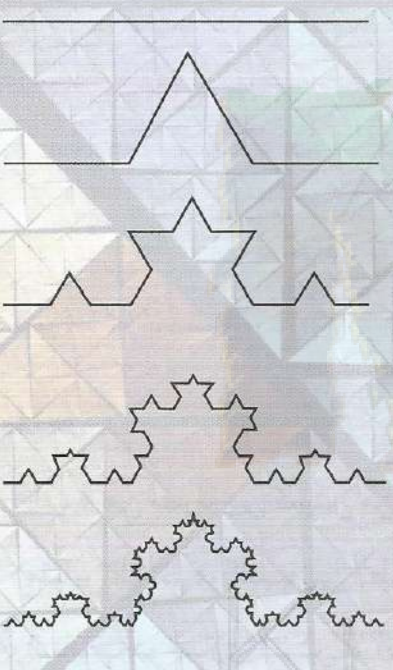
الوحدة الرابعة

الهندسة المستوية
Plane Geometry

مشروع الوحدة: هندسة الكسريات CTALS

١ مقدمة المشروع: خلال السنوات العشرين الأخيرة، تزايدت كثيرًا أهمية هندسة الكسريات fractal geometry كطريقة لوصف بعض ظواهر الحياة اليومية. استخدمت بعض الكسريات لوصف التكوينات الطبيعية مثل سلاسل الجبال والغيوم. في العام ١٩٠٤، وضع السويدي فون كوش (Von Kosh) منحنى استخدم لنمذجة السواحل.

كثير من الأشكال تحتوي على أنماط تتكرر بمقاييس مختلفة مثل زهرة القرنبيط، حيث تهتم هندسة الكسريات بهذه الأشكال. ويعتبر عالم الرياضيات فون كوش من أهم الباحثين في هذ المجال.



المرحلة ٠

المرحلة ١

المرحلة ٢

المرحلة ٣

المرحلة ٤

٢ الهدف: دراسة الأشكال ذاتية التماثل التي تتغير.

٣ اللوازم: أوراق رسم بياني ؛ حاسبة علمية أو حاسوب.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ ابحث عن الخصائص الثلاث المهمة للكسريات.

ب ابحث عن العالم الرياضي فون كوش واعرض لبعض أعماله في مجال الكسريات وخاصة «رقعة كوش» Koch snow flake

جـ طول القطعة المقابلة وحدة واحدة وتشكل المرحلة صفر من «منحنى كوش».
نفذ المراحل من ١ إلى ٤. في كل مرحلة، قسّم القطعة إلى ٣ قطع متطابقة واستبدل قطعة الوسط بقطعتين لهما القياس نفسه.

د ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع. عيّن نقطة المنتصف لكل ضلع. صل بين النقاط الثلاث. كرّر ذلك عدة مرات.

٥ التقرير: ضعْ تقريرًا تبيّن فيه كيف نفذت المشروع وتجيب عن الأسئلة.

دروس الوحدة

المضلعات المتشابهة	تشابه المثلثات	التشابه في المثلثات قائمة الزاوية	التناسبات والمثلثات المتشابهة
٤-١	٤-٢	٤-٣	٤-٤

الوحدة الرابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت نظرية فيثاغورث وتطبيقاتها في المثلثات قائمة الزاوية.
- تعرفت على منصف الزاوية والمنصف العمودي للقطعة المستقيمة والقطعة المتوسطة في المثلث والعمود المرسوم من الرأس إلى الضلع المقابل في المثلث.
- تعلمت الحلول للمعادلات من الدرجة الأولى في متغيرين.
- تعلمت الحلول للمعادلات من الدرجة الثانية في متغير.
- تعرفت حلول المتباينات.
- تعرفت النسبة والتناسب.

ماذا سوف تتعلم؟

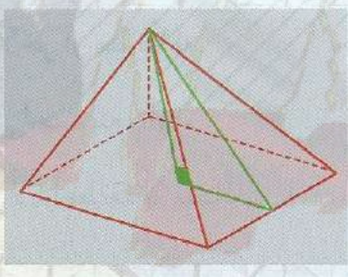
- التشابه: مفهوم التشابه بين الأشكال الهندسية المستوية وإيجاد مقاييس رسم معين باستخدام التشابه وإيجاد النسبة الذهبية.
- حالات تشابه المثلثات والتطبيق في مواقف حياتية.
- تطبيق التشابه على المثلث قائم الزاوية والخصائص الناتجة من العمود المرسوم من رأس القائمة إلى الوتر المقابل.
- نظرية طاليس.
- خصائص منصف الزاوية الداخلي في المثلث.
- إدراك العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتيهما.

