD} \perp \pi_2$ أثبت أن $ABCD$ مستطيل.

π_1 , π_2 مستويان متوازيان يقطعهما المستوى $ABCD$ في $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{DC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ -----(1)

$\because \overleftrightarrow{BC} \perp \pi_2$ $\therefore m(B\hat{C}D) = 90^\circ$

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp \pi_2$ $\therefore m(A\hat{D}C) = 90^\circ$

$(A\hat{D}C)$, $(B\hat{C}D)$ زاويتان داخلتان للمستقيمين $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BC}$

ومجموع قياسهما يساوي 180°

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ..... (2)

من (1) ، (2) الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة فهو مستطيل

حاول أن تحل

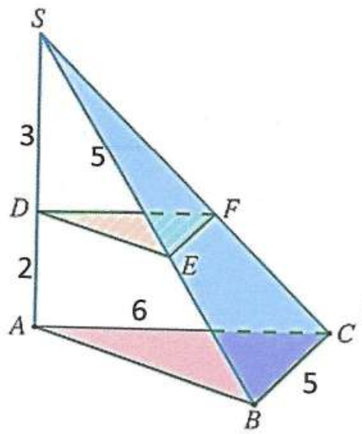
4 في الشكل المقابل:

المستويان (ABC) ، (DEF) متوازيان

$\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$

إذا كان: $SE = 5\text{ cm}$, $SD = 3\text{ cm}$, $DA = 2\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$

فأوجد محيط المثلث DEF



(DEF) ، (ABC) مستويان متوازيان يقطعهما المستوى (SAC) في $\overleftrightarrow{DF}$ ، $\overleftrightarrow{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{DF} \parallel \overleftrightarrow{AC} \longrightarrow \frac{SD}{SA} = \frac{DF}{AC} = \frac{SE}{SB} = \frac{3}{5}$

$\therefore DF = \frac{3 \times 6}{5} \quad \therefore DF = \frac{18}{5} \quad DF = 3.6$

بالمثل (DEF) ، (ABC) متوازيان ويقطعهما المستوى (SBC) في $\overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{EF}$

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{BC} \longrightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{EF}{BC} = \frac{3}{5}$

$\therefore EF = 3$

$\because \overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$ ، $(ABC) \parallel (DEF)$

$\therefore \overleftrightarrow{SA} \perp (DEF) \quad \because \overleftrightarrow{DE} \subset (DEF)$

$\therefore \overleftrightarrow{SA} \perp \overleftrightarrow{DE}$

في المثلث القائم SDE وحسب فيثاغورث

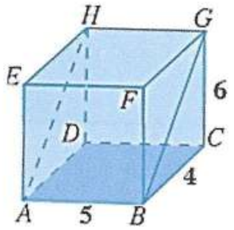
$DE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \quad \therefore DE = 4$

$\therefore$ محيط المثلث DEF يساوي

$DF + EF + DE = 3.6 + 3 + 4 = 10.6$ سم

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle



حاول أن تحل

1 في شبه المكعب المقابل، أثبت أن الزاوية GBC هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين $(ABCD)$, $(ABGH)$، ثم أوجد قياسها.

$\overleftrightarrow{AB}$ حافة الزاوية الزوجية بين المستويين $ABGH$ و $ABCD$

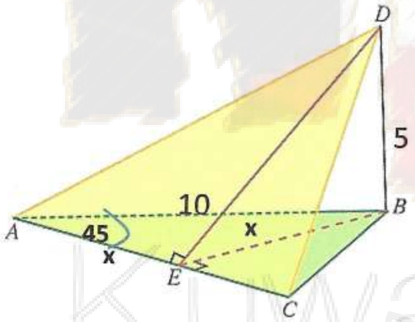
$\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ في المستوى $ABCD$

$\overleftrightarrow{BG} \perp \overleftrightarrow{AB}$ في المستوى $ABGH$ حيث $\overleftrightarrow{BG} \subset (BCGF)$

