الوحدة السابعة

المصفوفات
Matrices

مشروع الوحدة: المعالجة الحيوية (Biotherapy).

١ **مقدمة المشروع:** يعتبر تسرب الزيت والمواد الكيميائية إلى المياه الجوفية من أهم مخاطر العصر الحديث، كما وتستخدم البكتيريا في مجال المعالجة الحيوية التي تتكوّن طبيعيًّا في محيط البيئة للحدّ من هذه الأخطار.

٢ **الهدف:** عند العمل في هذه الوحدة، سوف تحلل بيانات المشروع، وسوف تعالجها، وتستخدم النتائج لرسم المحتويات وتوقعها، ومن ثم سوف تبحث عن مصادر مشاريع أخرى. وفي النهاية، سوف تلخص ما ستجده وتوضحه للمساعدة في تكملة المشروع.

٣ **اللوازم:** آلة حاسبة بيانية.

٤ **أسئلة حول التطبيق:** يوضح الجدول بيانات من نتائج تحليل العلماء لخمس عينات عشوائية من التربة نفسها. في أحد مشاريع المعالجة الحيوية، وجدوا التالي من عناصر المنتجات البترولية الخطرة: البنزين (ب)، التولوين (ت) وهو سائل عديم اللون، إيثيل البنزين (ي)، إكسيلين (س) وهو مركب هيدروكربوني. اعرض البيانات في أربع مصفوفات، ثم اختر عنصرًا من كل مصفوفة، واذكر ماذا يمثل.

مستويات المركب في التربة (ملجم/ كجم)

العينة	ب	ت	ي	س
١	٠,٠٦	٠,٩٥	٠,٩	١٨,٥
٢	٠,٠٦	١,٠٥	٠,٧٣	١٣,٥
٣	٠,٣٥	٦	٥,٦	٤٩
٤	٠,٢٢	٠,١٩	٢	١٩,٥
٥	٠,١١	٠,٨٢	٢,٥	٢٦

أ اعرض بيانات الجدول في ٤ مصفوفات.

ب استخدم هذه المصفوفات، وأوجد توليفة البنزين والتولويدين وإيثيل البنزين والإكسيلين بالمليجرام/ كجم لكل عينة تراب.

جـ بعد ١٢ شهرًا، لاحظ العلماء أن النسبة المئوية لكل مركَّب في كل عينة من التربة قد انخفضت بمعدل ٠,٠٥ ملجم/ كجم. فمثلًا، نسبة البنزين أصبحت في العينة الأولى ٠,٠١ وفي العينة الثانية ٠,٠١ وفي العينة الثالثة ٠,٣٠ وفي العينة الرابعة ٠,١٧ وفي العينة الخامسة ٠,٠٦. استخدم المصفوفات لحساب نقصان كل مركب في كل عينة.

٥ **التقرير:** حقق بحثًا عن موقع النفايات التي تتضمن خطورة، والتي تمت معالجتها حيويًّا. ما مدى اتساع الموقع؟ ما طرق المعالجة الأخرى التي يمكن استخدامها بخلاف المعالجة الحيوية؟

اكتب فقرات قليلة تلخص بحثك وتتضمن بيانات عن الموقع كلما أمكن.

دروس الوحدة

تنظيم البيانات في مصفوفات	جمع وطرح المصفوفات	ضرب المصفوفات	مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)	حل نظام من معادلتين خطيتين
٧–١	٧–٢	٧–٣	٧–٤	٧–٥

الوحدة السابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت تمثيل العلاقات باستخدام المتغيرات .
- تعلمت تبسيط العبارات الجبرية المتضمنة أعدادًا صحيحة وكسورًا وإيجاد قيمتها.
- تعلمت تمثيل معادلات من متغيرين.
- تعلمت رسم المعادلات والمتباينات بيانيًّا.
- تعلمت رسم نظام من المعادلات أو المتباينات بيانيًّا.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تستخدم المصفوفات لتنظيم البيانات.
- سوف تتعرف المصفوفات المتساوية.
- سوف تستخدم جمع المصفوفات وطرحها لحل معادلات المصفوفات في مواقف حياتية.
- سوف تستخدم ضرب المصفوفات لحل مسائل حياتية.
- سوف تستخدم معكوسات المصفوفات لحل معادلات المصفوفات في مسائل حياتية.
- سوف تحل نظامًا من معادلتين خطيتين باستخدام قاعدة كرامر.

أضف إلى معلوماتك

يستخدم الناس في أغلب المجالات، البيانات المرتبة في قاعدة منظمة، وإحدى طرق تنظيم البيانات بصورة مختصرة هي كتابتها في صورة مصفوفة، بذلك نستطيع جمع المصفوفات وطرحها وضربها. كما يمكن استخدام ذلك للحصول على معلومات إضافية تساعد في اتخاذ القرار. تاريخيًّا، استخدمت المصفوفات لحل رسائل مشفرة، كما ويمكن استخدام ضرب المصفوفات في مسائل وتطبيقات حياتية.

المصطلحات الأساسية

مصفوفة – أعمدة – صفوف – عنصر المصفوفة – العناصر المتناظرة – مصفوفة الجمع –المصفوفة الصفرية – العنصر المحايد الجمعي – العدد القياسي – مصفوفات الضرب – المصفوفة المربعة – مصفوفة الوحدة – النظير الضربي للمصفوفة (معكوس المصفوفة) – قاعدة كرامر – محدد المصفوفة.

٧–١

تنظيم البيانات في مصفوفات
Organising Data Into Matrices

سوف تتعلم

- تنظيم البيانات في مصفوفات
- المصفوفات المتساوية

عمل تعاوني

يبين الجدول الأرقام القياسية لأسعار المستهلك حسب أقسام الإنفاق الرئيسة:

مقارنة يناير ٢٠١١ بـ يناير ٢٠١٢.   سنة الأساس ٢٠٠٠ = صفرًا

أقسام الإنفاق الرئيسة	يناير ٢٠١١	يناير ٢٠١٢
الرقم القياسي العام	١٤٦,٠	١٥١,١
المواد الغذائية	١٧٢,٠	١٨٥,٩
الحلويات	١٦٣,٢	١٦٩,١
الملابس	١٥٤,٨	١٥٩,٨
خدمات المسكن	١٤٨,٢	١٥١,٢
سلع وخدمات منزلية	١٣٧,٣	١٣٩,٨

* المصدر: الإدارة المركزية للإحصاء الكويت.

١ كم بلغت نسبة الزيادة في الرقم القياسي العام؟

٢ في أي قسم كانت نسبة الزيادة الأكبر؟ وفي أي قسم كانت الأصغر؟

تعريف

المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة.

الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر Elements.

رتبة المصفوفة Dimension of a Matrix

نرمز إلى المصفوفة بأحد حروف الهجاء ونضع تحته خطًّا، نكتب $\underline{أ}$ ونقرأ **المصفوفة أ**.

عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان **رتبة المصفوفة** وتكتب م × ن.

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٦ & ٧ & ٠ \end{bmatrix}$$

المصفوفة $\underline{أ}$ هي من **الرتبة ٢ × ٣**.

ملاحظة: لكتابة رتبة المصفوفة نكتب أولًا عدد الصفوف يليه عدد الأعمدة.

مثال (١)

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٤ \\ -٧ & -٣ & ٢ \\ ٩ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٣ & \frac{٢}{٣} & -٤ \end{bmatrix}$ ، $ج = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$

الحل:

تتكون المصفوفة أ من ٣ صفوف و٣ أعمدة: المصفوفة من الرتبة ٣ × ٣.

تتكون المصفوفة ب من صف واحد و٣ أعمدة: المصفوفة من الرتبة ١ × ٣.

تتكون المصفوفة جـ من ٤ صفوف وعمود واحد: المصفوفة من الرتبة ٤ × ١ .