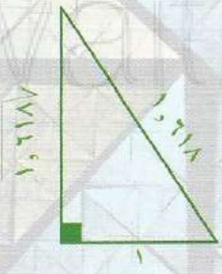
المصطلحات الأساسية

التشابه - مستطيل ذهبي - نظرية طاليس - عمود في المثلث - مساحة - مقياس رسم - نسبة ذهبية - منصف زاوية - محيط.

أضف إلى معلوماتك

كان المصريون القدماء، على ما يبدو، على علم بوجود النسبة الذهبية وقد استخدموها في بناء بعض الأهرامات مثل الهرم الكبير في الجيزة (هرم خوفو).
في هرم خوفو، طول كل ارتفاع جانبي يساوي ١,٦١٨ مضروبًا في نصف طول ضلع القاعدة.





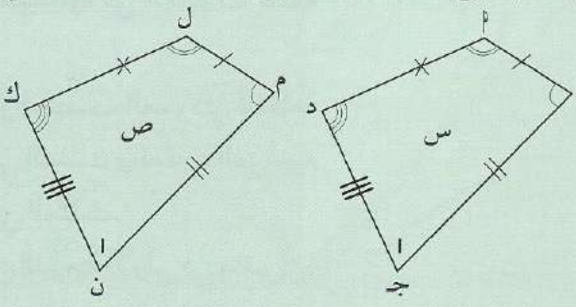
٤ – ١

المضلعات المتشابهة
Similar Polygons

دعنا نفكر ونتناقش

درسنا في ما سبق مفهوم **تطابق المثلثات**. بالنسبة إلى المضلعات، يكون المضلعان متطابقين إذا تحقق الشرطان التاليان معًا:

- أطوال أضلاعهما المتناظرة متساوية.
- قياسات زواياهما المتناظرة متساوية.



في الشكل المرسوم:
المضلعان أب جـ د، ل م ن ك متطابقان.

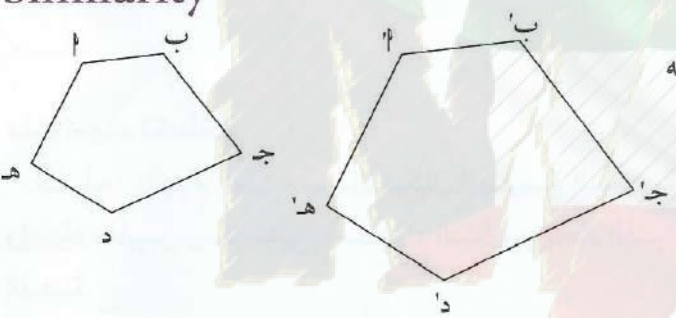
سوف تتعلم

- تحديد مفهوم التشابه بين الأشكال الهندسية المستوية
- تشابه مثلثين
- المستطيل الذهبي
- النسبة الذهبية

١ – التشابه

Similarity

يقال لشكلين هندسيين إنهما **متشابهان** إذا كان لهما **الشكل العام نفسه** وكان **أحدهما تكبيرًا أو تصغيرًا للآخر أو مطابقًا له**.



فكر معي: في ما يلي أجب بنعم أو لا.
وإذا كانت الإجابة (لا) أعط مثالًا مضادًّا.

هل:

- كل مربعين متشابهان؟
- كل مثلثين متطابقي الأضلاع متشابهان؟
- كل مثلثين متطابقي الضلعين متشابهان؟
- كل المثلثات قائمة الزاوية متشابهة؟

معلومة مفيدة:

في بعض الأحيان، لا يكون التخمين دائمًا صحيحًا. يمكن إثبات أن تخمينًا ما خطأ باستخدام مثال مضاد.

يكون المثال المضاد لتخمين معين طريقة لإثبات أن هذا التخمين هو خطأ.

