الوحدة العاشرة

الإحصاء والاحتمال
Statistic and Probability

مشروع الوحدة: اختيار وظيفة

١ مقدمة المشروع: هل تحلم بمتابعة دراستك الجامعية؟ أو بشراء سيارة؟ أو امتلاك منزل؟ أو تنفيذ مشروع يؤمن لك مستقبلًا زاهرًا؟

أسئلة كثيرة تعبر حتمًا في مخيلتك، ولكن كيف تجيب عنها؟

إن التفكير بادخار مبلغ من المال لفترات معينة يُمكِّن أي شخص من تحقيق أجزاء مهمة من أحلامه.

٢ الهدف: إن البدء بوضع موازنة صغيرة لمدخولك ومصروفك واستخدام برنامج **Excel** على الحاسوب وصنع قرارات عن كيفية إدارة الأموال سوف يكون الهدف الأساسي لهذا المشروع، حيث ستجد سبيلًا إلى ادخار مبلغ محدد خلال فترات من أسابيع أو من أشهر.

٣ اللوازم: حاسوب - آلة حاسبة.

٤ المتابعة:

شجع الطلاب على الإجابة عن الأسئلة التالية:

أ ما المبلغ الذي يحصل عليه الطالب؟ (من الأهل - راتب - مقابل عمل ...)

ب ما المبلغ الذي يصرفه الطالب في أسبوع؟ (طعام، نقليات، ...)

جـ ما المبلغ غير المتوقع الذي يصرفه الطالب؟ (سينما، ألعاب، مجلات، ...)

د ما المبلغ الذي ادخره الطالب؟ (أسبوعيًّا، شهريًّا، ....)

٥ التقرير: حفّز الطلاب على كتابة تقرير مفصل يبين خطوات تنفيذ المشروع مرفقًا بجدولة واضحة للدخل والمصاريف والادخار. شجعهم على تبادل الأفكار ومراجعة حساباتهم إذا كان ذلك ضروريًّا.

دروس الوحدة

تحليل البيانات	الأرباعيات	الانحراف المعياري	طرق العد	الاحتمال المشروط
١٠-١	١٠-٢	١٠-٣	١٠-٤	١٠-٥

الوحدة العاشرة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت عرض البيانات (تمثيل بياني مصور - تمثيل بياني بالأعمدة - تمثيل بياني بالنقاط المجمعة - تمثيل بياني بالخطوط - تمثيل بياني بالدائرة).
- تعلمت وصف البيانات (المتوسط الحسابي - الوسيط - المنوال - مخطط الساق والأوراق).
- استخدمت الشجرة البيانية.
- طبقت طرق العد في حالات يكون فيها الترتيب مهمًا التباديل (التراتيب) وحالات يكون فيها الترتيب غير مهم (التوافيق).
- تعلمت حساب الاحتمال.
- استخدمت التجارب لإيجاد الاحتمالات.

ماذا سوف تتعلم؟

- حساب مقاييس النزعة المركزية جبريًّا وباستخدام التكنولوجيا.
- استخدام هذه المقاييس في تحليل البيانات.
- تحديد الأرباعيات ومجمل الأعداد الخمسة في البيانات وتمثيلها بواسطة الصندوق ذو العارضتين وتفسيرها.
- دراسة تشتت البيانات من خلال علاقتها بالانحراف المعياري.
- تفسير البيانات الإحصائية.
- حل مسائل باستخدام مبدأ العد.
- حل مسائل باستخدام قوانين التوافيق والتباديل.
- الاحتمال المشروط.

المصطلحات الأساسية

تحليل البيانات - مقاييس النزعة المركزية - مجمل الأعداد الخمسة - التشتت - الأرباعيات - الصندوق ذو العارضتين - الانحراف المعياري - التباين - مبدأ العد - التباديل - التوافيق - الأحداث المستقلة - الاحتمال المشروط.

أضف إلى معلوماتك

أحداث نادرة

إن استباق خطر حدوث عطل في حاسوب أو في صاروخ يحمل قمرًا اصطناعيًّا أو في مفاعل نووي، يحتسبه العلماء آخذين بالاعتبار احتمال الخلل في كل من مكوناته.

يهدف العلماء للوصول إلى احتمالات تقرب من ١ : ١٠$^{-٦}$ أي أن احتمال حدوث عطل هو قريب من النسبة ١ إلى مليون خلال عام في مفاعل نووي. ولكن إذا كان هناك مجمع لمئة مفاعل نووي؟؟؟

في بعض الصواريخ التي تحمل أقمارًا اصطناعية يقترب احتمال حدوث عطل من $\frac{١}{١٠}$ ولكن هذه النسبة تقل كثيرًا في الرحلات المأهولة.

١٠-١

تحليل البيانات
Data Analysis

عمل تعاوني

يبين الجدول التالي أطوال القامات بالسنتيمتر عند ٣٠ طالبًا في المرحلة الثانوية.

١٧٠	١٥٨	١٦٤	١٧١	١٧٥	١٦٩	١٦٧	١٦٨	١٦٣	١٧٢
١٧٤	١٥٩	١٦٩	١٧٧	١٦٤	١٦٢	١٦٦	١٦٠	١٦٩	١٥٥
١٧٩	١٧٤	١٧١	١٧٥	١٧٠	١٧٣	١٧٥	١٦٨	١٦٥	١٦٨

أ استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد المتوسط الحسابي لأطوال هؤلاء الطلاب.

ما الوسيط لهذه البيانات؟

ب أكمل الجدول التالي:

الفئة	١٥٥-	١٦٠-	١٦٥-	١٧٠-	١٧٥-
التكرار					
مركز الفئة					

جـ ما الفئة التي تتضمن الوسيط؟

د ما الفئة التي تتضمن التكرار الأكبر؟

هـ استخدم مراكز الفئات والتكرار لتجد المتوسط الحسابي لأطوال قامات هؤلاء الطلاب.

و قارن بين النتيجة في السؤال أ والنتيجة في السؤال هـ . ماذا تلاحظ؟

سوف تتعلم

- إيجاد مقاييس النزعة المركزية جبريًّا وباستخدام التكنولوجيا
- استخدام مقاييس النزعة المركزية في تحليل البيانات

معلومة رياضية:

مركز الفئة [١٥٥، ١٦٠) هو

$\frac{١٥٥ + ١٦٠}{٢} = ١٥٧,٥$

مقاييس النزعة المركزية Measure of Central Tendency

على افتراض أن مدير شركة أو مؤسسة يريد إجراء دراسة حول رواتب الموظفين لعدة أعوام متتالية ويريد عددًا واحدًا يبيّن له متوسط الرواتب في عام معين. فما الذي يحتاج إليه؟

المتوسط الحسابي Mean

المتوسط الحسابي لـ ن من الأعداد

$س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ...، $س_ن$، هو:

$$\overline{س} = \frac{س_١ + س_٢ + س_٣ + ... + س_ن}{ن}$$

$$= \frac{١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} س_ر$$

وبصورة عامة يمكننا إيجاد المتوسط الحسابي من جدول تكراري ذو فئات باستخدام القانون التالي:

الربط بالحياة:

لإدخال بيانات ذو متغير منفرد x = {1، 2، 2، 3، 3، 3، 4، 4، 5}،

باستخدام العمود FREQ لتعيين عدد التكرارات لكل بند {xn; freq$n$}

= {1;1، 2;2، 3;3، 4;2، 5;1}، وحساب الانحراف المعياري للسكان والمتوسط.

SHIFT MODE (SETUP) ▼ 4 (STAT) 1 (ON)

MODE 3 (STAT) 1 (1 -VAR)

1 = 2 = 3 = 4 = 5 = ▼ ▶

1 = 2 = 3 = 4 = 2 =

AC SHIFT 1 (STAT) 3 (Var) 2 ($\bar{x}$) =

AC SHIFT 1 (STAT) 3 (Var) 2 (σx) =

STAT x	FREQ
3	3
4	4
5	5
	1

3

1.154700538

الناتج: المتوسط ٣ الانحراف المعياري للسكان: 1,154700538

قانون: (الطريقة المباشرة)

$$\overline{س} = \frac{ت_١ س_١ + ت_٢ س_٢ + ت_٣ س_٣ + ... + ت_ن س_ن}{ت_١ + ت_٢ + ت_٣ + ... + ت_ن}$$

$$= \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (ت_ر س_ر)}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}$$

حيث $ت_ر$ تكرار الفئة ر،

$س_ر$ مركز الفئة ر،

ن عدد الفئات

مثال (١)

يبيّن الجدول التالي الأوزان بالكيلوجرام لِـ ٦٠ طالبًا في المرحلة الثانوية.

أوجد المتوسط الحسابي لأوزان هؤلاء الطلاب.

الفئة	٥٠-	٥٥-	٦٠-	٦٥-	٧٠-	٧٥-	٨٠-
التكرار	٤	٧	١٢	١٤	١١	٩	٣

الحل:

يمكن تكوين الجدول التالي: (استخدم الآلة الحاسبة)

الفئة	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ت_ر$	$ت_ر س_ر$
٥٠-	٥٢,٥	٤	٢١٠
٥٥-	٥٧,٥	٧	٤٠٢,٥
٦٠-	٦٢,٥	١٢	٧٥٠
٦٥-	٦٧,٥	١٤	٩٤٥
٧٠-	٧٢,٥	١١	٧٩٧,٥
٧٥-	٧٧,٥	٩	٦٩٧,٥
٨٠-	٨٢,٥	٣	٢٤٧,٥
		$\sum_{ر=١}^{٧} ت_ر = ٦٠$	$\sum_{ر=١}^{٧} ت_ر س_ر = ٤٠٥٠$

$$\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{٧} (ت_ر س_ر)}{\sum_{ر=١}^{٧} ت_ر} = \frac{٤٠٥٠}{٦٠} = ٦٧,٥$$

أي أن المتوسط الحسابي لأوزان ٦٠ طالبًا هو ٦٧,٥ كيلوجرامًا.

حاول أن تحل

١ يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات ٧٠ طالبًا في مادة الرياضيات حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة.
أوجد المتوسط الحسابي لهذه الدرجات.

الفئة	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-
التكرار	٤	٨	١٤	١٥	١٣	٩	٤	٣

يمكن تبسيط الحسابات وإيجاد قيمة تقريبية أيضًا للمتوسط الحسابي.

نأخذ وسطًا فرضيًّا ف (من المستحسن أن يكون مركز الفئة الذي يقابل أكبر تكرار للبيانات).

الوسيط Median

الوسيط لعدد ن من القيم المرتبة تصاعديًّا أو تنازليًّا هو:

أ العدد الذي يتوسط القيم إذا كان العدد ن فرديًّا.

ب المتوسط الحسابي للعددين في منتصف القيم إذا كان العدد ن زوجيًّا.

أي أن الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{ن + ١}{٢}$ من الأعداد إذا كان العدد ن فرديًّا ومتوسط القيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢}$ + ١ من الأعداد إذا كان العدد ن زوجيًّا.

يمكن إيجاد الوسيط باستخدام التمثيل البياني للتكرار المتجمع الصاعد وللتكرار المتجمع النازل أو لكليهما.

مثال (٢)

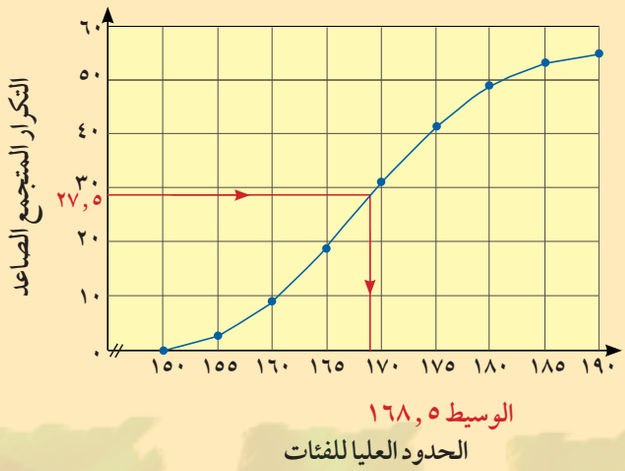
يوضح الجدول التالي التوزيع التكراري لأطوال قامات ٥٥ طالبًا في المرحلة الثانوية.

أكمل الجدول لإيجاد الوسيط باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع الصاعد.

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
١٥٠-	٣		
١٥٥-	٧		
١٦٠-	٩		
١٦٥-	١٢		
١٧٠-	١٠		
١٧٥-	٨		
١٨٠-	٤		
١٨٥-	٢		

الحل:

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
١٥٠-	٣	أقل من ١٥٥	٣
١٥٥-	٧	أقل من ١٦٠	١٠
١٦٠-	٩	أقل من ١٦٥	١٩
١٦٥-	١٢	أقل من ١٧٠	٣١
١٧٠-	١٠	أقل من ١٧٥	٤١
١٧٥-	٨	أقل من ١٨٠	٤٩
١٨٠-	٤	أقل من ١٨٥	٥٣
١٨٥-	٢	أقل من ١٩٠	٥٥



ترتيب الوسيط = $\frac{\sum ت_ر}{٢}$

ترتيب الوسيط = $\frac{٥٥}{٢}$ = ٢٧,٥

من الشكل يتضح أن الوسيط يساوي تقريبًا ١٦٨,٥ .

حاول أن تحل

٢ أكمل جدول البيانات التالي لإيجاد الوسيط لأوزان ٢٠ طالبًا بالكيلوجرام باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع الصاعد.

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٥٥-	٣		
٦٠-	٤		
٦٥-	٥		
٧٠-	٦		
٧٥-	٢		

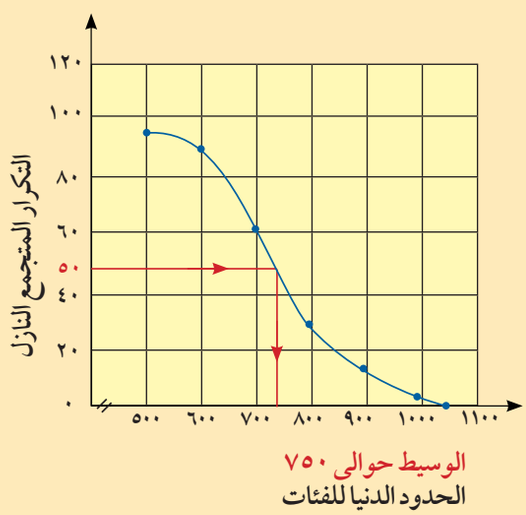
مثال (٣)

يوضح الجدول التالي توزيع الرواتب الشهرية لمئة موظف في إحدى الشركات بالدينار.
أكمل الجدول لإيجاد الوسيط باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار النازل.

