وزارة التربية

الإدارة العامة لمنطقة الفروانية التعليمية

ثانوية أنس بن مالك بنين

هندسة الفضاء

الصف الحادي عشر العلمي

إعداد الأستاذ / وليد البنا

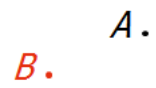
رئيس القسم الأستاذ / حمد العجمي

الموجه الفني الأستاذ / يحي محمد

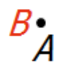
مدير المدرسة الأستاذ / مشعل السميران

علاقة نقطة بنقطة في الفضاء

النقطتان مختلفتان

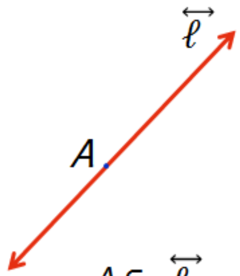


النقطتان منطبقان



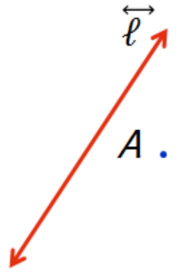
علاقة نقطة بمستقيم

النقطة ∈ المستقيم



$A \in \overleftrightarrow{\ell}$

النقطة ∉ المستقيم



$A \notin \overleftrightarrow{\ell}$

أ / وليد البنا

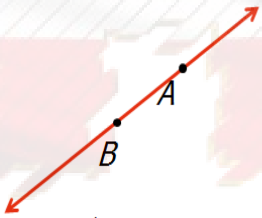
مسلمات (موضوعات) الفضاء

المسلمة (الموضوعة)

هي عبارة أولية (رياضية) نسلم بصحتها (نقبلها) دون برهان .

a

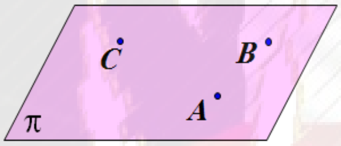
(i) أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد (واحد فقط)



(ii) كل مستقيم في الفضاء يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين

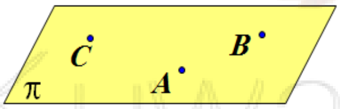
b

(i) في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست على إستقامة واحدة



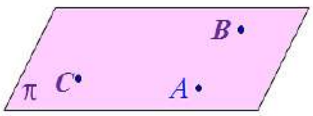
A , B , C ثلاث نقاط ليست على إستقامة واحدة

(ii) أي ثلاث نقاط مختلفة و ليست على إستقامة واحدة يحويها مستو واحد

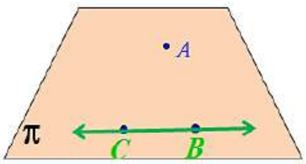


حالات تعيين المستوى في الفضاء

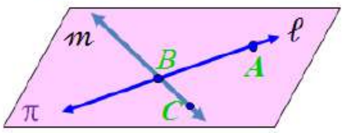
- أي ثلاث نقاط مختلفة ليست على إستقامة واحدة تعين مستويا واحدا فقط



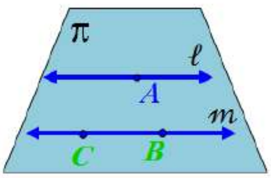
- أي مستقيم و نقطة خارجة عنه يعينان مستويا وحيدا فقط



- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويا واحدا فقط



- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويا واحدا فقط

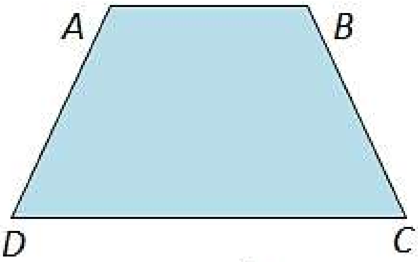


مثال (1)

صـ 119

أثبت أن أضلاع أي شبه منحرف تقع جميعها في مستو واحد .

أ / وليد البنا



المعطيات :

$ABCD$ شبه منحرف فيه $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

المطلوب :

إثبات أن $\overline{AB}\,,\ \overline{BC}\,,\ \overline{CD}\,,\ \overline{DA}$ تقع جميعا في مستو واحد

البرهان

$\because\ \overline{AB} \parallel \overline{DC}$ $\qquad \therefore\ \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{DC}\ ,\ \overleftrightarrow{AB}$ يعينان مستويا وحيدا و ليكن π

$\therefore$ النقطتان $A\,,D$ تنتميان إلى المستوى π $\qquad \therefore\ \overleftrightarrow{AD} \subset \pi$

$\therefore$ النقطتان $C\,,D$ تنتميان إلى المستوى π $\qquad \therefore\ \overleftrightarrow{BC} \subset \pi$

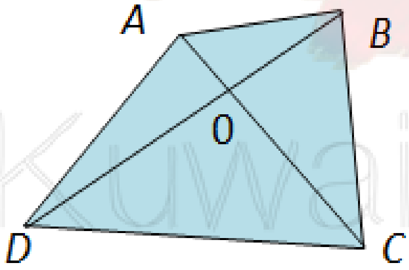
$\therefore$ $\overline{AB}\,,\ \overline{BC}\,,\ \overline{CD}\,,\ \overline{DA}$ تقع جميعا في مستو واحد

حاول أن (1)

صـ 119

في الشكل المقابل $\overline{AC}\,,\ \overline{BD}$ يتقاطعان في O

أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعا في مستو واحد



المعطيات :

$ABCD$ شكل رباعي فيه $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{O\}$

المطلوب :

إثبات أن $\overline{AB}\,,\ \overline{BC}\,,\ \overline{CD}\,,\ \overline{DA}$ تقع جميعا في مستو واحد

البرهان

$\because\ \overline{AC} \cap \overline{BD} = \{O\}$ $\qquad \therefore\ \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD} = \{O\}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BD}\ ,\ \overleftrightarrow{AC}$ يعينان مستويا وحيدا و ليكن π

$\therefore$ النقطتان $A\,,B$ تنتميان إلى المستوى π $\qquad \therefore\ \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

$\therefore$ النقطتان $B\,,C$ تنتميان إلى المستوى π $\qquad \therefore\ \overleftrightarrow{BC} \subset \pi$

و بالمثل

$\overline{CD}\,,\ \overline{DA}$ $\quad \therefore$ $\overline{AB}\,,\ \overline{BC}\,,\ \overline{CD}\,,\ \overline{DA}$ تقع جميعا في مستو واحد

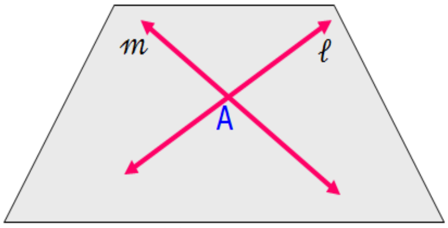
أ / وليد البنا

الأوضاع المختلفة لمستقيمان فى الفضاء

يقال لمستقيمين مختلفين بالفضاء أنهما :

ⓐ متقاطعان

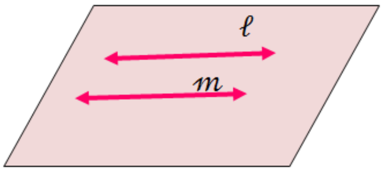
إذا وقعا في مستو واحد و كان بينهما نقطة واحدة مشتركة فقط



$\overleftrightarrow{\ell} \cap \overleftrightarrow{m} = \{A\}$

ⓑ متوازيان

إذا وقعا في مستو واحد و كانا غير متقاطعين

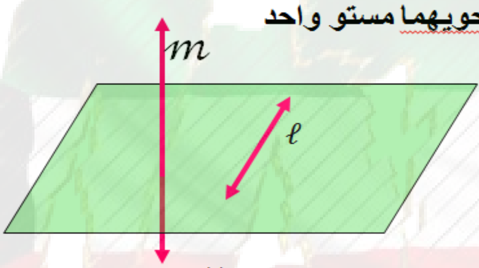


$\overleftrightarrow{\ell} \subset \pi \,, \overleftrightarrow{m} \subset \pi$

$\overleftrightarrow{\ell} \cap \overleftrightarrow{m} = \emptyset \Rightarrow \overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m}$

ⓒ متخالفان

إذا كان لا يحويهما مستو واحد



$\overleftrightarrow{\ell} \subset \pi \,, \overleftrightarrow{m} \not\subset \pi$

$\overleftrightarrow{\ell} \cap \overleftrightarrow{m} = \emptyset$

أوضاع مستقيم و مستوى فى الفضاء

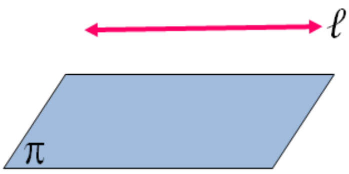
إن معرفة عدد النقاط المشتركة بين مستقيم و مستوي تسمح لنا

ⓐ صفر نقطة مشتركة

المستقيم موازي للمستوى

(في هذه الحالة يكون البعد بينهما ثابت)

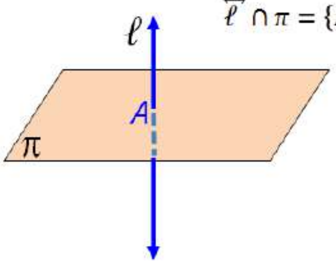
$\overleftrightarrow{\ell} \cap \pi = \emptyset \Rightarrow \overleftrightarrow{\ell} \parallel \pi$



ⓑ نقطة مشتركة واحدة

المستقيم يقطع المستوى

$\overleftrightarrow{\ell} \cap \pi = \{A\}$

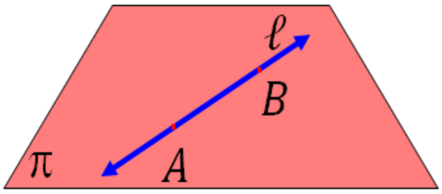


أ / وليد البنا

ⓒ **نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل**
المستقيم يقع بكامله (بتمامه) في المستوى

