الوحدة السادسة

هندسة الدائرة
Geometry of a Circle

مشروع الوحدة: أهمية الدائرة في تصميم الزينة والزخارف الهندسية

١ مقدمة المشروع: منذ قرون عديدة، استخدم الفنانون بساطة الدائرة ورونقها في التزيين. بعضهم صنع أنماطًا في الدائرة مستفيدًا من عدم وجود بداية لها أو نهاية. وبعضهم الآخر استفاد من كثرة خطوط التناظر فيها لينتج خدعًا بصرية.

٢ الهدف: ابحث عن بعض التقنيات المستخدمة خلال العصور الماضية لإنتاج الفن الدائري عندما استخدم الفنانون الدائرة كأفضل طريقة لبلوغ أهدافهم في التزيين.

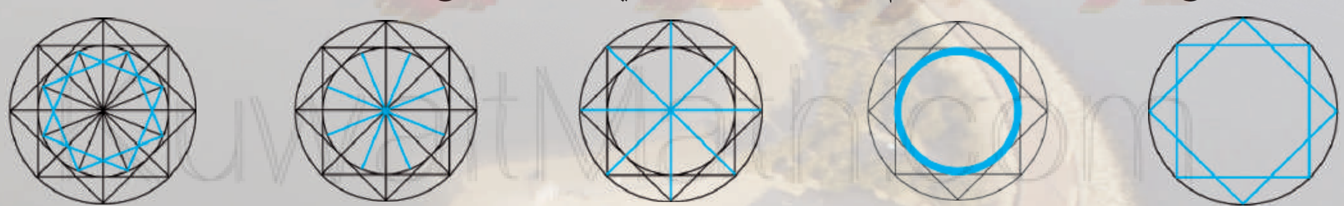
٣ اللوازم: أوراق رسم، شبكة مربعات، أقلام تلوين، قلم، فرجار.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ عيّن نقطة الأصل على شبكة مربعات (دون رسم المحاور).

ب ارسم ٤ دوائر مراكزها (٠، ٥)، (٥، ٠)، (−٥، ٠)، (٠، −٥) بنصف قطر يساوي ٥$\sqrt{٢}$. مستخدمًا المراكز نفسها، ارسم ٤ دوائر بنصف قطر يساوي ٤$\sqrt{٢}$.
صل بين المراكز الأربعة لتشكل مربعًا ولوّنه بالأحمر.
صل بين نقاط تقاطع الدوائر الكبرى والدوائر الصغرى ولوّن الشكل بالأخضر. امح الأقواس، ولوّن تصميمك.

ج اتبع الخطوات التالية لتصميم نمط من الفن الإسلامي من القرن الرابع عشر.



الخطوة ١: ارسم دائرة ومربعًا رؤوسه على الدائرة، ثم ارسم قطريه. ارسم الشكل الناتج عن دوران المربع بزاوية ٤٥° حول مركز الدائرة.

الخطوة ٢: ارسم دائرة داخلية محاطة بالمربعين.

الخطوة ٣: ارسم في كل مربع جميع الأقطار.

الخطوة ٤: ارسم منصفات الزوايا المركزية، ثم عين نقاط التقاطع الثماني لهذه المنصفات مع الدائرة الداخلية.

الخطوة ٥: اجمع هذه النقاط لتحصل على مربعين محاطين بالدائرة الصغرى كما يبين الرسم، ثم لون لتحصل على التصميم المطلوب.

٥ التقرير: ضع تقريرًا مفصلًا حول تنفيذ المشروع مستفيدًا من دروس الوحدة، واعرض التصاميم التي حصلت عليها.

دروس الوحدة

الدائرة	مماس الدائرة	الأوتار والأقواس	الزوايا المركزية والزوايا المحيطية	الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس
٦−١(أ)	٦−١(ب)	٦−٢	٦−٣	٦−٤

الوحدة السادسة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت إيجاد محيط دائرة ومساحتها.
- تعلمت إثبات تطابق المثلثات وخصائص العناصر المتناظرة وتشابه المثلثات وبعض القطع المميزة في المثلث.
- تعلمت خصائص المثلث قائم الزاوية، ومنها نظرية فيثاغورث.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تستخدم العلاقة بين المماس ونصف قطر الدائرة المار بنقطة التماس لحل المسائل.
- سوف تستخدم العلاقة بين مماسين من نقطة واحدة في حل مسائل حياتية.
- سوف تستخدم الأوتار المتطابقة والأقواس والزوايا المركزية لحل مسائل في الدائرة.
- سوف تتعرف خصائص المستقيمات والقطع المستقيمة التي تمر بمركز الدائرة والتي لا تمر بمركز الدائرة.
- سوف تتعرف العلاقة بين الزاوية المركزية والزاوية المحيطية المشتركة في القوس نفسه.
- سوف تتعرف العلاقة بين الزاوية المماسية والقوس المحصور بين ضلعيها.
- سوف تتعرف العلاقة ما بين الزاوية المماسية والزاوية المحيطية والقوس المشترك بينهما.
- سوف تتعرف العلاقة بين وترين متقاطعين في الدائرة والعلاقة بين طول المماس وطول القطع.
- سوف تتعرف خصائص الشكل الرباعي الدائري.

المصطلحات الأساسية

مماس الدائرة – أوتار – أقواس – زاوية مركزية – زاوية محيطية – أوتار متقاطعة – القاطع – رباعي دائري – زاويتان متقابلتان – زاويتان متكاملتان.

أضف إلى معلوماتك

تتميز الأوتار المتقاطعة عند نقطة داخل الدائرة أو خارج الدائرة بعلاقات محددة تربط بين أطوال أجزائها. يمكنك إيجاد هذه العلاقات باستخدام ما تعلمته سابقًا عن المثلثات المتطابقة والمثلثات المتشابهة. المعارف التي سوف تكتسبها من هذه الوحدة لها تطبيقات عديدة في التصوير، والهندسة المعمارية، والهندسة المدنية، والصور المتحركة.

٦-١ (أ)

الدائرة
The Circle

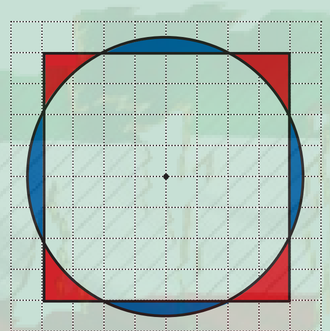
هل تعلم؟

عُرفت الدائرة منذ القدم. استخدم الأقدمون الدولاب والأسطوانة لضخ المياه وطحن الحبوب ودحرجة الأشياء الثقيلة.

في مصر طرح الفراعنة مسألة تربيع الدائرة، أي إنشاء مربع مساحته تساوي مساحة رقعة تحدها دائرة معطاة، حتى أنهم اقترحوا أفكارًا حول حل هذه المسألة.

شغلت هذه المسألة الباحثين في الرياضيات لمدة طويلة حتى العام ١٨٨٢ عندما أثبت العالم الرياضي الألماني فردينان فون ليندمان استحالة هذا الإنشاء.

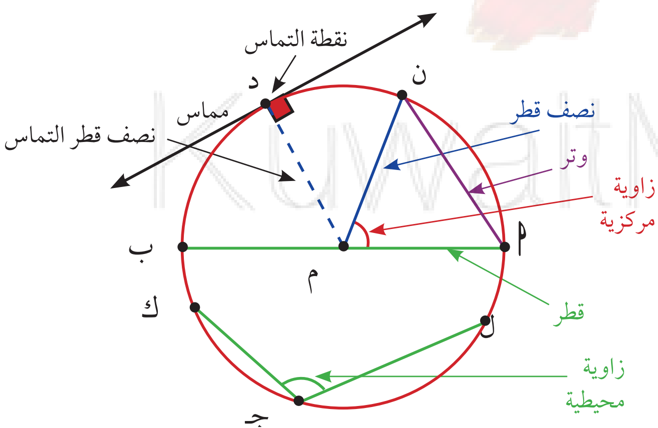
هل يمكن أن تتساوى مساحات الرقع الزرقاء مع مساحات الرقع الحمراء؟



تعريف الدائرة

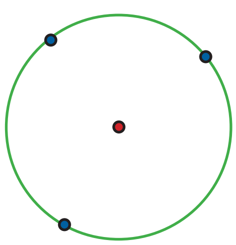
الدائرة هي مجموعة نقاط المستوى التي تبعد كل منها عن نقطة ثابتة م في المستوى بعدًا ثابتًا.

تسمى النقطة الثابتة **مركز الدائرة** ويسمى البعد الثابت طول نصف القطر ويرمز إليه عادة بالرمز **نق**.



نظرية (١)

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.



مثال (١)

علم الآثار: وجد عالم آثار قطعًا صغيرة من جرة خزفية بالإضافة إلى قطعة كبيرة دائرية الشكل من فوهة الجرة. كيف تستطيع مساعدة العالم لإعادة ترميم الجرة، وذلك بإيجاد مركز وطول نصف قطر القطعة الدائرية الكبيرة؟

الحل:

المعطيات: جزء من فوهة الجرة الدائرية.

المطلوب: إيجاد مركز الدائرة وطول نصف قطرها.

العمل: نأخذ ٣ نقاط أ، ب، جـ على قوس الدائرة المرسومة والتي تمثل جزءًا من فوهة الجرة.
نرسم محورًا لكل من $\overline{أب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، اللذان يتقاطعان في نقطة و.

البرهان: ∵ $\overleftrightarrow{و ل}$ محور $\overline{أب}$

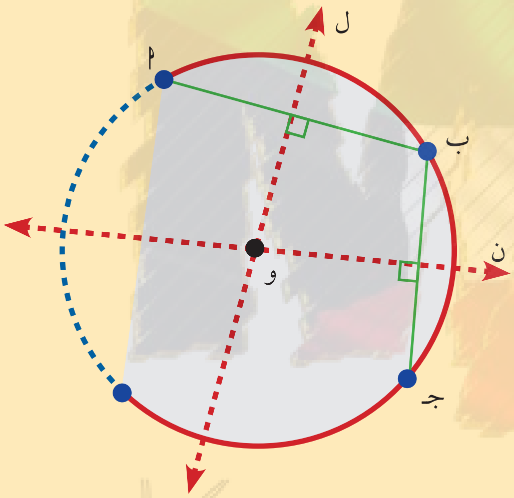
∴ وب = وأ (١)

∵ $\overleftrightarrow{و ن}$ محور $\overline{ب جـ}$

∴ وب = وجـ (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن النقطة و هي مركز الدائرة.

∴ طول $\overline{وأ}$ = طول نصف قطر الدائرة.



حاول أن تحل

١ استخدم المفهوم السابق في مثال (١) لإثبات برهان نظرية (١) وتحديد مركز الدائرة المحيطة بمثلث قائم الزاوية.

استنتاج

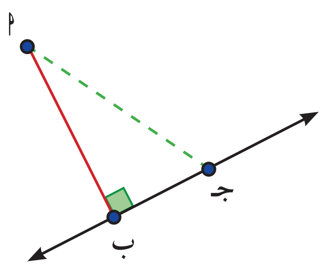
في الشكل المقابل، $\overline{أب} \perp \overline{ب جـ}$

بفرض أن المستقيم $\overleftrightarrow{أجـ}$ يمر بالنقطة أ عموديًّا على $\overleftrightarrow{ب جـ}$.

يصبح مجموع قياسات زوايا Δأب جـ أكبر من ١٨٠° (ق (بَ) + ق (جـَ) = ١٨٠°)

وهذا يتناقض مع النظرية: مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ $\overleftrightarrow{أجـ}$ ليس عموديًّا على $\overleftrightarrow{ب جـ}$.



استنتاج ١: من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بهذه النقطة وعمودي على المستقيم المعلوم.

لاحظ أنه في Δأب جـ، أب < أجـ مهما كان موضع النقطة جـ على المستقيم (جـ لا تنطبق على ب).

استنتاج ٢: أقصر بعد بين نقطة ومستقيم هو البعد العمودي.

كلما ابتعدت جـ عن ب على المستقيم أصبح طول $\overline{أجـ}$ أكبر.

٦-١ (ب)

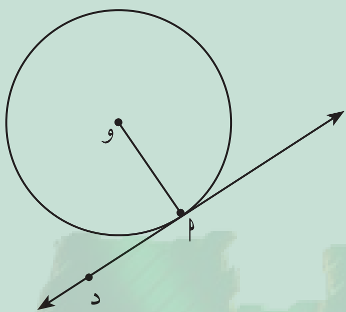
مماس الدائرة
Tangent of the Circle

سوف تتعلم

- استخدام العلاقة بين المماس ونصف قطر الدائرة المار بنقطة التماس
- استخدام العلاقة بين مماسين من نقطة واحدة خارج الدائرة

عمل تعاوني

- استخدم الفرجار لرسم دائرة مركزها و.
- من نقطة د خارج الدائرة ارسم مستقيمًا يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة فقط ولتكن أ.
- ارسم القطعة $\overline{\text{وأ}}$.



١ ما قياس الزاوية $\widehat{\text{دأو}}$؟

٢ قارن نتيجتك بنتائج زملائك في الفصل.

٣ ضع تخمينًا حول العلاقة بين المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطة واحدة ونصف قطر الدائرة المار في هذه النقطة.

المماس للدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.

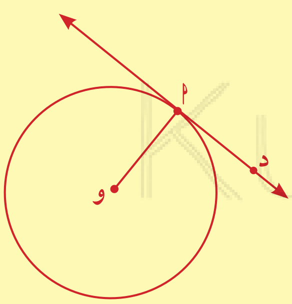
نقطة التقاطع تسمى نقطة التماس.