الفئات	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥٠٠-	٥		
٦٠٠-	٣٠		
٧٠٠-	٣٢		
٨٠٠-	٢٠		
٩٠٠-	١٠		
١٠٠٠-	٣		

الحل:

الفئات	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥٠٠-	٥	٥٠٠ فأكثر	١٠٠
٦٠٠-	٣٠	٦٠٠ فأكثر	٩٥
٧٠٠-	٣٢	٧٠٠ فأكثر	٦٥
٨٠٠-	٢٠	٨٠٠ فأكثر	٣٣
٩٠٠-	١٠	٩٠٠ فأكثر	١٣
١٠٠٠-	٣	١٠٠٠ فأكثر	٣



ترتيب الوسيط = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠

من الشكل يتضح أن الوسيط يساوي تقريبًا ٧٥٠.

حاول أن تحل

٣ أكمل الجدول التالي لإيجاد الوسيط لدرجات ٢٥ طالبًا باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع النازل.

الفئة	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥-	٢		
٨-	٥		
١١-	٨		
١٤-	٦		
١٧-	٤		

يمكن إيجاد قيمة تقريبية للوسيط باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع الصاعد ولمنحنى التكرار المتجمع النازل معًا.

مثال (٤)

يوضح الجدول التالي الرواتب الشهرية لمئة موظف في إحدى الشركات بالدينار.

أكمل الجدول التالي لتبين التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل، ثم استخدم التمثيل البياني لهما معًا لإيجاد الوسيط.

الفئات	٥٠٠-	٦٠٠-	٧٠٠-	٨٠٠-	٩٠٠-	١٠٠٠-
التكرار	٥	٣٠	٣٢	٢٠	١٠	٣

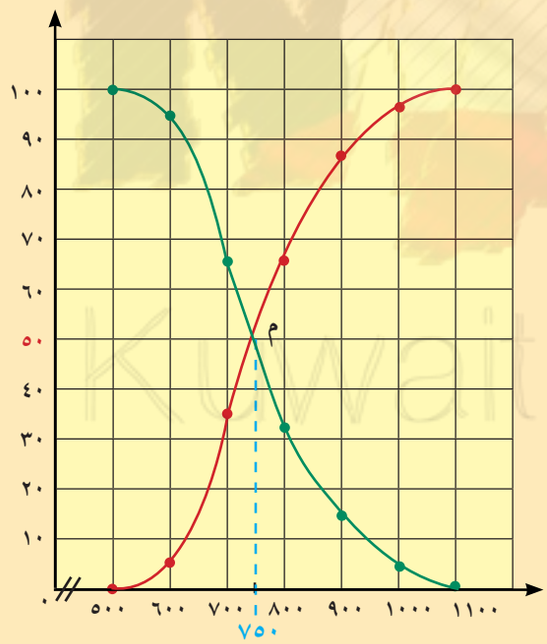
الحل:

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥٠٠-	٥	أقل من ٦٠٠	٥	٥٠٠ فأكثر	١٠٠
٦٠٠-	٣٠	أقل من ٧٠٠	٣٥	٦٠٠ فأكثر	٩٥
٧٠٠-	٣٢	أقل من ٨٠٠	٦٧	٧٠٠ فأكثر	٦٥
٨٠٠-	٢٠	أقل من ٩٠٠	٨٧	٨٠٠ فأكثر	٣٣
٩٠٠-	١٠	أقل من ١٠٠٠	٩٧	٩٠٠ فأكثر	١٣
١٠٠٠-	٣	أقل من ١١٠٠	١٠٠	١٠٠٠ فأكثر	٣

يتقاطع منحنى تكرار المتجمع الصاعد مع منحنى تكرار المتجمع النازل عند نقطة م.

العمود المرسوم من النقطة م على المحور الأفقي يعطي العدد ٧٥٠ تقريبًا.

الوسيط يساوي ٧٥٠ دينارًا تقريبًا.



حاول أن تحل

٤ أكمل الجدول التالي لدرجات ٦٠ طالبًا في اختبار الرياضيات حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة لتبين التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل، ثم استخدم التمثيل البياني لهما معًا لإيجاد الوسيط.

الفئات	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-
التكرار	٧	١٠	١٧	١٢	٨	٦

المنوال Mode

المنوال هو القيمة الأكثر تكرارًا في البيانات.

مثال (٥)

أوجد المنوال في ما يلي:

أ ٥، ٨، ٩، ٧، ٤، ٥، ٦، ١٠، ٥

ب ١٢، ١٨، ١١، ١٢، ٢٠، ١١، ١٥، ١٦، ١٧، ٢٣

جـ ٧، ٧، ٧، ٧، ٧، ٧

د ٥، ٦، ٥، ٦، ٥، ٦، ٧

الحل:

أ المنوال = ٥ (الأكثر تكرارًا)

ب يوجد منوالان: ١١، ١٢

جـ لا يوجد منوال

د يوجد منوالان: ٥، ٦

حاول أن تحل

٥ أوجد المنوال في ما يلي:

أ ٧، ٥، ١٢، ٦، ٧، ١٤

ب ١٥، ٨، ٩، ١٢، ١٥، ٨، ٧، ١٠

جـ ١، ١، ١، ١، ١، ١

د ٣، ٨، ٣، ٨، ٨، ٣، ٤، ٤

ملاحظة:

إذا لم يوجد تكرار في البيانات فلا يوجد منوال لها.

ويمكن أن يوجد أكثر من منوال لمجموعة القيم.

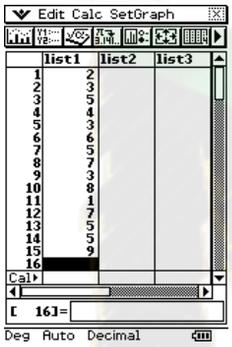
الربط بالحياة:

استخدم الآلة الحاسبة (Casio Classpad 300)

لإيجاد وسيط ومنوال البيانات التالية:

٢، ٣، ٥، ٤، ٣، ٦، ٥، ٧، ٣، ٨، ١، ٧، ٥، ٥، ٩

انقر Statistics (في قائمة التطبيقات).



استخدم list 1؛ تأكد من أن المؤشر في الموضع الأول من list 1.

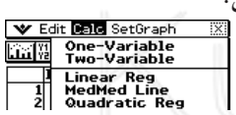
أدخل ٢ في المركز الأول، وهذا سوف يظهر في الجزء السفلي من الشاشة كما [١] = ٢.

المفتاح EXE للانتقال إلى الموضع التالي في القائمة.

اكتب قيم البيانات المتبقية في لائحة القائمة ١ اضغط على EXE بعد كل إدخال. تظهر الشاشة كافة البيانات التي يتم إدخالها في list 1.

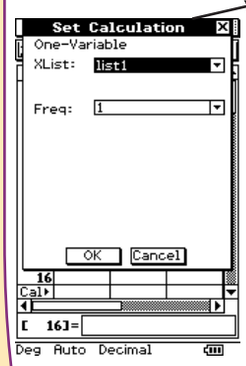
العثور على الإحصاء الوصفي للبيانات

انقر على Calc في شريط القوائم للحصول على الإحصاء الوصفي.

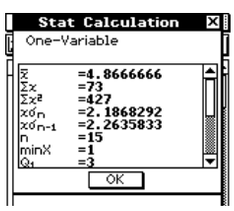


نحن نتعامل مع متغير واحد لذا انقر على One-Variable

فإن نافذة Set Calculation تتيح لك اختيار القائمة التي تحتوي على البيانات ذات الصلة.



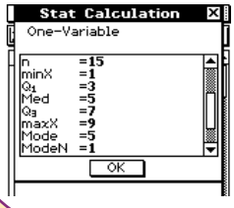
اضغط OK



جميع الإحصاءات المتوفرة وصفيًا لهذا المتغير تظهر على الشاشة:

القيمة الأولى، • •، تعني. المتوسط الحسابي the mean أي ٤,٨٦٧ (إلى ٣ منازل عشرية)

القيمة الثانية تعني: ΣX =73 أي مجموع البيانات 73



n=15 تعني أن عدد قيم مجموعة البيانات ١٥.

نتجه إلى الأسفل لإيجاد كل من الوسيط والمنوال

Med = 5 يعني الوسيط يساوي ٥

Mode = 5 يعني المنوال يساوي ٥

إيجاد المنوال للتوزيع التكراري باستخدام قانون الرافعة:

نحدد الفئة المنوالية وهي الفئة التي يقابلها أكبر تكرار.

نحدد التكرار للفئتين السابقة مباشرة واللاحقة مباشرة للفئة المنوالية على الترتيب $ك_١$ ، $ك_٢$.

المنوال يقسم الفئة المنوالية كما في الشكل بحيث إن:

$ك_١ \times س = ك_٢ \times (ف - س)$

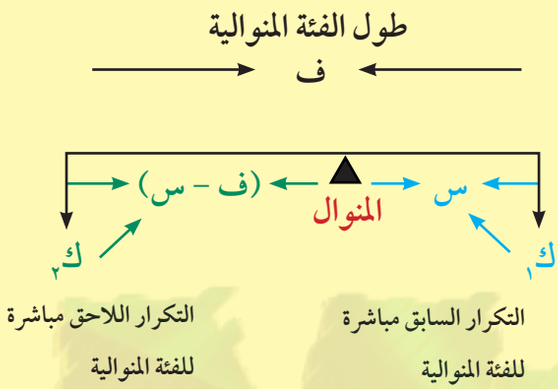
ف = طول الفئة المنوالية

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + س

هذا ما يعرف «بطريقة الرافعة» لحساب المنوال.

ويمكن وضع صيغة رياضية لقانون الرافعة على الشكل التالي:

$$\text{المنوال} = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{ك_٢}{ك_١ + ك_٢} \times ف$$



مثال (٦)

يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لعدد ساعات الدراسة الأسبوعية عند ٥٠ طالبًا.

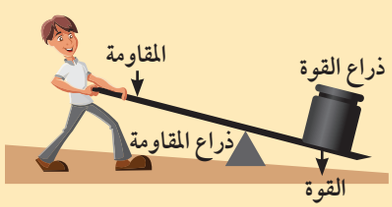
أوجد المنوال لعدد ساعات الدراسة الأسبوعية عند الطلاب .

الفئة	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-
التكرار	٧	٢٠	١٥	٦	٢

معلومة مفيدة:

قانون الرافعة:

القوة × طول ذراعها = المقاومة × طول ذراعها.



الحل:

باستخدام قانون الرافعة

الحد الأدنى للفئة المنوالية = ٤٠

ف: طول الفئة المنوالية = ٥

$ك_١$: تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية = ٧

$ك_٢$: تكرار الفئة اللاحقة للفئة المنوالية = ١٥

$ك_١ \times س = ك_٢ \times (ف - س)$

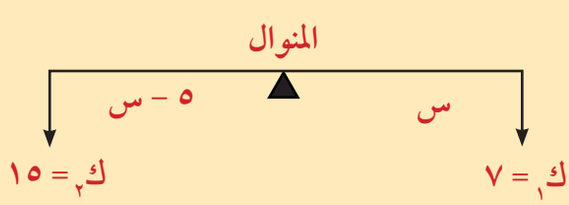
$٧ \times س = ١٥ \times (٥ - س)$

$٧ س = ٧٥ - ١٥ س$

$٢٢ س = ٧٥$

$\therefore س = \frac{٧٥}{٢٢}$

$س \simeq ٣,٤١$



المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + س

∴ المنوال ≃ ٤٠ + ٣,٤١

≃ ٤٣,٤١

وبذلك يكون منوال ساعات الدراسة أسبوعيًّا عند الطلاب ٤٣ ساعة و٢٥ دقيقة تقريبًا.

حاول أن تحل

٦ يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لمعدل الكوليسترول عند ٢٠ شخصًا.

أوجد المنوال لمعدل الكوليسترول عند هؤلاء الأشخاص باستخدام الصيغة الرياضية لقانون الرافعة.

معلومة صحية:

المعدل الطبيعي للكوليسترول في الدم في دولة الكويت:

CHOL ... 3.10 ⟶ 5.20

HDL.D ... 1.04 ⟶ 1.68

الفئة	٥,٠٤-	٥,١٧-	٥,٣٠-	٥,٤٣-	٥,٥٦-	٥,٦٩-
التكرار	١	٣	٤	٧	٤	١

يمكن إيجاد قيمة تقريبية للمنوال بيانيًّا باستخدام المدرج التكراري من خلال تحديد فئة المنوال والفئة السابقة مباشرة والفئة اللاحقة مباشرة.

مثال (٧)

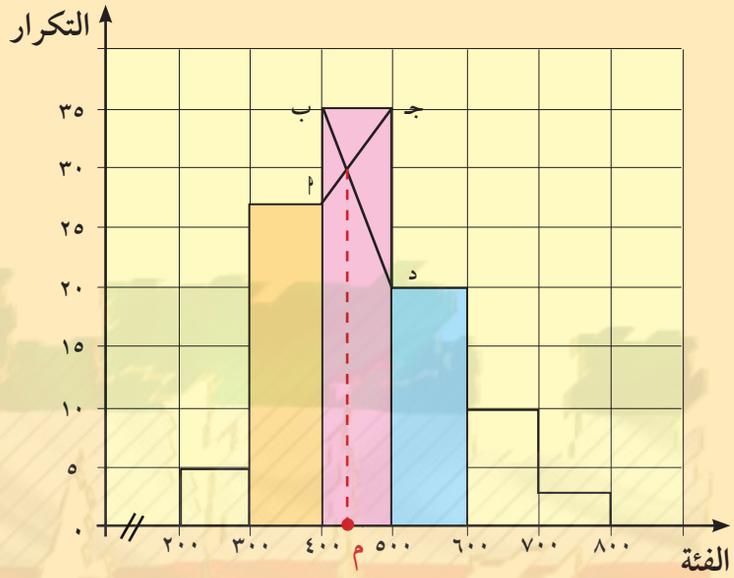
يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لرواتب الموظفين بالدينار في إحدى المؤسسات.

استخدم التمثيل البياني للمدرج التكراري لايجاد قيمة تقريبية لمنوال رواتب الموظفين.

الفئة	٢٠٠-	٣٠٠-	٤٠٠-	٥٠٠-	٦٠٠-	٧٠٠-
التكرار	٥	٢٧	٣٥	٢٠	١٠	٣

الحل:

يبين الجدول أن الفئة المنوالية هي ٤٠٠ – والفئة السابقة المباشرة هي ٣٠٠ – والفئة اللاحقة مباشرة هي ٥٠٠ –



من نقطة تقاطع $\overline{أجـ}$ مع $\overline{ب د}$ نرسم عمودًا على المحور الأفقي يقطعه في النقطة م. فنحصل على قيمة تقريبية للمنوال وهي ٤٤٥ دينارًا.

حاول أن تحل

٧ يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ٦٠ طالبًا ثانويًّا بالكيلوجرام. استخدم المدرج التكراري لإيجاد قيمة تقريبية لمنوال أوزان هؤلاء الطلاب.