$\therefore$ $(C\hat{B}G)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

$\because \tan(G\hat{B}C) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ $\quad \therefore m(G\hat{B}C) = 56.3^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $= 56.3^\circ$



حاول أن تحل

2 في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$DB = 5\text{ cm}$ ، $AB = 10\text{ cm}$ ، $m(B\widehat{A}C) = 45^\circ$

$\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{DE} \perp \overline{AC}$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC، DAC

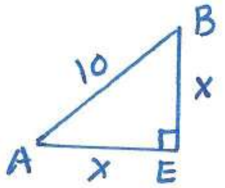
$\overleftrightarrow{AC}$ الحافة للزاوية الزوجية بين BAC و DAC

$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BE}$ في المستوى (ABC) ، $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DE}$ في المستوى ADC

$\therefore$ $(D\hat{E}B)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

$\because m(BAC) = 45^\circ$

$\therefore$ المثلث AEB قائم الزاوية متطابق الضلعين



$x^2 + x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 50$ $\Leftarrow$ $\therefore AE = EB = 5\sqrt{2}$

في المثلث DBE

$\overline{DB} \perp (ABC)$, $\overline{EB} \subset ABC$ $\quad \therefore \overline{DB} \perp EB$

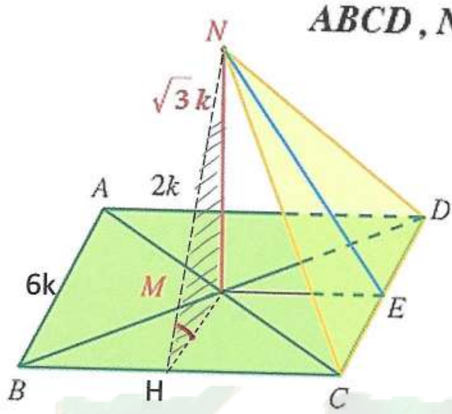
$\therefore \tan(D\hat{E}B) = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \therefore m(D\hat{E}B) = 35.3^\circ$

حاول أن تحل

3 $ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$

أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}k$

إذا كان $AB = 6k$، فأوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NBC



نرسم عمود من نقطة M يقطع $\overline{BC}$ في H .

ثم نصل $\overline{NH}$

$MH = \frac{1}{2}AB = 3k$

$\overleftrightarrow{BC}$ حافة الزاوية الزوجية

$\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{MH}$ في المستوى $ABCD$ .... (1)

$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{NM} \perp \overleftrightarrow{BC} \\ \overleftrightarrow{MH} \perp \overleftrightarrow{BC} \end{array}\right\} \therefore \overleftrightarrow{BC} \perp (MHN)$

$\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{NH}$ في المستوى (NBC) .... (2)

من (1) ، (2)

زاوية $(N\hat{H}M)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

$\tan(N\hat{H}M) = \frac{NM}{HM} = \frac{\sqrt{3}k}{3k} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

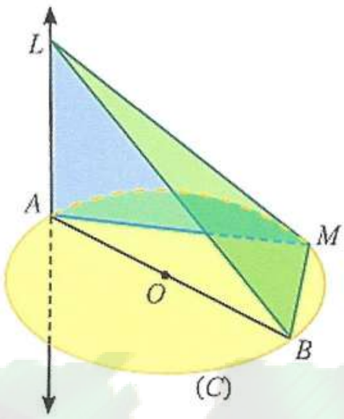
$\therefore m(N\hat{H}M) = 30^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NBC و $ABCD$

تساوي 30°

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes



حاول أن تحل

1 في الشكل المقابل، C دائرة مركزها O، $\overline{AB}$ قطر.

M نقطة تنتمي إلى الدائرة.

$\overleftrightarrow{LA}$ متعامد مع مستوي الدائرة.