$\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس.

$\overleftarrow{\text{أد}}$ شعاع مماس.

$\overline{\text{أد}}$ قطعة مماسية

$\overline{\text{أو}}$ نصف قطر التماس

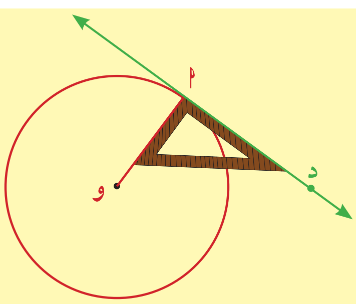


نظرية (٢)

المماس عمودي على نصف قطر التماس.

إذا كان مستقيم مماسًّا لدائرة، فإنه يكون متعامدًا مع نصف القطر المار بنقطة التماس.

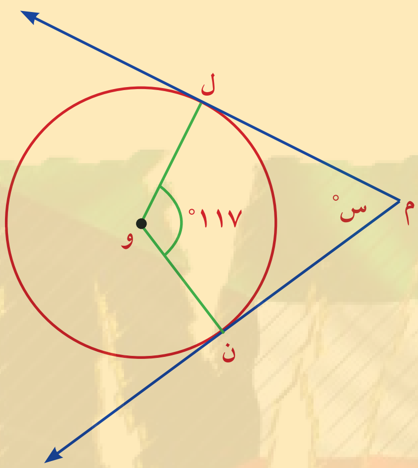
أي أن $\overline{\text{وأ}} \perp \overleftrightarrow{\text{دأ}}$.



مثال (٢)

في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ مماسان للدائرة التي مركزها و.

أوجد قياس الزاوية ل مَ ن.



الحل:

المعطيات: $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ مماسان للدائرة التي مركزها و.

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية ل مَ ن

البرهان:

∵ $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس

و ل نصف قطر التماس

∴ ق(م لَ و) = ٩٠°

وبالمثل: ق(م نَ و) = ٩٠° — نظرية

ل م ن و شكل رباعي

∴ ق(لَ) + ق(نَ) + ق(مَ) + ق(وَ) = ٣٦٠°

٩٠° + ٩٠° + س° + ١١٧° = ٣٦٠° — بالتعويض

٢٩٧° + س° = ٣٦٠° — بالتبسيط

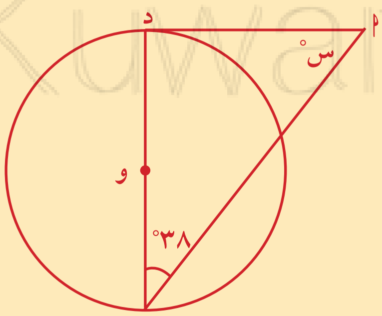
س° = ٦٣°

∴ ق(ل مَ ن) = ٦٣°

حاول أن تحل

٢ في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ مماس للدائرة التي مركزها و.

أوجد قيمة س°.



مثال (٣) **تطبيق حياتي**

يمثل المخطط إطاري الدراجة.

أوجد دجد المسافة بين محوري هذين الإطارين.

إذا كان أد = ٣٢ سم ، ب جـ = ٤٠ سم ، أب = ٩٦ سم.

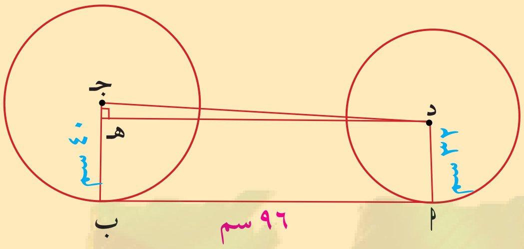
الحل:

المعطيات:

دائرة مركزها جـ، نق = ٤٠ سم

دائرة مركزها د، نق = ٣٢ سم

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرتين، أب = ٩٦ سم



المطلوب: إيجاد المسافة $\overline{\text{د جـ}}$ بين محوري الإطارين.

العمل: نرسم $\overline{\text{دهـ}} \perp \overline{\text{جـ ب}}$.

البرهان: $\overline{\text{دأ}} \perp \overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ ب}} \perp \overline{\text{أب}}$ لماذا؟

∴ الشكل دأب هـ مستطيل.

المثلث د هـ جـ قائم الزاوية في هـ

بتطبيق نظرية فيثاغورث:

(دجـ)^{٢} = (دهـ)^{٢} + (هـ جـ)^{٢}

(دجـ)^{٢} = (٩٦)^{٢} + (٨)^{٢} = ٩ ٢٨٠

دجـ ≃ ٩٦,٣٣ باستخدام الآلة الحاسبة

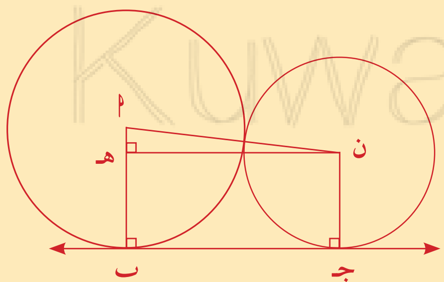
المسافة بين محوري الإطارين تساوي ٩٦,٣ سم تقريبًا.

معلومة:

محور الإطار هو المحور الذي يدور حوله الإطار.

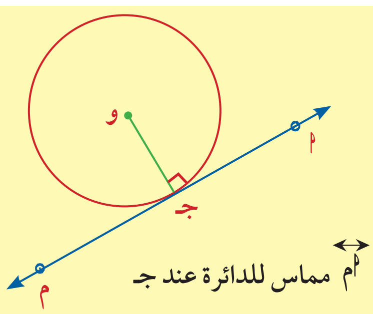
حاول أن تحل

٣ يمثل الشكل المقابل مقطعًا لأسطوانتين في معمل الورق.
أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$ إذا كانت الدائرتان متماستين
وطول نصف قطريهما ٥٠ سم، ٤٠ سم على الترتيب.



نظرية (٣)

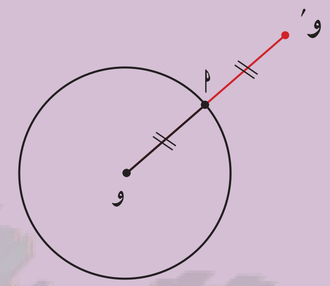
المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسًا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.



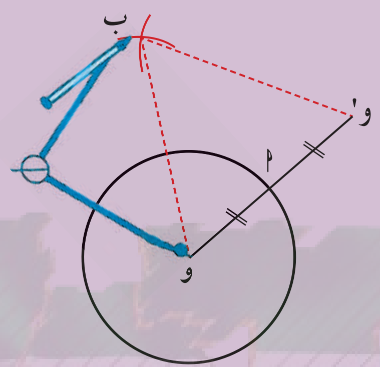
مشروع

دائرة مركزها و، أ نقطة على الدائرة. مستخدمًا الفرجار والمسطرة أنشئ مماسًّا للدائرة عند أ.

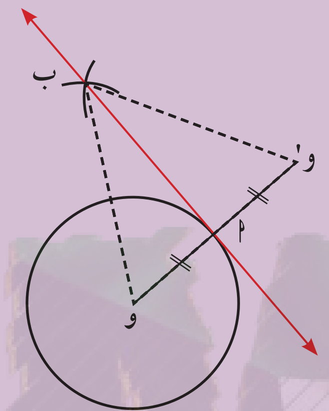
الطريقة الأولى:



نرسم نصف قطر وليكن $\overline{\text{وأ}}$ ثم نحدد و′ انعكاس للنقطة و في أ.

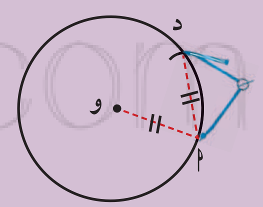


نرسم من و، و′ قوسين بفتحة أكبر من نق، يتقاطع القوسان في ب.

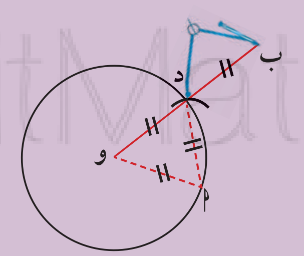


نرسم المستقيم المار بالنقطتين أ، ب. فنحصل على مماس للدائرة.

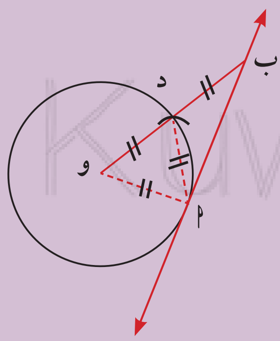
الطريقة الثانية:



نرسم نصف قطر وليكن $\overline{\text{وأ}}$ نركز سن الفرجار عند أ وبفتحة تساوي وأ نرسم قوسًا يقطع الدائرة في د فيكون أد = وأ



نحدد النقطة ب انعكاس للنقطة و في د



نرسم المستقيم المار بالنقطتين ب، أ فنحصل على مماس للدائرة.

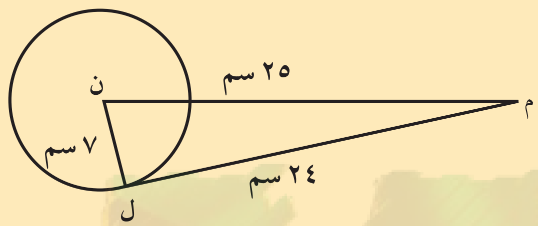
تحقق:

في كل من الطريقتين، أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة.

مثال (٤)

في الشكل المقابل، ن ل = ٧ سم ، ل م = ٢٤ سم ، ن م = ٢٥ سم.

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة التي مركزها ن.



الحل:

المعطيات: ن ل = ٧ سم ، ن م = ٢٥ سم ، م ل = ٢٤ سم

المطلوب: إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماسًّا للدائرة التي مركزها ن

البرهان: باستخدام عكس نظرية فيثاغورث

$(\text{ن ل})^٢ + (\text{ل م})^٢ \overset{?}{=} (\text{ن م})^٢$

$(٧)^٢ + (٢٤)^٢ \overset{?}{=} (٢٥)^٢$ بالتعويض

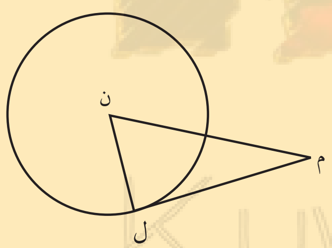
٦٢٥ = ٦٢٥ بالتبسيط

نستنتج أن المثلث م ل ن قائم في ل.

∴ $\overline{\text{م ل}} \perp \overline{\text{ل ن}}$

∴ م ل مماس للدائرة في النقطة ل. نظرية

حاول أن تحل



٤ في الشكل المقابل، إذا كان ن ل = ٤ ، ل م = ٧ ، ن م = ٨،

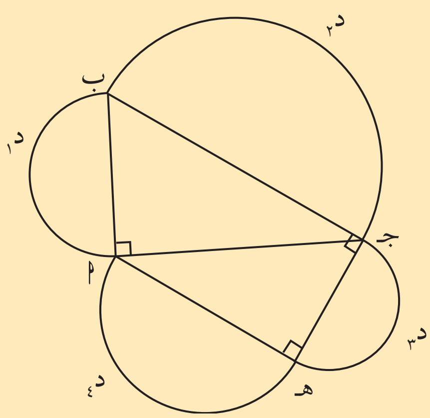
فهل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة؟ فسِّر إجابتك.

مثال (٥)

في الشكل المقابل د١، د٢، د٣، د٤ أنصاف دوائر أقطارها على الترتيب

$\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{جـ هـ}}$، $\overline{\text{هـ أ}}$.

حدّد المماسات لأنصاف الدوائر، وفسِّر إجابتك



الحل:

المعطيات:

د١، د٢، د٣، د٤ أنصاف دوائر أقطارها على الترتيب

$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ أ}}$.

المطلوب:

تحديد المماسات لأنصاف الدوائر مع تفسير الإجابة.

معلومة مفيدة:
المماس لدائرة يكون مماسًا لنصف هذه الدائرة الذي يحوي نقطة التماس.

البرهان:
$\overleftrightarrow{\text{جـ أ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ معطى ، $\overline{\text{أ ب}}$ قطر لنصف الدائرة د$_1$

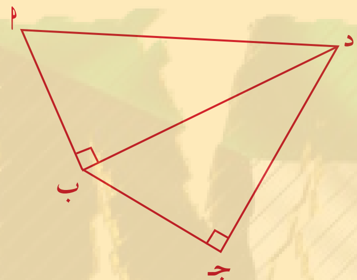
$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{جـ أ}}$ مماس لنصف الدائرة د$_1$.

كذلك $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}} \perp \overline{\text{هـ أ}}$ معطى ، $\overline{\text{هـ أ}}$ قطر لنصف الدائرة د$_4$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ مماس لنصف الدائرة د$_4$

وبالمثل يمكن إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ مماس لنصف الدائرة د$_3$ كذلك يمكن إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{هـ جـ}}$ مماس لنصف الدائرة د$_2$.

كذلك $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مماس لنصف الدائرة د$_2$.



حاول أن تحل

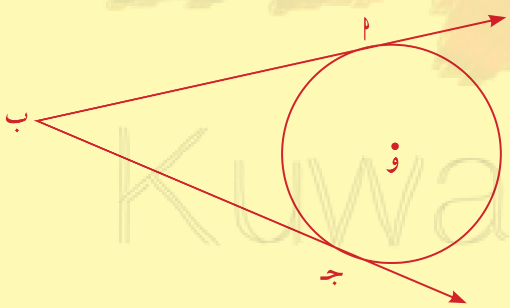
٥ أكمل النص التالي:

..... مماس للدائرة التي تمر برؤوس المثلث .....