الفئة	٦٠–	٦٤–	٦٨–	٧٢–	٧٦–	٨٠–
التكرار	٧	١٢	١٨	١٠	٨	٥

الأرباعيات
Quartiles

سوف تتعلم

من مقاييس التشتت
- المدى
- الأرباعيات
- الصندوق ذو العارضتين

عمل تعاوني

كانت درجات الطلاب في مادة الرياضيات حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي:

١٤، ١٥، ١٧، ٩، ٨، ١٠، ١٣، ١٤، ١٦، ١٧،

٧، ٥، ٦، ٩، ١٤، ١٩، ١٥، ١٠، ١١،

١٤، ١٠، ١٧، ١٦، ١٨، ١٠، ٦، ١٢، ١٠.

١ أوجد الفرق بين أعلى قيمة وأدنى قيمة.

٢ رتب قيم هذه البيانات تصاعديًّا.

٣ أوجد الوسيط لهذه البيانات.

٤ يقسم الوسيط قيم البيانات إلى قسمين متساويين:

أ أوجد الوسيط الأدنى لمجموعة القيم التي هي أصغر من الوسيط الذي حصلت عليه في السؤال (٣).

ب أوجد الوسيط الأعلى لمجموعة القيم التي هي أكبر من الوسيط الذي حصلت عليه في السؤال (٣).

٥ رتب تصاعديًّا القيم التالية:

القيمة الصغرى للبيانات، الوسيط الأدنى، الوسيط، الوسيط الأعلى، القيمة العظمى للبيانات.

تذكر:

الوسيط: هو القيمة من البيانات التي تأتي في المنتصف بعد ترتيبها تصاعديًّا أو تنازليًّا.

إن **مقاييس النزعة المركزية** تعطينا فكرة عن قرب أو بعد قيم البيانات عن المتوسط الحسابي أو عن الوسيط ولكنها لا توضح كيفية توزيع هذه القيم وانتشارها.

تصف مقاييس الانتشار (التشتت) مدى التغير في البيانات.

يكون التشتت صغيرًا عندما تكون مفردات البيانات متقاربة من بعضها ويكون كبيرًا عندما تكون المفردات متباعدة

فأهمية دراسة التشتت تكمن في معرفة مدى تجانس قيم هذه البيانات .

إذا كان لدينا مجموعتان من البيانات لديهما نفس المتوسط الحسابي.

فإن المجموعة التي قيم بياناتها قريبة أكثر من المتوسط الحسابي تكون الأكثر تجانسًا وانسجامًا في ما بينها.

أبسط مقاييس الانتشار هو معرفة المدى.

المدى = القيمة العظمى – القيمة الصغرى.

يوضح المدى الانتشار الكامل لقيم البيانات والذي يمكن أن يتضمن القيمة المتطرفة والتي قد تزيد المدى بشكل كبير، وبالتالي تعطي فكرة خاطئة عن انتشار قيم البيانات.

مثال (١)

أوجد المدى لقيم البيانات التالية:

أ ٧، ٨، ١٠، ١٢، ٦، ٩، ١١، ١٤

ب ١٢، ١٥، ١٠، ١١، ٢٠، ١٨، ٤٧

الحل:

أ المدى = ١٤ − ٦ = ٨

ب المدى = ٤٧ − ١٠ = ٣٧. القيمة المتطرفة ٤٧ أعطت مدًى كبيرًا جدًّا لانتشار القيم.

حاول أن تحل

١ أوجد المدى لقيم البيانات التالية:

أ ٥٧، ٥٣، ٤٠، ٤٥، ٤٨، ٥٩

ب ١٢٥، ١٧٦، ١٢٨، ١٣٠، ١٣٢، ١٢٤

لكي نتجاهل المدى الكبير الناتج عن القيمة المتطرفة في قيم البيانات نستخدم الأرباعيات والمدى الأرباعي.

الأرباعيات Quartiles

يقسم الوسيط قيم البيانات إلى نصفين وتقسم الأرباعيات قيم البيانات إلى ٤ أرباع ومنها نستنتج:

أ الأرباعي الأول $ر_١$ وهو وسيط النصف الأدنى من قيم البيانات ويسمى **الأرباعي الأدنى**.

ب الأرباعي الثاني $ر_٢$ وهو وسيط قيم البيانات ويسمى **الوسيط**.

جـ الأرباعي الثالث $ر_٣$ وهو وسيط النصف الأعلى من قيم البيانات ويسمى **الأرباعي الأعلى**.

د المدى الأرباعي = $ر_٣ - ر_١$.

تسمى (القيمة الصغرى، الأرباعي الأدنى، الوسيط، الأرباعي الأعلى، القيمة العظمى) "مجمل الأعداد الخمسة".

مثال (٢)

يبين الجدول التالي نتائج الدوري الكويتي الممتاز لكرة القدم ٢٠١١ − ٢٠١٢.

الفريق	القادسية	الكويت	العربي	السالمية	الجهراء	كاظمة	النصر	الشباب
النقاط	٥١	٤٠	٣٣	٢٥	٢٤	٢٢	١٧	١٤

أ رتب هذه القيم تصاعديًّا.

ب أوجد قيمة المدى.

جـ أوجد قيم الوسيط والأرباعيات (الأدنى والأعلى والمدى الأرباعي).

د اكتب "مجمل الأعداد الخمسة".

الحل:

أ ١٤، ١٧، ٢٢، ٢٤، ٢٥، ٣٣، ٤٠، ٥١

ب المدى: ٥١ − ١٤ = ٣٧ (نلاحظ أن المدى كبير)

جـ الوسيط ($ر_٢$) = $\frac{٢٤ + ٢٥}{٢}$ = ٢٤,٥

البيانات مع الوسيط: ١٤، ١٧، ٢٢، ٢٤، $ر_٢$ = ٢٤,٥ ، ٢٥، ٣٣، ٤٠، ٥١

الأرباعي الأدنى هو وسيط القيم: ١٤، ١٧، ٢٢، ٢٤

$ر_١$ = $\frac{١٧ + ٢٢}{٢}$ = ١٩,٥

الأرباعي الأعلى هو وسيط القيم: ٢٥، ٣٣، ٤٠، ٥١

$ر_٣$ = $\frac{٣٣ + ٤٠}{٢}$ = ٣٦,٥

المدى الأرباعي = ٣٦,٥ − ١٩,٥ = ١٧

د مجمل الأعداد الخمسة: (١٤، ١٩,٥، ٢٤,٥، ٣٦,٥، ٥١)

ملاحظة: يمكن ترتيب قيم البيانات على الشكل التالي:

١٤، ١٧، $ر_١$ = ١٩,٥، ٢٢، ٢٤، الوسيط $ر_٢$ = ٢٤,٥، ٢٥، ٣٣، $ر_٣$ = ٣٦,٥، ٤٠، ٥١

حاول أن تحل

٢ يبين الجدول التالي نتائج الدوري الكويتي لكرة القدم ٢٠١٠- ٢٠١١.

الفريق	القادسية	الكويت	العربي	كاظمة	الجهراء	النصر	السالمية	الشباب
النقاط	٥١	٤٧	٣٩	٣٨	١٩	١٦	١٤	١٢

أ أوجد الوسيط والمدى والأرباعيات والمدى الأرباعي لقيم هذه البيانات.

ب اكتب "مجمل الأعداد الخمسة".

منطط الصندوق Box Plot

هو تمثيل بياني يصف مجمل الأعداد الخمسة لقيم البيانات وهو يتكون من مستطيل مركزي (الصندوق) يمثل الأرباعي الأدنى $ر_١$ والوسيط $ر_٢$ والأرباعي الأعلى $ر_٣$ وقطعتين مستقيمتين من الجهتين تمثلان القيمة الصغرى والقيمة العظمى ونسميهما **العارضتين**.

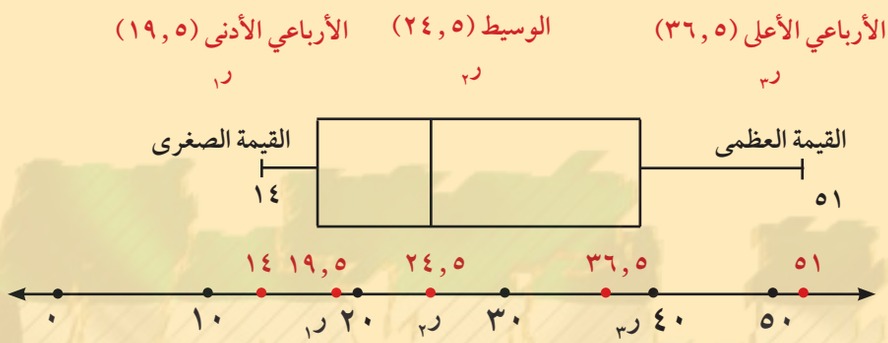
مثال (٣)

استخدم "مجمل الأعداد الخمسة" من المثال (٢) لترسم مخطط الصندوق ذي العارضتين. فسّر النتائج.

الحل:

"مجمل الأعداد الخمسة" : (١٤، ١٩,٥، ٢٤,٥، ٣٦,٥، ٥١)

مخطط الصندوق



يبين مخطط الصندوق أن المنطقة المحصورة بين الوسيط والأرباعي الأدنى هي أصغر من المنطقة المحصورة بين الوسيط والأرباعي الأعلى. أي أن الوسيط أقرب إلى الأرباعي الأدنى.

ولتفسير ذلك:

إن انتشار قيم البيانات قريبة أكثر إلى بعضها بين الوسيط والأرباعي الأدنى وتبتعد عن بعضها بين الوسيط والأرباعي الأعلى. مما يعني أن هناك مجموعتين من الأندية متقاربة في ما بينهما المجموعة الأولى بين المركز الأول والثالث ومجموعة بين المركز الرابع والأخير.

كما أن مخطط الصندوق لا يبين وجود قيمة متطرفة.

حاول أن تحل

٣ ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين للبيانات الموجودة في فقرة "حاول أن تحل (٢)". فسّر النتائج.

يمكن رسم مخططين لصندوقين لمقارنة النتائج.

مثال (٤)

تمثل المجموعة الأولى بيانات معدل مصروف المنزل الشهري على الطعام بالدولار الأمريكي في ١٢ بلدًا أوروبيًّا:

٣١٠، ٤٢٠، ٧٥٠، ٤٥٠، ٥٢٠، ٦٨٠، ٤٧٠، ٤٩٠، ٥٩٠، ٥٦٠، ٣٨٠، ٣٥٠ .

تمثل المجموعة الثانية بيانات معدل مصروف المنزل الشهري على الطعام بالدولار الأمريكي في ١٢ بلدًا عربيًّا:

١٠٥٠، ٦٥٠، ٧٠٠، ٣٧٠، ٩٠٠، ٨٠٠، ٢٢٠، ٨٣٠، ١١٠٠، ١١٩٠، ١٩٠، ٧٦٠.

١ رتب البيانات بطريقة تصاعدية.

٢ أوجد الوسيط والأرباعي الأدنى والأعلى لكل مجموعة من البيانات بالإضافة إلى القيمة الأصغر والقيمة الأكبر لكل مجموعة من البيانات.

٣ ارسم مخططين لصندوقين مستخدمًا البيانات المرتبة تصاعديًّا لكل من المجموعتين الأولى والثانية.

٤ فسّر النتائج.

الحل:

١ المجموعة الأولى بحسب الترتيب التصاعدي:

٣١٠، ٣٥٠، ٣٨٠، ٤٢٠، ٤٥٠، ٤٧٠، ٤٩٠، ٥٢٠، ٥٦٠، ٥٩٠، ٦٨٠، ٧٥٠.

المجموعة الثانية بحسب الترتيب التصاعدي:

١٩٠، ٢٢٠، ٣٧٠، ٦٥٠، ٧٠٠، ٧٦٠، ٨٠٠، ٨٣٠، ٩٠٠، ١٠٥٠، ١١٠٠، ١١٩٠ .

٢ القيمة الصغرى = ٣١٠، وسيط المجموعة الأولى = $\frac{٤٧٠ + ٤٩٠}{٢}$ = ٤٨٠ ،

الأرباعي الأدنى = ٤٠٠، الأرباعي الأعلى = ٥٧٥،

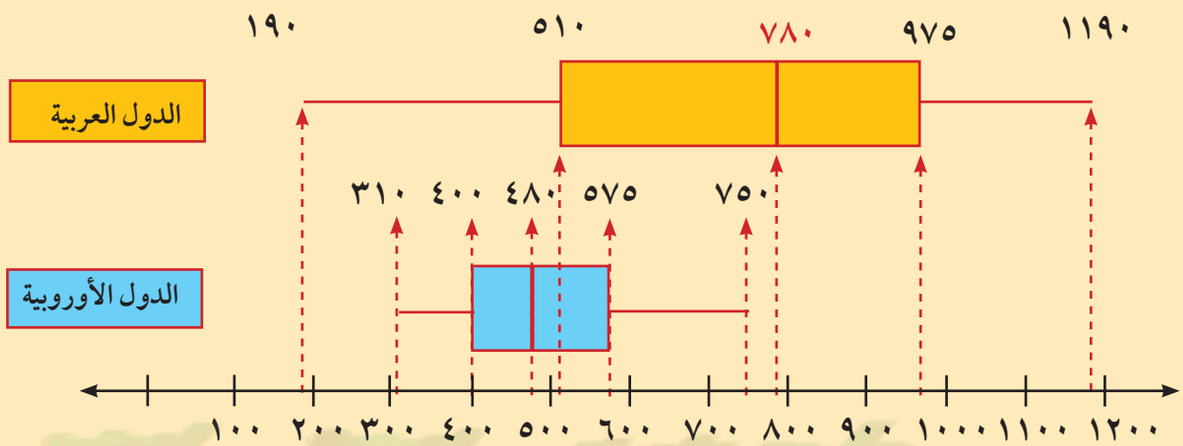
القيمة الكبرى = ٧٥٠.

القيمة الصغرى = ١٩٠، وسيط المجموعة الثانية = $\frac{٧٦٠ + ٨٠٠}{٢}$ = ٧٨٠ ،

الأرباعي الأدنى = ٥١٠ ، الأرباعي الأعلى = ٩٧٥،

القيمة الكبرى = ١١٩٠.

٣



٤ الصندوق الذي يمثل الدول العربية أطول من الصندوق الذي يمثل الدول الأوروبية ما معناه أن هناك تباعد في المصروف الشهري بين الدول العربية والدول الأوروبية على الطعام. ففي الدول الأوروبية نجد أن الوسيط أقرب إلى الأرباعي الأدنى وهو أبعد من الأرباعي الأعلى مما يدل على أن المصروف على الطعام أقرب إلى ٤٥٠ دولارًا شهريًّا علمًا أنه لا يوجد قيمًا متطرفة لأن المدى يساوي:

٧٥٠–٣١٠ = ٤٤٠.