حاول أن تحل

١ اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

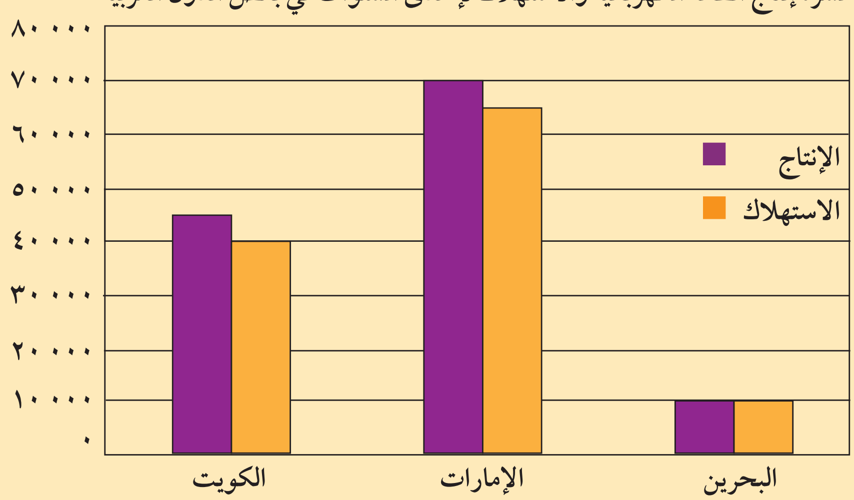
$أ = \begin{bmatrix} ٠ & ٥ & ٤ \\ ٧ & ٠,٥ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١٠ & ٣ & -٨ \end{bmatrix}$ ، $ج = \begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ -٥ & ١ \\ ٩ & ٠,٦ \end{bmatrix}$

مثال (٢)

تطبيقات حياتية

الطاقة: يمكن أن تقاس الطاقة الكهربائية بالجيجاوات/ ساعة. اكتب مصفوفة تمثّل بيانات الرسم البياني التالي بالأعمدة المزدوجة.

نشرة إنتاج الطاقة الكهربائية والاستهلاك لإحدى السنوات في بعض الدول العربية



الحل:

افرض أن كل صف في المصفوفة يمثّل دولة، وكل عمود يمثّل مستوى الإنتاج أو الاستهلاك.

استنتج عناصر المصفوفة من الرسم.

	الإنتاج	الاستهلاك
الكويت	٤٥ ٠٠٠	٤٠ ٠٠٠
الإمارات	٧٠ ٠٠٠	٦٥ ٠٠٠
البحرين	١٠ ٠٠٠	١٠ ٠٠٠

حاول أن تحل

٢ أ وضّح كيف يمكنك تعديل المصفوفة لتشمل البيانات التي إذا أضيفت إليها دول أخرى.

ب أعد كتابة عناصر المصفوفة السابقة في مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣.

ضع عنوانًا للصفوف والأعمدة.

جـ وضّح الفرق بين المصفوفة التي رتبتها جـ × د والمصفوفة التي رتبتها د × جـ.

ترميز عناصر المصفوفة

يحدد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما، فمثلًا، في المصفوفة $\underline{أ}$ العنصر الذي في الصف الأول والعمود الثالث نرمز إليه بالرمز $أ_{٣١}$ (الصف أولًا والعمود ثانيًا).

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{bmatrix}$$

العنصر في الصف الأول والعمود الثالث: $أ_{٣١}$

مثال (٣)

في المصفوفة: ب = $\begin{bmatrix} ١٢ & ١ & ٥ & ٤ \\ ٢ & ٦ & ٢ & ٣,٥ \\ ١ & ٠ & ١ & -٤ \end{bmatrix}$ اكتب قيمة كل عنصر مما يلي:

أ $ب_{٢٢}$ ب $ب_{١٣}$ جـ $ب_{١١}$

الحل:

أ العنصر $ب_{٢٢}$ يقع في الصف ٢ وفي العمود ٢ ∴ $ب_{٢٢} = ٦$

ب العنصر $ب_{١٣}$ يقع في الصف ٣ وفي العمود ١ ∴ $ب_{١٣} = ١$

جـ العنصر $ب_{١١}$ يقع في الصف ١ وفي العمود ١ ∴ $ب_{١١} = ١٢$

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، أوجد $ب_{٢٣}$ من المصفوفة ب.

المصفوفات: المربعة، الأفقية، العمودية

Horizontal and Vertical Matrices Square,

- **المصفوفة المربعة**: هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

وفي ما عدا ذلك، تسمى المصفوفة: مصفوفة مستطيلة Rectangular Matrix.

- **المصفوفة الأفقية**: هي مصفوفة مكونة من صف واحد Horizontal Matrix.
- **المصفوفة العمودية**: هي مصفوفة مكونة من عمود واحد Vertical Matrix.
- **فكر وناقش**: هل يمكن لمصفوفة أن تكون عمودية وأفقية معًا؟

مثال (٤)

صنّف كلًّا من المصفوفات التالية:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ٥- & ١ \\ ٧ & ٤ & ٠ \\ ٨ & ٢ & ٣ \end{bmatrix} \qquad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٠,٢ \end{bmatrix}$$

$$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٥- & ٤ & ٣ \end{bmatrix} \qquad \underline{د} = \begin{bmatrix} ١,٤ & ٣ & ٢- \\ ٥ & ٨ & ١٢ \end{bmatrix}$$

معلومة رياضية:

المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تسمى مصفوفة صفرية

Zero Matrix

ويرمز إليها بالرمز $\underline{٠}_{م \times ن}$

الحل:

$\underline{أ}$: مصفوفة ٣ × ٣   ∴ $\underline{أ}$ مصفوفة مربعة.

$\underline{ب}$: مصفوفة ٣ × ١   ∴ $\underline{ب}$ مصفوفة عمودية.

$\underline{جـ}$: مصفوفة ١ × ٣   ∴ $\underline{جـ}$ مصفوفة أفقية.

$\underline{د}$: مصفوفة ٢ × ٣   ∴ $\underline{د}$ مصفوفة مستطيلة.

حاول أن تحل

٤ صنّف المصفوفات في المثال (١).

المصفوفات المتساوية: Equal Matrices

تكون **مصفوفتان متساويتين** إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح.

المصفوفة التي عدد صفوفها (جـ)، وعدد أعمدتها (د) هي من الرتبة جـ × د.

معلومة رياضية:

كل عنصرين لهما الموقع نفسه في المصفوفتين اللتين لهما الرتبة نفسها يسميان عنصرين متناظرين.

مثال (٥)

هل المصفوفتان $\underline{أ}$، $\underline{ب}$ متساويتان؟ فسّر.

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} -٠,٧٥ & \frac{١}{٥} \\ \frac{١}{٢} & -٢ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} -\frac{٣}{٤} & ٠,٢ \\ ٠,٥ & -٢ \end{bmatrix}$$

الحل:

كلّ من $\underline{أ}$، $\underline{ب}$ لهما صفّان وعمودان، وعناصرهما المتناظرة متساوية، وبالتالي فالمصفوفتان $\underline{أ}$، $\underline{ب}$ متساويتان.

حاول أن تحل

٥ هل المصفوفتان $\underline{س}$، $\underline{ص}$ متساويتان؟ فسّر.

$$\underline{س} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{ص} = \begin{bmatrix} -١ & ٩ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$

والآن، يمكنك أن تستخدم تعريف المصفوفات المتساوية لحلّ المعادلات.

مثال (٦)

إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٢س - ٥ & ٤ \\ ٣ & ٣ص + ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & ص + ١٨ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

الحل:

$$\begin{bmatrix} ٢س - ٥ & ٤ \\ ٣ & ٣ص + ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & ص + ١٨ \end{bmatrix}$$

بما أن المصفوفتين متساويتان، فإن عناصرهما المتناظرة متساوية.