نظرية (٤)

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

$\overline{\text{أ ب}} \cong \overline{\text{جـ ب}}$



المعطيات:

دائرة مركزها و.

أ، جـ نقطتان على الدائرة.

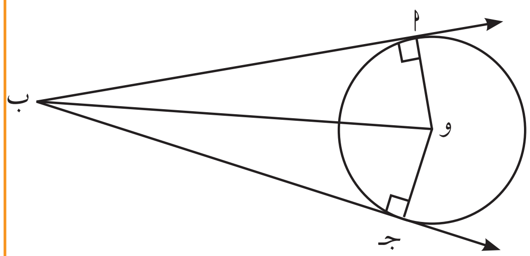
ب نقطة خارج الدائرة حيث $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ مماسان للدائرة.

المطلوب: إثبات تطابق $\overline{\text{ب أ}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$.

العمل: نرسم $\overline{\text{و أ}}$، $\overline{\text{و جـ}}$، $\overline{\text{و ب}}$.

البرهان:

∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ مماس للدائرة ، ∴ $\overline{\text{جـ و}}$ نصف قطر التماس $\overline{\text{جـ ب}} \perp \overline{\text{جـ و}}$



المثلث و جـ ب قائم الزاوية جـ — نظرية

ب جـ = $\sqrt{(\text{وب})^2 - \text{نق}^2}$ — نظرية فيثاغورث

وبالمثل المثلث و أ ب قائم الزاوية أ

ب أ = $\sqrt{(\text{وب})^2 - \text{نق}^2}$

∴ ب جـ = ب أ

برهان آخر:

في المثلثين ب أ و ، ب جـ و:

ب و = ب و — ضلع مشترك

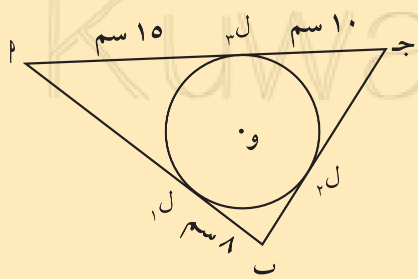
ق(ب $\hat{\text{أ}}$ و) = ق(ب $\hat{\text{جـ}}$ و) = ٩٠° — نظرية

و أ = و جـ = نق

∴ Δب أ و $\cong$ Δب جـ و — لماذا؟

∴ الأضلاع المتناظرة متطابقة ∴ ب أ = ب جـ

مثال (٦)



في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث أ ب جـ.

الحل:

المعطيات:

دائرة مركزها و

$\overline{\text{ب أ}}$ مماس للدائرة في ل$_1$ حيث ب ل$_1$ = ٨ سم

$\overline{\text{ب جـ}}$ مماس للدائرة في ل$_2$.

$\overline{\text{أ جـ}}$ مماس للدائرة في ل$_3$ حيث جـ ل$_3$ = ١٠ سم، أ ل$_3$ = ١٥ سم.

المطلوب: إيجاد محيط المثلث أ ب جـ.

البرهان:

أ ل$_3$ = أ ل$_1$ = ١٥ سم — نظرية

جـ ل$_2$ = جـ ل$_3$ = ١٠ سم — نظرية

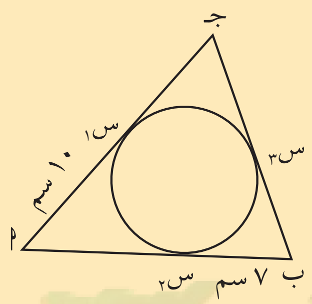
ب ل$_1$ = ب ل$_2$ = ٨ سم — نظرية

محيط المثلث = أب + ب جـ + جـ أ

= أل١ + ل١ب + ب ل٢ + ل٢جـ + جـ ل٣ + ل٣أ

= ١٥ + ٨ + ٨ + ١٠ + ١٠ + ١٥ = ٦٦

محيط المثلث = ٦٦ سم.

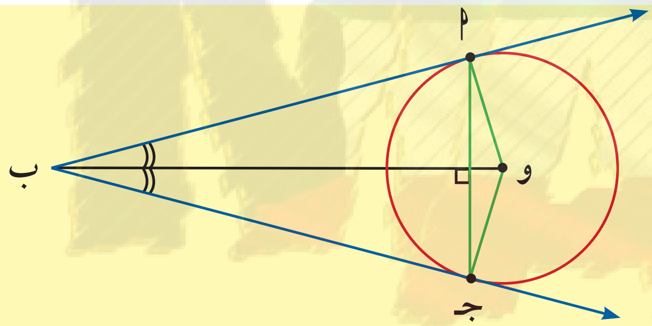


حاول أن تحل

٦ في الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث أب جـ = ٥٠ سم، فأوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.

نتائج النظرية

Δ ب أ جـ متطابق الضلعين من النظرية السابقة.



١ $\overrightarrow{\text{ب و}}$ منصف الزاوية أ ب̂ جـ

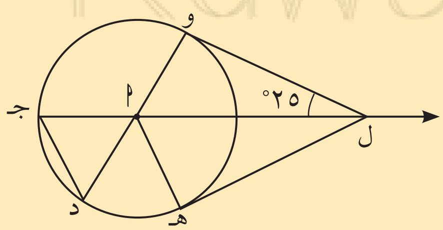
٢ $\overrightarrow{\text{و ب}}$ منصف الزاوية أ و̂ جـ

٣ $\overline{\text{و ب}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

مثال (٧)

في الشكل المقابل، أوجد ق(أد̂ جـ)، ق(هـ أ̂ د)

إذا كانت $\overline{\text{ل و}}$ ، $\overline{\text{ل هـ}}$ تمسان الدائرة حيث و د قطر للدائرة.



الحل:

$\overleftrightarrow{\text{ل هـ}}$ مماس للدائرة

∴ $\overleftrightarrow{\text{ل هـ}} \perp \overline{\text{أ هـ}}$ نظرية

ق(ل هـ̂ أ) = ٩٠°

$\overleftrightarrow{\text{ل جـ}}$ منصف الزاوية (و ل̂ هـ) نتيجة للنظرية ٤

∴ ق(أ ل̂ هـ) = ق(أ ل̂ و) = ٢٥°

ومنه ق(هـ أ̂ ل) = ١٨٠° − (٩٠° + ٢٥°) = ٦٥°

∴ ق(ل أ̂ و) = ٦٥°

ل أ منصف الزاوية (و أ هـ) — نتيجة ٢ للنظرية ٤

ق(د أ جـ) = ق(و أ ل) = ٦٥° — زاويتان متطابقتان بالرأس

أ د = أ جـ = نق ∴ △ أ د جـ متطابق الضلعين

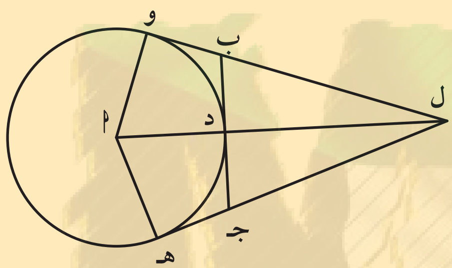
ق(أ د̂ جـ) = ق(أ جـ̂ د)

ق(أ د̂ جـ) = $\frac{١٨٠° - ٦٥°}{٢}$ = ٥٧,٥°

ق(هـ أ̂ د) = ١٨٠° − (ق(ل أ̂ هـ) + ق(د أ̂ جـ))

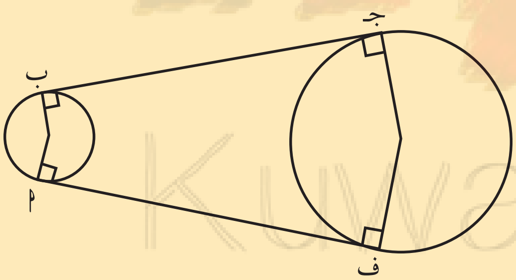
= ١٨٠° − (٦٥° + ٦٥°) = ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠°

حاول أن تحل



٧ في الشكل المقابل ل و ، ل هـ مماسان للدائرة، ب جـ مماس للدائرة عند النقطة د، أثبت أن المثلث ل ب جـ متطابق الضلعين.

مثال (٨) تطبيقات حياتية



يمثل الرسم المقابل دولاب (إطار) دراجة.

برهن أن ب جـ = أ ف.

الحل:

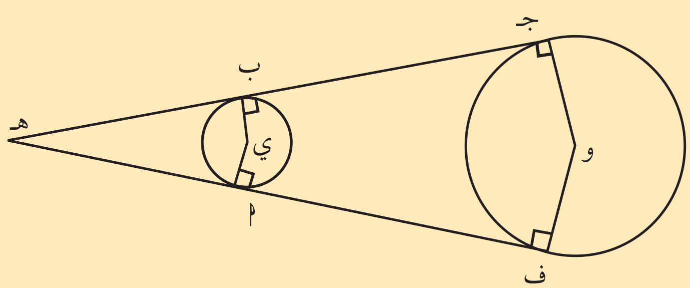
و جـ ، ي ب عموديان على ب جـ.

و ف ، ي أ عموديان على ف أ

المطلوب: إثبات أن ب جـ = أ ف

العمل:

نمد جـ ب ، ف أ حتى يتقاطعا في هـ.



البرهان:

∵ و جـ ⊥ ب جـ ، ي ب ⊥ ب جـ — معطى

∴ ب جـ مماس مشترك للدائرتين وبالمثل ف أ مماس مشترك للدائرتين — نظرية

هـ جـ ، هـ ف قطعتان مماستان للدائرة التي مركزها و ∴ هـ جـ = هـ ف — نظرية

كذلك هـ ب ، هـ أ قطعتان مماستان للدائرة التي مركزها ي ∴ هـ ب = هـ أ

هـ جـ − هـ ب = هـ ف − هـ ٲ

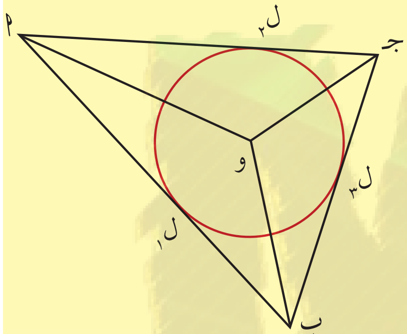
ب جـ = ٲ ف. بطرح المعادلتين

حاول أن تحل

٨ من المثال السابق بفرض أن الدائرتين متطابقتان.

أثبت أن ب جـ = ٲ ف إذا لم يتقاطع $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ مع $\overleftrightarrow{\text{ٲ ف}}$.

الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة) (Inscribed Circle of a Triangle)



هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث Circum Center.

فكِّر:

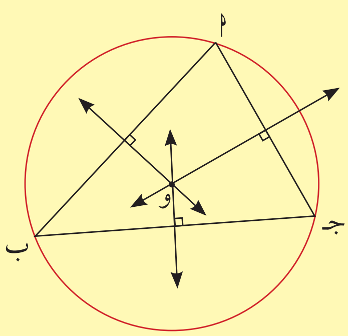
المثلثان ٲ و ل١، ٲ و ل٢ متطابقان. لماذا؟

ق(ل١ ٲ̂ و) = ق(ل٢ ٲ̂ و)

∴ $\overleftrightarrow{\text{و ٲ}}$ منصف الزاوية ٲ̂.

أثبت بالطريقة نفسها أن كلًّا من $\overleftrightarrow{\text{و ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و جـ}}$ منصف للزاوية ب̂، جـ̂ على الترتيب.

الدائرة المحيطة لمثلث (الخارجة) (Circumscribed Circle of a Triangle)



هي دائرة تمر بروؤس المثلث الثلاثة.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).

فكِّر:

و ب = و جـ لماذا؟

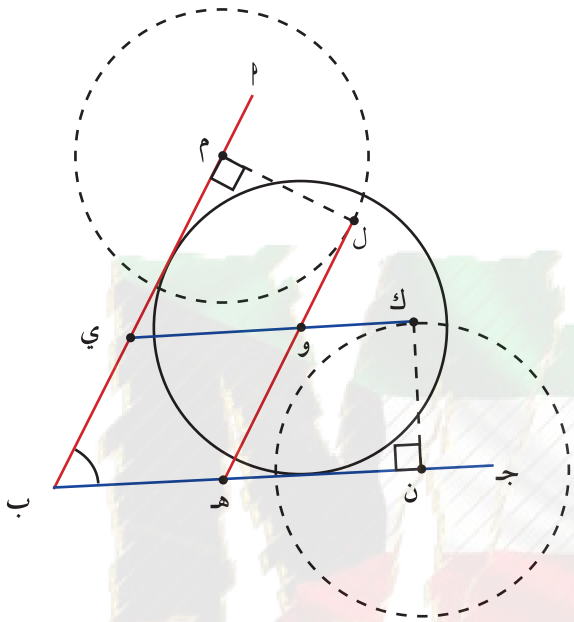
و ب = و ٲ لماذا؟

ماذا تستنتج؟

تدريب توضيحي (١):

$\overleftrightarrow{}$أ ب جـ زاوية قياسها ٦٠°. أنشئ دائرة مركزها و ، طول نصف قطرها ٢ سم بحيث تكون مماسة لشعاعي الزاوية $\overrightarrow{\text{ب أ}}$، $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$.