أما في مجموعة الدول العربية الوسيط أقرب إلى الأرباعي الأعلى من الأرباعي الأدنى مما يعني أن المجتمعات العربية تنفق كثيرًا على الطعام حوالى ٧٨٠ دولارًا شهريًّا، ولكن نجد أيضًا أن هناك تفاوت كبيرفي المجتمعات العربية لأن المدى يساوي:

١١٩٠–١٩٠ = ١٠٠٠ ما يدل على التفاوت الاجتماعي في الدول العربية.

حاول أن تحل

٤ ارسم مخططين لصندوقين لقيم البيانات التالية وفسّر النتائج:

أ ٧، ٨، ٤، ٥، ٩، ١٠، ٦

ب ١٢، ١٠، ١٥، ١٦، ٢٠، ١٧، ١٨، ٣٨

١٠–٣

الانحراف المعياري
Standard Deviation

سوف تتعلم

من مقاييس التشتت:
- التباين
- الانحراف المعياري

عمل تعاوني

أراد معلم الفصل مقارنة درجات ٨ طلاب الأوائل من الشعبة (أ) والشعبة (ب) للصف العاشر حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة.

درجات الشعبة أ: ١٠، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٧، ١٩، ١٢.

درجات الشعبة ب: ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٤، ١٥، ١٦، ١٧.

أ أوجد $\overline{س}$ المتوسط الحسابي لدرجات طلاب الشعبة أ.

ب أوجد $\overline{ص}$ المتوسط الحسابي لدرجات طلاب الشعبة ب.

جـ استنادًا إلى قيم $\overline{س}$، $\overline{ص}$؛ هل يستطيع معلم الفصل أن يقرر أي مجموعة من الطلاب درجاتهم هي الأفضل؟

د أكمل الجدولين التاليين:

شعبة (أ)

$س_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^2$
١٠		
١٢		
١٢		
١٣		
١٤		
١٥		
١٧		
١٩		
المجموع		

شعبة (ب)

$ص_ر$	$ص_ر - \overline{ص}$	$(ص_ر - \overline{ص})^2$
١١		
١٢		
١٣		
١٤		
١٤		
١٥		
١٦		
١٧		
المجموع		

سوف تتعلم في هذا البند مؤشرات أخرى من مقاييس التشتت وهي التباين $ع^2$ والانحراف المعياري ع.

التباين والانحراف المعياري Variance and Standard Deviation

إذا كانت $س_1$، $س_2$، $س_3$، ... ، $س_ن$ مجموعة من القيم عددها ن حيث متوسطها الحسابي $\overline{س}$ فإن:

$$\text{التباين} = ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2}{ن}$$

ومنه الانحراف المعياري $= ع = \sqrt{ع^2}$

إذا كانت $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ...، $س_ن$ هي قيم بيانات؛ $ت_١$، $ت_٢$، $ت_٣$، .... ، $ت_ن$ هي تكرار هذه القيم على الترتيب فيكون التباين لهذه القيم هو:

$$ع^٢ = \frac{ت_١(س_١ - \bar{س})^٢ + ت_٢(س_٢ - \bar{س})^٢ + ... + ت_ن(س_ن - \bar{س})^٢}{ت_١ + ت_٢ + ... + ت_ن}$$

$$= \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر (س_ر - \bar{س})^٢}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}$$

والانحراف المعياري = $ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر (س_ر - \bar{س})^٢}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}}$

معلومة رياضية:

- $(س_ر - \bar{س})$ هي انحراف $س_ر$ عن المتوسط الحسابي.
- المتوسط الحسابي: هو ناتج قسمة مجموع قيم البيانات على عدد هذه القيم.

مثال (١)

أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات:

٤، ٦، ٨، ٥، ٣، ٧، ٢

الحل:

نوجد أولًا المتوسط الحسابي:

$$\bar{س} = \frac{٤ + ٦ + ٨ + ٥ + ٣ + ٧ + ٢}{٧} = \frac{٣٥}{٧} = ٥$$

نكون الجدول التالي:

القيمة $س_ر$	الانحراف عن المتوسط الحسابي $س_ر - \bar{س}$	مربع الانحراف عن المتوسط الحسابي $(س_ر - \bar{س})^٢$
٤	١-	١
٦	١	١
٨	٣	٩
٥	٠	٠
٣	٢-	٤
٧	٢	٤
٢	٣-	٩
		المجموع = ٢٨

$$\text{التباين } ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^٢}{ن} = \frac{٢٨}{٧} = ٤$$

التباين $ع^{٢}$ = ٤

الانحراف المعياري ع = $\sqrt{٤}$ = ٢.

حاول أن تحل

١ أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات:

٩، ٧، ٨، ٦، ٤، ٢

مثال (٢)

يمكن استخدام الآلة الحاسبة

يبين الجدول التالي عدد الساعات القصوى لعمر ٧ مصابيح كهربائية بالساعات من إنتاجين مختلفين.

إنتاج (أ)	١٠٥٠	٩١٠	١٠٠٠	١٠٣٠	٩٤٠	٩٦٠	٩٧٠
إنتاج (ب)	١١٣٠	٧٠٠	٩٧٠	٩٦٠	١٠٥٠	١١٨٠	٨٧٠

أ أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ للإنتاج (أ) والمتوسط الحسابي $\overline{ص}$ للإنتاج (ب).

ب أوجد وسيط الإنتاج (أ) ثم وسيط الإنتاج (ب).

جـ ستبين الحسابات في السؤالين (أ)، (ب) أن المتوسط الحسابي في الإنتاجين هو نفسه وأن الوسيط في الإنتاجين هو نفسه.

أوجد الانحراف المعياري $ع_{١}$ في الإنتاج (أ) والانحراف المعياري $ع_{٢}$ في الإنتاج (ب). ماذا تستنتج؟

أي إنتاج هو الأفضل؟

الحل:

أ $\overline{س} = \frac{١٠٥٠ + ٩١٠ + ١٠٠٠ + ١٠٣٠ + ٩٤٠ + ٩٦٠ + ٩٧٠}{٧} = ٩٨٠$

$\overline{ص} = \frac{١١٣٠ + ٧٠٠ + ٩٧٠ + ٩٦٠ + ١٠٥٠ + ١١٨٠ + ٨٧٠}{٧} = ٩٨٠$

ب إنتاج (أ): ٩١٠، ٩٤٠، ٩٦٠، ٩٧٠، ١٠٠٠، ١٠٣٠، ١٠٥٠
الوسيط = ٩٧٠
إنتاج (ب): ٧٠٠، ٨٧٠، ٩٦٠، ٩٧٠، ١٠٥٠، ١١٣٠، ١١٨٠
الوسيط = ٩٧٠

جـ

القيمة $س_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^2$
١٠٥٠	٧٠	٤٩٠٠
٩١٠	٧٠−	٤٩٠٠
١٠٠٠	٢٠	٤٠٠
١٠٣٠	٥٠	٢٥٠٠
٩٤٠	٤٠−	١٦٠٠
٩٦٠	٢٠−	٤٠٠
٩٧٠	١٠−	١٠٠
المجموع = ١٤٨٠٠		

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2}{ن}}$$

الانحراف المعياري في الإنتاج (أ)

$ع_١ = \sqrt{٢١١٤,٢٨٦} = ٤٥,٩٨$

$ص_ر$	$ص_ر - \overline{ص}$	$(ص_ر - \overline{ص})^2$
١١٣٠	١٥٠	٢٢٥٠٠
٧٠٠	٢٨٠−	٧٨٤٠٠
٩٧٠	١٠−	١٠٠
٩٦٠	٢٠−	٤٠٠
١٠٥٠	٧٠	٤٩٠٠
١١٨٠	٢٠٠	٤٠٠٠٠
٨٧٠	١١٠−	١٢١٠٠
المجموع = ١٥٨٤٠٠		

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2}{ن}}$$

الانحراف المعياري في الإنتاج (ب)

$ع_٢ = \sqrt{٢٢٦٢٨,٥٧} = ١٥٠,٤٣$

نلاحظ أن $ع_٢$ يساوي ٣ $ع_١$ تقريبًا.

لذا في الإنتاج (ب) التشتت عن المتوسط الحسابي كبير وبالتالي المصابيح الكهربائية في الإنتاج (أ) هي الأفضل.

معلومة:

من المتعارف عليه عند الإحصائيين أنه كلما كان الانحراف المعياري صغيرًا كلما كان تشتت قيم البيانات أقرب إلى المتوسط الحسابي، وكلما كان كبيرًا كان تشتت قيم البيانات بعيدًا عن المتوسط الحسابي.

حاول أن تحل

٢ لتكن (أ)، (ب) مجموعتين من البيانات

(أ): ١٢، ١٠، ٧، ١٥، ٨، ١٩، ٢٠

(ب): ١٤، ١٨، ١٢، ٩، ٨، ١١، ١٩

أ أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ لقيم (أ) والمتوسط الحسابي $\overline{ص}$ لقيم (ب). ماذا تلاحظ؟

ب أوجد وسيط قيم المجموعة (أ)، ثم وسيط قيم المجموعة (ب). ماذا تلاحظ؟

جـ أوجد الانحراف المعياري $ع_١$ لقيم المجموعة (أ) والانحراف المعياري $ع_٢$ لقيم المجموعة (ب). أي القيم أقل تشتتًا عن متوسطها الحسابي؟ اشرح إجابتك.

ملاحظة: لحساب التباين لقيم بيانات في جدول تكراري ذو فئات نعتبر $س_i$ هي مركز الفئة.

مثال (٣)

يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات ٦٠ طالبًا في امتحان نهاية العام الدراسي حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة.

الفئة (درجات)	٠-	٢٠-	٤٠-	٦٠-	٨٠-
التكرار	٤	٦	١٦	٢٤	١٠

أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ والتباين $ع^٢$ والانحراف المعياري ع لقيم هذه البيانات.

الحل:

المتوسط الحسابي: $\frac{\sum س_ر ت_ر}{\sum ت_ر} = \frac{٣٦٠٠}{٦٠} = ٦٠$

$\therefore \overline{س} = ٦٠$

الفئة	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ت_ر$	$س_ر ت_ر$	$(س_ر - \overline{س})$	$(س_ر - \overline{س})^٢$	$(س_ر - \overline{س})^٢ \times ت_ر$
٠-	١٠	٤	٤٠	٥٠-	٢٥٠٠	١٠٠٠٠
٢٠-	٣٠	٦	١٨٠	٣٠-	٩٠٠	٥٤٠٠
٤٠-	٥٠	١٦	٨٠٠	١٠-	١٠٠	١٦٠٠
٦٠-	٧٠	٢٤	١٦٨٠	١٠	١٠٠	٢٤٠٠
٨٠-	٩٠	١٠	٩٠٠	٣٠	٩٠٠	٩٠٠٠
		المجموع: ٦٠	المجموع: ٣٦٠٠			المجموع: ٢٨٤٠٠

التباين $= \frac{\sum (س_ر - \overline{س})^٢ ت_ر}{\sum ت_ر} = \frac{٢٨٤٠٠}{٦٠} = ٤٧٣\frac{١}{٣}$

التباين $= ع^٢ = ٤٧٣,\overline{٣}$

الانحراف المعياري: $ع = \sqrt{٤٧٣,\overline{٣}} \simeq ٢١,٧٥٦$

حاول أن تحل

٣ يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ١٠٠ طالب ثانوي (الوزن بالكيلوجرام).

الفئة	٦٠-	٦٤-	٦٨-	٧٢-	٧٦
التكرار	٥	١٨	٤٢	٢٧	٨

أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ والانحراف المعياري ع لهذه الأوزان.

مثال (٤)

إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو ع = ٦ وأن مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٥٤٠، فما عدد قيم هذه البيانات؟

الحل:

نأخذ القاعدة: $ع^{٢} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_{ر} - \bar{س})^{٢}}{ن}$

وبالتعويض: $(٦)^{٢} = \frac{٥٤٠}{ن}$

$ن = \frac{٥٤٠}{٣٦} = ١٥$

عدد قيم هذه البيانات هو ١٥.

حاول أن تحل

٤ الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو ع = ٤، ومجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٤٨٠.

فما عدد قيم هذه البيانات؟

١٠-٤

طرق العد
Methods of Counting

سوف تتعلم

- حل مسائل باستخدام مبدأ العد
- حل مسائل باستخدام قوانين التباديل أو التوافيق

دعنا نفكر ونتناقش

يقوم خالد برمي حجري نرد معًا مرة واحدة. الأول لونه أحمر والثاني لونه أخضر.
انظر الشكل أدناه.

أ مم يتألف كل ناتج؟

ب اكتب كل عناصر فضاء العينة في قائمة.

جـ ما عدد النواتج الممكنة؟

د ما النواتج التي تشكل الحدث «رمي حجري نرد معًا بحيث يكون مجموع العددين الظاهرين يساوي ٩»؟

كلنا نعرف كيف نعد، ولكننا سنتعرف في هذا الدرس على طرق للعد أكثر تطورًا.
مبدأ العد هو في صلب الجبر المتقطع، وسنستفيد منه عند دراسة الاحتمال.
العديد من المسائل البسيطة أو المعقدة تتطلب تحديد عدد عناصر مجموعة أو الطرق التي يمكن بها ترتيب أشياء أو تجميعها.

مبدأ العد Counting Principle

يمكن أن نحل بعض مسائل العد عن طريق ترتيب المجموعة التي سوف نقوم بعدها. وسوف نبدأ بمثالين يتبعان هذه الطريقة.

مثال (١) **العد عن طريق القوائم**

ما عدد الرموز ثلاثية الحروف التي يمكن تكوينها من بين الحروف: أ، ب، جـ، د من دون تكرار لأي حرف منها؟

الحل:

اكتب قائمة بالإمكانيات بشكل مرتب (متوال بحسب الترتيب):

أ ب جـ	أ ب د	أ جـ ب	أ جـ د	أ د ب	أ د جـ	(أ أولًا)
ب أ جـ	ب أ د	ب جـ أ	ب جـ د	ب د أ	ب د جـ	(ب أولًا)
جـ أ ب	جـ أ د	جـ ب أ	جـ ب د	جـ د أ	جـ د ب	(جـ أولًا)
د أ ب	د أ جـ	د ب أ	د ب جـ	د جـ أ	د جـ ب	(د أولًا)

يوجد ٤ × ٦ = ٢٤ إمكانية. يمكن كتابة ٢٤ رمزًا.

حاول أن تحل

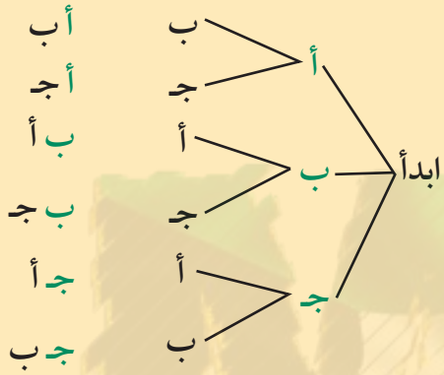
١ ما عدد الرموز التي يمكن تكوينها من حروف «نواف» من دون تكرار لأي حرف منها شرط ألّا يبدأ الرمز بـ «أ»؟

إذا كان عدد الإمكانيات صغيرًا بما يكفي، فإن **الشجرة البيانية** يمكن أن تساعد في تنظيم مهمة العد.