أثبت أن:

a $\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$

b $(LBM) \perp (LAM)$

(a)

$\overline{AB}$ قطر في الدائرة

$\therefore m(A\hat{M}B) = 90^\circ \quad \therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BM} \quad \ldots (1)$

$\overleftrightarrow{LA}$ متعامد مع مستوى الدائرة ، $\overleftrightarrow{BM}$ محتوى في مستوى الدائرة

$\therefore \overleftrightarrow{LA} \perp \overleftrightarrow{MB} \quad \ldots (2)$

من (1) ، (2)

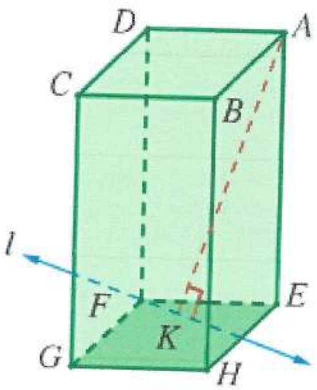
$\overleftrightarrow{MB} \perp (LAM)$

(b)

$\because \overleftrightarrow{MB} \perp (LAM)$ ، $\overleftrightarrow{MB} \subset (LMB)$

$\therefore (LBM) \perp (LAM)$

حاول أن تحل



2 في شبه المكعب $ABCDEFGH$ المقابل:

$\overleftrightarrow{l}$ مستقيم في $(EFGH)$ يمر في F.

$\overline{AK} \perp \overleftrightarrow{l}$

أثبت أن:

a $\overline{EK} \perp \overleftrightarrow{l}$

b $(FDK) \perp (AEK)$

(a) من خواص شبه المكعب

$\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{FE}$

$\therefore \overleftrightarrow{AE} \perp (EFGH)$

$\because \overleftrightarrow{l} \subset (EFGH)$ $\quad \therefore \overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{AE} \quad \dots (1)$

$\because l \perp \overleftrightarrow{AK} \quad \dots\dots (2)$

من (1) و (2)

$\overleftrightarrow{l} \perp (AEK)$

$\because \overleftrightarrow{EK} \subset (AEK)$

$\therefore \overleftrightarrow{EK} \perp \overleftrightarrow{l}$

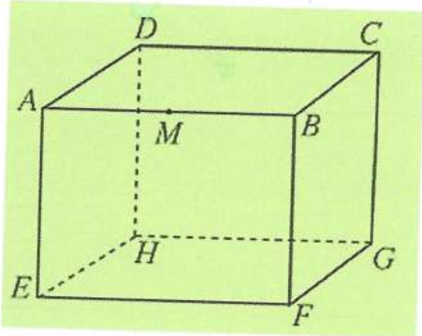
(b)

$\because \overleftrightarrow{l} \perp (AEK)$, $\overleftrightarrow{l} \subset (FDK)$

حيث $\overleftrightarrow{l}$ يمر في نقطة F ، $K \in \overleftrightarrow{l}$

$\therefore (AEK) \perp (FDK)$

اختبار الوحدة العاشرة



(1) $ABCDEFGH$ مكعب، M منتصف $\overline{AB}$

(a) هل $\overleftrightarrow{AB}$ والنقطة M تعينان مستويًا واحدًا؟

M منتصف $\overline{AB}$

$\therefore M \in \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ والنقطة M لا تعينان مستويًا واحدًا. (نقطة خارج المستقيم والمستقيم تعينان مستويًا واحدًا)

(b) هل $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{GH}$ يعينان مستويًا واحدًا؟

من خواص المكعب $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{HG}$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{HG}$

والمستقيمان المختلفان المتوازيان يعينان مستويًا واحدًا

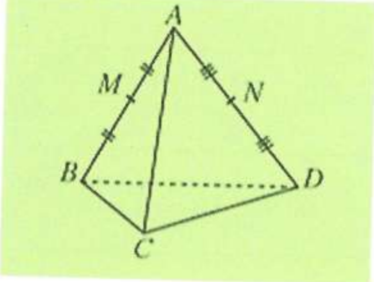
(c) سمّ ثلاثة مستويات تحتوي كل منها على النقطة M

$M \in \overline{AB}$ $\quad \therefore M \in \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{AB} \subset ABCD$, $\overleftrightarrow{AB} \subset ABFE$, $\overleftrightarrow{AB} \subset ABHG$