الحل:



المعطيات: ق(أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ٦٠°

المطلوب: إنشاء دائرة مركزها و، طول نصف قطرها = ٢ سم بحيث تكون مماسة لشعاعي الزاوية

العمل: من نقطة م تنتمي إلى $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ نرسم $\overline{\text{م ل}}$ عمودية على $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ طولها ٢ سم. من ل نرسم $\overleftrightarrow{\text{ل هـ}}$ // $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

من نقطة ن تنتمي إلى $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ نرسم $\overline{\text{ن ك}}$ عمودية على $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ طولها أيضًا ٢ سم.

من ك نرسم ك ي // $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$

ل هـ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ك ي}}$ = {و}. وهي مركز الدائرة.

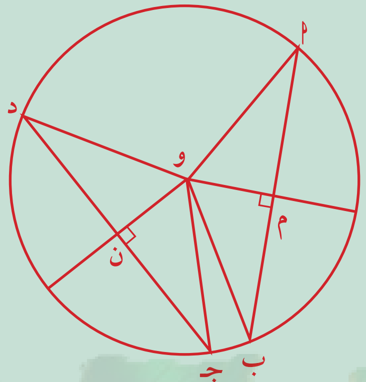
نرسم الدائرة التي مركزها و وطول نصف قطرها ٢ سم.

تدريب (٢):

أ ب جـ زاوية قياسها ٧٥°. أنشئ دائرة مركزها و، طول نصف قطرها ٣ سم بحيث تكون مماسة لشعاعي الزاوية $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$.

الحل:

الأوتار والأقواس
Chords and Arcs



سوف تتعلم
- استخدام الأوتار المتطابقة والأقواس والزوايا المركزية.
- خصائص الخطوط المستقيمة التي تمر بمركز الدائرة.

عمل تعاوني (استخدم الأدوات الهندسية)

في الشكل المقابل $\overline{وم} \cong \overline{ون}$.

١ قارن بين طولي $\overline{ءب}$ ، $\overline{جـ د}$. ماذا تلاحظ؟

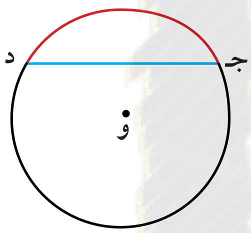
٢ قارن بين قياس الزاويتين ء$\hat{و}$ب، جـ$\hat{و}$د. ماذا تلاحظ؟

٣ أ أعد رسم الشكل المقابل بحيث يكون وم > ون.

ب قارن بين ءب، جـ د؛ ق(ء$\hat{و}$ب)، ق(جـ$\hat{و}$د).

جـ ماذا تلاحظ؟

الوتر (Chord) هو قطعة مستقيمة ينتمي طرفاها إلى دائرة.



يبيّن الشكل المقابل الوتر $\overline{جـ د}$ والقوس (Arc) $\overset{\frown}{جـ د}$ المناظر لهذا الوتر.

تتمحور النظرية التالية على العلاقة بين الزوايا المركزية في دائرة والأوتار والأقواس التي تحصرها.

نظرية (١)

في دائرة أو في دوائر متطابقة:

١ للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.

٢ الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.

٣ للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.

إثبات نظرية (١)

١ **المعطيات:** دائرة مركزها و، ق(ء$\hat{و}$ب) = ق(جـ$\hat{و}$د)

المطلوب: إثبات أن $\overline{ءب} \cong \overline{جـ د}$.

البرهان: المثلثان ءوب ، جـ ود فيهما:

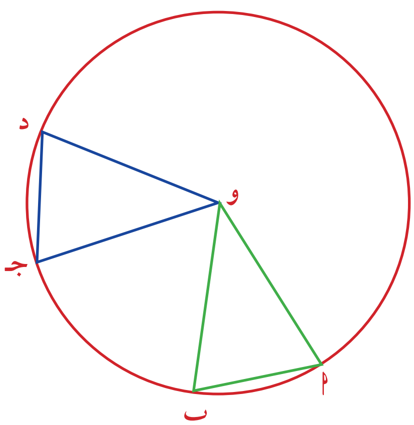
وء = وجـ = نق

وب = ود = نق

ق(ء$\hat{و}$ب) = ق(جـ$\hat{و}$د) معطى

المثلثان متطابقان (ض. ز. ض)

$\overline{ءب} \cong \overline{جـ د}$ تطابق الأضلاع المتناظرة



٢ **المعطيات:** $\overline{أب} \cong \overline{جـ د}$

المطلوب: إثبات أن $\overset{\frown}{أب} \cong \overset{\frown}{جـ د}$

البرهان:

$\overline{أب} \cong \overline{جـ د}$ ∴ $\triangle$ أوب $\cong \triangle$ جـ و د. لماذا؟

∴ ق($\widehat{أوب}$) = ق($\widehat{جـ و د}$) لماذا؟

باستخدام القانون ل = هـ^{د} نق

طول القوس = قياس الزاوية المركزية (بالراديان) × طول نصف القطر.

نستنتج أن $\overset{\frown}{أب} \cong \overset{\frown}{جـ د}$.

٣ **المعطيات:** $\overset{\frown}{أب} \cong \overset{\frown}{جـ د}$

المطلوب: ق($\widehat{أوب}$) = ق($\widehat{جـ و د}$)

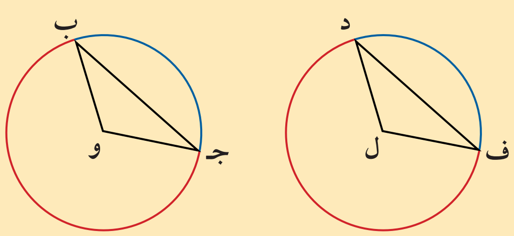
البرهان: $\overset{\frown}{أب} \cong \overset{\frown}{جـ د}$

∴ طول $\overset{\frown}{أب}$ = طول $\overset{\frown}{جـ د}$

ق($\widehat{أوب}$) × نق = ق($\widehat{جـ و د}$) × نق بالقسمة على نق

ق($\widehat{أوب}$) = ق($\widehat{جـ و د}$)

مثال (١)



في الشكل المقابل الدائرتان متطابقتان، $\overset{\frown}{ب جـ} \cong \overset{\frown}{د ف}$. ماذا تستنتج؟

الحل:

باستخدام النظرية السابقة

ق($\widehat{جـ و ب}$) = ق($\widehat{ف ل د}$)

$\overline{ب جـ} \cong \overline{د ف}$

حاول أن تحل

١ في الرسم أعلاه، إذا كان $\overline{ب جـ} \cong \overline{دف}$ ، فماذا تستنتج؟

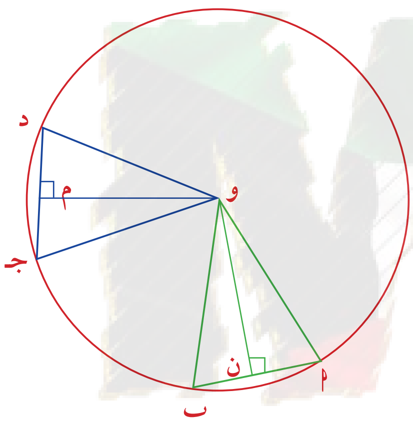
تبيّن النظرية التالية العلاقة بين وترين وبُعد كل منهما عن مركز الدائرة.

نظرية (٢)

١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.

إثبات نظرية (٢)



١ المعطيات: $\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جـ د}}$.

المطلوب: $\overline{\text{ون}} \cong \overline{\text{وم}}$.

البرهان:

و أ = و جـ = و ب = و د = نق

أب = جـ د — معطى

∴ Δ و أب $\cong$ Δ و جـ د — (ض. ض. ض)

مساحة المثلث و أب = مساحة المثلث و جـ د.

$\therefore \frac{\text{ون} \times \text{أب}}{٢} = \frac{\text{وم} \times \text{جـ د}}{٢}$

∵ أب = جـ د

∴ ون = وم

٢ المعطيات: $\overline{\text{ون}} \cong \overline{\text{وم}}$.

المطلوب: $\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جـ د}}$.

البرهان:

Δ ون أ $\cong$ Δ وم د — بضلع ووتر

∴ Δ و أب $\cong$ Δ و جـ د — لماذا؟

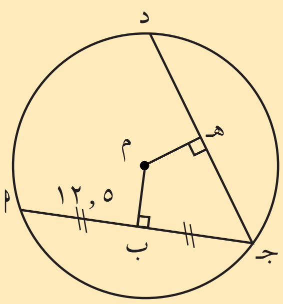
من التطابق ينتج أن:

أب = جـ د

معلومة علمية:

إذا تطابق مثلثان فإن الأعمدة المرسومة من الرأس إلى القاعدة المناظرة تكون متطابقة.

مثال (٢)



في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة. م ب = م هـ ، أوجد طول جـ د. فسّر.

الحل:

المعطيات:

جـ د ، جـ أ وتران في الدائرة.

ب منتصف جـ أ . ب أ = ١٢,٥ .

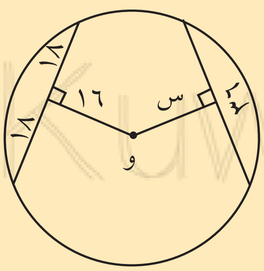
هـ ∈ جـ د حيث م هـ ⊥ جـ د ، م هـ = م ب.

المطلوب: إيجاد طول جـ د.

البرهان:

أ ب = ب جـ = ١٢,٥	معطى
أ ب + ب جـ = أ جـ	
٢٥ = أ جـ	بالتعويض
∵ م هـ = م ب	معطى
∴ جـ د = أ جـ	نظرية
جـ د = ٢٥	بالتعويض

حاول أن تحل



٢ دائرة مركزها و.

أوجد قيمة س في الشكل المقابل، وفسّر إجابتك.

في الدائرة، للمنصف العمودي على الوتر خواص هندسية مهمة.

نظرية (٣)

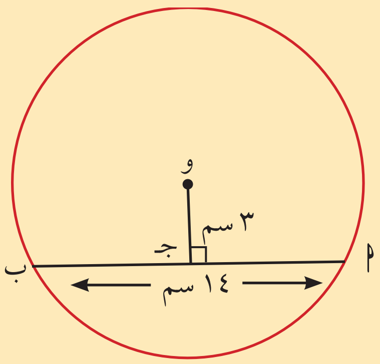
١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.

٢ القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عموديًّا على هذا الوتر.

٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

مثال (٣)

أ في الشكل المقابل، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و.



الحل:

المعطيات:

$\overline{\text{أب}}$ وتر في دائرة مركزها و. أب = ١٤ سم. $\overline{\text{وجـ}} \perp \overline{\text{أب}}$. وجـ = ٣ سم

المطلوب: إيجاد طول نصف قطر الدائرة

العمل: نرسم $\overline{\text{وب}}$

البرهان:

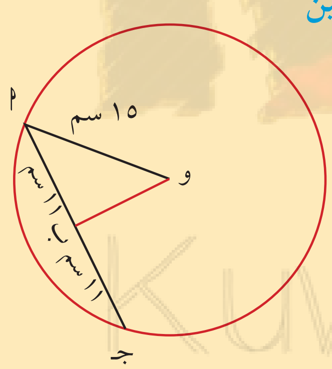
ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أب = $\frac{١}{٢}$ (١٤) = ٧ سم — القطر العمودي على وتر ينصفه

(وب)^{٢} = (وجـ)^{٢} + (جـ ب)^{٢} = (٣)^{٢} + (٧)^{٢} = ٥٨ — نظرية فيثاغورث

وب = $\sqrt{٥٨}$ ≈ ٧,٦ سم — الجذر التربيعي لكلا الطرفين

طول نصف قطر الدائرة يساوي حوالي ٧,٦ سم.

ب في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر.



الحل:

المعطيات: و مركز الدائرة.

$\overline{\text{وأ}}$ نصف قطر الدائرة، وأ = ١٥ سم. $\overline{\text{أجـ}}$ وتر في الدائرة.

ب ∈ $\overline{\text{أجـ}}$، ب أ = ب جـ = ١١ سم.

المطلوب: إيجاد البعد بين مركز الدائرة و والوتر $\overline{\text{أجـ}}$.

البرهان:

$\overline{\text{وب}} \perp \overline{\text{أب}}$ — القطر الذي ينصف الوتر (ليس القطر) هو عمودي على الوتر

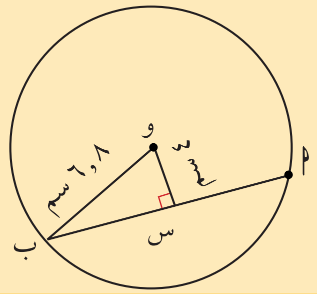
(وب)^{٢} + (١١)^{٢} = (١٥)^{٢} — نظرية فيثاغورث في Δوب أ

(وب)^{٢} = ١٠٤

وب ≃ ١٠,٢ سم — الجذر التربيعي لكلا الطرفين

البعد بين مركز الدائرة والوتر ≃ ١٠,٢ سم.

حاول أن تحل

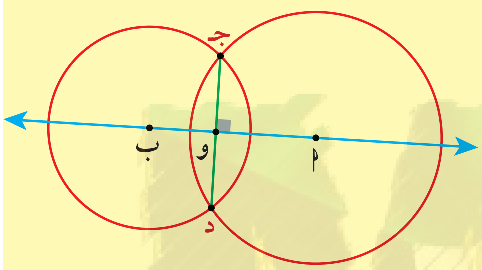


٣ استخدم الشكل المقابل لإيجاد:

أ طول الوتر $\overline{أب}$.

ب المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر $\overset{\frown}{أب}$.