مثال (٢) **الشجرة البيانية**

في تجربة على سلوك الحيوان، استخدم علماء النفس نوعين من الأطعمة على التوالي كمكافأة، كل مكافأة عبارة عن واحدة من ثلاثة أنواع ممكنة. كم عدد التشكيلات المختلفة الممكنة في حال كانت أنواع الجوائز غير مكررة؟

الحل:



ميّز بين الأنواع الثلاثة من الجوائز كالتالي: أ، ب، جـ.

الشجرة البيانية إلى اليسار توضّح كل الإمكانيات. كل طريق عبر الشجرة البيانية بالاتجاه من اليمين إلى اليسار تمثل تتابعًا ممكنًا لجائزة، ولأن هناك ست طرق لذلك سيكون لدينا ست تشكيلات ممكنة.

لاحظ أن: ٣ × ٢ = ٦.

حاول أن تحل

٢ يقدم أحد المطاعم وجبة غداء مؤلفة من: سلطة أو حساء، دجاج أو سمك أو لحمة، حلويات أو فاكهة. استخدم الشجرة البيانية لإعطاء عدد الوجبات الممكنة.

يصبح استخدام مخطط الشجرة البياني غير عملي في حال كانت مجموعة الإمكانيات الجاري عدها كبيرة. في مثل هذه الحالات تستخدم طريقة الضرب التي تمت نمذجتها بالعد على الشجرة البيانية.

مبدأ العد Counting Principle

إذا كان لدينا عملية مركبة ع تتكون من عدة عمليات متتالية عددها ن وهي :

$ع_١$، $ع_٢$، $ع_٣$، ... $ع_ن$ وإذا كانت:

$ع_١$ يمكن أن تحدث بـ $ر_١$ طريقة،

$ع_٢$ يمكن أن تحدث بـ $ر_٢$ طريقة،

⋮

$ع_ن$ يمكن أن تحدث بـ $ر_ن$ طريقة،

فإن عدد الطرق التي يمكن أن يحدث بها الإجراء ط هي:

$ر_١ \times ر_٢ \times ... \times ر_ن$.

إن مفتاح حل مسائل مبدأ العد هو أن نحدد المراحل $ع_١$، $ع_٢$، ... ، $ع_ن$. وبمجرد تعريفها، يتم تحديد عدد مرات حدوث كل منها، ومن ثمّ ضرب هذه الأعداد للحصول على عدد الطرق الممكنة لحل المسألة.

مثال (٣) استخدام مبدأ العد

تبدأ لوحات السيارات في إحدى المدن بحرفين من الحروف الأبجدية يتبعهما ثلاثة أرقام. كم عدد اللوحات التي يمكن الحصول عليها؟ افترض أنه لا يوجد تكرار لأي من الحروف أو الأرقام في أي من لوحات التراخيص.

الحل:

ج ك ٥٦٠

ع: ختم اللوحة

$ع_١$: ختم الحرف الأول

$ع_٢$: ختم الحرف الثاني

$ع_٣$: ختم الرقم الأول

الأحرف — الأرقام

وهكذا لدينا:

العمليات	:	$ع_١$		$ع_٢$		$ع_٣$		$ع_٤$	$ع_٥$
عدد الطرق لاستكمال كل عملية	:	٢٨		٢٧		١٠		٩	٨
عدد طرق ختم اللوحة	=	٢٨	×	٢٧	×	١٠	×	٩	× ٨

= ٥٤٤ ٣٢٠ طريقة

يمكن الحصول على ٥٤٤ ٣٢٠ لوحة في هذه المدينة.

حاول أن تحل

٣ استخدم معطيات المثال (٣)، ما هو عدد اللوحات التي يمكن الحصول عليها إذا كان رقم الآحاد فردي؟

مثال (٤) استخدام مبدأ العد

يوجد ثمانية متسابقين في سباق ١٠٠ م جري. ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟ افترض عدم وجود تعادل بين أي متسابقين. علمًا بأن المتسابقين وصل كلًّا منهم إلى خط النهاية.

الحل:

ع: قائمة العدائين بترتيب إنهاء السباق.

$ع_١$: المتسابق الذي ينهي السباق أولًا.

$ع_٢$: المتسابق الذي ترتيبه الثاني في إنهاء السباق.

وهكذا لدينا:

العمليات	:	$ع_١$	$ع_٢$	$ع_٣$	$ع_٤$	$ع_٥$	$ع_٦$	$ع_٧$	$ع_٨$
عدد الطرق لاستكمال كل عملية	:	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١

عدد الطرق لإجراء ع = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

= ٨! = ٤٠ ٣٢٠

يوجد ٤٠ ٣٢٠ ناتجًا ممكنًا لهذا السباق.

تذكر:

مضروب ن أو

ن! هو: ن × (ن − ١) × ... × ٣ × ٢ × ١

فمثلًا: ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

٠! = ١ تُقرأ مضروب صفر = ١

حاول أن تحل

٤ اشترك ٢٠ جملًا في سباق للهجن ووصلت جميعها إلى خط النهاية في أوقات مختلفة (أي أنه لا يوجد أي تعادل).

ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟

التباديل Permutations

في المثالين السابقين، كان الترتيب مهمًّا ومعتمدًا. مثل هذا الترتيب يسمى **بالتباديل**. وعمومًا **عدد تباديل ن من الأشياء هو ن!** (مضروب ن) كما هو مبيّن في المثال (٤) وفي حالة العديد من المواقف التي تتعامل مع تباديل الأشياء تهتم فقط **بمجموعة جزئية** من الأشياء المُتضمنة. المثال (٥) يختبر موقفًا مشابهًا.

مثال (٥) إيجاد عدد التباديل

افترض أن ٣١ عضوًا من جمعية الرياضيات في مدرستك يريدون اختيار أربعة أشخاص لأربعة مناصب: رئيس، نائب رئيس، أمين السر، أمين الصندوق. حدّد كم طريقة يمكن بها الاختيار لهذه المناصب.

الحل:

اختيار الرئيس: ٣١ طريقة

اختيار نائب الرئيس: ٣٠ طريقة

اختيار أمين السر: ٢٩ طريقة

اختيار أمين الصندوق: ٢٨ طريقة

عدد الطرق التي يمكن بها اختيار الأشخاص للمناصب الأربعة هو: ٣١ × ٣٠ × ٢٩ × ٢٨ = ٧٥٥ ١٦٠

حاول أن تحل

٥ في إحدى الجمعيات الخيرية يوجد ٢٠ عضوًا يشكلون مجلس الأمناء. يريدون اختيار رئيسًا، أمينًا للسر، أمينًا للصندوق. حدّد كم طريقة يمكن بها الاختيار لهذه المناصب.

قانون التباديل Law of Permutations

عدد تباديل ن من العناصر **المختلفة** مأخوذة منها ر في كل مرة هو:

$^{ن}ل_{ر}$ = ن(ن − ١) (ن − ٢) ... (ن − ر + ١)، ر ، ن ∈ ص$_{+}$ ، ر ≤ ن

عندما ر = ٠ يعرّف $^{ن}ل_{٠}$ = ١

لاحظ: $^{ن}ل_{ر}$ = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × ... × (ن − ر + ١)

$$= \text{ن(ن − ١) × (ن − ٢) × ... × } \overbrace{\text{(ن − ر + ١)}}^{\text{ر عامل}} \times \frac{\text{(ن − ر) × ... × ٣ × ٢ × ١}}{\text{(ن − ر) × ... × ٣ × ٢ × ١}}$$

$$= \frac{\text{ن!}}{\text{(ن − ر)!}}$$

مساعدة:

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد عدد التباديل، اضغط على nPr.

قانون

$^{ن}ل_{ر} = \frac{\text{ن!}}{\text{(ن − ر)!}}$ حيث ر، ن ∈ ص$_{+}$ ، ر ≤ ن، $^{ن}ل_{٠}$ = ١

مثال (٦)

أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة.

أ $^{٦}ل_{٤}$ ب $^{١١}ل_{٣}$ جـ $^{ن}ل_{٣}$

الحل:

أ **الطريقة الأولى:**

$$^{٦}ل_{٤} = \frac{\text{٦!}}{\text{(٦ − ٤)!}} = \frac{\text{٦!}}{\text{٢!}}$$

$$= \frac{\text{٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١}}{\text{٢ × ١}} = \text{٦ × ٥ × ٤ × ٣} = \text{٣٦٠}$$

الطريقة الثانية:

نبدأ بـ ٦

$$^{٦}ل_{٤} = \text{٦ × } \underbrace{\text{٥ × ٤ × ٣}}_{\text{٤ أعداد}} = \text{٣٦٠}$$

ب $$^{١١}ل_{٣} = \frac{\text{١١!}}{\text{(١١ − ٣)!}} = \frac{\text{١١ × ١٠ × ٩ × ٨!}}{\text{٨!}} = \text{١١ × ١٠ × ٩} = \text{٩٩٠}$$

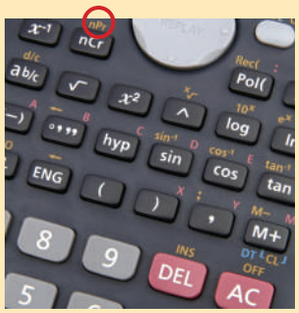
جـ $$^{ن}ل_{٣} = \frac{\text{ن!}}{\text{(ن − ٣)!}} = \frac{\text{ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × (ن − ٣)!}}{\text{(ن − ٣)!}} = \text{ن(ن − ١)(ن − ٢)}$$

حاول أن تحل

٦ أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة.

أ $ل^{٥}_{٣}$ ب $ل^{١٠}_{٤}$ جـ $ل^{ن}_{٤}$

طرق حساب $ل^{٦}_{٤}$



6 shift nPr 4 = 360

$6! \div (6-4)!$ 360

$6 \times 5 \times 4 \times 3$ 360

مثال (٧)

ما عدد الكلمات التي يمكن أن تتشكل من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية وذلك في حال عدم تكرار أي منها؟

الحل:

المطلوب في المسألة إيجاد عدد التباديل لـ ٥ حروف من ٢٨ حرفًا في الوقت نفسه.

$$ل^{٢٨}_{٥} = \frac{٢٨!}{(٢٨-٥)!} = \frac{٢٨!}{٢٣!} = ٢٨ \times ٢٧ \times ٢٦ \times ٢٥ \times ٢٤$$

$$= ١١\,٧٩٣\,٦٠٠$$

يوجد ١١ ٧٩٣ ٦٠٠ كلمة مكونة من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية.

مساعدة:

ترتيب الحروف مهم في كتابة الكلمات. فكلمة كتاب تختلف عن كلمة كاتب.

حاول أن تحل

٧ ما عدد الأعداد التي يمكن أن تتشكل من ٤ أرقام من أرقام النظام العشري بدون الصفر وذلك في حال عدم تكرار أي رقم؟

التوافيق Combinations

عندما تريد إيجاد عدد المجموعات الجزئية والمكون كل منها من ر عنصر، والتي يمكن اختيارها من مجموعة مكونة من ن عنصر (ر ≤ ن) دون الاعتماد على الترتيب فنحن نحسب التوافيق.

مثال (٨)

ما عدد اللجان المكونة من ثلاثة أشخاص، والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص؟

الحل:

سَمِّ الأشخاص الأربعة أ، ب، جـ، د ثم قم بإعداد قائمة كتلك الموجودة في المثال (١) وذلك كالتالي:

(لاحظ أن هناك $ل^{٤}_{٣}$ = ٢٤ ترتيبًا ممكنًا لاختيار ثلاثة منها).

أ ب جـ	أ ب د	أ جـ ب	أ جـ د	أ د ب	أ د جـ
ب أ جـ	ب أ د	ب جـ أ	ب جـ د	ب د أ	ب د جـ
جـ أ ب	جـ أ د	جـ ب أ	جـ ب د	جـ د أ	جـ د ب
د أ ب	د أ جـ	د ب أ	د ب جـ	د جـ أ	د جـ ب

لاحظ أن لجنة معينة مكونة من ثلاثة أشخاص أ، ب، جـ تظهر ٣! = ٦ مرات في القائمة.

أ ب جـ أ جـ ب ب أ جـ ب جـ أ جـ أ ب جـ ب أ

تشكل هذه الترتيبات الستة مجموعة واحدة لذلك فإن إجمالي أعداد اللجان مساو لـ $^{٤}ل_{٣}$ ترتيبًا ممكنًا مقسمًا على ٣! ترتيبًا مختلفًا لكل لجنة.

عدد اللجان $= \frac{^{٤}ل_{٣}}{٣!} = \frac{\frac{٤!}{(٤-٣)!}}{٣!} = \frac{٤!}{(٤-٣)!\,٣!} = \frac{٤!}{١!\,٣!} = ٤$

حاول أن تحل

٨ ما عدد اللجان المكونة من شخصين والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص؟

وبصفة عامة، عدد التوافيق المكوّن كل منها من ر عنصر والمختارة من بين مجموعة مكونة من ن عنصر يمكن إيجادها كالآتي:

عدد التوافيق $= \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!} = \frac{ن!}{(ن-ر)!\,ر!}$

تعريف: قانون التوافيق

إذا كان ن، ر عددان صحيحان موجبان حيث ن ≥ ر، فإن:

عدد التوافيق المكونة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من الأشياء هو:

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!\,ر!}$$

ملاحظة:

يستخدم الرمز $^{ن}ق_{ر}$ للتعبير عن عدد التوافيق.

ملاحظات:

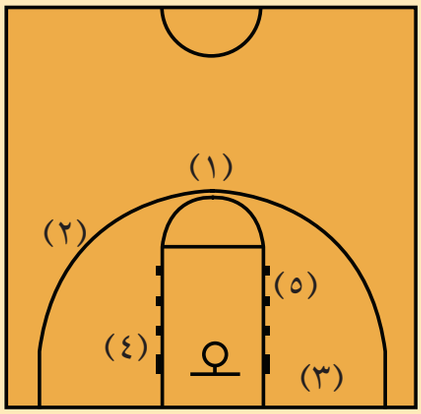
(١) عندما ر = ٠ يُعرَّف $\binom{ن}{٠} = ١$

(٢) $\binom{ن}{ن} = ١$

مثال (٩)

إذا كان فريق كرة سلة يتكوّن من ١٢ لاعبًا.

فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من خمسة لاعبين من بين لاعبي هذا الفريق (يمكن لأي لاعب اللعب في كل المراكز) ؟



(١) لاعب الهجوم الخلفي
(٢) المدافع مسدد الهدف
(٣) لاعب الهجوم صغير الجسم
(٤) لاعب الهجوم قوي الجسم
(٥) لاعب الوسط

الحل:

يجب أن نوجد $\binom{١٢}{٥}$ وهي عدد الفرق المختلفة المكونة من ٥ لاعبين والذين يمكن اختيارهم من ١٢ لاعبًا.

$$\binom{١٢}{٥} = \frac{!١٢}{!(١٢-٥)!٥} = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٧٩٢$$

عند استخدام الآلة الحاسبة 12 shift nCr 5 = 792

يوجد ٧٩٢ فريقًا مختلفًا، كل فريق مكون من ٥ لاعبين وتم اختيارهم من بين ١٢ لاعبًا.

حاول أن تحل

٩ إذا كان فريق كرة قدم يتكوّن من ٢٠ لاعبًا. فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من ١١ لاعبًا من بين لاعبي هذا الفريق؟ (يمكن لأي لاعب اللعب في أي مركز)

تستطيع العديد من الآلات الحاسبة أن تحسب $^{١٢}ق_{٥}$ مباشرة من دون ضرورة لإيضاح الخطوات الوسطية. وعلى الرغم من ذلك فنحن نوضحها هنا لأنها قد تساعدك في بعض الأحيان التي تكون فيها الأعداد كبيرة بحيث يصعب أن تعطي إجابة دون استخدام الآلة الحاسبة. وفي حالة الأعداد الكبيرة جدًّا قد لا تساعدك بعض الآلات الحاسبة مثل $^{١٠٠٠}ق_{١٠٠}$. فطبق القانون.

تستخدم الخطوات التالية لإيجاد التوافيق بواسطة الآلة الحاسبة:

ن nCr ر =

مثال (١٠)

من أجل اختيار لوائح المرشحين للانتخابات النيابية، يجب اختيار ١٠ مرشحين من بين ٥١ مرشحًا.

ما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن تكوينها؟

الحل:

إن الترتيب أثناء اختيار اللائحة غير مطلوب، إذًا هذه مسألة تتعلق بالتوافيق لإيجاد $^{٥١}ق_{١٠}$.

$$^{٥١}ق_{١٠} = \frac{!٥١}{!٤١ \times !١٠} = ١٢\,٧٧٧\,٧١١\,٨٧٠$$

عند استخدام الآلة الحاسبة 51 nCr 10 = $1,2777711870.10^{10}$

عدد اللوائح المختلفة الممكنة هو ١٢ ٧٧٧ ٧١١ ٨٧٠

حاول أن تحل

١٠ أثناء الإعداد لزيارة المتحف الوطني، أراد منظمو الزيارة إعداد لوائح للطلاب لاستخدام حافلات تتسع كل منها ١٥ طالبًا. علمًا بأن عدد الطلاب هو ٦٠ طالبًا، فما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن إعدادها لهذه الزيارة؟

مثال (١١)

في كل مما يلي حدّد ما إذا كان المثال يبيّن تبديلًا أو توفيقًا واحسب عدد الطرق في كل حالة.

أ اختيار رئيس، نائب رئيس، أمين سر من بين ٢٥ عضوًا في نادي القراءة.

ب اختيار ٥ حبات بطاطا من كيس يحتوي على ١٢ حبة لإعداد وجبة غذائية.

جـ وضع معلم مخططًا يبيّن مقاعد ٢٢ طالبًا في غرفة بها ٢٥ مقعدًا.

د اختيار ٤ أبيات من قصيدة شعرية مكونة من ١١ بيتًا لكتابتها وتعليقها في غرفة الفصل.

الحل:

أ الترتيب مهم في الاختيار ∴ تباديل. $^{٢٥}ل_{٣} = ١٣٨٠٠$

ب الترتيب غير مهم في الاختيار ∴ توافيق. $^{١٢}ق_{٥} = ٧٩٢$

جـ الترتيب مهم ∴ تباديل. $^{٢٥}ل_{٢٢} \simeq ٢,٥٨٥٢ \times ١٠^{٢٤}$

د الترتيب غير مهم ∴ توافيق. $^{١١}ق_{٤} = ٣٣٠$

حاول أن تحل

١١ في ما يلي، حدّد ما إذا كان المثال يبيّن تبديلًا أو توفيقًا.

أ اختيار ٣ طلاب من الصف العاشر للمشاركة في مسابقة تلاوة القرآن.

ب مراكز المشاركين الثلاثة في مسابقة تلاوة القرآن.

١٠–٥

الاحتمال المشروط
Conditional Probability

سوف تتعلم

- الحدث المستقل
- الحدث التابع
- الاحتمال المشروط

دعنا نفكر ونتناقش

تتألف لعبة الدومينو من بلاطات على شكل متوازي مستطيلات، دُوّن على أحد أوجهها نقاط عددها يتراوح من الصفر (فراغ) إلى ٦.

١ أ كوّن جدولًا يبيّن الأزواج الممكنة. ما عددها؟

ب ما عدد النواتج المؤلفة من رقمين متساويين؟

٢ تم سحب بلاطة رقماها غير متساويين، ما احتمال أن يكون مجموع الرقمين يساوي ٥؟

٣ سحبت بلاطة رقماها متساويان. ما احتمال أن يكون مجموع الرقمين أصغر من ٥؟

في كل تجربة عشوائية، نهتم أولًا بمعرفة مجموعة النواتج الممكنة والتي تسمى **فضاء العينة (ف)**. كل **حدث** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

إذا كانت جميع نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث أ هو:

$$\text{ل(الحدث أ)} = \frac{\text{عدد نواتج الحدث أ}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

أي أن: $\text{ل(أ)} = \frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$

يكتب الاحتمال بصورة كسر عشري أو كسر أو نسبة أو نسبة مئوية.

مثال (١)

في لعبة «رمي حجري نرد منتظمين ومتمايزين» والتجربة هي ملاحظة الوجه العلوي لكل من الحجرين

أ ممّ يتألف كل ناتج؟ اكتب فضاء العينة. وما عدد النواتج الممكنة؟

ب مثل فضاء العينة بيانيًّا.

جـ ما احتمال الحدث أ: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ٤»؟

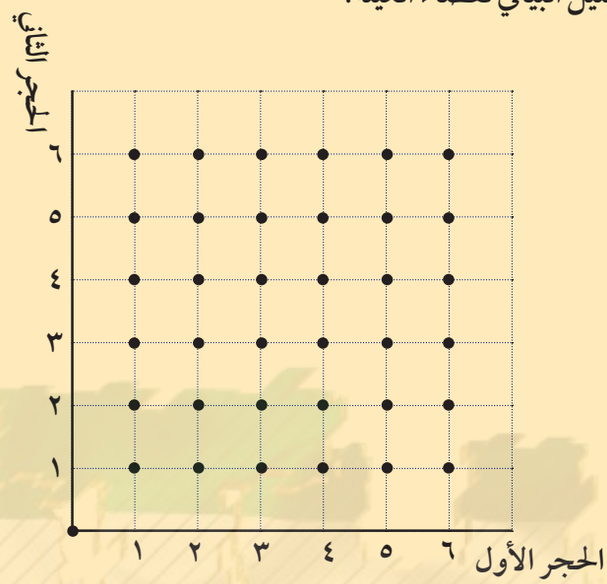
الحل:

أ يتألف كل ناتج من زوج مرتب (م، ن) حيث ١ ≤ م ≤ ٦، ١ ≤ ن ≤ ٦. م، ن ∈ ص$_+$.

ف = {(١، ١)، (١، ٢)، ... ، (١، ٦)،
(٢، ١)، (٢، ٢)، ... ، (٢، ٦)،
⋮
(٦، ١)، (٦، ٢)، ... ، (٦، ٦)}

وبتطبيق مبدأ العد، عدد النواتج هو ٦ × ٦ = ٣٦ ناتجًا. وكل هذه النواتج لها فرصة الظهور نفسها.

ب التمثيل البياني لفضاء العينة.



جـ يتألف الحدث أ من ثلاثة نواتج: {(١، ٣)، (٣، ١)، (٢، ٢)}.

$$ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{٣}{٣٦} = \frac{١}{١٢}$$

حاول أن تحل

١ في المثال (١): أ ما احتمال الحدث «ب»: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ٧»؟

ب ما احتمال الحدث «جـ»: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ١٣»؟

جـ ما احتمال الحدث «د»: «ظهور عددين أحدهما مربعًا للآخر»؟

ولأن أي حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة، فإن عدد النواتج في حدث ما يكون دائمًا أصغر من أو يساوي عدد نواتج فضاء العينة. لذلك فإن احتمال وقوع حدث ما ، هو عدد ينتمي إلى الفترة [٠، ١].

خواص الاحتمال لحدث ما

ليكن أ حدث في فضاء عينة ف منته وغير خالٍ فإن:

١ ٠ ≤ ل(أ) ≤ ١

٢ إذا كان أ = { } إذًا ل(أ) = ٠ ويسمى أ **حدثًا مستحيلًا**.

٣ إذا كان أ = ف إذًا ل(أ) = ١ ويسمى أ **حدثًا مؤكدًا**.

٤ مجموع احتمالات جميع النواتج في فضاء العينة يساوي ١ .

معلومة مفيدة:

فضاء العينة، في تجربة رمي حجري نرد منتظمين ومتمايزين هو نفسه فضاء العينة في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتاليتين.

مثال (٢)

في تجربة رمي حجري نرد متمايزين معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما، الحدث أ هو «مجموع العددين الظاهرين هو ١٣» . فما احتمال وقوع الحدث أ؟

الحل:

نعلم أن عدد النواتج الممكنة هو ٣٦

وبما أن أكبر عدد هو ٦ في كل حجر فإن المجموع ١٣ لا يمكن أن يحصل

بالتالي فإن عدد النواتج في الحدث أ هو صفر إذًا ل(أ) = $\frac{٠}{٣٦}$ = ٠

وهذا الحدث هو حدث مستحيل.

ملاحظة:

إذا لم يذكر نوع حجر النرد فهذا يعني أنه منتظم.

حاول أن تحل

٢ في تجربة رمي حجري نرد متمايزين معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما، كان الحدث ب «الحصول على مجموع أصغر من ١٣»، فما احتمال وقوع الحدث ب؟

في الكثير من الحالات نستخدم التباديل أو التوافيق لإيجاد الاحتمال.

مثال (٣)

اشترى ناصر علبة حلوى تحتوي على ١٢ قطعة بينها ٤ قطع بالشوكولاتة. يريد ناصر أخذ قطعتين من العلبة معًا عشوائيًّا. فما احتمال أن يختار قطعتين بالشوكولاتة؟

الحل:

التجربة: اختيار قطعتي حلوى من بين ١٢ قطعة دون اعتماد الترتيب.

∴ عدد نواتج التجربة ن (ف) = $\binom{١٢}{٢}$ = $\frac{ل^{١٢}_{٢}}{٢!}$ = $\frac{١٢ \times ١١}{٢ \times ١}$ = ٦٦ ناتجًا.

الحدث أ: اختيار قطعتين بالشوكولاتة، دون اعتماد الترتيب

∴ عدد نواتج الحدث أ = ن (أ) = $\binom{٤}{٢}$ = $\frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١}$ = ٦ نواتج.

∴ ل(أ) = $\frac{ن (أ)}{ن (ف)}$ = $\frac{٦}{٦٦}$ = $\frac{١}{١١}$.

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، ما احتمال اختيار قطعتي حلوى عشوائيًّا ليستا بالشوكولاتة؟

مخطط ڤن Venn Diagram

تساعد النماذج الهندسية أحيانًا على فهم المسائل وإيجاد الاحتمالات.

مثال (٤) مخطط ڤن (مثال إثرائي)

في إحدى المدارس الثانوية يهتم ٥٤٪ من الطلاب بالأنشطة الكشفية، ٦٢٪ بالرياضة.
نصف الذين يهتمون بالأنشطة الكشفية يهتمون أيضًا بالرياضة.

أ ما النسبة المئوية للطلاب الذين يهتمون فقط بالرياضة؟

ب اختير طالب عشوائيًّا من طلاب هذه المدرسة، فما احتمال ألا يهتم بالرياضة؟

الحل:

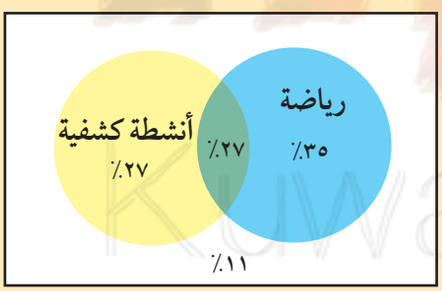
لترتيب المعطيات وعرضها نختار مستطيلًا يمثل فضاء العينة (كل طلاب المدرسة) ونرسم داخل المستطيل منطقتين متداخلتين لتمثيل الطلاب الذين يهتمون بالأنشطة الكشفية والطلاب الذين يهتمون بالرياضة.

ندوّن داخل هذه المناطق النسب المئوية كما يلي:

المنطقة المتداخلة (الخضراء) تتضمن نصف الطلاب المهتمين بالأنشطة الكشفية والمهتمين بالرياضة: ٠,٥ × ٥٤٪ = ٢٧٪

المنطقة الصفراء تتضمن: (٥٤ − ٢٧)٪ = ٢٧٪

المنطقة الزرقاء تتضمن: (٦٢ − ٢٧)٪ = ٣٥٪



المنطقة البيضاء تتضمن: [١٠٠ − (٢٧ + ٢٧ + ٣٥)]٪ = ١١٪

يمكننا الآن الإجابة عن الأسئلة بقراءة مخطط ڤن.

أ النسبة المئوية للطلاب الذين يهتمون فقط بالرياضة = ٣٥٪

ب احتمال ألا يهتم الطالب بالرياضة = ٢٧٪ + ١١٪ = ٣٨٪ أو ٠,٣٨

• حل آخر: ١ − ٠,٦٢ = ٠,٣٨

حاول أن تحل

٤ يقرأ ٨٤٪ من طلاب الصف العاشر كتب مطالعة باللغة العربية، ويقرأ ١٨٪ من طلاب هذا الصف كتبًا باللغة الإنكليزية، ويقرأ ١٥٪ من الطلاب كتبًا باللغتين.

اختير طالب عشوائيًّا من طلاب هذا الفصل،

أ ما احتمال أن يكون ممن يقرأون كتبًا باللغة الإنكليزية فقط؟

ب ما احتمال أن يكون هذا الطالب ممن لا يقرأون كتبًا باللغتين معًا؟

العمليات على الأحداث واحتمالاتها:

تقاطع حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ، ب في آن معًا ويرمز إليه بـ أ ∩ ب.

اتحاد حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ أو ب ويرمز إليه بـ أ ∪ ب.

الحدثان أ، ب هما متنافيان (Incompatible) إذا لم يشتركا في أي عنصر أي أ ∩ ب = ∅.

متمم الحدث أ هو $\bar{أ}$ (complement) الذي يتألف من كل النواتج الموجودة في فضاء العينة وغير الموجودة في أ.