٢س − ٥ = ٢٥	٣ص + ١٢ = ص + ١٨
٢س = ٣٠	٢ص = ٦
س = ١٥	ص = ٣

الحل هو: س = ١٥، ص = ٣

حاول أن تحل

٦ (أ) إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣٨ & ٥ \\ ٣ & ٤ص - ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س + ٨ & ٥ \\ ٣ & -ص \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

(ب) إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣س & س + ص & س - ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٩ & ٤ & -١٠ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

جمع وطرح المصفوفات
Adding and Subtracting Matrices

سوف تتعلم

- جمع المصفوفات
- طرح المصفوفات
- حلّ المعادلات المصفوفية

عمل تعاوني

إحصائيًّا: اعمل مع زميل لك. استخدم المعلومات في الجدول:

المتوسط الحسابي للدرجات				
السنة	اللغة		الرياضيات	
	إناث	ذكور	إناث	ذكور
٢٠٠٠	٨٥	٨٣	٧٦	٨٢
٢٠٠١	٨٧	٨٥	٧٤	٨٥

١ أ أوجد من الجدول مجموع المتوسطين الحسابيين لدرجات الذكور في كل سنة.
ب أوجد من الجدول مجموع المتوسطين الحسابيين لدرجات الإناث في كل سنة.

٢ أ اكتب مصفوفة تمثّل المتوسط الحسابي لدرجات اللغة للذكور والإناث خلال السنتين.
ضع عنوانًا لكل من: المصفوفة، وصفوفها، وأعمدتها.
ب اذكر رتبة هذه المصفوفة.

٣ أ اكتب مصفوفة تمثّل المتوسط الحسابي لدرجات الرياضيات للذكور والإناث خلال السنتين.
ضع عنوانًا لكل من: المصفوفة، وصفوفها، وأعمدتها.
ب اذكر رتبة المصفوفة.

٤ أ بالنظر إلى إجابتك عن السؤال الأول والمصفوفات التي كتبتها في السؤالين ٢، ٣.
اكتب مصفوفة ثالثة تمثل مجموع المتوسطين الحسابيين لدرجات الذكور والإناث خلال السنتين.
ضع عنوانًا لكل من: المصفوفة، وصفوفها، وأعمدتها.
ب اذكر رتبة هذه المصفوفة.

٥ استخدم ملاحظاتك وأي أنماط تراها لصياغة طريقة لجمع المصفوفات.

معلومة رياضية:

العناصر المتناظرة في المصفوفات هي العناصر التي لها الموضع نفسه في كل مصفوفة.

جمع وطرح المصفوفات Adding and Subtracting Matrices

لجمع مصفوفتين أ، ب يجب أن تكونا من **الرتبة نفسها**.

نجمع كل عنصرين لهما الموقع نفسه في أ، ب. مصفوفة الجمع لها رتبة كل من المصفوفتين أ، ب.

جـ = أ + ب

أ من الرتبة م × ن ، ب من الرتبة م × ن

∴ جـ من الرتبة م × ن.

$جـ_{وس} = أ_{وس} + ب_{وس}$.

مثال (١)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٠ \\ ٣ & -٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ & -٣ \\ -٩ & ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$

فأوجد إن أمكن:

أ) أ + ب ب) أ + جـ

وإذا لم يكن الجمع ممكنًا، فاذكر السبب.

الحل:

أ) أ + ب. لا يمكن الجمع، لأن رتبة أ هي ٢ × ٣ لا تساوي رتبة ب وهي ٣ × ٢.

ب) أ + جـ. يمكن الجمع، لأن المصفوفتين لهما الرتبة نفسها: ٢ × ٣.

$$أ + جـ = \begin{bmatrix} ١ + ٣ & -٢ + ٩ & ٠ - ٣ \\ ٣ - ٩ & -٥ + ٦ & ٧ + ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٧ & -٣ \\ -٦ & ١ & ١٩ \end{bmatrix}$$

رتبة أ + جـ هي ٢ × ٣.

حاول أن تحل

١) أوجد ناتج ما يلي: $\begin{bmatrix} -١٢ & ٢٤ \\ -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -١ \\ -٥ & ٤ \\ ١ & -٧ \end{bmatrix}$

مثال (٢)

تطبيقات حياتية

الرياضة: في رياضة الخماسيّ الحديث، والتي تجرى منافسات فيها على مدار يوم واحد، يكون على كلّ متسابق أو لاعب أن يشارك في الألعاب الخمس: الرماية، المبارزة بالسيف، السباحة، الفروسيّة، اختراق الضاحية.

كون مصفوفة لكل لعبة من الجدول التالي ثم أوجد مجموع النقاط التي حصل عليها كلّ لاعب في الألعاب الخمس أثناء منافساتهم في إحدى البطولات.

الرياضة / اللاعب	رماية	مبارزة بالسيف	سباحة	فروسية	اختراق الضاحية
الأوّل	١١٥٦	٨١٦	١١٨٨	٨٨٩	١١٦٨
الثاني	١٠٣٦	٨١٦	١٢٨٠	٨٢٦	١٢١٠
الثالث	١٠٢٤	٦٧٨	١٢٩٦	١٠٧٠	١٢٧٠

الحل:

اكتب خمس مصفوفات ٣ × ١، ثم اجمع المصفوفات:

الرماية $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ١١٥٦ \\ ١٠٣٦ \\ ١٠٢٤ \end{bmatrix}$ ، المبارزة $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٨١٦ \\ ٨١٦ \\ ٦٧٨ \end{bmatrix}$ ، السباحة $\underline{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} ١١٨٨ \\ ١٢٨٠ \\ ١٢٩٦ \end{bmatrix}$ ، الفروسية $\underline{\text{د}} = \begin{bmatrix} ٨٨٩ \\ ٨٢٦ \\ ١٠٧٠ \end{bmatrix}$ ، اختراق الضاحية $\underline{\text{هـ}} = \begin{bmatrix} ١١٦٨ \\ ١٢١٠ \\ ١٢٧٠ \end{bmatrix}$

$$\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}} + \underline{\text{جـ}} + \underline{\text{د}} + \underline{\text{هـ}} = \begin{bmatrix} ١١٥٦ \\ ١٠٣٦ \\ ١٠٢٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨١٦ \\ ٨١٦ \\ ٦٧٨ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١١٨٨ \\ ١٢٨٠ \\ ١٢٩٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨٨٩ \\ ٨٢٦ \\ ١٠٧٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١١٦٨ \\ ١٢١٠ \\ ١٢٧٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١١٥٦ + ٨١٦ + ١١٨٨ + ٨٨٩ + ١١٦٨ \\ ١٠٣٦ + ٨١٦ + ١٢٨٠ + ٨٢٦ + ١٢١٠ \\ ١٠٢٤ + ٦٧٨ + ١٢٩٦ + ١٠٧٠ + ١٢٧٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥٢١٧ \\ ٥١٦٨ \\ ٥٣٣٨ \end{bmatrix}$$

وبالتالي فاللاعب الفائز في هذه الألعاب هو اللاعب الثالث.

حاول أن تحل

٢ أ وضّح لماذا لا تستطيع أن تجمع المصفوفات إلا إذا كانت لها الرتبة نفسها فقط.

ب استخدم جمع المصفوفات لإثبات أنّ العبارة التالية صحيحة:

$$\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ١٠ & ١١ \\ -٤ & ٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ ٦ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ ٦ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ١٠ & ١١ \\ -٤ & ٦ \end{bmatrix}$$

مثال (٣)

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix}$

فأوجد: أ + ب ، ب + أ ، (أ + ب) + جـ ، أ + (ب + جـ) ، أ + $0_{٢ \times ٢}$ ، أ + (−أ).

الحل:

أ + ب = $\begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ ب + أ = $\begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$

(أ + ب) + جـ = $\begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$

أ + (ب + جـ) = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ -٣ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$

أ + $0_{٢ \times ٢}$ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$

أ + (−أ) = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

معلومة رياضية:

المصفوفة −أ هي النظير الجمعي للمصفوفة أ.

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، أوجد جـ + ب ، (جـ + ب) + أ.

خواص جمع المصفوفات

إذا كان $\underline{\text{أ}}$ ، $\underline{\text{ب}}$ ، $\underline{\text{جـ}}$ مصفوفات من الرتبة م × ن فإن:

- $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}}$ هي من الرتبة م × ن — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}} = \underline{\text{ب}} + \underline{\text{أ}}$ — خاصية الإبدال **Commutative**
- $(\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}}) + \underline{\text{جـ}} = \underline{\text{أ}} + (\underline{\text{ب}} + \underline{\text{جـ}})$ — خاصية التجميع **Associative**
- $\underline{0}_{م\times ن} + \underline{\text{أ}} = \underline{\text{أ}} + \underline{0}_{م\times ن} = \underline{\text{أ}}$ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة م × ن
- $\underline{\text{أ}} + (-\underline{\text{أ}}) = \underline{0}_{م\times ن}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي).