$\therefore$ المستويات $(ABHG)$ و $(ABFE)$ و $(ABCD)$ تحتوي كل منها النقطة M

(2) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة. النقطة M منتصف $\overline{AB}$ والنقطة N منتصف $\overline{AD}$

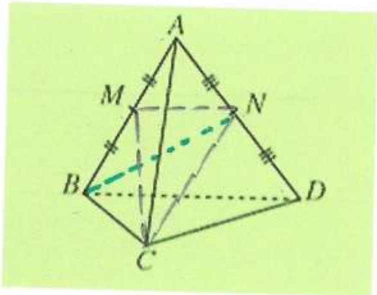


(a) $\overline{NM}$ ..//.. $\overline{BD}$

في المثلث ABD

M منتصف $\overline{AB}$, N منتصف $\overline{AD}$

$\therefore \overline{MN} \parallel \overline{BD} \Rightarrow \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BD}$



(b) $(ABD) \cap (CNM) = \overleftrightarrow{MN}$

$M \in \overline{AB} \quad \therefore M \in (ABD)$

$N \in \overline{AD} \quad \therefore N \in (ABD)$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \subset (ABD)$

$\because \overleftrightarrow{MN} \subset (CNM)$

$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{MN} \subset (ABD) \\ \overleftrightarrow{MN} \subset (CNM) \end{array}\right\} (ABD) \cap (CNM) = \overleftrightarrow{MN}$

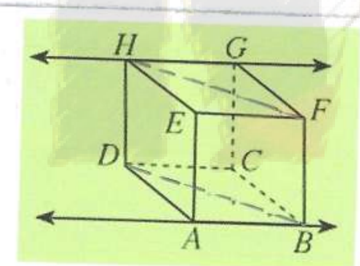
(c) $(CNB) \cap (ABD) = \ldots\ldots$

$\because N \in \overline{AD} \quad \therefore N \in (ADB) \quad , \because B \in (ABD)$

$\therefore \overleftrightarrow{BN} \subset (ABD)$

$\because \overleftrightarrow{BN} \subset (BNC)$

$\therefore (CNB) \cap (ABD) = \overleftrightarrow{BN}$



(3) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

من خواص شبه المكعب

$\because \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF} \quad , \quad \overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{HG} \quad \therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{HG}$

المستقيمان الموازيان لثالث في الفضاء متوازيان

(b) أثبت أن: $BDHF$ هو مستطيل.

$\overleftrightarrow{FB} \perp (ABCD) \quad , \quad \overleftrightarrow{HD} \perp (ABCD)$

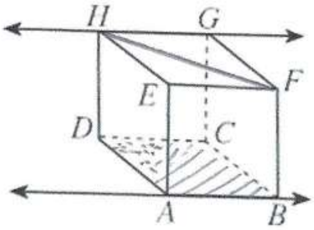
$\therefore \overleftrightarrow{FB} \parallel \overleftrightarrow{HD} \quad , \because FB = HD$ حرفان في المكعب

$\therefore$ $BDHF$ متوازي أضلاع

$\because \overleftrightarrow{DB} \subset (ABCD) \quad \therefore \overleftrightarrow{FB} \perp \overleftrightarrow{BD}$

$\therefore m(F\hat{B}D) = 90^\circ$

$\therefore$ $BDHF$ متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة فهو مستطيل



(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{HF}$ موازٍ للمستوي $ABCD$

$\overleftrightarrow{FB} \perp (ABCD)$, $\overleftrightarrow{HD} \perp (ABCD)$ $\therefore \overline{FB} \parallel \overline{HD}$

$\because FB = HD$

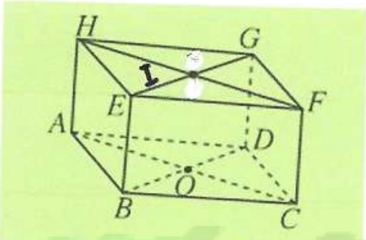
$\therefore$ الشكل $DBFH$ متوازي أضلاع

$\therefore \overleftrightarrow{HF} \parallel \overleftrightarrow{DB}$, $\overleftrightarrow{DB} \subset (ABCD)$ $\therefore \overleftrightarrow{HF} \parallel (ABCD)$

(4) $ABCDHEFG$ شبه مكعب.