قاعدة الاحتمال لاتحاد حدثين:

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

ومنها ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

قاعدة الاحتمال لمتمم الحدث أ:

ل($\bar{أ}$) = ١ − ل(أ)

قاعدة الاحتمال لحدثين متنافيين:

إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب).

مثال (٥)

إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان:

ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٤ ، أوجد كلًّا من:

١ ل(أ ∪ ب) ٢ ل($\bar{أ}$)

الحل:

١ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٧ + ٠,٤ − ٠,٤ = ٠,٧.

٢ ل($\bar{أ}$) = ١ − ل(أ)

= ١ − ٠,٧ = ٠,٣

حاول أن تحل

٥ إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة، وكان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٦ أوجد كلًّا من:

أ ل(أ ∩ ب)

ب ل($\bar{ب}$)

مثال (٦)

إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان:

ل($\overline{أ}$) = ٠,٢ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٩ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٤ ، أوجد ل($\overline{ب}$)، ل($\overline{أ ∩ ب}$).

الحل:

∵ ل($\overline{أ}$) = ١ − ل(أ)

∴ ل(أ) = ١ − ل($\overline{أ}$) = ١ − ٠,٢ = ٠,٨

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

٠,٩ = ٠,٨ + ل(ب) − ٠,٤

ل(ب) = ٠,٩ − ٠,٨ + ٠,٤

= ٠,٥

ل($\overline{ب}$) = ١ − ل(ب)

= ١ − ٠,٥ = ٠,٥

ل($\overline{أ ∩ ب}$) = ١ − ل(أ ∩ ب) = ١ − ٠,٤ = ٠,٦

حاول أن تحل

٦ إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة، وكان ل(أ) = ٠,٥ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

أوجد ل($\overline{أ ∪ ب}$).

مثال (٧)

يبين الجدول المزدوج التالي توزيعًا للأشخاص العاملين في إحدى المستشفيات:

المهنة / الجنس	رجل	امرأة	المجموع
طبيب	٢٨	١٤	٤٢
ممرض	٢٠	٢٣٢	٢٥٢
تقني-إداري	٢٢	٣٤	٥٦
المجموع	٧٠	٢٨٠	٣٥٠

تم اختيار شخص عشوائيًّا من بين ٣٥٠ شخصًا عاملًا في المستشفى .

١ أوجد احتمال كل حدث من الأحداث التالية:

أ: «الشخص ممرض» ب: «الشخص امرأة» جـ: «الشخص طبيب»

٢ أوجد ل($\overline{أ}$).

٣ أ ليكن هـ الحدث: «الشخص يكون امرأة وطبيب» ، احسب ل(هـ) باستخدام الجدول.

ب اكتب مستخدمًا الحدثين ب ، جـ الحدث« و»: «الشخص يكون امرأة أو طبيب»، ثمّ احسب ل(و).

٤ احسب ل(أ ∪ جـ).

الحل:

١ اختيار الشخص عشوائيًّا يعني أن نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها ومنها :

ل(أ) = $\frac{٢٥٢}{٣٥٠}$ = ٠,٧٢ ، ل(ب) = $\frac{٢٨٠}{٣٥٠}$ = ٠,٨ ، ل(جـ) = $\frac{٤٢}{٣٥٠}$ = ٠,١٢

٢ ل($\overline{أ}$) = ١ − ل(أ) = ١ − ٠,٧٢ = ٠,٢٨

٣ أ نحسب احتمال الحدث ب ∩ جـ، بحسب الجدول الحدث هـ = ب ∩ جـ لديه ١٤ ناتجًا

وبالتالي: ل(هـ) = ل(ب ∩ جـ) = $\frac{١٤}{٣٥٠}$ = ٠,٠٤

ب نحسب احتمال الحدث ب ∪ جـ، حيث إن ب ، جـ ليسا حدثين متنافيين

ل(و) = ل(ب ∪ جـ) = ل(ب) + ل(جـ) − ل(ب ∩ جـ)

= ٠,٨٠ + ٠,١٢ − ٠,٠٤ = ٠,٨٨

٤ أ ، جـ هما حدثان متنافيان إذًا: ل(أ ∪ جـ) = ل(أ) + ل(جـ) = ٠,٧٢ + ٠,١٢ = ٠,٨٤

حاول أن تحل

٧ في فضاء عينة ف لدينا حدثان أ ، ب متنافيان حيث ل(أ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٥ .

أ احسب ل(أ ∪ ب).

ب احسب ل($\overline{أ ∪ ب}$).

الأحداث المستقلة Independent Events

يكون الحدثان مستقلين إذا كان وقوع (أو عدم وقوع) أحدهما لا يؤثر على وقوع (أو عدم وقوع) الآخر. فمثلًا، في تجربة عشوائية عند رمي عملة معدنية مرتين وملاحظة الوجه العلوي فإن الحدث «ظهور صورة في الرمية الأولى» لا يؤثر على وقوع الحدث «ظهور صورة في الرمية الثانية»، لأن أي من الرميتين لا تؤثر على الأخرى بأي طريقة، ولذلك **فالحدثان مستقلان**.

إذا كنا نعلم الاحتمالات الفردية لحدثين مستقلين فإنه يمكننا إيجاد احتمال وقوع الحدثين معًا باستخدام القاعدة التالية:

قاعدة الضرب للأحداث المستقلة Multiplication principle of Independent Events

إذا كان أ، ب حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو:

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

معظم الآلات الحاسبة يمكنها إنتاج أعداد عشوائية تقع بين ٠، ١. كل عدد عشوائي ينتج يكون مستقلًّا عن العدد الآخر السابق له.

مثال (٨)

قام أحمد بتطوير قاعدة باستخدام الآلة الحاسبة البيانية لإنتاج أرقام عشوائية من ٠ إلى ٩ (انظر إلى الشكل المقابل).

فما احتمال أن يكون الرقم الأول الذي حصل عليه زوجيًّا وأن يكون الرقم الثاني مضاعفًا لـ ٣؟

الحل:

بما أن الأرقام عشوائية، فإن الناتج الأول لا يؤثر على الناتج الثاني. أي أن الحدثين مستقلين

وهما:

ر: «الرقم الناتج يكون زوجيًّا» ر = {٠، ٢، ٤، ٦، ٨}.

م: «الرقم الناتج يكون مضاعفًا لـ ٣» م = {٣، ٦، ٩}.

ولأن الحدثين مستقلين، لذلك يمكن تطبيق قاعدة الضرب:

ل(ر ∩ م) = ل(ر) × ل(م) = $\frac{٥}{١٠} \times \frac{٣}{١٠}$ = ٠,١٥

وبالتالي: احتمال أن يكون الرقم الأول زوجيًّا والرقم الثاني من مضاعفات ٣ هو ٠,١٥.

- «int» هي أكبر دالة أعداد صحيحة
- «rand» هي منتج الأعداد العشوائية بين صفر، ١.
- int (10 * rand) تعطي أعدادًا بين صفر، ٩.

مثال: rand = ٠,٨١٧

10 * rand = ٨,١٧

int (10 * rand) = ٨

حاول أن تحل

٨ في تجربة عشوائية عند رمي قطعة نقود ثلاث مرات وملاحظة الوجه العلوي.

ما احتمال أن يكون الناتج (ص، ك، ص)؟

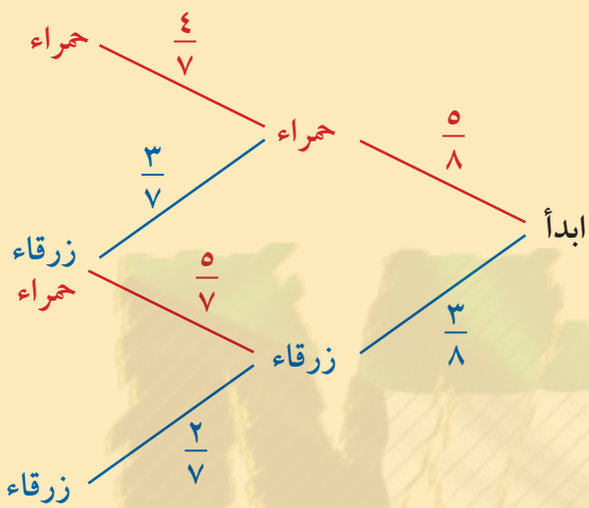
الحدث التابع Dependent Event

يكون الحدث تابعًا عندما يتأثر ظهوره بحدث سابق.

مثال (٩) الشجرة البيانية

لدينا ٥ كرات حمراء و٣ كرات زرقاء في كيس. في تجربة عشوائية سحبت كرتين على التوالي بدون إرجاع.

ما احتمال الحصول على كرتين حمراوتين؟



الحل:

ليكن الحدثان أ: «سحب كرة حمراء أولًا»،

ب: «سحب كرة حمراء ثانيًا» .

ل(أ) = $\frac{٥}{٨}$

دون إعادة الكرة الأولى يصبح لدينا في الكيس ٤ كرات حمراء فقط وفي الكيس هناك ٧ كرات وبالتالي ل(ب) = $\frac{٤}{٧}$.

ل(كرتان حمراوتان) = ل(أ) × ل(ب) = $\frac{٥}{٨} \times \frac{٤}{٧} = \frac{٥}{١٤}$

حاول أن تحل

٩ تحتوي علبة حلوى على ١٢ قطعة، ٤ منها بنكهة شوكولاتة والباقي بنكهة الحليب.
فما احتمال أخذ قطعة بنكهة شوكولاتة وأكلها، ثم أخذ قطعة بنكهة الحليب؟

الاحتمال المشروط Conditional Probability

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوي له فإن فضاء العينة ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}.

ليكن الحدث أ (ظهور عدد أكبر من ٣) فإن أ = {٤، ٥، ٦} ويكون ل(أ) = $\frac{\text{ن(أ)}}{\text{ن(ف)}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

وليكن الحدث ب (ظهور عدد زوجي) فيكون ب = {٢، ٤، ٦}

ل(ب) = $\frac{\text{ن(ب)}}{\text{ن(ف)}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

لنسأل الآن: إذا علمنا أن الحدث أ قد وقع، فما هو احتمال وقوع الحدث ب بشرط وقوع الحدث أ. بمعنى آخر ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي بشرط أن يكون أكبر من ٣؟

نلاحظ أن الشرط المعطى يجعل فضاء العينة الجديد هو أ = {٤، ٥، ٦} وللحصول على عدد زوجي أكبر من ٣ نوجد:

ب ∩ أ = {٤، ٦}

وبالتالي احتمال الحصول على عدد زوجي بشرط أن يكون أكبر من ٣ هو $\frac{٢}{٣}$

احتمال وقوع الحدث ب بشرط وقوع الحدث أ يسمى بالاحتمال المشروط (الشرطي) ويُكتب ل(ب|أ) ويُقرأ احتمال الحدث ب بشرط أ. ويمكن إيجاد ل(ب|أ) باستخدام القاعدة التالية:

قاعدة الاحتمال المشروط

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطًا بوقوع الحدث أ فإن:

ل(ب|أ) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(أ)}}$ حيث ل (أ) ≠ ٠

وكذلك ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب|أ)

مثال (١٠)

في تجربة عشوائية أ، ب حدثان حيث ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢ .

أوجد احتمال كل من الأحداث التالية: أ ل (ب| أ) ب ل (أ|ب)

الحل:

أ ل(ب| أ) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(أ)}} = \frac{٠,٢}{٠,٣} = \frac{٢}{٣}$.

ب ل(أ|ب) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(ب)}} = \frac{٠,٢}{٠,٦} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

١٠ في تجربة عشوائية، إذا كان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب | أ) = ٠,٢ . أوجد ل(أ ∩ ب).

مثال (١١)

رمى جاسم حجر نرد منتظم ولاحظ الوجه العلوي له.

نسمي الحدث ب: «الحصول على عدد أكبر من أو يساوي ٥»، الحدث أ: «الحصول على عدد فردي».

احسب ل(ب| أ) (احتمال ظهور عدد أكبر من أو يساوي ٥ بشرط أن يكون عددًا فرديًّا)

الحل:

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ن (ف) = ٦

أ = {١، ٣، ٥} ن (أ) = ٣

ب = {٥، ٦} ن (ب) = ٢

أ ∩ ب = {٥} ن (ب ∩ أ) = ١

ل(أ) = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$

ل(ب|أ) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(أ)}} = \frac{\frac{١}{٦}}{\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$.

حاول أن تحل

١١ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم، إذا كان الحدث ب «الحصول على عدد زوجي»، والحدث أ «الحصول على عدد أولي». فاحسب ل(ب|أ).

المرشد لحل المسائل

مثال (١)

(١) نأخذ البيانات التالية:

(أ): ١٠، ٢٠، ٤٠، ٥٠، ٧٠، ٨٠، ٩٠، ١٠٠، ١٢٠، ١٥٠

(ب): ١، ٢، ٤، ٥، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١٢، ١٥

أ كيف نستنتج القيم في بيانات المجموعة (ب) من قيم البيانات في المجموعة (أ)؟

ب أوجد التباين $ع_١^٢$ لقيم المجموعة (أ) والتباين $ع_٢^٢$ لقيم المجموعة (ب).

جـ استنتج العلاقة بين $ع_١$ ، $ع_٢$.

ما الذي أعرفه؟ قيّم مجموعتين من البيانات.

ما الذي أريد معرفته؟

الربط بين قيم المجموعة (أ) وقيم المجموعة (ب).

العلاقة بين تباين قيم المجموعة (أ) وتباين قيم المجموعة (ب).

كيف سأحل المسألة؟

(أ) بالنظر إلى قيم البيانات في المجموعة (أ) وقيم البيانات في المجموعة (ب) نلاحظ أن جميع قيم المجموعة (ب) هي قيم المجموعة (أ) مقسومة على ١٠.