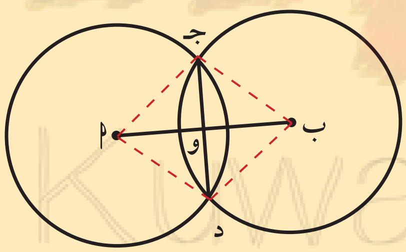
نتيجة



خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.

مثال (٤)

يمثل الشكل المقابل دائرتين متطابقتين. $\overline{جـ د}$ وتر مشترك. إذا كان أ ب = ٢٤ سم، نق = ١٣ سم. فما طول $\overline{جـ د}$؟



الحل:

المعطيات: دائرتان متطابقتان مركزاهما أ ، ب.

جـ د وتر مشترك.

أب = ٢٤، طول نصف قطر كل من الدائرتين = ١٣ سم.

المطلوب: إيجاد طول جـ د

العمل: نرسم $\overline{أجـ}$، $\overline{أد}$، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{ب د}$.

البرهان:

في الشكل أدب جـ فيه أ د = د ب = ب جـ = جـ أ = نق = ١٣ سم

∴ أ د ب جـ معين.

والقطران $\overline{أب}$، $\overline{جـ د}$ متعامدان وينصف كل منهما الآخر.

في Δ أوجـ، ق(أ وَ جـ) = ٩٠° ∴ Δ أوجـ قائم الزاوية و.

(وجـ)^{٢} = (أجـ)^{٢} – (وأ)^{٢} نظرية فيثاغورث

(وجـ)^{٢} = (١٣)^{٢} – $(\frac{٢٤}{٢})^{٢}$ = ٢٥

وجـ = ٥

جـ د = ٢ × جـ و (و منتصف $\overline{جـ د}$)

= ٢ × ٥ = ١٠ سم.

طول جـ د يساوي ١٠ سم.

حاول أن تحل

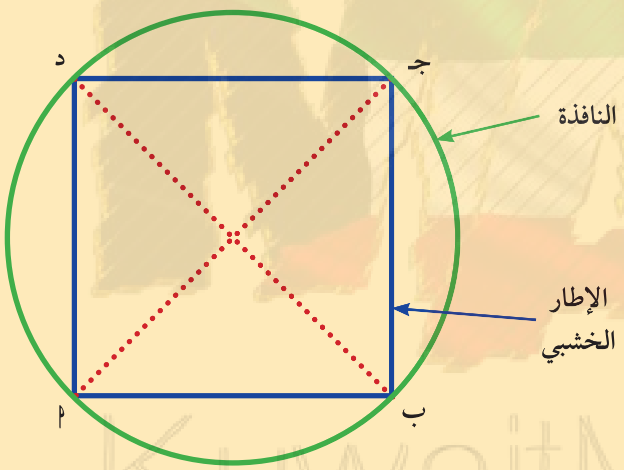
٤ في مثال (٤)، إذا كان جـ د = ١٤ سم، نحو = ١٣ سم ، فأوجد طول $\overline{\text{أب}}$.

مثال (٥) تطبيقات حياتية

يريد راشد وضع إطار خشبي مربع الشكل داخل نافذة دائرية الشكل بحيث تلامس رؤوس المربع النافذة.

إذا كان طول قطر دائرة النافذة = ١,٦ متر، فما طول ضلع المربع الخشبي؟

ثم أوجد طول العمود النازل من مركز الدائرة على أحد أضلاع المربع.



الحل:

المعطيات: لدينا دائرة طول قطرها ١,٦ م.

مربع تقع رؤوسه على الدائرة

المطلوب: إيجاد طول ضلع المربع.

إيجاد طول العمود النازل من مركز الدائرة على أحد الأضلاع

البرهان:

ليكن المربع أ ب جـ د.

طول قطر الدائرة يساوي طول قطر المربع.

∴ أجـ = ١,٦ م.

ولكن أجـ = أب $\sqrt{٢}$ (العلاقة بين طول ضلع مربع وطول قطره)

∴ أب = $\frac{\text{أجـ}}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{١,٦}{\sqrt{٢}}$ ≃ ١,١٣ .

طول ضلع المربع يساوي ١,١٣ متر تقريبًا.

∴ طول العمود النازل من مركز الدائرة على أحد أضلاع المربع = $\frac{١}{٢}$ × طول ضلع المربع لماذا؟

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١,٦}{\sqrt{٢}}$

= ٠,٥٦٦ م.

حاول أن تحل

٥ في مثال (٥) أعلاه، أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كان طول ضلع المربع يساوي ١,٥ متر.

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية
Central and Inscribed Angles

سوف تتعلم

- الزاوية المركزية.
- الزاوية المحيطية.
- الزاوية المماسية على الدائرة.
- العلاقة بين قياس الزاوية المركزية وقياس الزاوية المحيطية المشتركة في القوس نفسه.
- العلاقة بين قياس الزاوية المماسية وقياس القوس المحصور بين ضلعيها.

الأدوات المستخدمة:
مسطرة، منقلة، فرجار

دعنا نفكر ونتناقش

١ في السداسي المنتظم المقابل (شكل ١)، أثبت أن قياس القوس أ⁀ب يساوي ٦٠°.

٢ أ ما قياس الزاوية المركزية أمٓب؟ (يمكنك استخدام المنقلة).

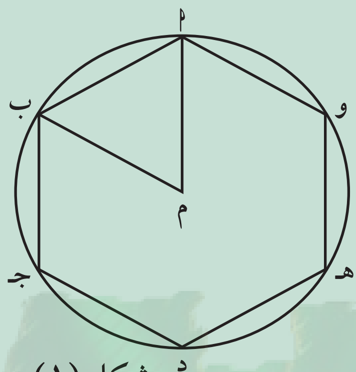
ب ما قياس كل من الزوايا المحيطية: أوٓب؟ أهـٓب؟ أدٓب؟ أجٓب؟ ماذا تلاحظ؟

٣ في الشكل الخماسي المنتظم (شكل ٢)، أثبت أن قياس القوس أ⁀ب يساوي ٧٢°.

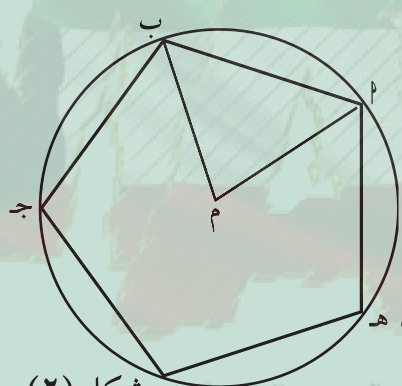
٤ أ ما قياس الزاوية المركزية أمٓب؟

ب ما قياس كل من الزوايا: أهـٓب؟ أدٓب؟ أجٓب؟ ماذا تلاحظ؟

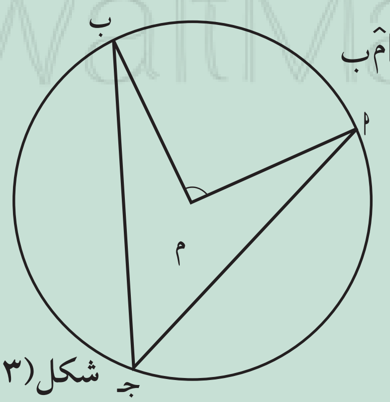
٥ في الشكل (٣) هل توجد علاقة بين قياس الزاوية أمٓب وقياس الزاوية أجٓب وقياس القوس أ⁀ب؟



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

١ – الزاوية المركزية والزاوية المحيطية Central Angle and Inscribed Angle

تعريف:

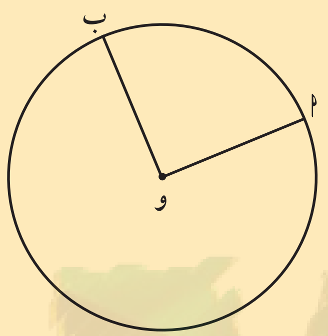
١ الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المركزية**.

٢ الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المحيطية**.

نظرية (١)

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.

مثال (١)



في الشكل المقابل دائرة مركزها و. إذا كان ق(أب) = ٩٠°.
فأوجد ق(أوب).

الحل:

المعطيات: دائرة مركزها و

ق(أب) = ٩٠°

المطلوب: إيجاد ق(أوب).

البرهان:

و مركز الدائرة

(أوب) زاوية مركزية تقابل (أب)

∴ ق(أب) = ق (أوب)

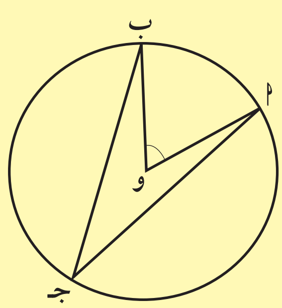
∴ ق(أوب) = ٩٠°

حاول أن تحل

١ إذا كان قياس زاوية مركزية ٣٥°، فأوجد قياس القوس على الدائرة المحصور بين ضلعيها.

نظرية (٢)

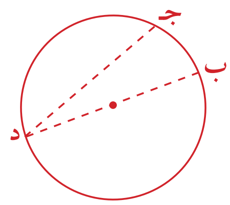
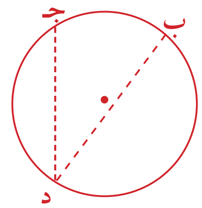
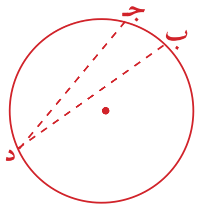
في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.



ق(أجب) = $\frac{1}{2}$ ق(أوب) = $\frac{1}{2}$ ق(أب)

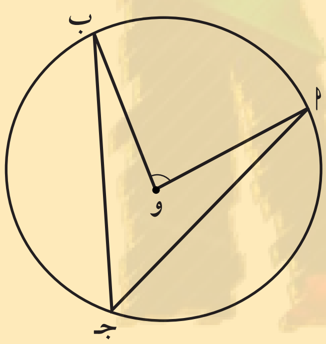
قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

هناك ٣ حالات يجب أخذها في الاعتبار.

الحالة ١	الحالة ٢	الحالة ٣
		
يتنمي مركز الدائرة إلى أحد ضلعي الزاوية المحيطية	مركز الدائرة داخل الزاوية المحيطية	مركز الدائرة خارج الزاوية المحيطية

مثال (٢)

في الشكل المقابل: إذا كان ق(⌒أب) = ٨٠° فأوجد ق(أجـب).



الحل:

المعطيات: دائرة مركزها و. أ، ب، جـ نقاط تنتمي إلى الدائرة. ق(⌒أب) = ٨٠°

المطلوب: إيجاد ق(أجـب).

البرهان:

أجـب زاوية محيطية في الدائرة ∴ ق(أجـب) = $\frac{١}{٢}$ ق(⌒أب)

= $\frac{١}{٢}$ (٨٠°) = ٤٠°

وبالتالي ق(أجـب) = ٤٠°

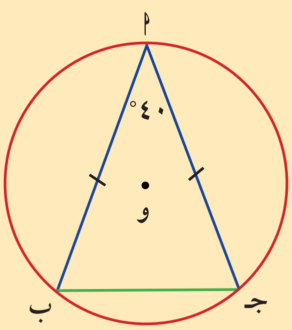
حاول أن تحل

٢ إذا كان قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي ٥٤°، فأوجد قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

مثال (٣)

في الشكل المقابل أب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث أ، ب، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و، ق(بأجـ) = ٤٠°.

أوجد قياس كل من الأقواس ⌒أب، ⌒ب جـ، ⌒أجـ .



الحل:

المعطيات: دائرة مركزها و. أ، ب، جـ نقاط تنتمي إلى الدائرة.

Δأب جـ متطابق الضلعين، أب = أجـ.

ق(بأجـ) = ٤٠°

المطلوب: إيجاد قياس كل من الأقواس أب⌒، ب جـ⌒، أجـ⌒

البرهان:

زوايا المثلث هي زوايا محيطية في الدائرة ∴ ق(ب أ̂ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(ب جـ⌒)

ومنه: ٤٠° = $\frac{١}{٢}$ ق(ب جـ⌒). ∴ ق(ب جـ⌒) = ٢ × ٤٠° = ٨٠°.

∴ ق(جـ أ ب⌒) = ٣٦٠° − ٨٠° = ٢٨٠°

∵ أب = أجـ

∴ ق(أب⌒) = ق(أجـ⌒) = $\frac{٢٨٠}{٢}$ = ١٤٠°.

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣) إذا كان جـ هـ⃖، منصف الزاوية الداخلية أ جـ̂ ب ويقطع الدائرة في النقطة هـ.

ما قياس القوس الأصغر أهـ⌒؟

مثال (٤)

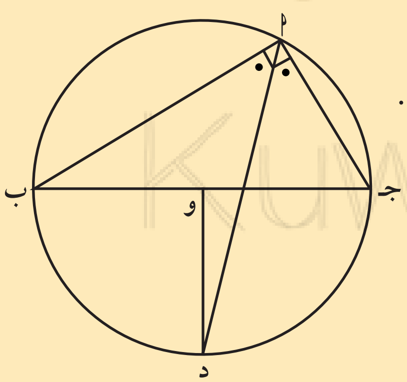
في الشكل المقابل دائرة مركزها و. أثبت أن د و‾ ⊥ ب جـ‾ .

الحل:

المعطيات: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية أ، رؤوسه الثلاثة تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و.

أد⃖ منصف (ب أ̂ جـ) ويقطع الدائرة في د.