يكفي إيجاد مثال مضاد واحد لإثبات أن تخمينًا ما خطأ. فالقول أن الأعداد الأولية هي أعداد فردية صحيح لعدد لامتناهٍ من الأعداد. العدد ٢ هو أولي وزوجي (ليس عددًا فرديًّا) وهذا كافٍ لإثبات خطأ التخمين.

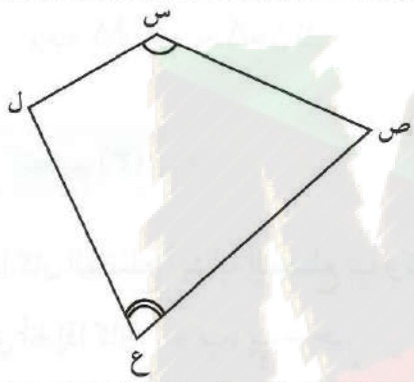
تعميم (١)

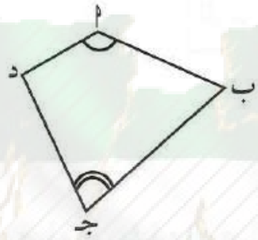
يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحقق الشرطان التاليان معًا:
- **قياسات زواياهما المتناظرة متساوية.**
- **أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.**

والعكس صحيح.

وتسمى النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين **نسبة التشابه**.

تدريب (١)





أكمل:

إذا كان المضلعان أب جـ د، س ص ع ل متشابهين فإن:

١ ق(سَ) = ...، ق(عَ) = ...

ق(صَ) = ...، ق(لَ) = ...

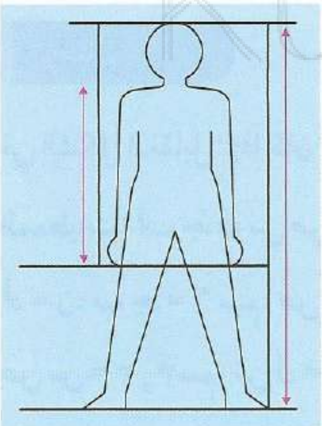
٢ $\frac{\text{س ص}}{\text{أب}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ع ل}}{\text{...}} = \frac{\text{...}}{\text{د أ}}$

تدريب (٢)

أجب عن الأسئلة التالية (أعط مثالًا مضادًا إذا كانت الإجابة لا):

٣ هل جميع المضلعات المنتظمة والتي لها العدد نفسه من الأضلاع متشابهة؟

٤ إذا نظرت إلى صورتك (الفوتوغرافية) هل النسبة بين طول ذراعك وطول ذراعك في الصورة تساوي النسبة بين طول جسمك وطول جسمك في الصورة؟



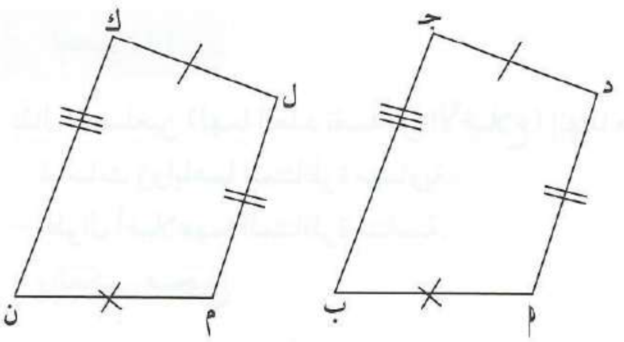
٥ هل النسبة بين طولي أي ضلعين متجاورين في مستطيل تساوي النسبة بين طولي ضلعين متجاورين مناظرين لهما في مستطيل آخر؟

تعميم (٢)

المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين.

تذكر:
الرمز ≅ يعني تطابق

فمثلًا:



إذا كان المضلع أب جـ د ≅ المضلع م ن ك ل فإن:

١ ق(أ̂) = ق(م̂)، ق(ب̂) = ق(ن̂)، ....

٢ أب / م ن = ب جـ / ن ك = جـ د / ك ل = د أ / ل م = ١

∴ المضلع أب جـ د ~ المضلع م ن ك ل

ومنه Δأب جـ ≅ Δم ن ك

ومنه Δأب جـ ~ Δم ن ك.

ملاحظة:
الرمز ~ يعني تشابه

تعميم (٣)

إذا كان المضلع أ يشابه المضلع ب وكان المضلع ب يشابه المضلع جـ، فإن المضلع أ يشابه المضلع جـ.