(ب) نكوّن جدولًا لكل من قيم المجموعتين:

جدول (أ)

القيمة $س_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$
١٠	٦٣−	٣٩٦٩
٢٠	٥٣−	٢٨٠٩
٤٠	٣٣−	١٠٨٩
٥٠	٢٣−	٥٢٩
٧٠	٣−	٩
٨٠	٧	٤٩
٩٠	١٧	٢٨٩
١٠٠	٢٧	٧٢٩
١٢٠	٤٧	٢٢٠٩
١٥٠	٧٧	٥٩٢٩
		المجموع = ١٧٦١٠

المتوسط الحسابي $\overline{س}$ = ٧٣

$$ع_١^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن}$$

$$ع_١^٢ = \frac{١٧٦١٠}{١٠}$$

$$ع_١^٢ = ١٧٦١$$

جدول (ب)

المتوسط الحسابي $\overline{\text{ص}} = ٧,٣$

$$\text{ع}_{٢}^{٢} = \frac{\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ص}_{\text{ر}} - \overline{\text{ص}})^{٢}}{\text{ن}}$$

$$\text{ع}_{٢}^{٢} = \frac{١٧٦,١}{١٠}$$

$$\text{ع}_{٢}^{٢} = ١٧,٦١$$

وبالتالي $\text{ع}_{١}^{٢} = ١٠٠\ \text{ع}_{٢}^{٢}$ أي $\text{ع}_{١}^{٢} = (١٠)^{٢}\ \text{ع}_{٢}^{٢}$

(جـ) نستنتج أن $\text{ع}_{١} = ١٠\ \text{ع}_{٢}$

القيمة $\text{ص}_{\text{ر}}$	$\text{ص}_{\text{ر}} - \overline{\text{ص}}$	$(\text{ص}_{\text{ر}} - \overline{\text{ص}})^{٢}$
١	-٦,٣	٣٩,٦٩
٢	-٥,٣	٢٨,٠٩
٤	-٣,٣	١٠,٨٩
٥	-٢,٣	٥,٢٩
٧	-٠,٣	٠,٠٩
٨	٠,٧	٠,٤٩
٩	١,٧	٢,٨٩
١٠	٢,٧	٧,٢٩
١٢	٤,٧	٢٢,٠٩
١٥	٧,٧	٥٩,٢٩
المجموع = ١٧٦,١		

مثال (٢)

بيّنت دراسة إحصائية أن ٢٪ من القطع التي تصنعها إحدى الشركات فيها خلل تقني. لإلغاء هذه القطع وضع اختبار للجودة وكانت نتائجه كالآتي:

يلغي الاختبار إذا كان ٩٨٪ من القطع التي فيها خلل.

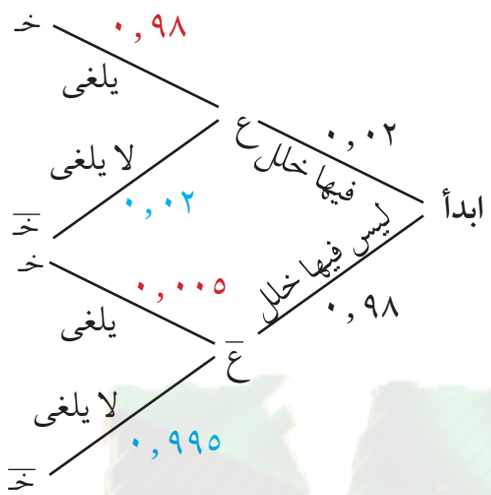
يلغي الاختبار إذا كان ٠,٥٪ من القطع التي ليس فيها خلل.

أخذت عشوائيًّا قطعة مصنعة في هذه الشركة.

ما احتمال أن يكون فيها خلل علمًا أنه لم يلغها اختبار الجودة؟

الحل:

ليكن ع الحدث: «القطعة فيها خلل»، خـ الحدث: «اختبار الجودة يلغي القطعة».



أولا: نرسم شجرة بيانية لتمثيل المعطيات

٢٪ من القطع فيها خلل

∴ ٩٨٪ لا خلل فيها.

يلغي الاختبار ٩٨٪ من القطع فيها خلل

∴ ٢٪ من القطع فيها خلل لا يلغيها.

يلغي الاختبار ٠,٥٪ من القطع التي لا خلل فيها

∴ ٩٩,٥٪ من القطع التي لا خلل فيها لا يلغيها الاختبار.

ثانيا: $ل(ع|\overline{خ}) = \frac{ل(ع \cap \overline{خ})}{ل(\overline{خ})}$

تحضيرًا للحل نوجد ل(خ)، ثم ل($\overline{خ}$). بالنظر إلى الشجرة البيانية، يلغي الاختبار قطعة ما في حالتين.

∴ ل(خ) = ل(ع ∩ خ) + ل($\overline{ع}$ ∩ خ)

= ٠,٠٢ × ٠,٩٨ + ٠,٩٨ × ٠,٠٠٥ = ٠,٠٢٤٥

∴ ل($\overline{خ}$) = ١ − ٠,٠٢٤٥ = ٠,٩٧٥٥

ل(ع∩$\overline{خ}$) = ٠,٠٢ × ٠,٠٢ = ٠,٠٠٠٤

$ل(ع|\overline{خ}) = \frac{ل(ع \cap \overline{خ})}{ل(\overline{خ})} = \frac{٠,٠٠٠٤}{٠,٩٧٥٥} = ٠,٠٠٠٤١$

احتمال أن يكون في القطعة خلل علمًا أنه لم يلغها اختبار الجودة يساوي ٠,٠٠٠٤١ تقريبًا.

مسألة إضافية

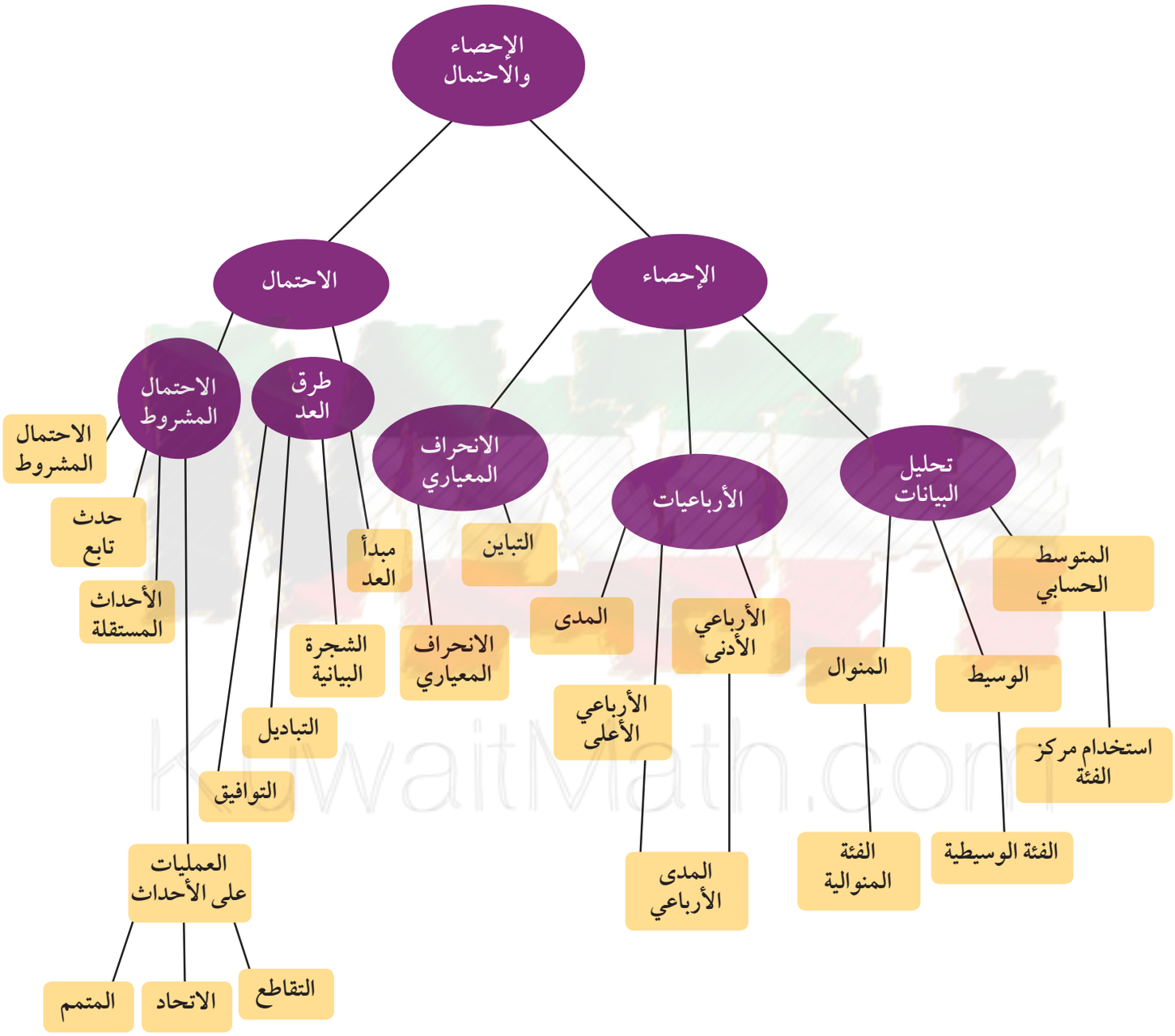
١ آلة مجهزة لتعبئة عبوات بالصابون السائل تحتوي كل منها على ٣١٠ مليليترات. اظهرت نتائج الكشف على ١٦ عبوة كما يلي:

٢٩٧، ٣١٨، ٣٠٦، ٣٠٠، ٣١١، ٣٠٣، ٢٩١، ٢٩٨، ٣٢٢، ٣٠٧، ٤١٢، ٣٠٠، ٣١٥، ٢٩٦، ٣٠٩، ٣١١.

أ أوجد المتوسط الحسابي لمحتويات هذه العبوات بالمليليتر .

ب أوجد الانحراف المعياري. ماذا تستنتج؟

مخطط تنظيمي للوحدة العاشرة



ملخص

– تستخدم قيم النزعة المركزية لوصف البيانات الإحصائية:

* المتوسط الحسابي هو ناتج قسمة مجموع قيم البيانات على عدد هذه القيم: $\bar{س} = \frac{ت_١ س_١ + ت_٢ س_٢ + ... + ت_ن س_ن}{ت_١ + ت_٢ + ... + ت_ن}$

* الوسيط هو القيمة التي تأتي في المنتصف بعد ترتيب هذه القيم تصاعديًّا أو تنازليًّا.

* المنوال هو القيمة (القيم) الأكثر تكرارًا في البيانات.

* في البيانات حيث التوزيع التكراري على فئات نستخدم مركز الفئة لإيجاد المتوسط الحسابي.

* في البيانات حيث التوزيع التكراري على فئات نستخدم قانون الرافعة:

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + $\frac{ك_٢}{ك_١ + ك_٢} \times ف$

حيث إن ف = طول الفئة المنوالية،

$ك_١$ = تكرار الفئة السابقة مباشرة للفئة المنوالية،

$ك_٢$ = تكرار الفئة اللاحقة مباشرة للفئة المنوالية

* يمكن إيجاد الوسيط باستخدام بمنحنى المتجمع الصاعد أو منحنى المتجمع النازل أو كليهما.

* يمكن إيجاد المنوال باستخدام قانون الرافعة.

* يمكن إيجاد المنوال باستخدام المدرج التكراري.

– نستخدم الأرباعيات والمدى والتباين والانحراف المعياري لدراسة تشتت البيانات.

* المدى = القيمة العظمى من البيانات – القيمة الصغرى من البيانات.

* الأرباعي الأدنى = وسيط القيم الأدنى للبيانات أصغر من الوسيط ويعرف بالرمز $ر_١$.

* الأرباعي الأعلى = وسيط القيم الأعلى للبيانات أكبر من الوسيط ويعرف بالرمز $ر_٣$.

* يعرف الوسيط للبيانات بالرمز $ر_٢$.

* مجمل الأعداد الخمسة في البيانات هو: القيمة الصغرى، $ر_١$، $ر_٢$، $ر_٣$، القيمة العظمى.

* يوضح مخطط الصندوق ذي العارضتين كيفية توزيع القيم الخمس والعلاقة فيما بينها وتشتت قيم البيانات.

* التباين هو القيمة من البيانات الناتجة من حساب القاعدة: $ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر (س_ر - \bar{س})^٢}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}$

* الانحراف المعياري يبيّن تشتت البيانات عن المتوسط الحسابي لهذه البيانات ويعطى بالقاعدة:

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر (س_ر - \bar{س})^٢}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}}$$

إذا كبر الانحراف المعياري يكون التشتت كبيرًا وبعيدًا عن المتوسط الحسابي وإذا صغر الانحراف المعياري يكون التشتت قريبًا من المتوسط الحسابي.

* المدى الأرباعي = الأرباعي الأعلى ($ر_٣$) – الأرباعي الأدنى ($ر_١$)

– **الشجرة البيانية**: إذا كان عدد الإمكانيات صغيرًا بما يكفي، فإن الشجرة البيانية يمكن أن تساعد في تنظيم مهمة العد.

– **التباديل**: عندما يكون الترتيب مهمًّا ومعتمداً يسمى بالتباديل، عامة عدد تباديل من الأشياء هو ن! (مضروب ن).

– **قانون التباديل**: إذا كان ن، ر عددان صحيحان غير سالبين بحيث ر ≤ ن، فإن عدد التباديل المكوّن من أشياء عددها ر والمأخوذة من بين ن من الأشياء هو: $^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$

– **التوافيق**: عندما تريد إيجاد عدد المجموعات الجزئية والمكوّن كل منها من ر عنصر، والتي يمكن اختيارها من مجموعة مكوّنة من ن عنصر دون اعتماد النظر عن الترتيب فنحن نحسب التوافيق.

– **قانون التوافيق**: إذا كان ن، ر عددان صحيحان غير سالبين، حيث ر ≤ ن فإن عدد التوافيق المكوّنة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من العناصر في الوقت نفسه هو: $^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!(ن - ر)!}$.

– احتمال الحدث أ هو: $ل(أ) = \frac{\text{عدد النواتج في الحدث أ}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$

– خواص الاحتمال لحدث ما:

ليكن أ حدث في فضاء عينة منته وغير خالٍ ف فإن:

– ٠ ≤ ل(أ) ≤ ١

– إذا كان أ = { } فإن ل(أ) = ٠، أ يسمى الحدث المستحيل.

– إذا كان أ = ف فإن ل(أ) = ١، أ يسمى الحدث المؤكد.

– مجموع احتمالات النواتج في فضاء العينة يساوي ١ .

– تقاطع حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ وفي ب في آن معًا ويرمز إليه بـ أ ∩ ب.

– اتحاد حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ أو في ب ويرمز إليه بـ أ ∪ ب.

– الحدثان أ، ب هما متنافيان إذا لم يكن لديهما ناتج مشترك أي أ ∩ ب = ∅.

– متمم حدث أ يرمز إليه بـ $\bar{أ}$ وهو الحدث الذي يتألف من كل النواتج الموجودة في فضاء العينة وغير موجودة في أ.

– الأحداث المستقلة: يكون حدثان مستقلان إذا كان حدوث أحدهما ليس له تأثير على احتمال حدوث الآخر.

– قاعدة الضرب للأحداث المستقلة:

إذا كان أ، ب حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو: ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

– **الحدث التابع**: يكون الحدث تابعًا عندما يتأثر ظهور هذا الحدث بحدث سابق.

– الاحتمال المشروط:

ليكن لدينا حدثين أ، ب ونفترض أن ل(أ) ≠ ٠ .

احتمال وقوع الحدث ب بشرط وقوع الحدث أ يسمى الاحتمال المشروط ويكتب ل(ب|أ) ويقرأ «احتمال الحدث ب بشرط أ».

– قاعدة الاحتمال المشروط:

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطًا بوقوع الحدث أ (ل(أ) ≠ ٠)

$ل(ب|أ) = \frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(أ)}$ ، ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب | أ) .