طرح المصفوفات

يمكن طرح المصفوفات باستخدام خاصية مصفوفة المعكوس الجمعي.

إذا كان للمصفوفتين $\underline{\text{أ}}$ ، $\underline{\text{ب}}$ الرتبة نفسها، فإن $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} = \underline{\text{أ}} + (-\underline{\text{ب}})$.

ملاحظة: إذا كان $\underline{\text{أ}} \neq \underline{\text{ب}}$ ولهما الرتبة نفسها فإن: $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} \neq \underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}}$ وبالتالي، عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية.

مثال (٤)

$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

أوجد $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}}$ ، $\underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}}$

الحل:

الطريقة الأولى:

$\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} = \underline{\text{أ}} + (-\underline{\text{ب}})$

$$= \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & -٤ & -٣ \\ ٢ & -٢ & -٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣ + (-١) & ٢ + (-٤) & ٤ + (-٣) \\ -١ + (٢) & ٤ + (-٢) & ٠ + (-٤) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & -٢ & ١ \\ ١ & ٢ & -٤ \end{bmatrix}$$

الطريقة الثانية:

$$\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣ - ١ & ٢ - ٤ & ٤ - ٣ \\ -١ - (-٢) & ٤ - ٢ & ٠ - ٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & -٢ & ١ \\ ١ & ٢ & -٤ \end{bmatrix}$$

ب − أ $= \begin{bmatrix} -٢ & ٢ & ٤ \\ ١ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}^{\!*}$

$$\text{ب} - \text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -٢ & -٤ \\ ١ & -٤ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ - ٣ & ٤ - ٢ & ٣ - ٤ \\ -٢ - (-١) & ٢ - ٤ & ٤ - ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٢ & -١ \\ -١ & -٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

٤ أوجد ناتج كل مما يلي:

أ $\begin{bmatrix} ٦ & -٩ & ٧ \\ -٢ & ١ & ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٠ \\ ٦ & ٥ & ١٠ \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$

حل المعادلات المصفوفية Solving Matrix Equations

المعادلة المصفوفية هي معادلة إحدى مصفوفاتها غير معلومة (المتغير).

يمكنك استخدام خواص المساواة لحل المعادلات المصفوفية.

لأي مصفوفات أ، ب، جـ لها الرتبة نفسها إذا كان: أ = ب، فإن: أ + جـ = ب + جـ، أ − جـ = ب − جـ.

مثال (٥)

حل المعادلة المصفوفية التالية:

$$\text{س} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٨ & ٩ \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\text{س} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٨ & ٩ \end{bmatrix}$$

$$\text{س} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٨ & ٩ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$$

بإضافة $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ لكل من طرفي المعادلة

وبالتالي: $\text{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١١ & ١١ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل

٥ أوجد س حيث:

$$\text{س} - \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٧ \\ -٤ & ٤ \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات
Matrix Multiplication

سوف تتعلم
- ضرب مصفوفة في عدد
- الضرب القياسي
- ضرب المصفوفات

عمل تعاوني

اعمل مع زميل لك. استخدم البيانات في الجدول:

	مبيعات مطعم		
	وجبة ١	وجبة ٢	وجبة ٣
ثمن وجبة الغداء	٢,٥٠٠ دينار	١,٧٥٠ دينار	٢,٠٠٠ دينار
عدد الوجبات المباعة	٥٠	١٠٠	٧٥

١ ما ثمن: وجبات الغداء ١، وجبات الغداء ٢، وجبات الغداء ٣؟

٢ أ ما ثمن الوجبات المباعة؟

ب وضح كيف استخدمت البيانات الموجودة في الجدول لإيجاد الإجابة.

٣ أ اكتب مصفوفة ١ × ٣ لتمثل ثمن كل وجبة مباعة.

ب اكتب مصفوفة ٣ × ١ لتمثل عدد الوجبات المباعة.

ج **الكتابة**: استخدم الكلمات: (صف، عمود، عنصر) لتصف إجراءات استخدام المصفوفات التي حصلت عليها، لإيجاد المبلغ بالدينار الذي يبيع به المطعم جميع الوجبات.

ضرب مصفوفة في عدد — Multiplying a Matrix by a Scalar

يمكنك أن تضرب عدد حقيقي في مصفوفة مثل:

$$٣\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١٥ \\ ١٢ & -٩ \end{bmatrix}$$

الضرب القياسي — Scalar Multiplication

الضرب القياسي هو عملية ضرب مصفوفة م في عدد حقيقي ك : ك ≠ ٠.

الناتج هو المصفوفة ك م.

نحصل على المصفوفة ك م بضرب كل عنصر من م في ك.

إذا كان ك = ٠، يكون الناتج مصفوفة صفرية.

معلومة رياضية:
رتبة المصفوفة ك م تساوي رتبة المصفوفة م.

مثال (١)

إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤- \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ٢- & ١- & ٣ \end{bmatrix}$

فأوجد: ٥$\underline{\text{أ}}$ ، ٣$\underline{\text{ب}}$. ثم ٥$\underline{\text{أ}}$ − ٣$\underline{\text{ب}}$

الحل:

$$٥\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٥\times٢ & ٥\times٣ & ٥\times(٤-) \\ ٥\times٥ & ٥\times٤ & ٥\times٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٥ & ٢٠- \\ ٢٥ & ٢٠ & ١٥ \end{bmatrix}$$

$$٣\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٣\times٠ & ٣\times١ & ٣\times٢ \\ ٣\times(٢-) & ٣\times(١-) & ٣\times٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٦ \\ ٦- & ٣- & ٩ \end{bmatrix}$$

$$٥\underline{\text{أ}} - ٣\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٥ & ٢٠- \\ ٢٥ & ٢٠ & ١٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٦ \\ ٦- & ٣- & ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٢ & ٢٦- \\ ٣١ & ٢٣ & ٦ \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

١ من المثال (١)، أوجد:

أ ٥$\underline{\text{ب}}$ − ٤$\underline{\text{أ}}$ ب $\underline{\text{أ}}$ + ٦$\underline{\text{ب}}$

خواص الضرب القياسي

إذا كان $\underline{\text{أ}}$ ، $\underline{\text{ب}}$ ، $\underline{٠}$ مصفوفات من الرتبة م × ن. ك، د عددان قياسيان. فإن:

- ك $\underline{\text{أ}}$: مصفوفة من الرتبة م × ن — خاصية الإغلاق
- (ك د) $\underline{\text{أ}}$ = ك(د $\underline{\text{أ}}$) — خاصية التجميع للضرب
- ك($\underline{\text{أ}}$ + $\underline{\text{ب}}$) = ك$\underline{\text{أ}}$ + ك $\underline{\text{ب}}$ — خاصية التوزيع من اليمين
- ($\underline{\text{أ}}$ + $\underline{\text{ب}}$)ك = $\underline{\text{أ}}$ ك + $\underline{\text{ب}}$ ك — خاصية التوزيع من اليسار
- ٠ × $\underline{\text{أ}}$ = $\underline{٠}$ — خاصية الضرب في صفر

مثال (٢)

إثرائي

الطعام: يخطط مطعم لرفع ثمن كل نوع من الشراب ليصبح مرة ونصف المرة، فكم سيكون ثمن كل نوع؟ (استخدم لائحة الأسعار في الجدول)

	حجم كبير	حجم صغير
لبن قليل الدسم	٠,٥٠٠ دينار	٠,٣٠٠ دينار
عصير البرتقال	٠,٩٠٠ دينار	٠,٦٠٠ دينار
عصير المانجو	٠,٨٠٠ دينار	٠,٥٠٠ دينار

الحل:

اضرب كل عنصر في ١,٥.

$$١,٥ \times \begin{bmatrix} ٠,٥٠٠ & ٠,٣٠٠ \\ ٠,٩٠٠ & ٠,٦٠٠ \\ ٠,٨٠٠ & ٠,٥٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١,٥(٠,٥٠٠) & ١,٥(٠,٣٠٠) \\ ١,٥(٠,٩٠٠) & ١,٥(٠,٦٠٠) \\ ١,٥(٠,٨٠٠) & ١,٥(٠,٥٠٠) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠,٧٥٠ & ٠,٤٥٠ \\ ١,٣٥٠ & ٠,٩٠٠ \\ ١,٢٠٠ & ٠,٧٥٠ \end{bmatrix}$$

سوف يصبح ثمن اللبن ٠,٧٥٠ دينار، ٠,٤٥٠ دينار، وثمن عصير البرتقال ١,٣٥٠ دينار، ٠,٩٠٠ دينار، وثمن عصير المانجو ١,٢٠٠ دينار ، ٠,٧٥٠ دينار.