أي أنه إذا كان: أ ~ ب، ب ~ جـ

فإن أ ~ جـ

مثال (١)

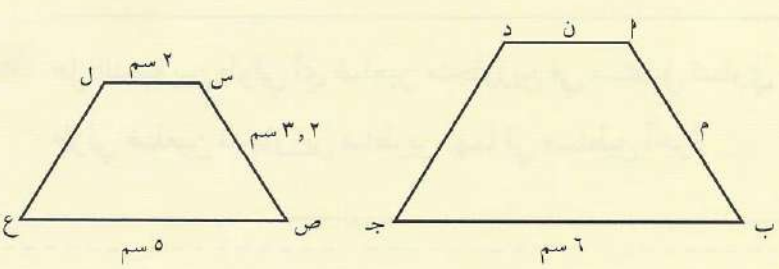
في الشكل المقابل: إذا كان أب جـ د ~ س ص ع ل، أوجد قيمة ن، م.

المعطيات: أب جـ د، س ص ع ل متشابهين.

أد = ن، ب جـ = ٦ سم، ص ع = ٥ سم،

ص س = ٢,٣سم، س ل = ٢سم

المطلوب: إيجاد قيمة ن، م.



البرهان:

المضلع أب جـ د ~ س ص ع ل.

$$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{أد}}{\text{س ل}}$$

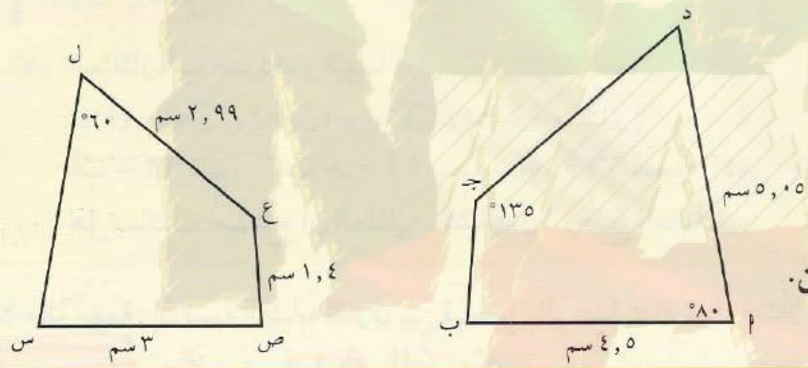
ومنه: $\frac{\text{م}}{٣,٢} = \frac{٦}{٥} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ن}}{٢}$

$\frac{\text{ن}}{٢} = \frac{٦}{٥}$ $\therefore$ ن = ٢,٤ سم

$\frac{\text{م}}{٣,٢} = \frac{٦}{٥}$ $\therefore$ م = ٣,٨٤ سم

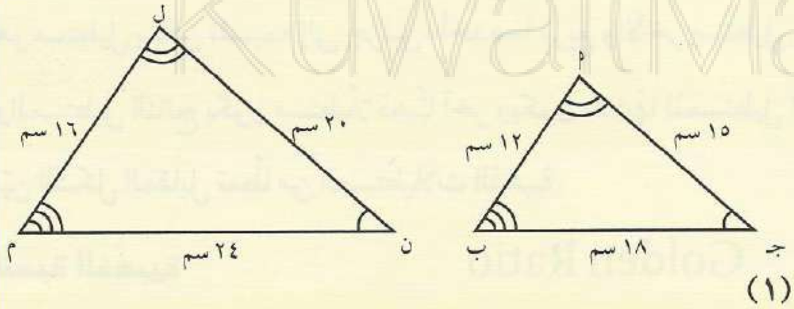
حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل، المضلعان أب جـ د، س ص ع ل متشابهان.
أوجد قياسات الزوايا المجهولة وأطوال الأضلاع المجهولة في كلا المضلعين.



مثال (٢)

حدّد فيما إذا كان المثلثان أب جـ، ل م ن متشابهين.
إذا كان المثلثان متشابهين،
اكتب قاعدة التشابه ونسبة التشابه.