$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi = \overleftrightarrow{AB}$ **(المستقيم يوازي المستوى)**

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ $\quad\quad \therefore \overleftrightarrow{AB} \,//\, \pi$



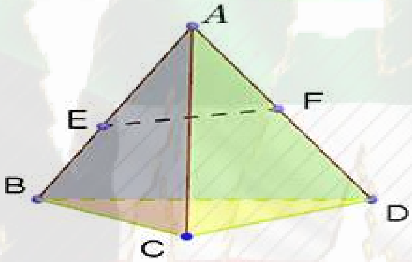
صـ 121

مثال (2) إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة النقطة E تنتمي إلى $\overline{AB}$
النقطة F تنتمي إلى $\overline{AD}$ ، $\overleftrightarrow{EF}$ لايوازي $\overleftrightarrow{BD}$

أثبت أن :

ⓐ $\overleftrightarrow{EF} \subset (ABD)$

ⓑ $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (ACD)



الحل

المعطيات : ABCD هرم ثلاثي القاعدة النقطة E تنتمي إلى $\overline{AB}$
النقطة F تنتمي إلى $\overline{AD}$ $\overleftrightarrow{EF}$ لايوازي $\overleftrightarrow{BD}$

المطلوب :

ⓐ $\overleftrightarrow{EF} \subset (ABD)$

ⓑ $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (ACD)

البرهان : ⓐ

$\because E \in \overline{AB} \quad , \overline{AB} \subseteq (ABD)$

$\therefore E \in (ABD)$

$\because F \in \overline{AD}, \overline{AD} \subseteq (ABD)$

$\therefore F \in (ABD)$

∴ النقطتان E , F تنتميان إلى (ABD)

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \subseteq (ABD)$

ⓑ $\because F \in \overline{AD}, \overline{AD} \subseteq (ABD)$ $\quad \therefore F \in (ABD) \longrightarrow (1)$

$\because E \notin (ACD) \longrightarrow (2)$

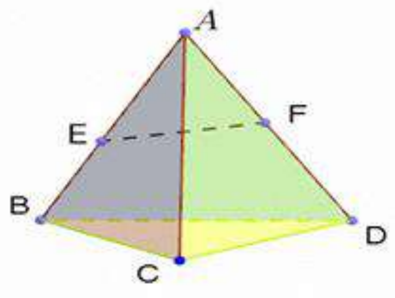
∵ E , F نقطتان مختلفتان ∴ تحددان مستقيم وحيد $\overleftrightarrow{EF} \longrightarrow (3)$

∴ من (1) ، (2) ، (3) ينتج أن :

$\overleftrightarrow{EF}$ يشترك مع (ACD) في نقطة واحدة أي يقطعه

حاول أن تحل رقم (2) صـ 122

في مثال (2) إثبت أن : $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (BCD)



البرهان

$\overleftrightarrow{EF}$ لايوازي $\overleftrightarrow{BD}$

$\overleftrightarrow{EF}$ ، $\overleftrightarrow{BD}$ يقعان في المستوي (ABD)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع $\overleftrightarrow{BD}$

$\because \overleftrightarrow{BD} \subset (BCD)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (BCD)

أوضاع مستويين في الفضاء

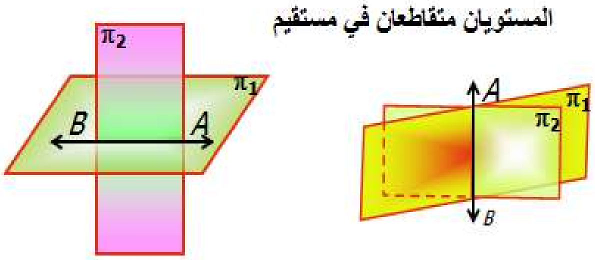
إذا إشترك مستويان مختلفان في نقطة فإنه يوجد على الأقل نقطة أخرى مشتركة بين هذين المستويين

إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستقيم

إذا إشترك مستويان في ثلاث نقاط مختلفة و ليست على إستقامة واحدة يكون المستويان منطبقين

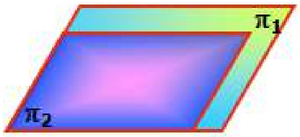
أوضاع مستقيم و مستوي فى الفضاء

(a) المستويان متقاطعان في مستقيم



$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{AB}$

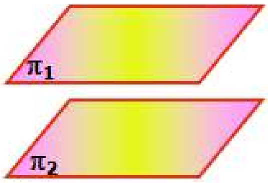
(b) المستويان منطبقان (يشتركان في جميع النقاط)



$\pi_1 = \pi_2$

$\pi_1 \,//\, \pi_2$

(c) المستويان لا يشتركان في أي نقطة



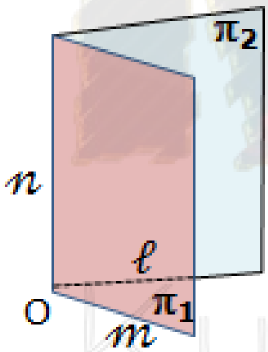
$\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$

$\pi_1 \,//\, \pi_2$

صـ 123

مثال (3) ℓ , m , n ثلاثة مستقيمات لا تقع في مستوٍ واحد تتقاطع مثنى مثنى. أثبت أن المستقيمات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة

المعطيات :



ℓ , m , n ثلاثة مستقيمات لا تقع في مستوٍ واحد تتقاطع

$\overleftrightarrow{\ell} \cap \overleftrightarrow{m} \neq \emptyset$ ، $\overleftrightarrow{\ell} \cap \overleftrightarrow{m} \neq \emptyset$ ، $\overleftrightarrow{\ell} \cap \overleftrightarrow{m} \neq \emptyset$

المطلوب :

أثبت أن المستقيمات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة

البرهان

$\because$ المستقيمان m,n متقاطعان

$\therefore$ يعينان مستويا وحيدا و ليكن π_1

$\because$ المستقيمان ℓ,n متقاطعان

$\therefore$ يعينان مستويا وحيدا و ليكن π_2

و لتكن o نقطة تقاطع المستقيمان ℓ,m

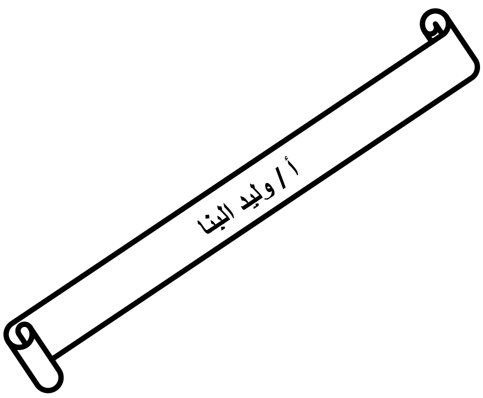
$\because o \in \overleftrightarrow{m} \quad \therefore o \in \pi_1 \longrightarrow (1)$

$\because o \in \overleftrightarrow{\ell} \quad \therefore o \in \pi_2 \longrightarrow (2)$

من (1) ,(2) $\quad o \in \pi_1 \cap \pi_2$

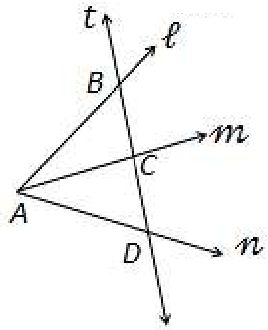
$\because \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n} \quad \therefore o \in \overleftrightarrow{n}$

o نقطة مشتركة بين المستقيمات الثلاثة و بالتالي هي نقطة تقاطع المستقيمات الثلاثة



حاول أن تحل رقم (3) صـ 123

$\overleftrightarrow{\ell}, \overleftrightarrow{m}, \overleftrightarrow{n}$ ثلاثة مستقيمات مختلفة تتقاطع في A المستقيم
t يقطع المستقيمات الثلاثة في B,C,D على الترتيب
أثبت أن المستقيمات ℓ, m, n,t تقع مستو واحد



المعطيات :

ℓ, m, n ثلاثة مستقيمات لا تقع في مستوٍ واحد تتقاطع

$\overleftrightarrow{t} \cap \overleftrightarrow{\ell} = \{b\}, \quad \overleftrightarrow{t} \cap \overleftrightarrow{m} = \{c\}$

$\overleftrightarrow{t} \cap \overleftrightarrow{n} = \{D\}$

المطلوب :

أثبت أن المستقيمات ℓ, m, n,t تقع مستو واحد

البرهان

$\because A \notin \overleftrightarrow{t}$

$\therefore$ يعينان مستو π

المستقيم $\overleftrightarrow{\ell}$ يقطع المستوى π في النقطتين A , B

$\therefore \overleftrightarrow{\ell} \subseteq \pi$

و بالمثل

المستقيم $\overleftrightarrow{m}$ يقطع المستوى π في النقطتين A , C

$\therefore \overleftrightarrow{m} \subseteq \pi$

و بالمثل

المستقيم $\overleftrightarrow{n}$ يقطع المستوى π في النقطتين A , D

$\therefore \overleftrightarrow{n} \subseteq \pi$

$\therefore$ المستقيمات ℓ, m, n,t تقع مستو واحد

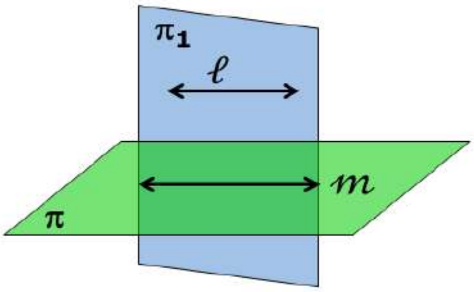
تمارين مختارة من كراسة التمارين

صـ .... رقم .....

صـ .... رقم .....