حاول أن تحل

٢ بعد رفع الأسعار، تناقصت مبيعات الشراب في المطعم. وضع صاحب المطعم إعلانًا كتب عليه: تخفيض الأسعار بنسبة ٢٠٪. ضع لائحة بالأسعار الجديدة.

يمكن استخدام خواص الضرب القياسي لحل معادلات تتضمن مصفوفات.

مثال (٣)

حل المعادلة: $٤\underline{س} + ٢ \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$، ثم تحقق من إجابتك.

الحل:

$$٤\underline{س} + ٢ \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٤\underline{س} + \begin{bmatrix} ٢ \times ٣ & ٢ \times ٤ \\ ٢ \times (-٢) & ٢ \times ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٤\underline{س} + \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٤\underline{س} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٤\underline{س} = \begin{bmatrix} ٤ & -٨ \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\underline{س} = \frac{١}{٤} \begin{bmatrix} ٤ & -٨ \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

تحقق:

$$٤\underline{س} + ٢ \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$4\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix}10 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4 & -8\\ 8 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6 & 8\\ -4 & 2\end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix}10 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}10 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix} \checkmark$$

حاول أن تحل

٣ حل كل معادلة مما يلي:

أ $2\underline{س} = \begin{bmatrix}4 & 12\\ 1 & -4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

ب $-3\underline{س} + \begin{bmatrix}7 & 0 & -1\\ 2 & -3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10 & 0 & 8\\ -19 & -18 & 10\end{bmatrix}$

ضرب المصفوفات Matrices Multiplying

أجري اختبار للذكاء في مادتي الرياضيات والعلوم لكل من ناصر، أحمد، عبد الله ثم رتبت البيانات في صورة مصفوفتين $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ حيث:

$$\underline{أ} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc}\text{الرياضيات} & \text{العلوم}\end{array}\\ \begin{array}{c}\text{ناصر}\\ \text{أحمد}\\ \text{عبد الله}\end{array} & \begin{bmatrix}30 & 20\\ 40 & 15\\ 25 & 25\end{bmatrix}\end{array}$$

والمصفوفة $\underline{أ}$ تمثل عدد الأسئلة الموضوعية التي أجاب عنها كل من الطلاب الثلاثة في كل مادة على حدة.

$$\underline{ب} = \begin{array}{cc}\begin{array}{c}\text{درجة الرياضيات لكل سؤال}\\ \text{درجة العلوم لكل سؤال}\end{array} & \begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}\end{array}$$

والمصفوفة $\underline{ب}$ هي درجة السؤال في كل من المادتين.

المطلوب: معرفة مجموع درجات كل طالب منهم في المادتين معًا.

الحل:

مجموع درجات ناصر في مادتي الرياضيات والعلوم = ٣٠ × ٤ + ٢٠ × ٢ = ١٦٠ درجة

مجموع درجات أحمد في مادتي الرياضيات والعلوم = ٤٠ × ٤ + ١٥ × ٢ = ١٩٠ درجة

مجموع درجات عبد الله في مادتي الرياضيات والعلوم = ٢٥ × ٤ + ٢٥ × ٢ = ١٥٠ درجة

والآن إذا كتبنا النواتج النهائية في صورة مصفوفة $\underline{ج} = \begin{bmatrix}160\\ 190\\ 150\end{bmatrix}$

وهذا ينتج من ضرب المصفوفتين أ ، ب. لكي تقوم بعملية ضرب مصفوفتين، اضرب عناصر كلّ صفّ من المصفوفة الأولى في عناصر كلّ عمود من المصفوفة الثانية. أوجد ناتج كلّ ضرب، ثمّ اجمع نواتج الضرب كما في المثال التالي:

$$\text{أ} \times \text{ب} = \begin{bmatrix} ٢٠ & ٣٠ \\ ١٥ & ٤٠ \\ ٥ & ٢٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٤ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \times ٢٠ + ٤ \times ٣٠ \\ ٢ \times ١٥ + ٤ \times ٤٠ \\ ٢ \times ٢٥ + ٤ \times ٢٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٦٠ \\ ١٩٠ \\ ١٥٠ \end{bmatrix}$$

وبالتالي تكون درجة أحمد هي الأفضل.

مثال (٤)

أوجد ناتج أ × ب.

حيث $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٤ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$

الحل:

اضرب $\text{أ}_{١١}$ و $\text{ب}_{١١}$، ثم اضرب $\text{أ}_{٢١}$ و $\text{ب}_{١٢}$، ثم اجمع نواتج الضرب.

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٤ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & ؟ \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(٠)(٤) + (٣)(-٢) = -٦$$

الناتج هو العنصر في الصفّ الأوّل والعمود الأوّل. كرّر الخطوات نفسها مع باقي الصفوف والأعمدة.

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٤ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ؟ & -٦ \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(٠)(٠) + (٣)(١) = ٣$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٤ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٦ \\ \square & ؟ \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(-١)(٤) + (-٤)(-٢) = ٤$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٤ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٦ \\ ؟ & ٤ \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(-١)(٠) + (-٤)(١) = -٤$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٤ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٦ \\ -٤ & ٤ \\ \square & ؟ \end{bmatrix}$$

$$(١)(٤) + (٢)(-٢) = ٠$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & -٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & ٣ \\ ٤ & -٤ \\ ٠ & ؟ \end{bmatrix}$$

$$(١)(٠) + (٢)(١) = ٢$$

ناتج الضرب:

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & -٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & ٣ \\ ٤ & -٤ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

٤ **أ** صف الإجراءات التي تمّت لضرب الصفّ المظلّل في العمود المظلّل في المثال (٤).

ب أوجد ناتج الضرب: $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

جـ في المثال (٤)، ما رتبة المصفوفات الأصليّة؟ ما رتبة مصفوفة الضرب؟

د التفكير الناقد: كيف تقارن رتبة مصفوفة الضرب برتب المصفوفات الأصليّة؟

ضرب المصفوفات :

المصفوفة أ هي مصفوفة من الرتبة م × ن والمصفوفة ب هي مصفوفة من الرتبة ن × ر، عندئذٍ مصفوفة الضرب أ × ب هي مصفوفة من الرتبة م × ر.

مصفوفة أ

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}$$

٣ × ٢

٣ صفوف

عمودان

مصفوفة ب

$$\begin{bmatrix} ٧ & ٨ & ٩ & ١٠ \\ ١١ & ١٢ & ١٣ & ١٤ \end{bmatrix}$$

٢ × ٤

صفان

٤ أعمدة

متساويان

أبعاد مصفوفة الضرب ٣ × ٤

تكون مصفوفة الضرب معرّفة إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

$$\underline{أ}_{م \times ن} \times \underline{ب}_{ن \times ر} = \underline{جـ}_{م \times ر}$$

مثال (٥)

بفرض أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٨ & ١- \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ٨ \\ ٥- & ٢ \end{bmatrix}$

حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب: أ × ب، ب × أ معرّفة أو غير معرّفة.

أوجد رتبة كل مصفوفة ضرب معرّفة.

الحل:

أ × ب
(٣ × ٢) (٢ × ٢)
متساويتان
أ × ب معرّفة ورتبتها ٣ × ٢

ب × أ
(٢ × ٢) (٣ × ٢)
غير متساويتين
ب × أ غير معرّفة

حاول أن تحل

٥ بفرض: أ = $\begin{bmatrix} ٢- & ٤ \\ ٤- & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ١- & ٠ & ٨ \\ ٨ & ١ & ٥- & ٢ \end{bmatrix}$

أ حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب أ × ب، ب × أ معرّفة أو غير معرّفة.