النقطة O مركز المربع $ABCD$،

النقطة I مركز المربع $EFGH$



(a) أثبت أن النقاط: D، G، E تقع في المستوي $EGDB$

$\overleftrightarrow{EB} \parallel \overleftrightarrow{DG}$

$\therefore$ هما يعينان مستوٍ وحيد هو $(EBDG)$

$\therefore$ النقاط E، G، D تقع في المستوي $(EGDB)$

(b) أكمل: $(BEGD) \cap (AHFC) = \overleftrightarrow{OI}$

$I \in \overleftrightarrow{HF}$, $O \in \overleftrightarrow{AC}$ $\therefore \overleftrightarrow{OI} \subset (AHFC)$

بالمثل. $I \in \overleftrightarrow{EG}$, $O \in \overleftrightarrow{BD}$ $\therefore \overleftrightarrow{OI} \subset (BEGD)$

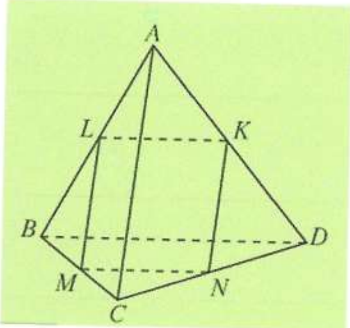
$\therefore (BEGD) \cap (AHFC) = \overleftrightarrow{OI}$

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AH} \parallel \overleftrightarrow{CF} \parallel \overleftrightarrow{OI}$

$\overleftrightarrow{FC} \parallel \overleftrightarrow{EB}$, $\overleftrightarrow{EB} \parallel \overleftrightarrow{HA}$ $\therefore \overleftrightarrow{FC} \parallel \overleftrightarrow{HA}$

$\because$ I منتصف $\overline{HF}$ ، O منتصف $\overline{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{OI} \parallel \overleftrightarrow{HA} \parallel \overleftrightarrow{CF}$



(5) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة: L منتصف $\overline{AB}$، M منتصف $\overline{CB}$،
N منتصف $\overline{CD}$، K منتصف $\overline{AD}$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{NK} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{LM}$

في المثلث ACD K منتصف $\overline{AD}$ ، N منتصف $\overline{CD}$

$\therefore \overleftrightarrow{NK} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ ... (1)

بالمثل في المثلث ACB L منتصف $\overline{AB}$ ، M منتصف $\overline{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ ... (2)

من (1) ، (2) $\overleftrightarrow{NK} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{LM}$

(b) أثبت أن: $KLMN$ هو متوازي أضلاع.

في المثلث ABD $\because \overline{LK}$ واصلة بين منتصفي ضلعين فيه $\overline{AD}$ و $\overline{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{LK} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ ... (1)

بالمثل في المثلث BCD $\overline{MN}$ واصلة بين منتصفي $\overline{CN}$ و $\overline{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ ... (2)

من (1) ، (2) $\overleftrightarrow{LK} \parallel \overleftrightarrow{MN}$

$\therefore$ الشكل $KLMN$ فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان فهو متوازي أضلاع

(c) أثبت أن: $\overline{NL}$ يتقاطع مع $\overline{KM}$

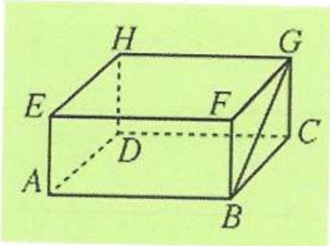
$\because$ الشكل $KLMN$ متوازي أضلاع

$\therefore$ النقاط N ، M ، L ، K تعيين مستوى وحيد

$\therefore \overleftrightarrow{LN}$ ، $\overleftrightarrow{KM}$ يقعان في مستوى واحد وهما غير متوازيان

$\therefore \overleftrightarrow{LN}$ ، $\overleftrightarrow{KM}$ متقاطعان

(6) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.