المطلوب: إثبات أن د و‾ ⊥ ب جـ‾



البرهان:

∴ ق(جـ أ̂ ب) = ٩٠° — معطى

أد⃖ منصف الزاوية ب أ̂ جـ

∴ ق(جـ أ̂ د) = ٤٥°

∵ ق(جـ أ̂ د) = $\frac{١}{٢}$ ق(د جـ⌒) — نظرية

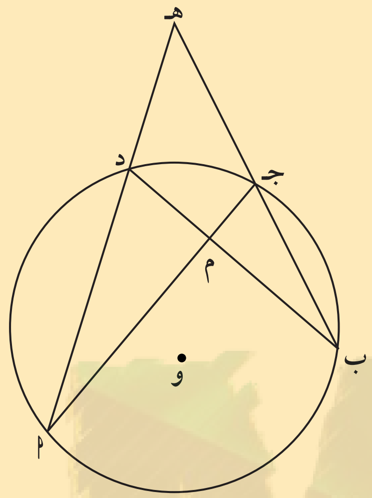
∴ ق(د جـ⌒) = ٩٠°، ق(جـ و̂ د) = ٩٠° — نظرية

∴ د و‾ ⊥ ب جـ‾.

حاول أن تحل

٤ في المثال (٤)، إذا كان ق(أ ب̂ جـ) = ٣٠°، أوجد ق(أ د̂ ب).

مثال (٥)



في الشكل المقابل، أثبت أن: ق(ب م̂ أ) = $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{بأ}}) + \text{ق}(\overset{\frown}{\text{جـ د}})}{٢}$.

الحل:

المعطيات: أ، ب، جـ، د نقاط تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و.

$\overline{\text{أجـ}} \cap \overline{\text{ب د}}$ = {م} ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}} \cap \overleftarrow{\text{أ د}}$ = {هـ}

المطلوب: إثبات أن ق(ب م̂ أ) = $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{بأ}}) + \text{ق}(\overset{\frown}{\text{جـ د}})}{٢}$

البرهان:

(ب م̂ أ) هي زاوية خارجة عن المثلث أ م د.

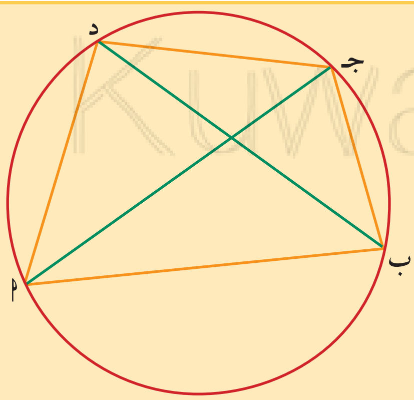
ق(ب م̂ أ) = ق(ب د̂ أ) + ق(م أ̂ د)

= $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{بأ}}$) + $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{جـ د}}$) = $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{بأ}}) + \text{ق}(\overset{\frown}{\text{جـ د}})}{٢}$

حاول أن تحل

٥ في المثال (٥)، أثبت أن ق(ب هـ̂ أ) = $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{بأ}}) - \text{ق}(\overset{\frown}{\text{جـ د}})}{٢}$

مثال (٦)



أ ب جـ د شكل رباعي دائري.

أثبت أن ق(أب̂د) = ق(أجـ̂د).

الحل:

المعطيات: أ ب جـ د شكل رباعي دائري.

المطلوب: إثبات تساوي قياسي الزاويتين (أب̂د)، (أجـ̂د).

البرهان: أ ب جـ د شكل رباعي دائري.

أب̂د زاوية محيطية ∴ ق(أب̂د) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{أ د}}$) (١)

أجـ̂د زاوية محيطية ∴ ق(أجـ̂د) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{أ د}}$) (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن ق (أب̂د) = ق (أجـ̂د).

معلومة رياضية:

الشكل الرباعي الدائري هو مضلع رباعي تقع رؤوسه على دائرة.

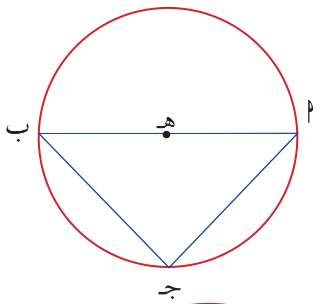
حاول أن تحل

٦ في المثال (٦)، أثبت أن ق (أد̂ب) = ق (أجـ̂ب)

تدريب (١):

إذا كان ٲب قطر في الدائرة التي مركزها هـ، جـ ∈ الدائرة ،

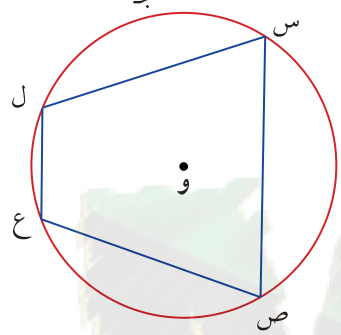
أثبت أن (ٲ جـ ب) زاوية قائمة.



تدريب (٢):

س ص ع ل شكل رباعي دائري.

أثبت أن ق(ل س ص) + ق(ل ع ص) = ١٨٠°



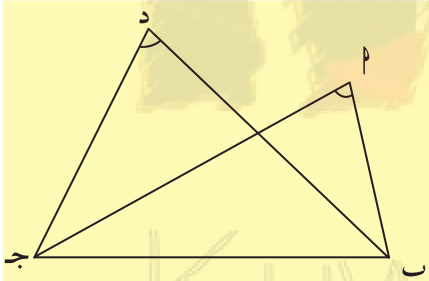
نتائج

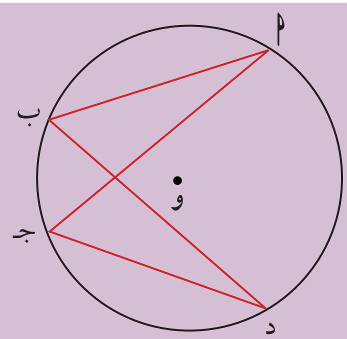
١ كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.

٢ كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.

٣ كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.

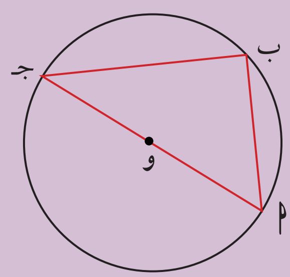
٤ في الشكل إذا تطابقت الزاويتان ٲ، د المرسومات على القاعدة ب جـ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل ٲ ب جـ د رباعيًا دائريًا.





ٲب د، ٲجـ د تحصران ٲد

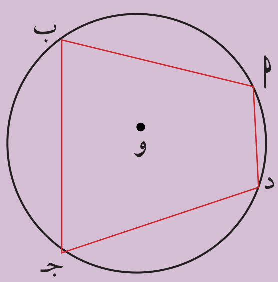
∴ ق(ٲب د) = ق(ٲجـ د)



ٲب جـ تحصر ٲجـ (نصف دائرة)

∴ ق(ٲب جـ) = ٩٠°

(ٲب جـ) زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة وهي زاوية قائمة



ق(ٲ) + ق(جـ) = ١٨٠°

ق(ب) + ق(د) = ١٨٠°

تدريب (٣):

لتكن ب نقطة تنتمي إلى الدائرة التي مركزها ن

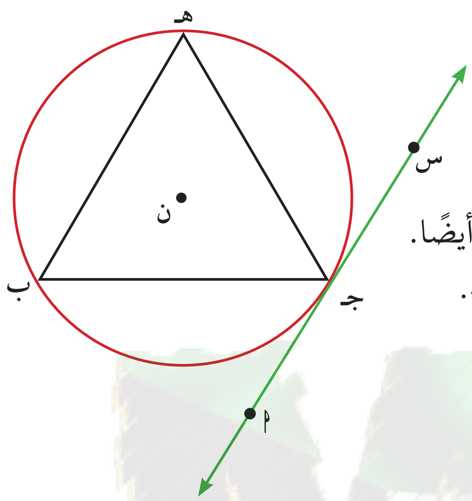
$\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة جـ.

$\overline{\text{جـ ب}}$ وتر في الدائرة يمر بنقطة التماس جـ.

يسمى $\overline{\text{جـ ب}}$ وتر التماس

الزاوية (أ جـ^ ب) تسمى زاوية مماسية، الزاوية (س جـ^ ب) تسمى زاوية مماسية أيضًا.

الزاوية (جـ هـ^ ب) تشترك مع الزاوية المماسية في القوس نفسه باستخدام المنقلة.



أكمل:

ق(أ جـ^ ب) =

ق(جـ هـ^ ب) =

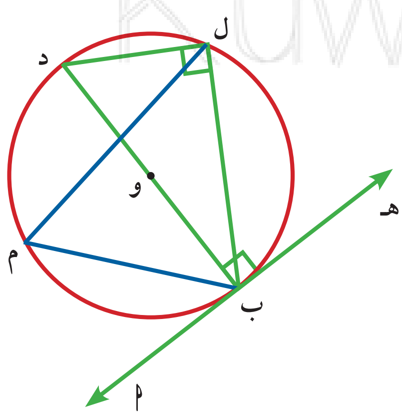
ماذا تستنتج؟

نظرية (٣)

(١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

إثبات نظرية (٣)



المعطيات:

$\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ مماس للدائرة في ب.

$\overline{\text{ب ل}}$ وتر في الدائرة.

المطلوب:

إثبات أن ق(هـ ب^ ل) = ق(ب م^ ل) حيث م نقطة تنتمي إلى الدائرة.

العمل: نرسم $\overline{\text{ب د}}$ قطر للدائرة يمر بنقطة التماس ب.

البرهان (١):

Δب ل د قائم الزاوية ل لأن $\overline{\text{ب د}}$ قطر في الدائرة.

ق(هـ ب^ ل) + ق(ل ب^ د) = ٩٠° خواص المماس للدائرة (١)

ق(ل ب^ د) + ق(ب د^ ل) = ٩٠° (Δ ب ل د قائم الزاوية ل) (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن:

ق(ل بَ د) + ق(هـ بَ ل) = ق(ب دَ ل) + ق(ل بَ د)

∴ ق(هـ بَ ل) = ق(ب دَ ل)

ولكن ق(ب دَ ل) = ق(ب مَ ل)   لماذا؟

∴ ق(هـ بَ ل) = ق(ب مَ ل) وهو المطلوب

البرهان (٢):

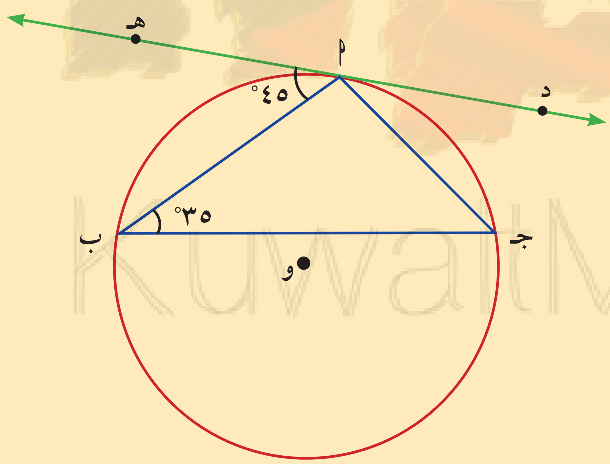
ق(هـ بَ ل) = ق(ب مَ ل) من (١).

∵ ق(ب مَ ل) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒ب ل)   (خاصية الزاوية المحيطية)

∴ ق(هـ بَ ل) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒ب ل). وهو المطلوب

مثال (٧)

في الشكل المقابل إذا كان ⟷د هـ مماسًا للدائرة عند أ، فأوجد ق(جـ أَ ب).



الحل:

المعطيات:

⟷د هـ مماس للدائرة عند أ.

ق(هـ أَ ب) = ٤٥°، ق(أ بَ جـ) = ٣٥°

المطلوب: إيجاد ق(جـ أَ ب).

البرهان:

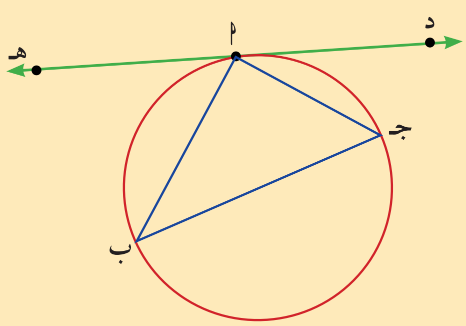
ق(أ جَـ ب) = ق(هـ أَ ب) = ٤٥°   نظرية

∵ ق(جـ أَ ب) + ق(أ جَـ ب) + ق(أ بَ جـ) = ١٨٠°

∴ ق(جـ أَ ب) = ١٨٠° − ق(أ جَـ ب) − ق(أ بَ جـ)

ق(جـ أَ ب) = ١٨٠° − ٤٥° − ٣٥° = ١٠٠°

حاول أن تحل



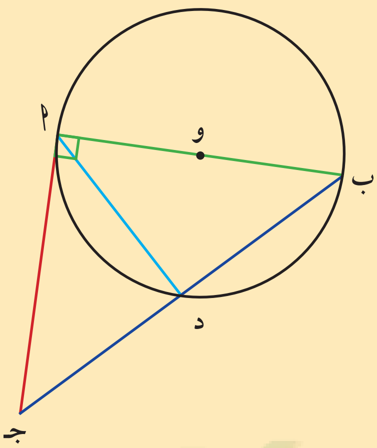
٧ في الشكل المقابل، لدينا: ق(د أَ جـ) = ٤٠°، ق(هـ أَ ب) = ٥٠°.

أ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ.

ب أثبت أن $\overline{\text{جـ ب}}$ قطر للدائرة.