البرهان:

من المعطيات في الشكل: الزوايا المتناظرة متطابقة. (١)

بمقارنة أطوال الأضلاع المتناظرة نجد أن:

$$\frac{\text{أب}}{\text{ل م}} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$$

$$\frac{\text{ب جـ}}{\text{م ن}} = \frac{١٨}{٢٤} = \frac{٣}{٤}$$

$$\frac{\text{جـ أ}}{\text{ن ل}} = \frac{١٥}{٢٠} = \frac{٣}{٤}$$

أي أن:

$$\frac{\text{أب}}{\text{ل م}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{م ن}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{ن ل}} = \frac{٣}{٤}$$

بالتالي:

أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة. (٢)

من (١)، (٢) يتبيّن أن:

Δ أب جـ $\sim$ Δ ل م ن، وأن نسبة التشابه $\frac{٣}{٤}$.

كذلك نسبة التشابه $\frac{٤}{٣}$

حاول أن تحل

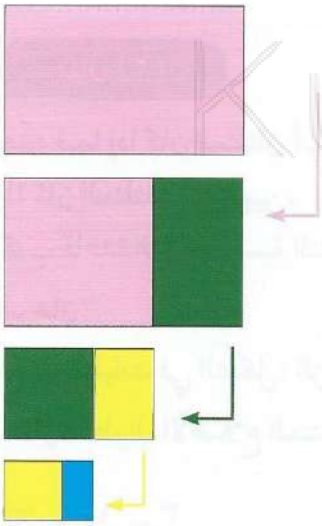
٢ المثلثان أب جـ، دهـ و فيهما:

ق($\hat{أ}$) = ق($\hat{د}$) ، ق($\hat{ب}$) = ق($\hat{هـ}$) ، ق($\hat{جـ}$) = ق($\hat{و}$)

أب = ١٢ سم، ب جـ = ١٤ سم، أجـ = ١٦ سم، دهـ = ١٨ سم، هـ و = ٢١ سم، د و = ٢٤ سم.

هل يمكنك استنتاج أن المثلثين متشابهان؟ وضِّحْ إجابتك.

ملاحظة مهمة: إن نسبة التشابه تقارن بين قياسين بالوحدات نفسها، فمثلًا أطوال أضلاع المثلثين في المثال (٢) هي بالسنتيمتر.



المستطيل الذهبي Golden Rectangle

هو مستطيل يمكن تقسيمه إلى جزئين، أحدهما مربع والآخر مستطيل.

والمستطيل الناتج يكون مستطيلًا ذهبيًّا آخر ويكون مشابهًا للمستطيل الأصلي.

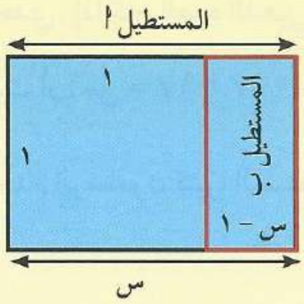
يبيّن الشكل المقابل نمطًا من المستطيلات الذهبية.

النسبة الذهبية Golden Ratio

في كل مستطيل ذهبي، نسبة طول الضلع الأكبر إلى طول الضلع الأصغر تسمى النسبة الذهبية وتساوي $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$: ١ أي حوالى ١,٦١٨ : ١.

مثال (٣)

استخدم المستطيل الذهبي المقابل والتناسب لإيجاد النسبة الذهبية.



الحل:

∵ المستطيل أ هو مستطيل ذهبي وتم تقسيمه إلى مربع ومستطيل ب.

∴ المستطيل ب مستطيل ذهبي

∴ المستطيل أ ~ المستطيل ب.

∴ $\dfrac{\text{طول المستطيل أ}}{\text{عرض المستطيل أ}} = \dfrac{\text{طول المستطيل ب}}{\text{عرض المستطيل ب}} = $ النسبة الذهبية

ليكن س = طول المستطيل أ.

س − ١ = عرض المستطيل ب.

نحصل على $\dfrac{\text{س}}{١} = \dfrac{١}{\text{س} - ١}$

∴ س^{٢} − س = ١   باستخدام الضرب التقاطعي

س^{٢} − س − ١ = ٠

نستخدم القانون لحل المعادلة التربيعية.

المميز = ب^{٢} − ٤أجـ = ٥

∴ س = $\dfrac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$ أو   س = $\dfrac{١ - \sqrt{٥}}{٢}$ مرفوضة

س ≃ ١,٦١٨   باستخدام الآلة الحاسبة

أي أن النسبة الذهبية هي $\dfrac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$: ١

أو حوالى ١,٦١٨ : ١

معلومة رياضية:

في أي مستطيل، البعد الأقصر يسمى العرض والبعد الأطول يسمى الطول.