ب أوجد ناتج الضرب المعرّف.

جـ بفرض أن المصفوفة أ هي مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣، المصفوفة ب هي مصفوفة من الرتبة ٣ × ٢.

هل أ × ب، ب × أ متساويتان؟ وضّح إجابتك.

لضرب المصفوفات بعض خصائص ضرب الأعداد

خواص ضرب المصفوفات المربعة

إذا كانت أ، ب ، جـ مصفوفات من الرتبة م × م. فإن:

- أ × ب: مصفوفة من الرتبة م × م.
- (أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ) — خاصية التجميع للضرب
- أ × (ب + جـ) = أ × ب + أ × جـ — خاصية التوزيع
- (ب + جـ) × أ = ب × أ + جـ × أ
- $\mathbf{0}_{م \times م}$ × أ = أ × $\mathbf{0}_{م \times م}$ = $\mathbf{0}_{م \times م}$ — خاصية الضرب في الصفر

ملاحظة: عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

مثال (مضاد)

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} ،\quad \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

أوجد $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}$، $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}}$. ماذا تستنتج؟

الحل:

$$\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 16 \\ 27 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 17 \\ 30 & 25 \end{bmatrix}$$

$\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} \neq \underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}}$ $\quad$ ∴ عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

تذكر:
يكفي إيجاد مثال مضاد واحد لإثبات عدم صحة النظرية.

مربع المصفوفة Square Matrix

إذا كانت $\underline{\text{أ}}$ مصفوفة مربعة، فإن المصفوفة $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}}$ يرمز إليها بالرمز $\underline{\text{أ}}^2$.

وتقرأ مربع المصفوفة $\underline{\text{أ}}$. وبالمثل $\underline{\text{أ}}^3 = \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}}$، $\underline{\text{أ}}^4 = \underline{\text{أ}}^3 \times \underline{\text{أ}}$، ....

مثال (٦)

إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

أوجد: $\underline{\text{أ}}^2$ ، $\underline{\text{أ}}^3$

الحل:

$$\underline{\text{أ}}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{أ}}^3 = \underline{\text{أ}}^2 \times \underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

٦ إذا كانت $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. أوجد: $\underline{\text{ب}}^2$ ، $\underline{\text{ب}}^3$.

مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)
Identity and Inverse Matrices

سوف تتعلم

- مصفوفة الوحدة للضرب
- محدد المصفوفة
- النظير الضربي (المعكوس الضربي) للمصفوفة
- حل المعادلة المصفوفية باستخدام النظير الضربي.

عمل تعاوني

١ أوجد ناتج ما يلي:

أ $\begin{bmatrix}-5&6\\4&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-5&6\\4&2\end{bmatrix}$

جـ $\begin{bmatrix}3&4&1\\-2&0&2\\1&5&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

د $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3&4&1\\-2&0&2\\1&5&3\end{bmatrix}$

٢ **أنماط:** صف أي أنماط تراها في إجابتك عن السؤال الأوّل.

٣ توقّع ناتج ما يلي، ثم تحقّق من توقّعك.

$$\begin{bmatrix}2&3&-2&4\\1&2&3&0\\-1&-2&1&4\\5&2&3&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

٤ أوجد ناتج ما يلي:

أ $\begin{bmatrix}3&5\\1&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&-5\\-1&3\end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix}2&-5\\-1&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3&5\\1&2\end{bmatrix}$

جـ $\begin{bmatrix}1&5&-1\\1&0&-1\\1&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&0&1\\0{,}2&-0{,}2&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$

د $\begin{bmatrix}0&0&1\\0{,}2&-0{,}2&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&5&-1\\1&0&-1\\1&0&0\end{bmatrix}$

٥ **أنماط:** صف أي أنماط تراها في إجابتك عن السؤال (٤).

٦ **التفكير الناقد:** كيف ترتبط إجاباتك بالنسبة إلى السؤالين (١)، (٤)؟

مصفوفة الوحدة Identity Matrix

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي ١، وبقية العناصر صفر تسمى **مصفوفة الوحدة** للضرب. ويرمز إليها بـ و.

$$\text{و}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} ،\quad \text{و}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

بفرض أن $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$ ، $\text{و} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$$\text{أ} \times \text{و} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{أ}\times١ + \text{ب}\times٠ & \text{أ}\times٠ + \text{ب}\times١ \\ \text{جـ}\times١ + \text{د}\times٠ & \text{جـ}\times٠ + \text{د}\times١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} = \text{أ}$$

كذلك $\text{و} \times \text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} = \text{أ}$

أي أن: $\text{أ} \times \text{و} = \text{و} \times \text{أ} = \text{أ}$

$\text{و} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

وبصورة عامة $\text{و}_{\text{ن}\times\text{ن}}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة ن.

النظير الضربي Multiplicative Inverse

إذ كانت أ، س مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها بحيث يكون $\text{أ} \times \text{س} = \text{و}$ ، فإن س هي النظير الضربي للمصفوفة أ.

ويرمز إليها بـ $\text{أ}^{-١}$.

إذًا $\text{أ} \times \text{أ}^{-١} = \text{أ}^{-١} \times \text{أ} = \text{و}$

مثال (١)

أثبت أن $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$.

الحل:

$$\text{أ} \times \text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢\times٢ + ٣\times(-١) & ٢\times(-٣) + ٣\times٢ \\ ١\times٢ + ٢\times(-١) & ١\times(-٣) + ٢\times٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$\text{أ} \times \text{ب} = \text{و}$ $\therefore$ ب هي النظير الضربي لـ أ .

يمكن القول أن المصفوفة أ هي النظير الضربي للمصفوفة ب .

معلومة رياضية:

النظير الضربي للمصفوفة أ يسمى أيضًا المصفوفة المعكوسة $\text{أ}^{-١}$.

حاول أن تحل

١ أ) أثبت أن المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢{,}٥ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي لـ $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

ب) في المثال (١)، أثبت أن أ هي النظير الضربي لـ ب.

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية Determinant of a 2×2 Matrix

ترتبط كل مصفوفة مربعة أ بعدد حقيقي يسمى **محدد أ** ويرمز إلى هذا العدد بالرمز $|أ|$ ويقرأ **محدد المصفوفة أ**.

سنقتصر في هذا الدرس على محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{bmatrix}$ هو أ د − ب جـ

نكتب $|أ| = \begin{vmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{vmatrix} =$ أ د − ب جـ

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر **بالمصفوفة المنفردة**

مثال (٢)

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية: $أ = \begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ٠ & س \end{bmatrix}$

الحل:

$|أ| = \begin{vmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{vmatrix} = (-٣) \times (-٥) - ٤ \times ٢ = ٧$

$|ب| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} = (٢) \times (-٢) - (-٣) \times (٣) = ٥$

$|جـ| = \begin{vmatrix} س & ٠ \\ ٠ & س \end{vmatrix} = س^٢ - ٠ = س^٢$

حاول أن تحل

٢ أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

أ) $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

ب) $ب = \begin{bmatrix} ٨ & ٧ \\ ٢ & ١٠ \end{bmatrix}$

جـ) $جـ = \begin{bmatrix} ك & ٣ \\ ٣ - ك & -٣ \end{bmatrix}$

ليس لكلّ المصفوفات المربّعة نظير ضربي (معكوسات). سوف يساعدك الاختبار التالي على استنتاج ما إذا كانت المصفوفة ٢×٢ لها نظير ضربي، وكيف يمكنك إيجاده إن وجد.

خاصية

بفرض أن: $أ = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ إذا كان أ د − ب جـ ≠ ٠ ، فإن أ لها نظير ضربي $أ^{-١}$ حيث:

$أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$

$أ^{-١} = \frac{١}{أ د - ب جـ} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$

معلومة رياضية:

المصفوفة التي محددها الصفر ليس لها نظير ضربي وتسمى **مصفوفة منفردة**.