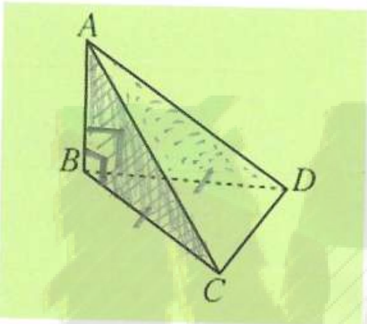
أثبت أن: $\overleftrightarrow{GH}$ متعامد مع $\overleftrightarrow{GB}$

$\overleftrightarrow{HG} \perp \overleftrightarrow{CG}$, $\overleftrightarrow{HG} \perp \overleftrightarrow{GF}$ $\therefore \overleftrightarrow{HG} \perp (BCGF)$

$\because \overleftrightarrow{BG} \subset (BGFC)$

$\therefore \overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{GB}$

(7) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة $BC = BD$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ متعامد مع المستوي BCD



أثبت أن: $m(A\widehat{C}B) = m(A\widehat{D}B)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$, $\overleftrightarrow{BC} \subset (BCD)$, $\overleftrightarrow{BD} \subset (BCD)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$ و $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ المثلثان ABC ، ABD قائما الزاوية

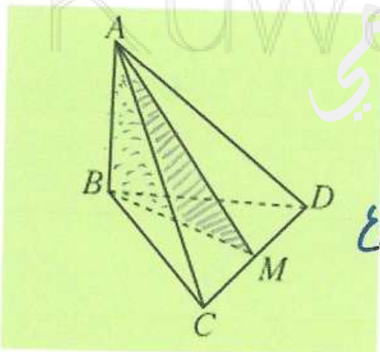
فيهما $\overline{AB}$ مشترك ، $BC = BD$

$\therefore$ المثلثان متطابقان

$\therefore m(A\widehat{C}B) = m(A\widehat{D}B)$

(8) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة، قاعدته BCD مثلث متطابق الأضلاع، $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$،

M منتصف $\overline{CD}$



(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{DC} \perp (ABM)$

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$, $\overleftrightarrow{CD} \subset (BCD)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ $\longrightarrow$ (1)

$\because M$ منتصف $\overline{CD}$ في المثلث BCD المتطابق الأضلاع

$\therefore \overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{CD}$ $\longrightarrow$ (2)

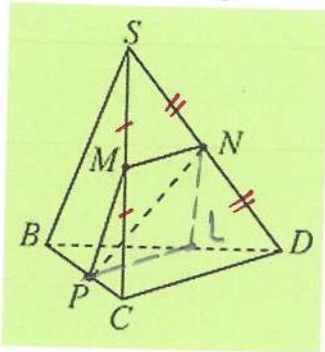
$\overleftrightarrow{CD} \perp (ABM)$ $\longleftarrow$ من (1) ، (2)

(b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AM}$

$\overleftrightarrow{CD} \perp (ABM)$, $\overleftrightarrow{AM} \subset (ABM)$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AM}$

(9) $SBCD$ هرم ثلاثي قاعدته BCD، M منتصف $\overline{SC}$، N منتصف $\overline{SD}$ ، P نقطة على $\overline{BC}$



(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{MN}$ موازٍ للمستوي BCD

في المثلث SCD

N منتصف $\overline{DS}$ ، M منتصف $\overline{SC}$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ $\quad$ $\therefore \overline{MN} \parallel \overline{CD}$

$\because \overleftrightarrow{CD} \subset (BCD)$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel (BCD)$

(b) إذا كان (PMN) يقطع $\overleftrightarrow{BD}$ في النقطة L

أثبت أن: $\overleftrightarrow{PL} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\because$ المستوى (PMN) يقطع $\overleftrightarrow{BD}$ في L