نظرية (1)

إذا وازي مستقيم خارج مستو مستقيما في المستوي فإنه يوازي المستوي



المعطيات : $\overleftrightarrow{\ell}$ **مستقيم خارج المستوى** π

$\overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m} \quad , \overleftrightarrow{m} \subset \pi$

المطلوب : **إثبت أن** $\overleftrightarrow{\ell} \parallel \pi$

البرهان : $\because \overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore \overleftrightarrow{\ell} , \overleftrightarrow{m}$ يعينان مستويا وحيدا و ليكن π_1

$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{m}$

لنفرض أن $\overleftrightarrow{\ell}$ لا يوازي π

$\therefore \overleftrightarrow{\ell}$ يقطع π في نقطة تنتمي إلي خط تقاطع π_1 , π

أي أنها نقطة تنتمي إلي $\overleftrightarrow{m}$ و هذا يخالف الفرض لأن $\overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore \overleftrightarrow{\ell}$ لايمكن أن يقطع المستوي π و بالتالي $\overleftrightarrow{\ell} \parallel \pi$

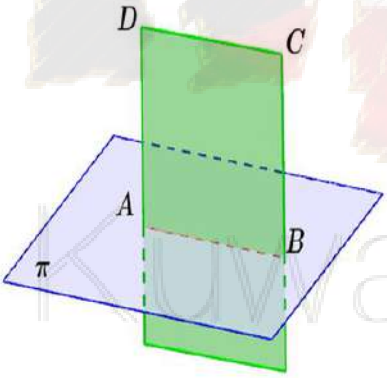
مثال (1)

صـ 125

في الشكل المقابل : $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \quad \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

$AD = BC$

أثبت أن : $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$



البرهان

$\because \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{BC} , \overleftrightarrow{AD}$ يعينان مستويا وحيدا

و ليكن (ABCD) فيه

$\overline{AD} \parallel \overline{BC} \qquad AD = BC$

$\therefore$ **ABCD متوازي أضلاع**

و منه $\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

(معطى) $\therefore \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

(نظرية) $\therefore \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$

أ / وليد البنا

حاول أن (1)

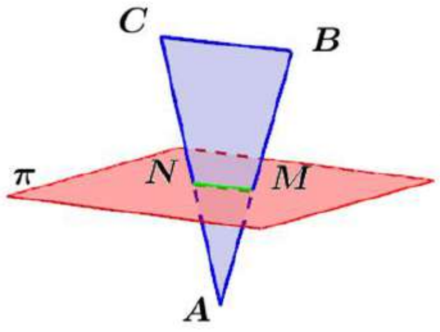
صـ 125

في الشكل المقابل :

المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$, N منتصف $\overline{AC}$

, M,N تنتميان إلى المستوي π

إثبت أن $\overleftrightarrow{CD} \;//\; \pi$



البرهان

$\because$ M منتصف $\overline{AB}$

$\because$ N منتصف $\overline{AC}$

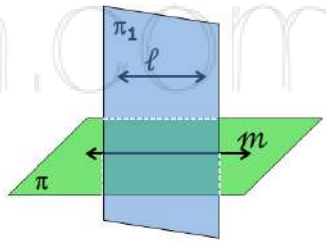
$\therefore \overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{MN}$

$\because \overleftrightarrow{MN} \subset \pi$ **(معطى)**

$\therefore \overleftrightarrow{BC} // \pi$ **(نظرية)**

نظرية (2)

إذا وازى مستقيم مستويا ، فكل مستو مار بالمستقيم و يقطع المستوى ، يقطعه في مستقيم مواز للمستقيم المعلوم .

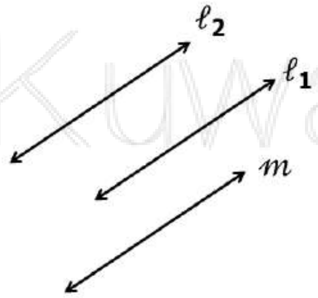


$\because \overleftrightarrow{\ell} // \pi$ ، $\overleftrightarrow{\ell} \subset \pi_1$ ، $\pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{m}$

$\therefore \overleftrightarrow{m} // \overleftrightarrow{\ell}$

نظرية (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيا



$\because \overleftrightarrow{\ell_1} // \overleftrightarrow{m}$ ، $\overleftrightarrow{\ell_2} // \overleftrightarrow{m}$

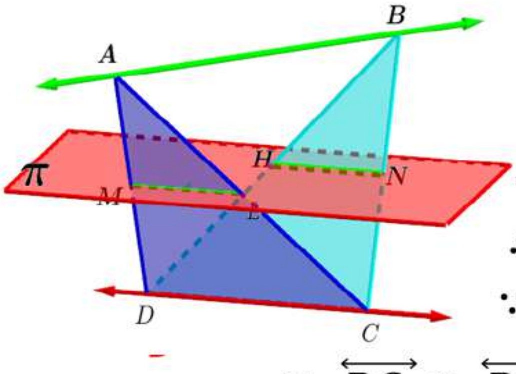
$\therefore \overleftrightarrow{\ell_1} // \overleftrightarrow{\ell_2}$

أ / وليد البنا

صـ 126

مثال (2) في الشكل المقابل : إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ مخالفان ، $\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M , $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L , $\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في N

البرهان أثبت أن : $\overleftrightarrow{LM} \,//\, \overleftrightarrow{NH}$



$\because \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{A\}$

∴ المستقيمان يعينان مستويا وحيدا (ADC)

$\because \overleftrightarrow{AD} \cap \pi = \{M\}$ ، $\overleftrightarrow{AC} \cap \pi = \{L\}$

$\therefore (ABC) \cap \pi = \overleftrightarrow{ML}$

$\because \overleftrightarrow{CD} \,//\, \pi \quad \therefore \overleftrightarrow{CD} \subseteq (ACD)$

$\because \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{BD} = \{B\} \quad \therefore \overleftrightarrow{LM} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$

المستقيمان يعينان مستويا وحيدا (BCD)

$\because \overleftrightarrow{BD} \cap \pi = \{H\}$ ، $\overleftrightarrow{BC} \cap \pi = \{N\} \quad (BCD) \cap \pi = \overleftrightarrow{HN}$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \,//\, \pi \quad \overleftrightarrow{CD} \subseteq (BCD)$

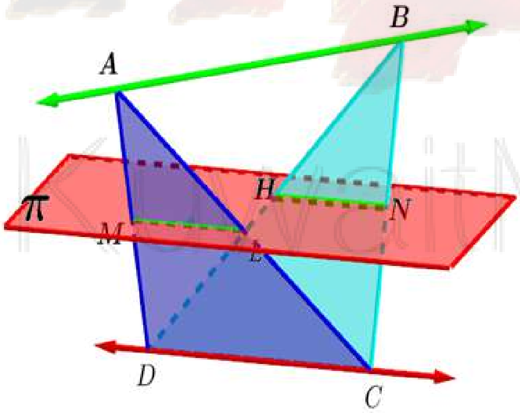
$\overleftrightarrow{HN} \,//\, \overleftrightarrow{CD} \quad \overleftrightarrow{ML} \,//\, \overleftrightarrow{HN}$

6

صـ 126

حاول أن (2) في المثال (2) إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \pi$ فأثبت أن $LMHN$ متوازي أضلاع

البرهان



$\because \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{DB} = \{D\}$

∴ المستقيمان يعينان مستويا وحيدا (BDA)

$\because \overleftrightarrow{AD} \cap \pi = \{M\}$، $\overleftrightarrow{DB} \cap \pi = \{H\}$

$\therefore (DAB) \cap \pi = \overleftrightarrow{MH}$

$\overleftrightarrow{AB} \,//\, \pi \quad \therefore \overleftrightarrow{AB} \subseteq (DAC)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{MH}$

$\because \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{C\}$

المستقيمان يعينان مستويا وحيدا (ABC)

$\because \overleftrightarrow{AC} \cap \pi = \{L\}$ ، $\overleftrightarrow{BC} \cap \pi = \{N\} \quad (ABC) \cap \pi = \overleftrightarrow{LN}$

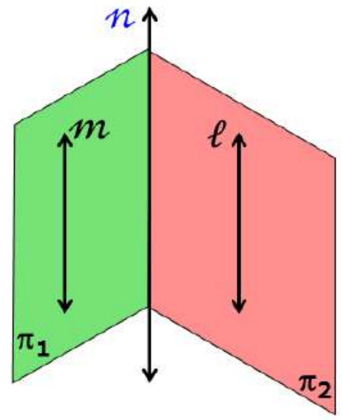
$\therefore \overleftrightarrow{AB} \,//\, \pi \quad \overleftrightarrow{AB} \subseteq (ABC)$

$\overleftrightarrow{LN} \,//\, \overleftrightarrow{MH} \quad \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{LN}$

أ / وليد البنا

نتيجة (1)

إذا توازى مستقيمان و مر بهما مستويان متقاطعان ، فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلا من هذين المستقيمين



$\overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{m} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{\ell} \subset \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n}$

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$

صـ 127

مثال (3) في الشكل المقابل : $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة π

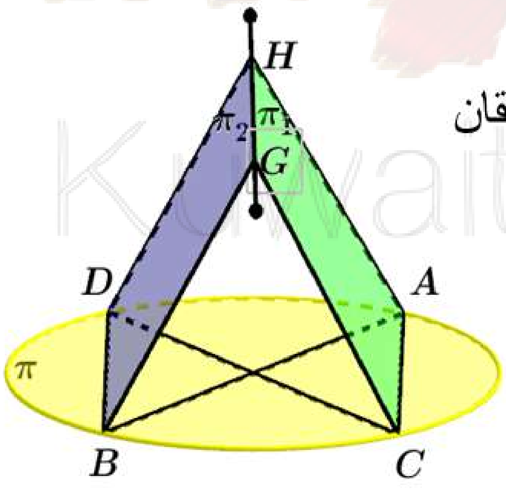
$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$ إثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