مثال (٣)

إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

الحل:

$|أ| = \begin{vmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{vmatrix} = ٠$ محدد المصفوفة المنفردة

٦س − ٤٨ = ٠ تبسيط المحدد

٦س = ٤٨

س = ٨

حاول أن تحل

٣ إذا كانت المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢س \end{bmatrix}$ منفردة، أوجد قيمة س.

مثال (٤)

هل للمصفوفة: أ = $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٨ & -٢ \end{bmatrix}$ نظير (معكوس) ضربي؟ في حالة الإيجاب أوجده.

الحل:

أ د − ب جـ = (−١)(−٢) − (٠)(٨) = ٢ ∵ ٢ ≠ ٠ ∴ أ لها نظير ضربي $أ^{-1}$

$أ^{-1} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ -٨ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ -٤ & -٠,٥ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل

٤ (أ) هل ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

(ب) هل ب = $\begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٣ & -٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

مثال (٥)

حدّد أي مصفوفة مما يلي لها نظير (معكوس) ضربي، ثم أوجده.

أ $\underline{م} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢- \\ ٤- & ٥ \end{bmatrix}$ ب $\underline{ن} = \begin{bmatrix} ٩ & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$

الحل:

أ $\underline{م} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢- \\ ٤- & ٥ \end{bmatrix}$

احسب: أ د − ب جـ   أ د − ب جـ = (−٢)(−٤) − (٢)(٥) = −٢

حيث إن: أ د − ب جـ ≠ ٠، فإن النظير الضربي (المعكوس) لـ $\underline{م}$ يكون موجودًا.

$$\underline{م}^{-1} = \frac{١}{٢-} \times \begin{bmatrix} ٢- & ٤- \\ ٢- & ٥- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٢,٥ \end{bmatrix}$$

ب $\underline{ن} = \begin{bmatrix} ٩ & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$

احسب: أ د − ب جـ   أ د − ب جـ = (٣)(٦) − (٩)(٢) = ٠

حيث إن: أ د − ب جـ = ٠، فإن معكوس $\underline{ن}$ غير موجود.

$\underline{ن}^{-1}$ غير موجود.

حاول أن تحل

٥ حدّد أي مصفوفة من المصفوفات التالية لها نظير ضربي (معكوس)، ثم أوجده.

أ $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٢,٣ & ٠,٥ \\ ٧,٢ & ٣ \end{bmatrix}$

٧–٥

حل نظام من معادلتين خطيتين
Solving a System of Two Linear Equations

سوف تتعلم

- حل نظام من معادلتين خطيتين
- قاعدة كرامر

دعنا نفكر ونتناقش

يمكن للمعادلة المصفوفية أن تمثّل أي نظام معادلات.

المعادلة المصفوفية	نظام معادلات
$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٤ \end{bmatrix}$	$\begin{cases} س + ٢ص = ٥ \\ ٣س + ٥ص = ١٤ \end{cases}$

١) قارن طريقتي كتابة النظام في معادلات المصفوفات. أين تجد معامل س، ص؟ المتغيرات؟ الثوابت؟

كل مصفوفة في معادلة المصفوفات على الشكل $\underline{أ} \times \underline{ع} = \underline{ب}$ لها اسمها:

مصفوفة المعاملات $\underline{أ}$		مصفوفة المتغيرات $\underline{ع}$		مصفوفة الثوابت $\underline{ب}$
$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$	$\times$	$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} ٥ \\ ١٤ \end{bmatrix}$

٢) أ) أوجد مصفوفة الضرب: $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$

ب) يمكن كتابة مصفوفة الضرب بأنها مساوية للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٥ \\ ١٤ \end{bmatrix}$.

اشرح كيف أن معادلة المصفوفة تمثّل نظام المعادلات.

حل النظام: Solving a System

تستطيع إيجاد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، ثم الحصول سريعًا على حل النظام من المعادلات الخطية.

١ – الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة: Solving by Using Inverse Matrix

مثال (١)

حلّ النظام: $\begin{cases} س + ص = ٣ \\ س - ص = ٧ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

الحل:

اكتب النظام مع معادلة المصفوفات.

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix} \quad (١)$$

حيث $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ع} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix}$

$$|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} = ١ \times (-١) - ١ \times ١ = -٢ \neq ٠$$

$$\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

وبضرب كل من طرفي المعادلة (١) من جهة اليمين في $\underline{أ}^{-1}$.

نحصل على $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ -٢ \end{bmatrix}$$

وبالتالي: س = ٥، ص = −٢

حاول أن تحل

١ حلّ النظام: $\begin{cases} ٥س + ٣ص = ٧ \\ ٣س + ٢ص = ٥ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

يمكن أيضًا حلّ نظام من معادلتين خطيتين باستخدام المحددات، وتسمى قاعدة كرامر Crammer's Rule.

٢ – استخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل معادلتين خطيتين:

Using Crammer's Rule to Solve Two Linear Equations

لحل نظام معادلتين خطيتين:

أ س + ب ص = ل

جـ س + د ص = م

نكتب: $\Delta = \begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ل & ب \\ م & د \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الزائد بعمود معاملات س

$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} أ & ل \\ جـ & م \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الزائد بعمود معاملات ص

فإن س = $\frac{\Delta_{س}}{\Delta}$ ، ص = $\frac{\Delta_{ص}}{\Delta}$ (بشرط أن $\Delta \neq ٠$)

وهذه تعرف بقاعدة كرامر Cramer's Rule

مع الملاحظة أن:

١ إذا كان $\Delta \neq ٠$ ، فإن للمعادلتين حلًّا وحيدًا

٢ إذا كان $\Delta = ٠$ ، $\Delta_{س} \neq ٠$ فالحل ϕ

وسنكتفي بهاتين الحالتين ولا نتعرض للحالة التي كل من Δ ، $\Delta_{س}$ مساويا الصفر

مثال (٢)

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام:
$$\begin{cases} ٤س - ٥ص + ٧ = ٠ \\ ٣ص - ٦س + ٣ = ٠ \end{cases}$$

الحل:

نكتب أولًا النظام بالطريقة القياسية:
$$\begin{cases} ٤س - ٥ص = -٧ \\ -٦س + ٣ص = -٣ \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & -٥ \\ -٦ & ٣ \end{vmatrix} = -١٨$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} -٧ & -٥ \\ -٣ & ٣ \end{vmatrix} = -٣٦$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٤ & -٧ \\ -٦ & -٣ \end{vmatrix} = -٥٤$$

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{-٣٦}{-١٨} = ٢$$

$$ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-٥٤}{-١٨} = ٣$$

حاول أن تحل

٢ استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام:
$$\begin{cases} ٣س + ٢ص = -٦ \\ -٤س - ٣ص - ٧ = ٠ \end{cases}$$

المرشد لحل المسائل

الإحداثيان (س، ص) لنقطة في المستوي هي حل النظام: $\left\{\begin{array}{l} ٢س + ٣ص = ١٣ \\ ٥س + ٧ص = ٣١ \end{array}\right.$.

أوجد إحداثيي هذه النقطة.

كيف فكر مرشد؟

حل المسألة هو الزوج المرتب (س، ص).

يمكنني رسم المستقيمين بيانيًّا وقراءة إحداثيي نقطة التقاطع، ولكن هذا ليس ضروريًّا.

يمكنني استخدام المصفوفات في الحل.

سأعيد كتابة النظام في شكل معادلة مصفوفات.

لإيجاد المصفوفة $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ سوف أضرب طرفي المعادلة في النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$.

والآن، بما أنني حصلت على النظير الضربي فسوف أضرب.

تذكرت ! يجب أن أضرب من جهة اليمين، لأن عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

سأعيد كتابة معادلة المصفوفات، ثم أضرب. هذا يعني أن:

س = ٢، ص = ٣.