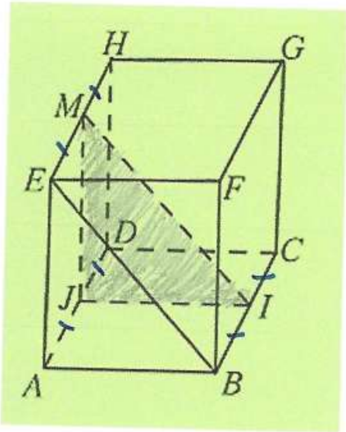
$\therefore L \in (PMN)$

$\because \overleftrightarrow{MN}$ يوازي (BCD) ومحتوى في $(MNPL)$ والمستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{PL}$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{PL}$

$\because \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore \overleftrightarrow{PL} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



(10) $ABCDEFGH$ مكعب. I منتصف $\overline{BC}$،
J منتصف $\overline{AD}$، M منتصف $\overline{EH}$
(a) أثبت أن $\overline{AD} \perp (IJM)$

I منتصف $\overline{BC}$, J منتصف $\overline{AD}$

$\therefore \overleftrightarrow{JI} \parallel \overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{JI} \longrightarrow (1)$

$\overleftrightarrow{MJ} \parallel \overleftrightarrow{HD} \parallel \overleftrightarrow{AE}$ ⟵ بالمثل

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{MJ} \longrightarrow (2)$

$\overleftrightarrow{AD} \perp (IJM)$ من (1) ، (2)

(b) أثبت أن $\overline{AD} \perp (AEB)$

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AE}$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp (AEB)$

(c) أثبت أن (IJM)، (ABE) متوازيان

لإثبات توازي مستويين نثبت أن هناك مستقيم عمودي ع كلاهما

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp (IJM)$ و $\overleftrightarrow{AD} \perp (AEB)$

$\therefore (IJM) \perp (ABE)$

(d) أثبت أن: $\overline{IJ} \perp (ADHE)$

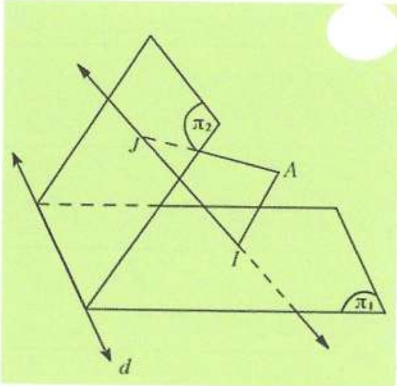
$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (ADEH)$: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AE}$

$\because \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{JI}$

$\therefore \overleftrightarrow{IJ} \perp (ADHE)$

(11) (π_1) ، (π_2) يتقاطعان في $\vec{d}$، A نقطة خارج (π_1) وخارج (π_2)

$\vec{AI} \perp (\pi_1)$ ، $\vec{AJ} \perp (\pi_2)$



(a) أثبت أن $(AIJ) \perp (\pi_1)$

وأن $(AIJ) \perp (\pi_2)$

$\because \overleftrightarrow{AI} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{AI} \subset (AIJ)$

$\therefore (AIJ) \perp \pi_1$

$\because \overleftrightarrow{AJ} \perp \pi_2 \ , \ \overleftrightarrow{AJ} \subset (AJI)$

$\therefore (AJI) \perp \pi_2$

(b) أثبت أن $\vec{d} \perp (AIJ)$

$\because \overleftrightarrow{AI} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{d} \subset \pi_1$

$\therefore \overleftrightarrow{AI} \perp \overleftrightarrow{d} \longrightarrow (1)$

بالمثل

$\because \overleftrightarrow{AJ} \perp \pi_2 \ , \ \overleftrightarrow{d} \subset \pi_2$

$\therefore \overleftrightarrow{AJ} \perp \overleftrightarrow{d} \longrightarrow (2)$

$\overleftrightarrow{d} \perp (AIJ)$ من (1) ، (2)

(c) أثبت أن: $\vec{d} \perp \overleftrightarrow{IJ}$

$\because \overleftrightarrow{d} \perp (AIJ)$

و $\overleftrightarrow{IJ} \subset (AIJ)$

$\therefore \overleftrightarrow{d} \perp \overleftrightarrow{IJ}$

انتهى نسألكم الدعاء