البرهان

$\because$ $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في الدائرة

$\therefore$ ينصف كل منهما الأخر و متطابقان

$\therefore$ الشكل $ACBD$ مستطيل



$\because$ $\overline{AC} \parallel \overline{DB}$

$\because$ $\overleftrightarrow{AC} \subset \pi_1$ $\overleftrightarrow{DB} \subset \pi_2$

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

$\therefore \overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DB}$

$\because$ $\overline{GH} \parallel \overline{AC}$ $\overleftrightarrow{AC} \subset \pi$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{GH} \parallel \pi$

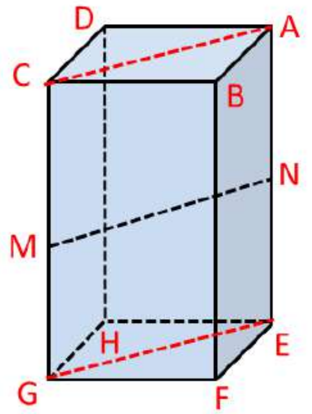
أي أن مستوي الدائرة π **يوازي** $\overleftrightarrow{GH}$

حاول أن (3)

صـ 127

$ABCDEFGH$ شبه مكعب . M منتصف $\overline{CG}$ ، N منتصف $\overline{AE}$ ، أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overline{MN}$

البرهان



$\because \overline{AE} \,//\, \overline{CG} \quad , \overline{AE} = \overline{CG}$

M منتصف $\overline{CG}$ ، N منتصف $\overline{AE}$

$\therefore \overline{NE} \,//\, \overline{MG} \quad , \overline{NE} = \overline{MG}$

$\therefore$ الشكل $MNEG$ متوازي أضلاع

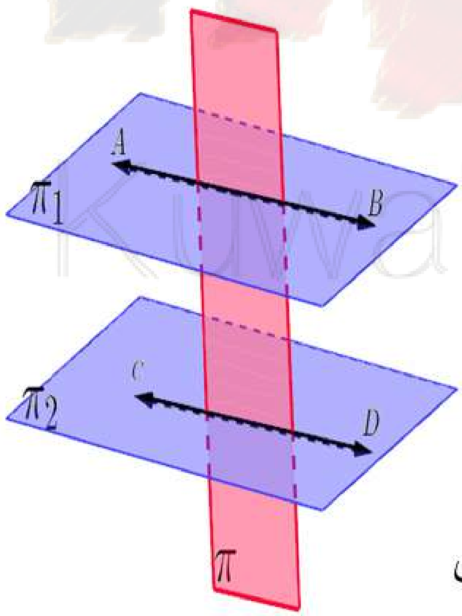
$\because \overline{MN} \,//\, \overline{GE}$

$\overleftrightarrow{GE} \subset EFGH$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \,//\, (EFGH)$

نظرية (4)

إذا قطع مستو مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين



المعطيات : $\pi_2 \,//\, \pi_1$

$\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD} \qquad \pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB}$

المطلوب : $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$

البرهان : فرضا $\because \pi_2 \,//\, \pi_1$

$\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2 \qquad \overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$

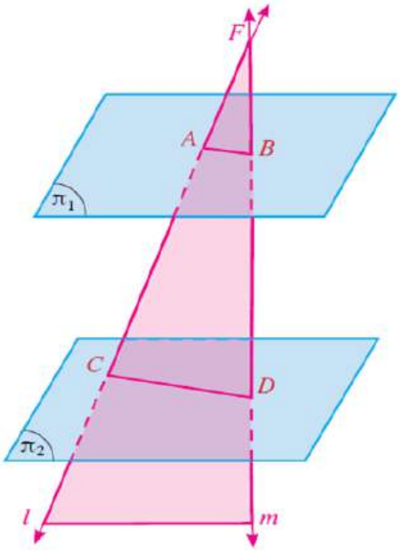
$\therefore \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \emptyset$

أي أن $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ هما متوازيان أو متخالفان

و لكن $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ يحويهما مستوي واحد π (2)

من (1) ، (2) نستنتج أن : $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$

مثال (4)



في الشكل المقابل: π_2 , π_1 مستويين متوازيين.

$\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان في F ويقطعان كلًّا من π_1 في A, B، π_2 في C, D

إذا كان $FB = 5\,\text{cm}$, $CD = 9\,\text{cm}$, $AC = 6\,\text{cm}$, $BD = 4\,\text{cm}$

فأوجد محيط المثلث FAB

المعطيات:

$\pi_1 \parallel \pi_2$

$\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{m}$ متقاطعان في F ويقطعان π_1 في A, B، π_2 في C, D

$FB = 5\,\text{cm}$, $CD = 9\,\text{cm}$, $AC = 6\,\text{cm}$, $BD = 4\,\text{cm}$

المطلوب:

إيجاد محيط المثلث FAB.

الحل: $\because$ $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان في F

$\therefore$ $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{m}$ يعينان مستوٍ واحد π

$\because$ π_1 , π_2 متوازيان.

$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB}$, $\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (نظرية 4)

في المستوي π ، $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore$ المثلثان FAB, FCD متشابهان

نكتب التناسب: $\dfrac{FB}{FD} = \dfrac{FA}{FC} = \dfrac{AB}{CD}$

بالتعويض: $\dfrac{5}{5+4} = \dfrac{FA}{FA+6} = \dfrac{AB}{9}$

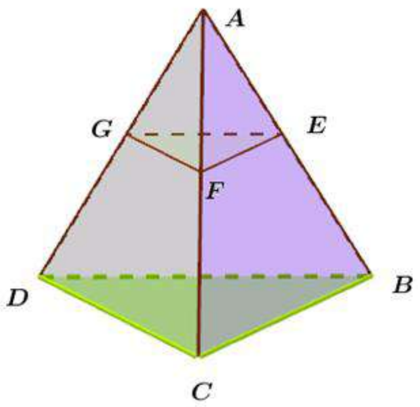
$\dfrac{5}{5+4} = \dfrac{FA}{FA+6}$ $\qquad 9FA = 5(FA+6)$

$4FA = 30 \implies FA = 7.5\,\text{cm}$ $\qquad \dfrac{5}{5+4} = \dfrac{AB}{9}$ $\qquad 9AB = 45 \implies AB = 5\,\text{cm}$

محيط المثلث FAB يساوي: $FA + FB + AB = 7.5\,\text{cm} + 5\,\text{cm} + 5\,\text{cm} = 17.5\,\text{cm}$

حاول أن (4) في الشكل المقابل : $ABCD$ هرم ثلاثي .

المستويان π_1 ، π_2 متوازيان إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ، $FG = 6\ cm$ فأوجد DC



البرهان

$\because \frac{AE}{EB} = \frac{1}{3} \quad \therefore \frac{AE}{AB+EB} = \frac{1}{1+3}$

$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{1}{4}$

$\because \pi_1 \parallel \pi_2 , \quad ABC \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{DB}$

$ABC \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GE}$

$\therefore \overleftrightarrow{DB} \parallel \overleftrightarrow{GE} \quad \therefore \frac{AG}{AD} = \frac{1}{4}$

و بالمثل يمكن إثبات أن $\overleftrightarrow{GF} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

$\therefore \frac{AG}{AD} = \frac{GF}{DC}$

$\therefore \frac{GF}{DC} = \frac{1}{4} \qquad \therefore \frac{6}{DC} = \frac{1}{4}$

$DC = 24\ cm$

تمارين مختارة من كراسة التمارين

صـ .... رقم .....

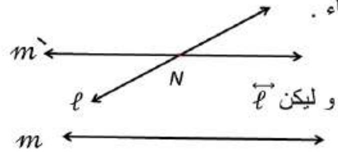
صـ .... رقم .....

بند 3-10

الزاوية بين مستقيمين متخالفين

هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيم قاطع له و مواز للآخر

$\overleftrightarrow{\ell}$, $\overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متخالفان في الفضاء .



نأخذ النقطة N على أحد المستقيمين و ليكن $\overleftrightarrow{\ell}$

نرسم $\overleftrightarrow{m`}$ يوازي $\overleftrightarrow{m}$ و يمر بالنقطة N

الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{\ell}$ ، $\overleftrightarrow{m}$ هي أحدى الزوايا الناتجة عن تقاطع $\overleftrightarrow{\ell}$ ، $\overleftrightarrow{m`}$

$\hat{N}$ الزاوية الحادة بين المستقيمين ℓ ، m

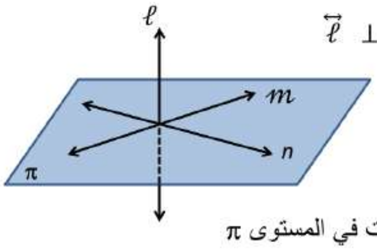
ملاحظة : لا تتأثر الزاوية بتغير موقع النقطة N

تعريف

يكون المستقيم ℓ عموديا على المستوى π إذا كان $\overleftrightarrow{\ell}$ عموديا على جميع المستقيمات الواقعة في π و يرمز له بـ : $\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi$

نقول أيضا إن π عمودي على $\overleftrightarrow{\ell}$ $\qquad$ $\pi \perp \overleftrightarrow{\ell}$

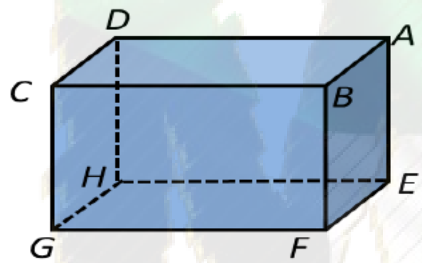
في الشكل المجاور : إذا كان $\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi$



فإن ℓ عموديا على كل المستقيمات في المستوى π

نظرية (5)