وماذا كتب؟

$\left\{\begin{array}{l} ٢س + ٣ص = ١٣ \\ ٥س + ٧ص = ٣١ \end{array}\right.$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٣ \\ ٣١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}^{-١} = \frac{١}{٢ \times ٧ - ٥ \times ٣}\begin{bmatrix} ٧ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$= -١\begin{bmatrix} ٧ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٣ \\ ٣١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$$

٢ × ١ ٢ × ٢

لا يمكن أن أضرب

$$\begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١٣ \\ ٣١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-٧) \times ١٣ + ٣ \times ٣١ \\ ٥ \times ١٣ + (-٢) \times ٣١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

إحداثيا نقطة التقاطع هما (٢، ٣)

مسألة إضافية

١ إحداثيا نقطة في المستوي هما حل النظام: $\left\{\begin{array}{l} ١٢س + ١٣ص = ١٤ \\ ٥س + ٧ص = ٩ \end{array}\right.$

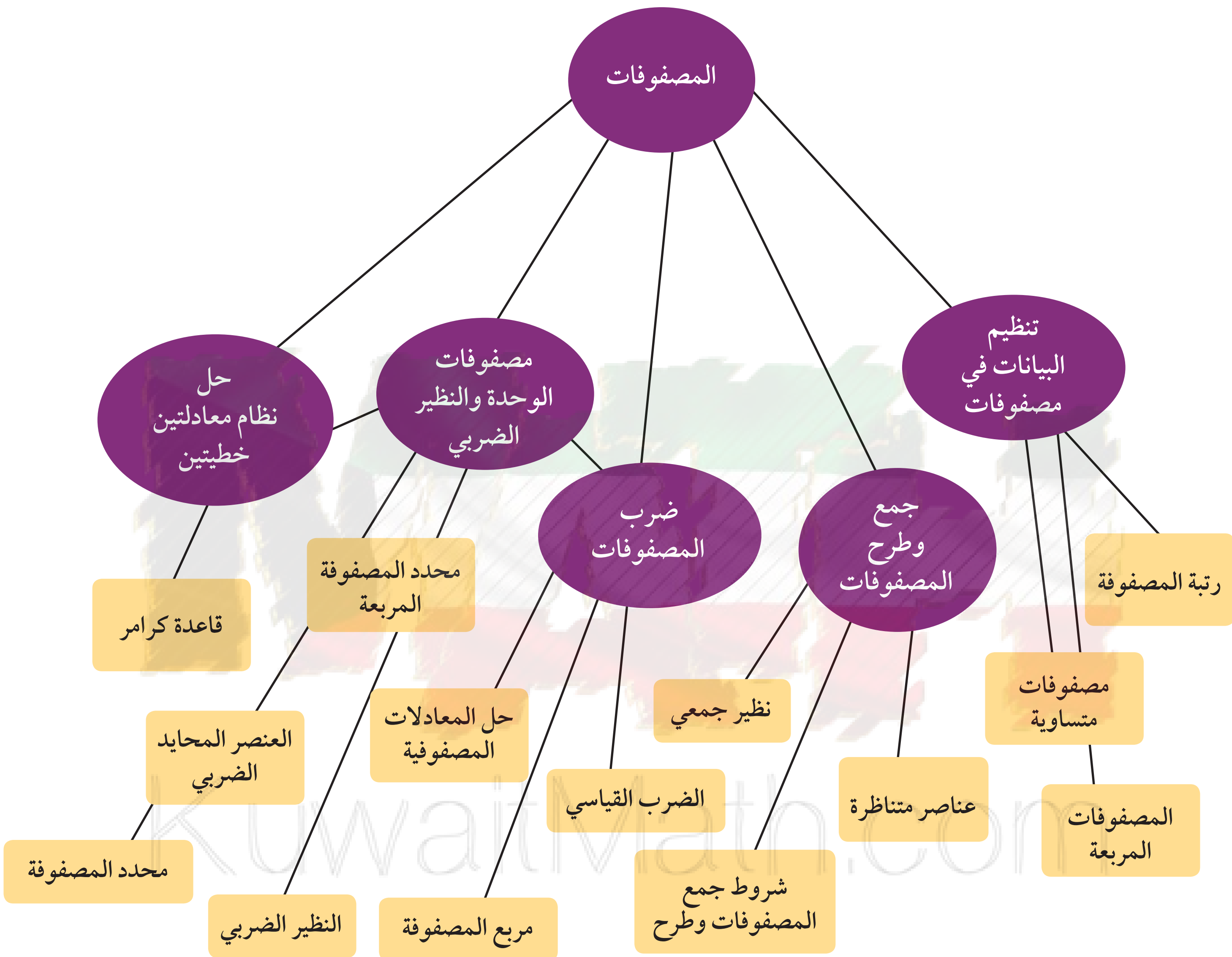
استخدم المصفوفات لحل النظام وإيجاد إحداثيي هذه النقطة.

٢ ما المشاكل التي ستعترض مرشدًا

أ إذا لم يكن للنظام حلول؟

ب إذا كان للنظام عدد غير منته من الحلول؟

مخطط تنظيمي للوحدة السابعة



ملخص

- المصفوفة عبارة عن تنظيم من الأعداد على شكل مستطيل، ترتب فيه الأعداد في صفوف وأعمدة وتكتب مثلًا: أ.
- يحدّد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما.
- تكون المصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية.
- تحصل على مصفوفة الجمع بجمع العناصر المتناظرة، كما ويمكنك أيضًا طرح المصفوفات عن طريق طرح العناصر المتناظرة.
- العناصر المتناظرة في المصفوفات هي العناصر التي لها الرتبة نفسها في كلّ مصفوفة.
- المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تسمى مصفوفة صفرية.
- المصفوفة −أ هي النظير الجمعي للمصفوفة أ.
- خواص جمع المصفوفات: أ + ب = ب + أ

  أ + (ب + جـ) = (أ + ب) + جـ

  ٠ + أ = أ + ٠ = أ

  أ + (−أ) = ٠
- عند ضرب مصفوفة في عدد قياسي، نضرب كل عنصر من المصفوفة في هذا العدد.
- تكون مصفوفة الضرب معرّفة، إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

  أ$_{م\times ن}$ × ب$_{ن\times ر}$ = جـ$_{م\times ر}$.
- لكي تقوم بعملية ضرب المصفوفات، اضرب عناصر كل صف من المصفوفة الأولى في عناصر كل عمود من المصفوفة الثانية. أوجد ناتج كل ضرب، ثم اجمع نواتج الضرب.
- إذا كانت أ من الرتبة م × ن ، ب من الرتبة ن × ر، فإن رتبة المصفوفة أ × ب هي م × ر.
- خصائص ضرب المصفوفات: (أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ)

  أ × (ب + جـ) = أ × ب + أ × جـ

  (ب + جـ) × أ = ب × أ + جـ × أ
- المصفوفة المربعة هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.
- المصفوفة المربعة ن × ن التي عناصر قطرها الرئيسي هي ١ وبقية العناصر هي الصفر، تسمى مصفوفة الوحدة للضرب وتكتب و.
- مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي ١ وبقية العناصر صفر.

- مصفوفة النظير (المعكوس) الضربي للمصفوفة المربعة $\underline{\text{أ}}$، تكتب $\underline{\text{أ}}^{-1}$ ويكون:

$\underline{\text{أ}}^{-1} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{و}}$، $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}}^{-1} = \underline{\text{و}}$، وتسمى النظير الضربي للمصفوفة $\underline{\text{أ}}$.

- تقترن كل مصفوفة مربعة $\underline{\text{أ}}$ بعدد حقيقي يسمى «محدد» ويرمز إليه بالرمز $|\underline{\text{أ}}|$ ويقرأ محدد المصفوفة $\underline{\text{أ}}$. وإذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$

فإن $|\underline{\text{أ}}| = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{vmatrix} = \text{أد} - \text{ب جـ}$

$$\underline{\text{أ}}^{-1} = \frac{1}{\text{أد} - \text{ب جـ}} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix} \quad \text{حيث أد} - \text{ب جـ} \neq 0$$

- في المصفوفة $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$، إذا كان أ د − ب جـ = ٠. تسمى المصفوفة منفردة وليس لها نظير ضربي.

- حلّ نظام من معادلتين خطيتين هو زوج مرتب يحقق المعادلتين معًا.

- يمكن حلّ نظام من معادلتين خطيتين باستخدام النظير الضربي للمصفوفة أو باستخدام المحددات (قاعدة كرامر).