مثال (٨)

أب قطر في دائرة مركزها و. نرسم أجـ مماسًا للدائرة بحيث يكون أجـ = ٢ سم . ب جـ تقطع الدائرة في د. أثبت أن أد = جـ د.



الحل:

المعطيات:

أب قطر في دائرة مركزها و. أجـ مماس للدائرة، أجـ = ٢ سم، ب جـ تقطع الدائرة في د

المطلوب: إثبات أن أد = جـ د

العمل: نرسم أد

البرهان:

ق(جـ أ د) = ق(أ ب د) (نظرية الزاوية المماسية والزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه) (١)

أجـ ⊥ أب (أجـ مماس للدائرة)

أجـ = أ ب = ٢ سم

∴ Δ أ ب جـ قائم الزاوية أ متطابق الضلعين.

ومنه ق(أ جـ د) = ق(أ ب د) (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن ق(جـ أ د) = ق(أ جـ د)

Δ أ د جـ متطابق الضلعين ∴ أد = جـ د

حاول أن تحل

٨ م ت مماس لدائرة مركزها و. م ن وتر في الدائرة بحيث يكون م ن = م ت. (م نقطة التماس) ت ن تقطع الدائرة في ل.

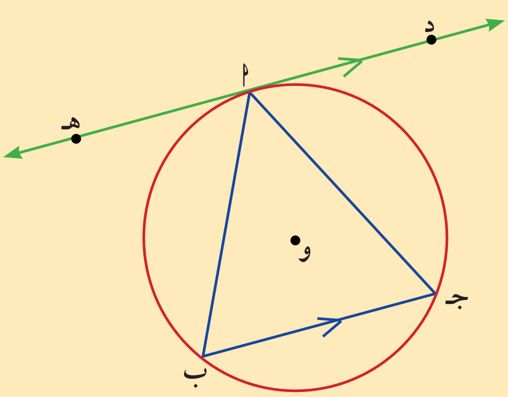
أثبت أن Δ ت ل م متطابق الضلعين (ل ت = ل م)

مثال (٩)

في الشكل المقابل، د هـ مماس للدائرة عند النقطة أ،

ب جـ وتر في الدائرة موازٍ للمماس د هـ.

أثبت أن المثلث أب جـ متطابق الضلعين.



الحل:

المعطيات: د هـ مماس للدائرة عند النقطة أ. د هـ // ب جـ

المطلوب: أثبت أن Δ أب جـ متطابق الضلعين.

البرهان

∵ $\overleftrightarrow{دهـ}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ ق(د$\hat{أ}$جـ) = ق(أ$\hat{جـ}$ب)   بالتبادل والتوازي (١)

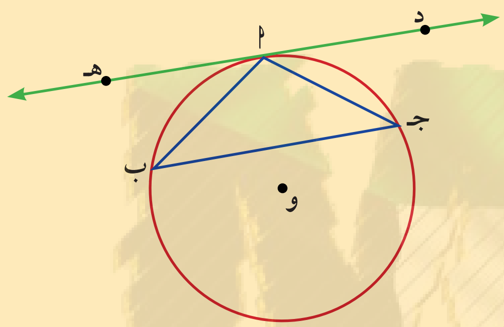
∵ ق(د$\hat{أ}$جـ) = ق(أ$\hat{ب}$جـ)   زاوية مماسية وزاوية محيطية تحصران القوس نفسه $\overset{\frown}{أجـ}$ (٢)

(١) ، (٢) تعطي: ق(أ$\hat{جـ}$ب) = ق(أ$\hat{ب}$جـ)

ومنه: أ جـ = أ ب

أي أن المثلث متطابق الضلعين

حاول أن تحل



٩ في الشكل المقابل، إذا كان لدينا $\overleftrightarrow{دهـ}$ مماس للدائرة عند النقطة أ.

المثلث أب جـ متطابق الضلعين (أب = أجـ).

أثبت أن $\overleftrightarrow{دهـ}$ // $\overline{ب جـ}$

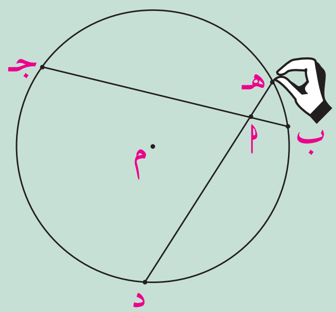
الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس
Circle: Intersecting Chords and Tangent

سوف تتعلم

- الأوتار المتقاطعة.
- المماس.
- العلاقة بين وترين متقاطعين داخل الدائرة.
- العلاقة بين طول القطع المماسية وطول القاطع.

الأدوات المستخدمة:
مسطرة، منقلة، فرجار

عمل تعاوني



١ أ ارسم دائرة مركزها م، ثم ارسم وترين د هـ ، ب جـ يتقاطعان في نقطة أ.

ب قس طول $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{هـأ}}$ ، $\overline{\text{أد}}$.

أوجد نواتج الضرب أب × أجـ، أهـ × أد.

جـ كرر الرسم والقياس واكتب ما تلاحظه.

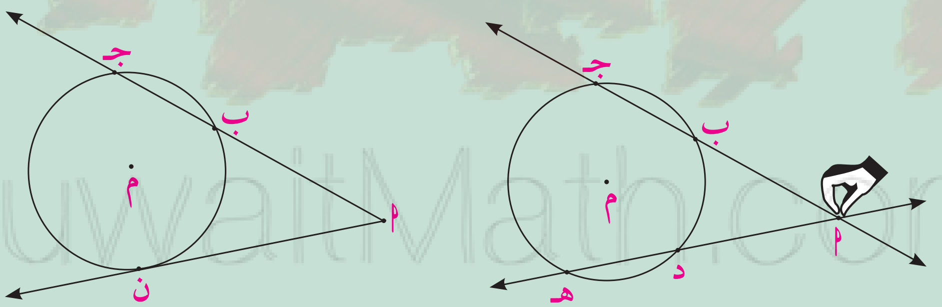
د حاول أن تكتشف علاقة ما بين نواتج الضرب.

هـ خمّن العلاقة بين نواتج ضرب أطوال الأجزاء التي ينقسم إليها وتران متقاطعان في دائرة.

٢ أ ارسم دائرة أخرى، ثم ارسم قاطعين يقطعان الدائرة من نقطة خارج هذه الدائرة.

ب قس طول: $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{أد}}$ ، $\overline{\text{أهـ}}$ وأوجد نواتج الضرب: أب × أجـ ، أهـ × أد.

جـ خمّن علاقة عامة بالنسبة إلى قاطعين من نقطة خارج دائرة.



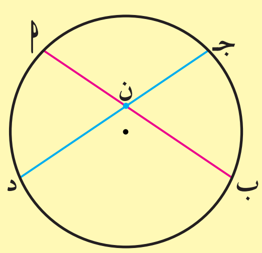
٣ من نقطة خارج دائرة م ارسم $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ يقطع الدائرة في ب، جـ ثم مماسًّا للدائرة $\overleftrightarrow{\text{أن}}$ يمسها في ن. ابحث عن العلاقة بين أب × أجـ، (أن)^{٢} مستفيدًا من تخمينك السابق.

١ – تقاطع الأوتار داخل الدائرة
Intersecting Chords Inside the Circle

نظرية (١)

إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر.

ن أ × ن ب = ن جـ × ن د

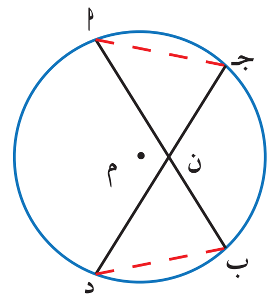


برهان نظرية (١)

المعطيات: $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ وتران متقاطعان في النقطة ن.

المطلوب: إثبات أن: ن أ × ن ب = ن جـ × ن د

العمل: نرسم $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$.

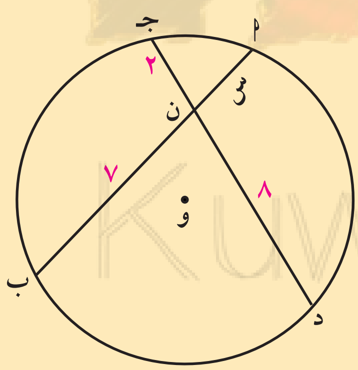


البرهان:

ق(أنَ جـ) = ق(دنَ ب)	زاويتان متقابلتان بالرأس
ق(بَ) = ق(جَـ)	زاويتان محيطيتان مرسومتان على القوس $\overset{\frown}{\text{أد}}$ نفسه
∆أن جـ ~ ∆د ن ب	تطابق الزوايا
$\frac{\text{ن أ}}{\text{دن}} = \frac{\text{ن جـ}}{\text{ن ب}}$	تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة في المثلثين المتشابهين
ن أ × ن ب = ن جـ × ن د	

مثال (١)

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

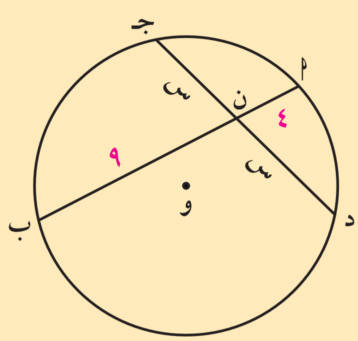


الحل:

ن جـ × ن د = ن أ × ن ب	نظرية
٢ × ٨ = س × ٧	بالتعويض
١٦ = ٧س	بالتبسيط
$\frac{١٦}{٧} = \frac{٧س}{٧}$	بالقسمة
س = $\frac{١٦}{٧}$	

حاول أن تحل

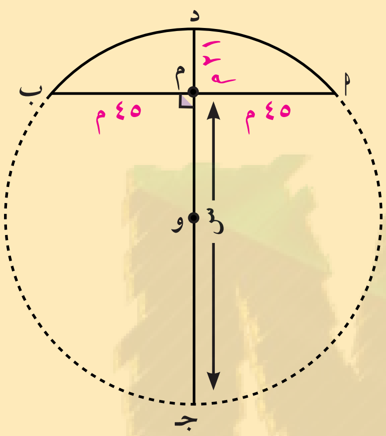
١ في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



مثال (٢)

هندسة معمارية: أنشئ جسر مشاة لعبور أحد الأنهار وكان قوس هذا الجسر على شكل قوس من الدائرة، بحيث كان طول الوتر الواصل بين طرفي الجسر في هذه الدائرة ٩٠ م. إذا كان طول العمود المقام من منتصف الوتر ٢١ م، كما في الشكل.
أوجد طول قطر الدائرة.

بنى القدماء الجسور فوق الأنهار على شكل قوس دائرة مع دعامات جانبية. وهذه الدعامات مهمة لأنها تتحمل كل ثقل الجسر.



الحل:

المعطيات: طول الوتر = ٩٠م   طول العمود = ٢١م

المطلوب: إيجاد طول قطر الدائرة

البرهان: ∵ العمود المنصف لوتر يمر بمركز الدائرة (نظرية)

∴ د جـ قطر في الدائرة.

من تقاطع القطر والوتر نجد أن:

س × ٢١ = ٤٥ × ٤٥

س = $\frac{٤٥ \times ٤٥}{٢١}$ = ٩٦,٤٣ تقريبًا

طول القطر ≈ ٢١ + ٩٦,٤٣

≈ ١١٧,٤٣

طول القطر = ١١٧ مترًا تقريبًا.

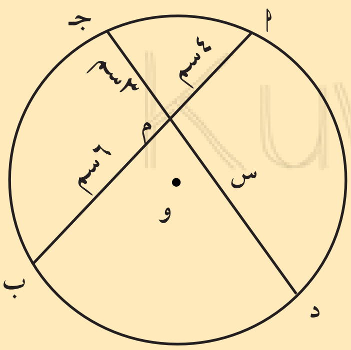
حاول أن تحل

٢ في الدائرة المقابلة التي مركزها و:

م أ = ٤ سم، م ب = ٦ سم ، م جـ = ٣ سم ، م د = س.

أ أوجد قيمة س.

ب أوجد البعد بين المركز و والوتر $\overline{\text{د جـ}}$ إذا علمت أن طول نصف قطر الدائرة يساوي ٦ سم.

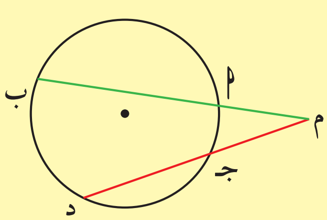


٢ - تقاطع الأوتار خارج الدائرة Intersecting Chords Outside the Circle

نتيجة (١)

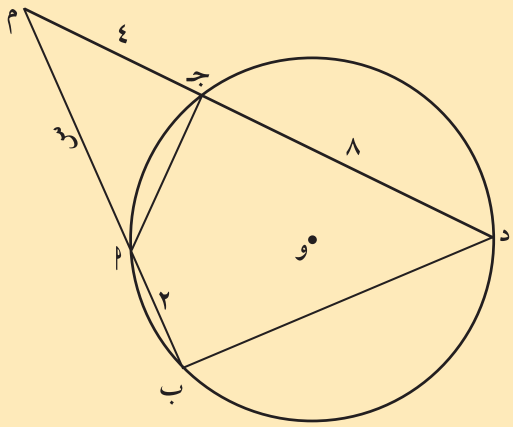
إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

م أ × م ب = م جـ × م د.



مثال (٣)

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



الحل:

المعطيات: $\overline{\text{ب أ}}$ ، $\overline{\text{د جـ}}$ وتران للدائرة التي مركزها ويتقاطع امتدادهما خارجها عند النقطة م.