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديا على مستويهما



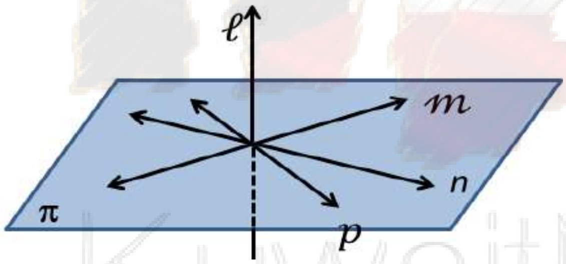
$\overleftrightarrow{GF} \cap \overleftrightarrow{GH} = \{G\}$

$\overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GH}$ ، $\overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GH}$

$\overleftrightarrow{CG} \perp (EFGH)$

نتيجة (2)

جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواه في مستو واحد عموديا على المستقيم المعلوم

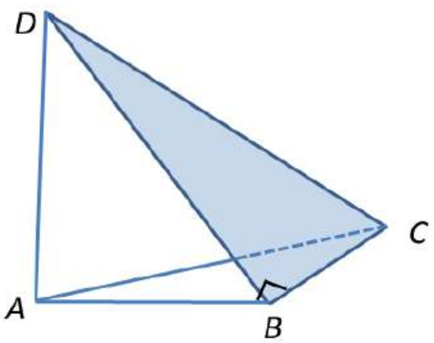


مثال (1) صـ 131

في الشكل المقابل ،المثلث ABC قائم في $\hat{B}$، $\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$

إثبت أن المثلث DBC قائم في $\hat{B}$

البرهان



$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$, $\overleftrightarrow{BC} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC} \Longrightarrow (1)$ (نظرية)

$\because$ المثلث ABC قائم في $\hat{B}$

$\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB} \Longrightarrow (2)$

$\because$ المستقيمان $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ متقاطعان

$\therefore$ يعينان المستوي (ABD) $\Longleftarrow$ (3)

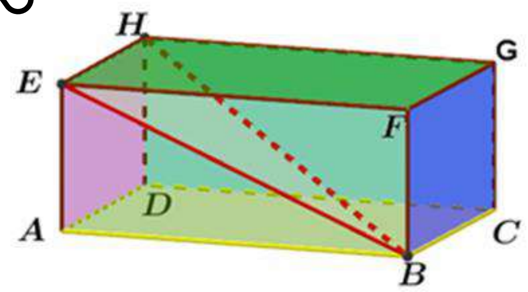
من (1) ، (2) ، (3) $\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp (ABD)$

$\because \overleftrightarrow{BD} \subset (ABD) \Longrightarrow \therefore \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{BD}$ (نظرية)

$\therefore$ المثلث BCD قائم في $\hat{B}$

حاول أن تحل (1) صـ132

في شبه المكعب المقابل ،
أثبت أن المثلث BEH قائم في $\hat{E}$



البرهان

$\because \overline{EH} \perp \overline{EF} \ , \ \overline{EH} \perp \overline{EA}$

$\therefore \overleftrightarrow{EH} \perp (AEFB)$

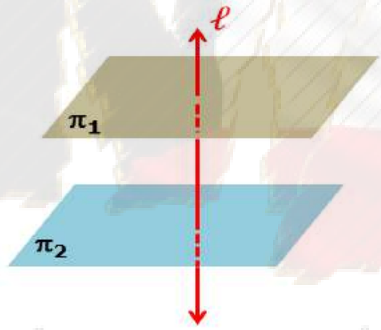
$\because \overleftrightarrow{EB} \subset (AEFB)$

$\therefore \overline{EH} \perp \overline{EB}$

المثلث BEH قائم في $\hat{E}$

نظرية (6)

إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيان



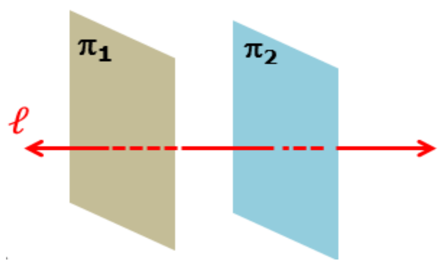
$$\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_2 \longrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$$

نظرية (7)

إذا كان مستقيم عموديا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديا على المستوى الأخر

$$\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_1 \ , \ \pi_1 \parallel \pi_2$$

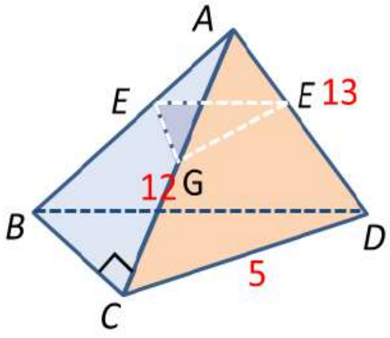
$$\longrightarrow \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_2$$



مثال (2)

صـ132

في الشكل المقابل : Aنقطة خارج المستوى BCD،
و النقاط E,G,F منتصفات $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ على الترتيب
إذا كان $\overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ و كان $CD=5cm$, $AC=12cm$, $AD=13cm$
فأثبت أن $(EGF) // (BCD)$



البرهان

في المثلث : ACD

$(AD)^2 = 169$ ، $(AC)^2+(CD)^2 = 169$

∴ المثلث ACD قائم في $\hat{C}$

(معطى) $\overline{AC} \perp \overline{CB}$, $\overline{AC} \perp \overline{CD}$ ∴

وحيث أن $\overleftrightarrow{CB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ متقاطعان

نظرية (1) $\Longrightarrow$ $\overleftrightarrow{AC} \perp (BCD)$ ∴

في المثلث : ABC ∵ Eمنتصف $\overline{AB}$ ، G منتصف $\overline{AC}$

∴ $\overleftrightarrow{EG} // \overleftrightarrow{CB}$

و لكن $m(\hat{BCA}) = 90°$

$\overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{EG}$ $\longrightarrow$ $m(A\hat{G}E) = 90$ ∴

و بالمثل $\overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{GF}$

∴ $\overleftrightarrow{AG} \perp (EGF) \longrightarrow \overleftrightarrow{AC} \perp (EGF) \longrightarrow (2)$

من (1) ، (2) ∴ $(EGF) // (BCD)$

صـ133

حاول أن (2)

في الشكل المقابل : $ABEF, ABCD$مستطيلان

أثبت أن : $(AFD) // (BEC)$

البرهان

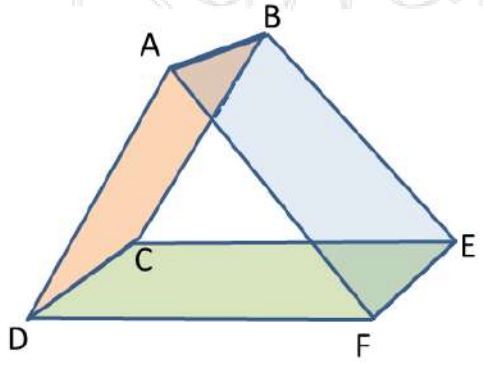
∵ $ABEF$ مستطيل

∴ $\overline{AB} \perp \overline{AF}$

∵ $ABCD$ مستطيل

∴ $\overline{AB} \perp \overline{AD}$

∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp (AFD) \Longrightarrow$ **(1)**



و بالمثل $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$ ،

∵ $\overleftrightarrow{AB} \perp (EBC) \Longrightarrow$ **(2)**

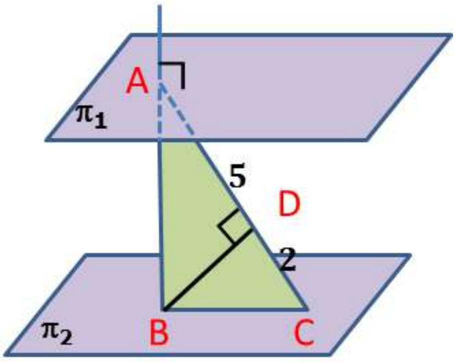
من (1) ، (2)

∴ $(AFD) // (BEC)$

مثال (3) في الشكل المقابل : $\pi_1 \parallel \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$

رسم $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوى ABC , $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$, $A \in \pi_1$

أوجد : BD



البرهان

$\because \pi_1 \parallel \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$ نظرية 7

$\therefore$ $\overline{AB}$ عمودي على كل مستقيم في π_2

$\because \overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2 \longrightarrow \overline{AB} \perp \overline{BC}$

في المثلث ABC القائم في $\hat{B}$

$\because \overline{BD} \perp \overline{BC}$ صـ132

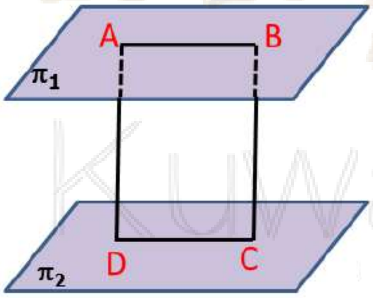
$$\therefore (BD)^2 = AD \times DC = 5 \times 2 = 10$$

$$BD = \sqrt{10}\ cm$$

حاول أن تحل (3) في الشكل المقابل : $\pi_1 \parallel \pi_2$, A,B نقطتان في π_1

، C,D نقطتان في π_2 : $\overleftrightarrow{BC} \perp \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{AD} \perp \pi_2$

اثبت أن $ABCD$ مستطيل



البرهان

$\because \overline{AD} \perp \pi_2$, $\overline{BC} \perp \pi_2$

نظرية $\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC} \longrightarrow (1)$

$\therefore$ المستقيمان يعينان مستويا $ABCD$

$\because \pi_1 \parallel \pi_2$,

و المستوي ABCD يقطع كلا من π_1 و π_2 في $\overleftrightarrow{DC}$, $\overleftrightarrow{AB}$

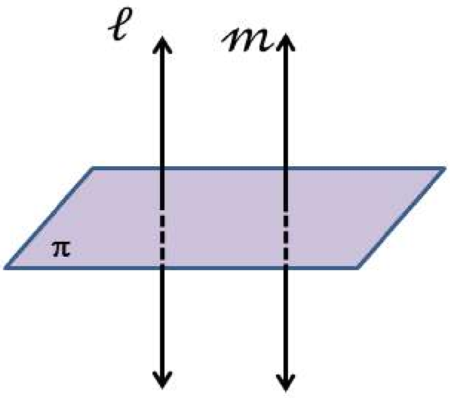
$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{DC} \longrightarrow (2)$

$\because \overline{AD} \perp \pi_2$, $\overline{DC} \subset \pi_2 \longrightarrow \overline{AD} \perp \overline{DC} \longrightarrow (3)$

من (3 , (2 , (1) ينتج أن

$ABCD$ مستطيل

نظرية (8) المستقيمان العموديان على مستو متوازيان .



$$\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi \;,\; \overleftrightarrow{m} \perp \pi \Rightarrow \overleftrightarrow{\ell} \,//\, \overleftrightarrow{m}$$

نظرية (9)

إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديا على مستو كان المستقيم الأخر عموديا على المستوى أيضا

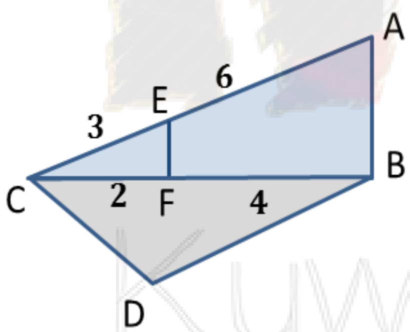
$$\overleftrightarrow{\ell} \,//\, \overleftrightarrow{m} \;,\; \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi \Rightarrow \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$

صـ 135

مثال (4) في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

وكان CE=3cm , EA=6cm , CF=2cm , FB=4cm

إثبت أن : $\overline{EF} \perp \overline{DB}$



البرهان $\because$ $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ متقاطعان

$\therefore$ يعينان مستو وحيد (ABC)

في المثلث CAB :

$$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \;,\; \frac{CF}{FB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \,//\, \overleftrightarrow{AB}$ نظرية طاليس

$\because \overline{AB} \perp (CBD)$

$\therefore \overline{EF} \perp (CBD)$ ⟶ (1)

$\overleftrightarrow{DB} \subset (CBD)$ ⟶ (2)

من (2) , (1) نستنتج أن $\overline{EH} \perp \overline{DB}$

أ / وليد البنا

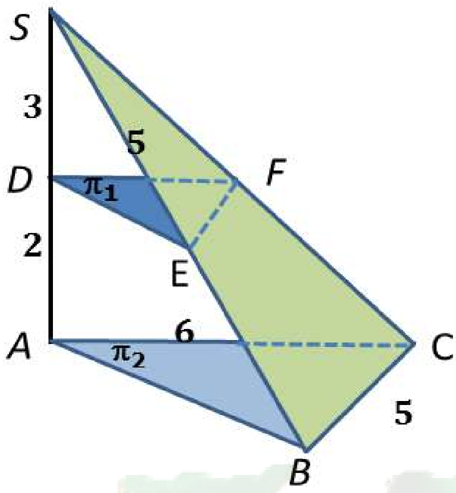
حاول أن تحل (4)

في الشكل المقابل : المستويان (ABC) , (DEF) متوازيان

إذا كان $\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$ SD=3cm , DA=2cm , BC=5cm, AC=6cm

SE = 5cm فأوجد محيط المثلث DEF

البرهان



$\pi_1 \; // \pi_2$, $\overleftrightarrow{SA} \perp \pi_2$

$\therefore \; \overleftrightarrow{SA} \perp \pi_1 \Rightarrow \overleftrightarrow{SA} \perp \overleftrightarrow{DE}$

في المثلث SDE القائم في $\hat{D}$:

C $(DE)^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow$ **DE = 4 cm**

$\because \; \overleftrightarrow{SA} \cap \overleftrightarrow{SC} = \{S\}$

$\therefore$ المستقيمان يعينان مستويا وحيدا (SAC)

يقطع π_1 ، π_2 في $\overline{DF}$, $\overline{AC}$

$\therefore \; \overleftrightarrow{DF} \; // \; \overleftrightarrow{AC}$

$\therefore \frac{SD}{SA} = \frac{DF}{AC} = \frac{SF}{SC} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{DF}{6}$

DF = 3.6 cm

و بالمثل يمكن إثبات أن $\overleftrightarrow{BC} \; // \; \overleftrightarrow{EF}$

$\frac{SF}{SC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{EF}{5} = \frac{3}{5}$

$\therefore$ EF = 3 cm

محيط المثلث DEF :

= 4 + 3.6+3 = 10.6 cm

تمارين مختارة من كراسة التمارين

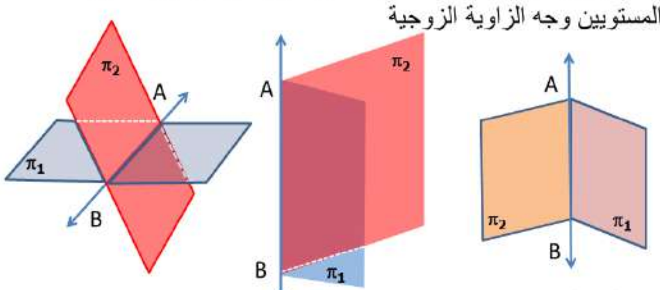
صـ .... رقم .....

صـ .... رقم .....

الزاوية بين مستويين (الزاوية الزوجية)

إذا تقاطع مستويان مختلفان في الفضاء فإنهما يتقاطعان في مستقيم و ينتج من هذا التقاطع أربع زوايا زوجية

يقسم المستقيم المشترك كل مستوى إلي نصفين و يسمى المستقيم المشترك حافة الزاوية الزوجية أو الفاصل المشترك و يسمى كل من نصفي المستويين وجه الزاوية الزوجية

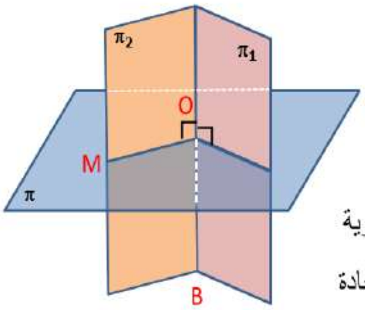


أو نرمز للزاوية الزوجية بحافتها فنكتب الزاوية $\overleftrightarrow{AB}$ أو $(\pi_1, \overleftrightarrow{AB}, \pi_2)$

الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

هي الزاوية

التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستو عمودي على حافتها



و تكون قياس الزاوية الزوجية

هو قياس إحدي زواياها المستوية

و دائما نأخذ قياس الزاوية الحادة

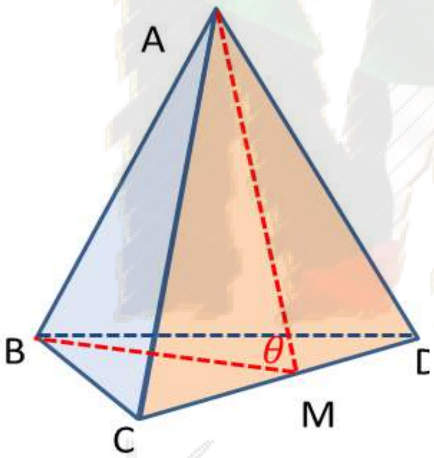
مثال (1)

صـ 139

في الشكل المقابل هرما ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع طول حرفه 8 cm ، m منتصف $\overline{DC}$

(a) حدد الزاوية المستوية بين المستويين ADC, BDC

(b) أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$



البرهان

تحدد الزاوية المستوية بين المستويين: ADC, BDC

$\overleftrightarrow{CD}$ حافة الزاوية الزوجية ← (1)

المثلث ADC متطابق الأضلاع

∵ M منتصف $\overline{CD}$ من خواص المثلث المتطابق الأضلاع

∴ $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{DC}$ حيث : $\overleftrightarrow{AM} \subset (ADC)$ ← (2)

∴ $\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{DC}$ حيث : $\overleftrightarrow{BM} \subset (BDC)$ ← (3)

نجد أن : $A\hat{M}B$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

البرهان المثلث AMD قائم الزاوية في M

من فيثاغورث : $(AM)^2 = 8^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 48$

$AM = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\ cm$, $BM = AM = 4\sqrt{3}\ cm$

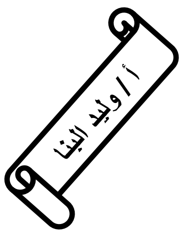
في المثلث ABM

$$(AB)^2 = (AB)^2 + (AB)^2 - 2 \cdot AM \cdot MB \cdot COS\theta$$

$$COS\theta = \frac{(AM)^2 + (MB)^2 - (AB)^2}{2 \cdot AM \cdot MB} = \frac{48 + 48 - 64}{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

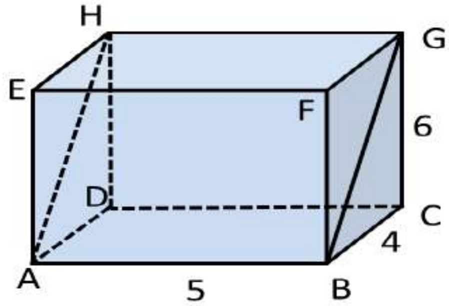
$$\theta = coS^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.5287^\circ$$

قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية حوالي $70^\circ\ 31'\ 44''$



حاول أن (1)　　　في شبه المكعب المقابل ،

أثبت أن الزاوية GBC هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين $(ABGH),(ABCD)$، ثم أوجد قياسها



البرهان　　$ABCD$ مستطيل

$\overline{AB} \perp \overline{BF}$,　$\overline{AB} \perp \overline{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (BCGF)$