المطلوب: إيجاد قيمة س

البرهان:

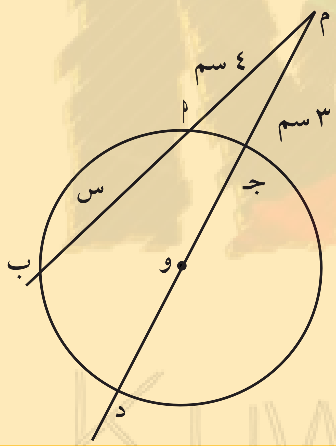
م أ × م ب = م جـ × م د	نتيجة
س(س + ٢) = ٤(٤ + ٨)	بالتعويض
س^{٢} + ٢س − ٤٨ = ٠	بالتبسيط
س = $\frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$	باستخدام المميز
س = ٦ أو س = −٨	الحلول

فتكون قيمة س = ٦ لأن س = −٨ مرفوضة

حاول أن تحل

٣ في الشكل المقابل، دائرة مركزها و. طول نصف قطرها يساوي ٤ سم.

أوجد قيمة س.



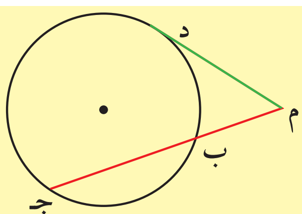
٣ − تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج دائرة

Intersection Between Tangent and Secant from any Point Outside of a Circle

نتيجة (٢)

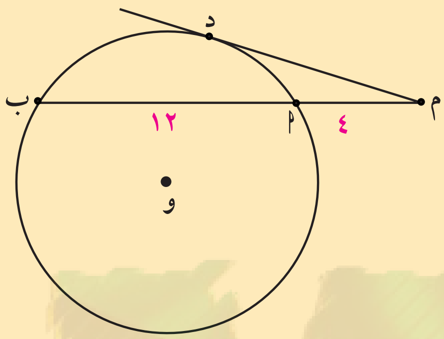
إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

(م د)^{٢} = م ب × م جـ.



مثال (٤)

في الشكل المقابل، أوجد طول القطعة المماسية $\overline{\text{م د}}$ علمًا بأن: مأ = ٤ سم ، أب = ١٢ سم.



الحل:

نجد طول $\overline{\text{م ب}}$.

م ب = ٤ + ١٢ = ١٦

نكتب: $(\text{م د})^{٢}$ = م أ × م ب   نتيجة

$(\text{م د})^{٢}$ = ٤ × ١٦   بالتعويض

$(\text{م د})^{٢}$ = ٦٤   بالتبسيط

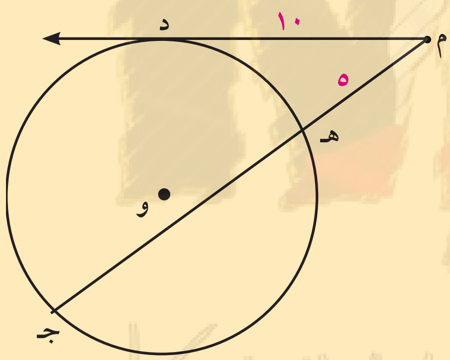
م د = ٨   بإيجاد الجذر التربيعي

حاول أن تحل

٤ في الشكل المقابل، $\overline{\text{م د}}$ قطعة مماسية حيث م د = ١٠

م هـ = ٥.

أوجد طول $\overline{\text{هـ جـ}}$.



مثال (٥)

أراد أحد الأشخاص معرفة طول القطعة المماسية من النقطة أ إلى النقطة ب على الدائرة، فأخذ مسطرة ووضع الصفر عند النقطة أ فوجد أن المسطرة تتقاطع مع الدائرة عند النقطة جـ بحيث أجـ = ٤ سم وعند النقطة د بحيث أ د = ٩ سم.

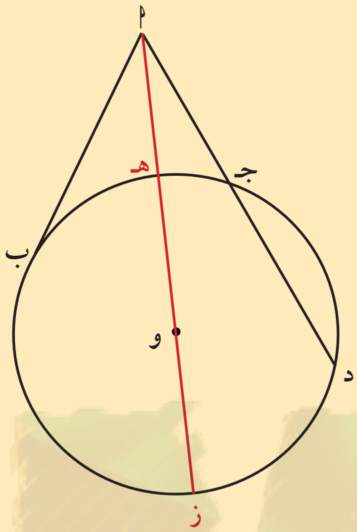
ما طول القطعة المماسية $\overline{\text{أب}}$؟

الحل: جبريًّا

المعطيات: أ جـ = ٤ سم، أ د = ٩ سم، أب قطعة مماسية.

المطلوب: إيجاد طول $\overline{\text{أب}}$.

البرهان:



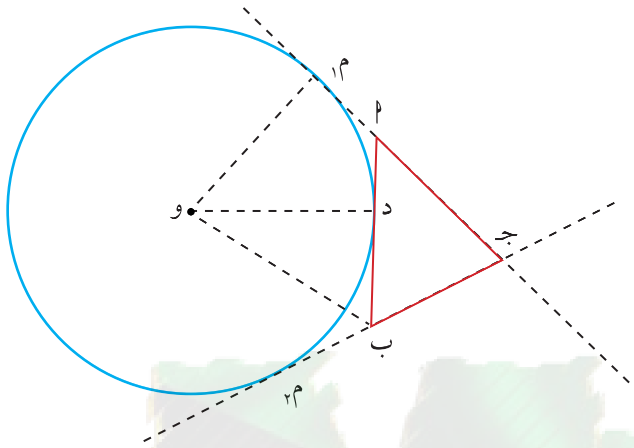
(أب)^{٢} = أ جـ × أ د	نتيجة
(أب)^{٢} = ٤ × ٩	بالتعويض
(أب)^{٢} = ٣٦	بالتبسيط
أب = ٦	بايجاد الجذر التربيعي

فيكون طول $\overline{\text{أب}}$ يساوي ٦ سم

حاول أن تحل

٥ في المثال (٥). أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كانت أ هـ = ٢ سم.

المرشد لحل المسائل



$\overline{\text{جـ م}_1}$ ، $\overline{\text{جـ م}_2}$ قطعتان مماسيتان للدائرة.

د نقطة متحركة على القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{م}_1\text{م}_2}$.

مماس الدائرة في د يقطع $\overline{\text{جـ م}_1}$ في أ، $\overline{\text{جـ م}_2}$ في ب.

سألت سلوى:

أين نضع د بحيث يكون محيط المثلث أ ب جـ هو أكبر ما يمكن؟

فكرت هند:

سأستخدم خواص مماس الدائرة.

محيط المثلث = جـ أ + أ ب + جـ ب

= جـ م$_1$ − أ م$_1$ + أ د + د ب + جـ م$_2$ − ب م$_2$

ولكن: أ م$_1$ = أ د ، ب م$_2$ = ب د (خاصية المماسين المتقاطعين على الدائرة)

−أ م$_1$ + أ د = ٠ ، −ب م$_2$ + د ب = ٠

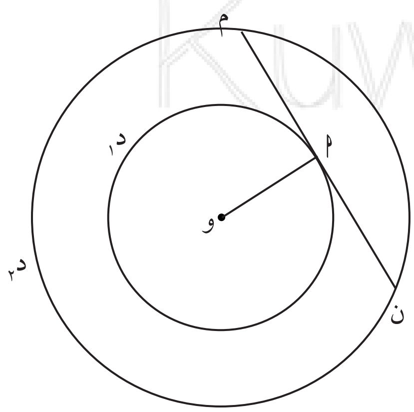
∴ محيط المثلث = جـ م$_1$ + جـ م$_2$ = ٢ جـ م$_1$ = ٢ جـ م$_2$

تذكر:
إذا تقاطع مماسان لدائرة في نقطة، تكون القطعتان المماسيتان متطابقتين.

استنتاج:

محيط Δ أ ب جـ ثابت ولا يتغير مع تغيّر موقع النقطة د.

مسألة إضافية:



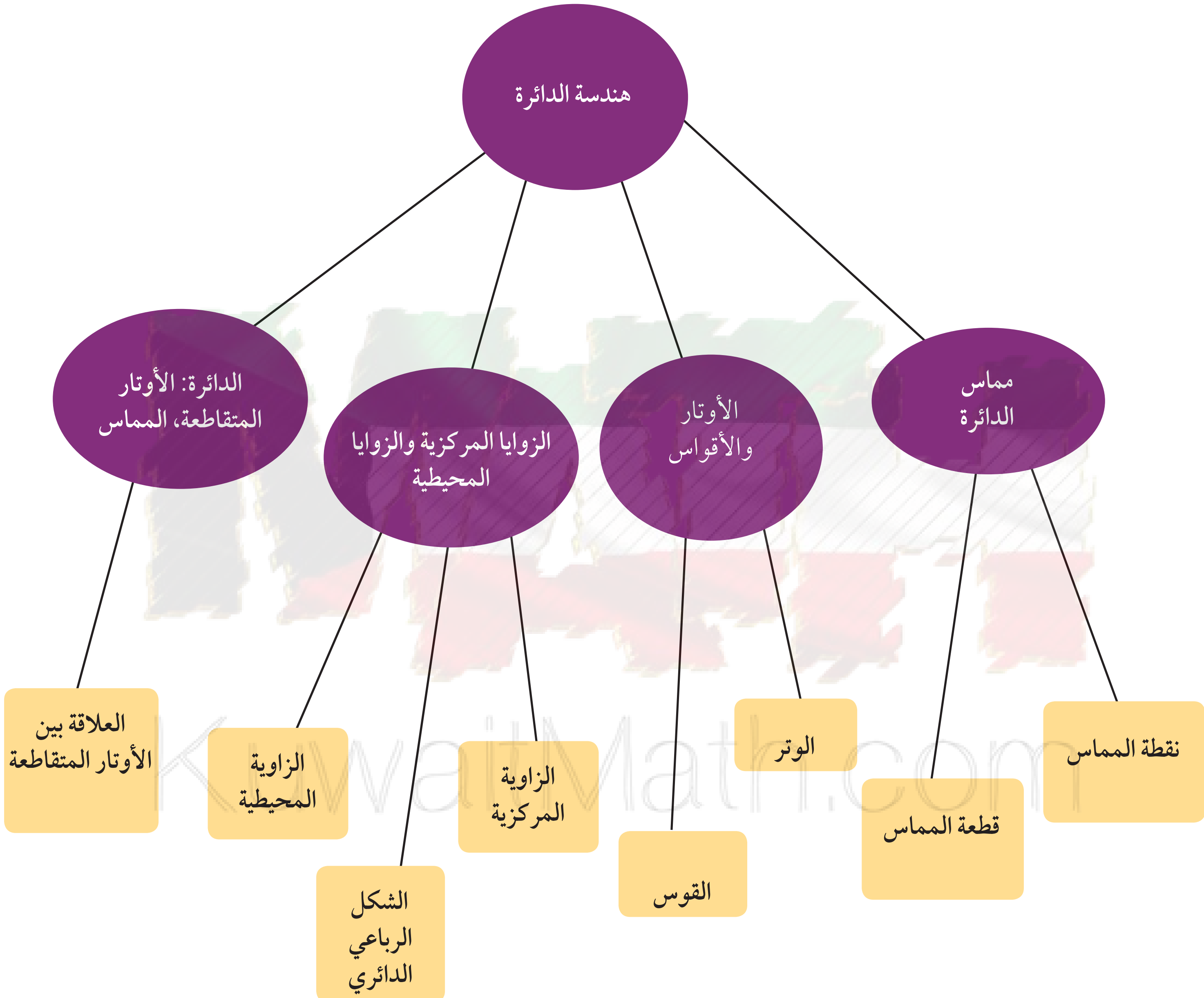
د$_1$، د$_2$ دائرتان متحدتا المركز و.

أ نقطة على د$_1$.

مماس د$_1$ المار في أ يقطع د$_2$ في م، ن.

أثبت أن أ منتصف $\overline{\text{م ن}}$.

مخطط تنظيمي للوحدة السادسة



ملخص

- المماس لدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.
- إذا كان مستقيم مماسًّا لدائرة، فإنه يكون متعامدًا مع نصف القطر المار بهذه النقطة.
- إذا تعامد مستقيم مع نصف قطر دائرة وكانت نقطة التعامد تنتمي إلى الدائرة، يكون المستقيم مماسًّا للدائرة.
- إذا تقاطع مماسان لدائرة في نقطة، تكون القطعتان المماسيتان متطابقتين.
- الدائرة المحاطة بمثلث هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث من الداخل ومركزها نقطة تلاقي منصفات الزاويا الداخلية للمثلث.
- في دائرة أو في دوائر متطابقة:

للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.

الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.

- للأقواس المتطابقة في دائرة زوايا مركزية متطابقة.

- الأوتار المتطابقة في دائرة هي على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.
- في الدائرة: القطر العمودي على وتر ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.

القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) هو عمودي على الوتر.

العمود المنصف لوتر يمر بمركز الدائرة.

- الزوايا المركزية زوايا رأسها مركز الدائرة.
- الزوايا المحيطية زوايا رأسها إحدى نقاط دائرة وضلعاها يقطعان الدائرة.
- قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها.
- قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.
- كل زاويتين محيطيتين تحصران القوس نفسه متطابقتان.
- كل زاوية محيطية تحصر نصف دائرة هي زاوية قائمة.
- كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة) تكون زواياه المتقابلة متكاملة، أي كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.
- الزاوية المكونة من مماس ووتر تسمى زاوية مماسية، وقياسها يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

– إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر.

– إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

– إذا رسم من نقطة خارج دائرة مماس وقاطع، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.