$\because \overleftrightarrow{BG} \subset (BCGF)$

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{BG}$

حافة الزاوية $\overleftrightarrow{AB}$

$\overline{BC} \perp \overline{AB}$,　$\because \overleftrightarrow{BC} \subset (ABCD)$,

$\overline{BG} \perp \overline{AB}$,　$\because \overleftrightarrow{BG} \subset (BGHA)$,

$G\hat{B}C$ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين $(ABGH)$, $(ABCD)$

$$\mathbf{m(GBC)} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx \mathbf{56.31^{\circ}}$$

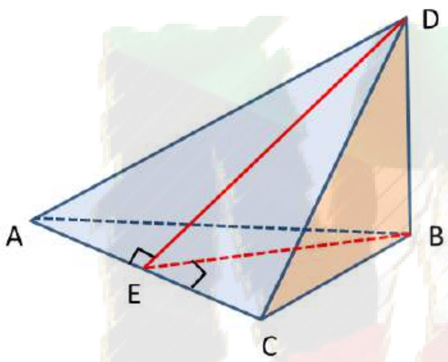
مثال (2)　في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$DB = 5cm$, $AB = 10cm$, $m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{6}$

$\overline{DE} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{BD} \perp (ABC)$

أوجد : (a) BE , DE

(b) قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC



البرهان

$\because \overline{BE} \perp \overline{AC} \Rightarrow \therefore m(B\hat{E}A) = \frac{\pi}{2}$

$\because m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{6}$

AEB مثلث ثلاثيني - ستيني

$BE = \frac{1}{2} AB = 5$ cm

$\overleftrightarrow{DB} \perp (ABC)$,　$\overleftrightarrow{BE} \subset (ABC)$

$\therefore \overline{DB} \perp \overline{BE}$

المثلث DBE قائم في $\hat{B}$ ، و متطابق الضلعين

$DE = \sqrt{2} \cdot BE = 5\sqrt{2}$ cm

البرهان　$\overleftrightarrow{AC}$ هو خط تقاطع المستويين BAC , DAC

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$　في المستوى BAC

$\overline{DE} \perp \overline{AC}$　في المستوى DAC

$\therefore$ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC هي $B\hat{E}D$

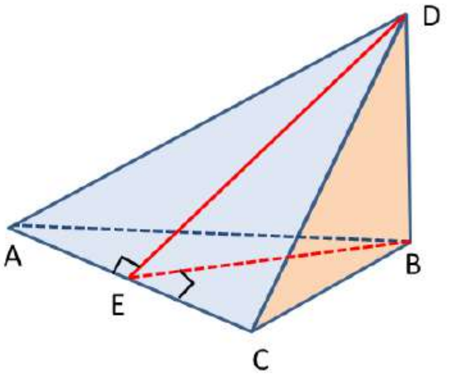
$\because$ المثلث DBE قائم الزاوية في $\hat{B}$ و متطابق الضلعين

$\because m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{4}$　　قياس الزاوية الزوجية $= \frac{\pi}{4}$

حاول أن (2) في مثال (2) أوجد قياس الزاوية بين المستويين (DAC) , (BAC) إذا كان $m(B\hat{A}C) = 45$

صـ 141

البرهان



$\overline{DE} \subset (ACD)$, $\overline{DE} \perp \overline{AC}$

$\overline{BE} \subset (ABC)$, $\overline{BE} \perp \overline{AC}$

حافة الزاوية الزوجية $\overline{AC}$

$\therefore$ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين DAC , BAC هي $D\hat{E}B$

في المثلث ABC قائم

$EB = 10(sin 45) = 5\sqrt{2}$ cm

في المثلث EBD

$\tan(D\hat{E}B) = \frac{DB}{BE} = \frac{5}{5\sqrt{2}}$

$m(D\hat{E}B) = 35^\circ\ 15'\ 51''$

صـ 142

مثال (3)

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M ، و فيه AD= 2K

أقيم $\overline{NM}$ عمودا على (ABCD) حيث N خارج مستواه بحيث

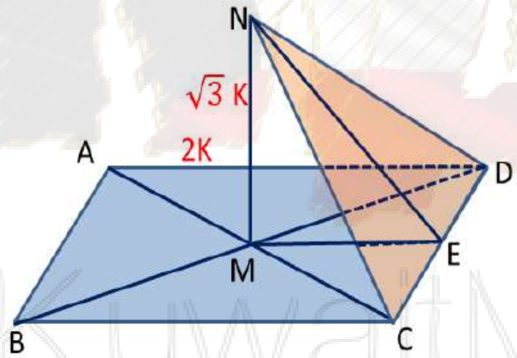
$MN = \sqrt{3}$ K أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NCD

المعطيات

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M

AD= 2K $\quad$ MN= $\sqrt{3}$ K

$\overline{MN} \perp (ABCD)$



المطلوب

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NCD

العمل

نرسم $\overline{ME}$ حيث E منتصف $\overline{CD}$

البرهان $\overline{CD}$ هي الحافة المشتركة بين المستويين $ABCD,NCD$

$\overline{MN} \perp (ABCD)$, $\overline{CD} \subset (ABCD)$

$\therefore \overline{MN} \perp \overline{CD} \longrightarrow (1)$

في المثلث CDM المتطابق الضلعين

$\because$ E منتصف $\overline{CD}$

$\therefore \overline{ME} \perp \overline{CD} \longrightarrow (2)$

من (2) , (1) نجد أن $\overline{CD} \perp (MNE)$, $\overline{NE} \subset (MNE)$

$\therefore \overline{NE} \perp \overline{CD}$

$\therefore$ $M\hat{E}N$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$

في المثلث BCD : M منتصف $\overline{BD}$ ، E منتصف $\overline{CD}$

$\therefore ME = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \cdot 2K = K$

في المثلث MEN القائم في M

$\tan(M\hat{E}N) = \frac{MN}{ME} = \frac{\sqrt{3}K}{K} = \sqrt{3}$

$m(M\hat{E}N) = 60^\circ$

قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NCD هو 60°

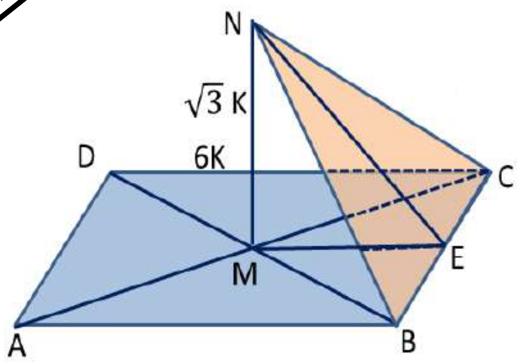
أ / وليد البنا

حاول أن (3)

صـ 142

في المثال (3) إذا كان AB = 6K ،
فأوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ABCD, NBC

المعطيات



ABCD مستطيل تقاطع قطراه في M

AD= 6K   MN= $\sqrt{3}$ K

$\overline{MN} \perp (ABCD)$

المطلوب

أوجد قياس الزاوية الزوجية
بين المستويين ABCD , NCD

العمل

نرسم $\overline{ME}$ حيث E منتصف $\overline{CB}$

البرهان

في المثلث CDM المتطابق الضلعين ∵ E منتصف $\overline{BC}$

$\therefore\ \overline{ME} \perp \overline{BC} \longrightarrow (1)$

$\because\ \overline{MN} \perp (ABCD),\ \overline{BC} \subset (ABCD)$

$\therefore\ \overline{MN} \perp \overline{BC} \longrightarrow (2)$

من (2) , (1) نجد أن $\overline{BC} \perp (NME)$ ∴

AEB مثلث ثلاثيني - ستيني $\overline{BC} \perp \overline{NE}$ ∴

$\overline{NE} \subset (NBC)\ ,\ \overline{NE} \perp \overline{BC}$

$\overline{ME} \subset (ABCD)\ ,\ \overline{ME} \perp \overline{BC}$

$N\hat{E}M$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

$\overline{NM} \perp (ABCD)\quad \therefore\ \overline{MN} \perp \overline{ME}$

$DC = AB = 6K \qquad ME = 3K$

في المثلث NME القائم في M $\tan(N\hat{E}M) = \frac{MN}{ME} = \frac{\sqrt{3}K}{3K} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

قياس الزاوية الزوجية بين المستويين هو 30° $\quad m(D\hat{E}B) = 30^\circ$

تمارين مختارة من كراسة التمارين

صـ .... رقم .....

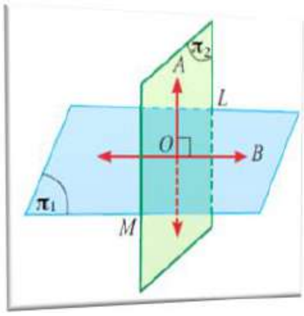
صـ .... رقم .....

أ / وليد البنا

بند 5-10

المستويات المتعامدة يكون المستويان متعامدان إذا كانت الزاوية المستوية بينهما زاوية قائمة

أى أن قياس الزاوية الزوجية بين المستويين 90°

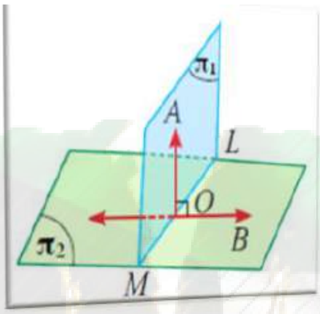


في المستوي π_1 : $\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{LM}$

في المستوي π_2 : $\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{LM}$

$\therefore \overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{OA}$ أي أن المستويين متعامدان

نظرية (10)

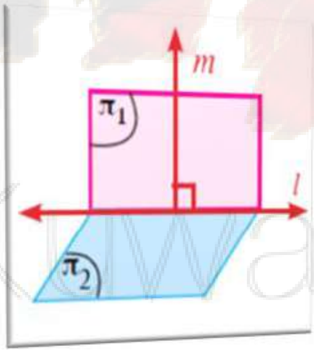


إذا كان مستقيم عموديا على مستو ، فكل مستو يمر بذلك المستقيم يكون عموديا على المستوي

$\overleftrightarrow{OA} \perp \pi_1$, $\overleftrightarrow{OA} \perp \pi_2$

$\Longrightarrow \pi_1 \perp \pi_2$

نتيجة (3)



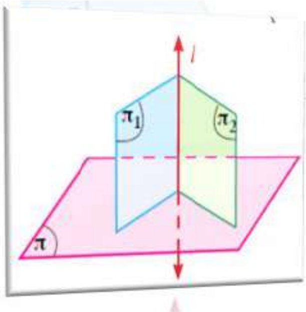
إذا تعامد مستويان و رسم في أحدهما مستقيم عمودي على خط تقاطعهما فإنه يكون عموديا على المستوي الأخر

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{\ell}$, $\pi_1 \perp \pi_2$,

$\overleftrightarrow{\ell} \perp \overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{m} \subset \pi_1$,

$\Longrightarrow \overleftrightarrow{m} \perp \pi_2$

نتيجة (4)



إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودي على مستو ثالث فإن خط تقاطع المستويين يكون عموديا على هذا المستوي الثالث

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{\ell}$, $\pi_2 \perp \pi$, $\pi_1 \perp \pi$

$\Longrightarrow \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi$

أ / وليد اليتا

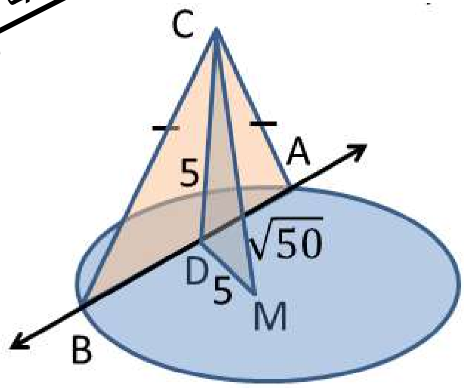
مثال (1)

في الشكل المقابل :

C نقطة خارج مستوى الدائرة التي مركزها M ، D منتصف $\overline{AB}$ ، ABC مثلث فيه CA = CB . إذا كان $DM = DC = 5cm$, $MC = \sqrt{50}$ cm

أثبت ان (a) $\overline{MC} \perp \overline{AB}$

(b) مستوي الدائرة $\perp$ (ACB)



المعطيات

$\overline{AB}$ وتر في الدائرة ، D منتصف $\overline{AB}$ ،

ABC مثلث فيه CA = CB ،

$DM = DC = 5cm$, $MC = \sqrt{50}$ cm

المطلوب

(a) $\overline{MC} \perp \overline{AB}$

(b) مستوي الدائرة $\perp$ (ACB)

البرهان

في المثلث ABC متطابق الضلعين

$\because$ D منتصف $\overline{AB}$

$\therefore \overline{CD} \perp \overline{AB} \longrightarrow (1)$

في مستوي الدائرة

$\because$ D منتصف $\overline{AB}$ ، M مركز الدائرة

$\therefore \overline{MD} \perp \overline{AB} \longrightarrow (2)$

من (2) , (1) نجد أن $\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (CDM)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{MC}$

(b) مستوي الدائرة $\perp$ (ACB)

البرهان

$\because \overline{CD} \perp \overline{AB} \longrightarrow (1)$

$$(CM)^2 = (\sqrt{50})^2 = 50$$

$$(CD)^2 + (DM)^2 = 5^2 + 5^2 = 50$$

$\because \overline{CD} \perp \overline{DM} \longrightarrow (2)$

$\therefore$ المثلث CDM قائم الزاوية في D

من (2) , (1) نجد أن : مستوي الدائرة $\perp$ $\overline{CD}$

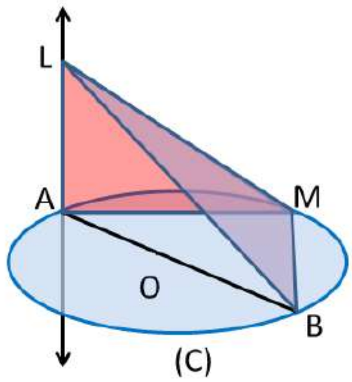
$\because \overleftrightarrow{CD} \subset (ACB)$

$\therefore$ مستوي الدائرة $\perp$ (ACB)

حاول أن تحل (1) في الشكل المقابل :

C دائرة مركزها O ، $\overline{AB}$ قطر فيها ، M نقطة تنتمي إلى الدائرة

$\overleftrightarrow{LA}$ متعامد مع مستوي الدائرة



أثبت ان

a) $\overleftrightarrow{BM} \perp$ (LAM)

b) $(LBM) \perp$ (LAM)

المعطيات

$\overline{AB}$ قطر في الدائرة ،

$\overleftrightarrow{LM} \perp$ مستوي الدائرة

المطلوب

a) $\overleftrightarrow{BM} \perp$ (LAM)

b) $(LBM) \perp$ (LAM)

a) $\overleftrightarrow{BM} \perp$ (LAM)

البرهان

$\because$ $\overline{AB}$ قطر في الدائرة

$\therefore m(A\hat{M}B) = 90^\circ$

$\therefore \overline{BM} \perp \overline{MA} \longrightarrow (1)$

$\because$ $\overleftrightarrow{LA} \perp$ مستوي الدائرة ،

$\overleftrightarrow{BM} \subset$ مستوي الدائرة

$\therefore \overline{LA} \perp \overline{BM} \longrightarrow (2)$

من (2) , (1) نجد أن : $\overleftrightarrow{BM} \perp$ (LAM)

b) $(LBM) \perp$ (LAM)

البرهان

$\because \overleftrightarrow{BM} \subset (LBM)$ $\therefore (LBM) \perp (LAM)$

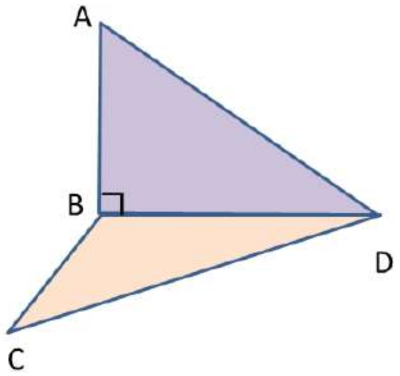
صـ 145 مثال (2)

A,B,C,D أربع نقاط ليست مستوية معا . إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \perp$ (BCD)

و كان $(AD)^2=(AB)^2+(BC)^2+(CD)^2$

أثبت ان (a) $\overline{BC} \perp \overline{DC}$

(b) $(ABD) \perp (CBD)$



البرهان (a) إثبات أن $\overline{BC} \perp \overline{DC}$

$\overleftrightarrow{AB} \perp$ (BCD) $\Longrightarrow$ $\overline{BD} \subset (BCD)$

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{BD}$

$\therefore$ ABD مثلث قائم الزاوية في B ومنه

$(AD)^2=(AB)^2+(BD)^2 \Longrightarrow (1)$

معطى $(AD)^2=(AB)^2+(BC)^2+(CD)^2 \Longrightarrow (2)$

من (2) , (1) نجد أن : $(BD)^2=(BC)^2+(CD)^2$

$\therefore$ BDC مثلث قائم الزاوية في $\hat{C}$ عكس فيثاغورث

$\therefore \overline{BC} \perp \overline{DC}$

(b) إثبات أن $(ABD) \perp (CBD)$

$\because \overline{AB} \subset (ABD)$ معطى $\because \overleftrightarrow{AB} \perp$ (BCD)

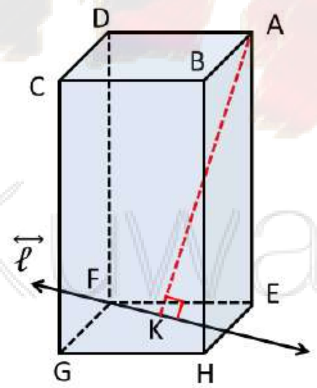
$\therefore (ABD) \perp (CBD)$

حاول أن تحل (2) في شبه المكعب $ABCDEFGH$ المقابل :

صـ 146 $\overleftrightarrow{\ell}$ مستقيم في $(EFGH)$ يمر في F ، $\overleftrightarrow{AK} \perp \overleftrightarrow{\ell}$

أثبت ان (a) $\overleftrightarrow{EK} \perp \overleftrightarrow{\ell}$

(b) $(FDK) \perp$ (AEK)



المعطيات

$ABCDEFGH$ شبه مكعب

$\overleftrightarrow{AK} \perp \overleftrightarrow{\ell}$

المطلوب أثبت ان

(a) $\overline{EF} \perp \overleftrightarrow{\ell}$

(b) $(FDK) \perp$ (AEK)

البرهان (a) إثبات أن $\overline{BC} \perp \overleftrightarrow{\ell}$

$\because \overline{AE} \perp \overline{EH}, \ \overline{AE} \perp \overline{EF}$

$\therefore \overleftrightarrow{AE} \perp (GFEH)$

$\overleftrightarrow{\ell} \subset (GFEH)$

$\therefore \overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{\ell}$

$\because \overleftrightarrow{\ell} \perp \overline{AE}, \quad \overleftrightarrow{\ell} \perp \overline{AK}$

$\therefore \overleftrightarrow{\ell} \perp (AEK)$

$\overleftrightarrow{EK} \subset (AEK) \qquad \therefore \overleftrightarrow{\ell} \perp \overline{EK}$

(b) $(FDK) \perp$ (AEK)

$\because \overleftrightarrow{FK} \subset (FDK) \qquad \therefore (FDK) \perp$ (AEK)

تمارين مختارة من كراسة التمارين

صـ .... رقم .....

صـ .... رقم .....