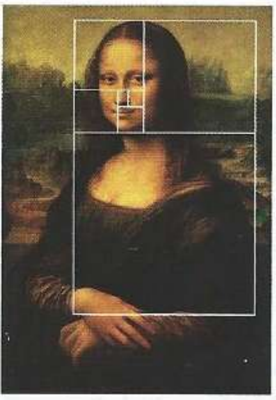
هل تعلم:

العدد الذهبي يساوي ١,٦١٨ تقريبًا

حاول أن تحل

٣ قطعة نقدية ورقية مستطيلة الشكل أبعادها ٥,١٠ سم، ٦,٥ سم.

هل نسبة طولها إلى عرضها تساوي النسبة الذهبية؟



لوحة موناليزا

التحدي: إذا كان العدد الذهبي س هو الجذر الموجب للمعادلة التربيعية $س^{٢} = س + ١$

فأثبت أن: $س = \sqrt{١ + \sqrt{١ + \sqrt{١ + \ldots}}}$

استخدم الرسامون كثيرًا المستطيل الذهبي في أعمالهم.

مثال (٤) تطبيقات حياتية

يخطط أحد الفنانين لرسم لوحة مستطيلة الشكل طولها ٦٠ سم. كم يجب أن يكون عرض اللوحة ليكون المستطيل ذهبيًّا؟ (علمًا بأن النسبة الذهبية ≃ ١,٦١٨ : ١)

الحلّ:

حتى تكون اللوحة على شكل مستطيل ذهبي يجب أن يكون:

$$\frac{\text{طول اللوحة}}{\text{عرض اللوحة}} = \frac{١,٦١٨}{١}$$

ليكن هـ عرض اللوحة.

$$\frac{٦٠}{هـ} \simeq \frac{١,٦١٨}{١}$$ كتابة التناسب

$$١,٦١٨\, هـ \simeq ٦٠$$ الضرب التقاطعي

$$هـ \simeq \frac{٦٠}{١,٦١٨}$$

$$هـ \simeq ٣٧$$

يجب أن يكون عرض اللوحة حوالى ٣٧ سم.

حاول أن تحل

٤ إذا كان عرض أحد المستطيلات الذهبية ٦٠ سم، فكم يجب أن يكون طوله؟

٤ – ٢

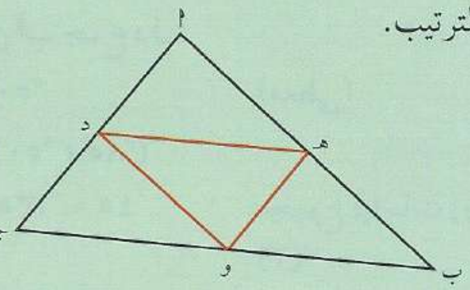
تشابه المثلثات
Similar Triangles

سوف تتعلم

- حالات تشابه المثلثات

دعنا نفكر ونتناقش

في المثلث أب جـ: هـ، د، و منتصفات $\overline{أب}$، $\overline{أجـ}$، $\overline{ب جـ}$ على الترتيب.



١ هل قياسات زوايا المثلثين أهـ د، أب جـ متساوية؟

٢ هل أطوال أضلاع المثلثين أهـ د، أب جـ متناسبة؟

إذا كانت إجابتك نعم، فما قيمة هذه النسبة.

٣ برهن أن المثلثات أدهـ، دجـ و، هـ و ب، هـ و د متطابقة.

٤ هل برأيك، المثلث أهـ د هو تصغير للمثلث أب جـ؟ وهل هما متشابهان؟

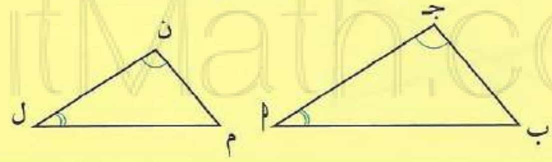
سبق أن تعلمت عدة طرائق تبيّن بها تطابق مثلثين.

في أي مثلثين متشابهين تكون قياسات الزوايا المتناظرة متساوية،
والنسب بين طولي كل ضلعين متناظرين متساوية؟
النظريات التالية تبين أن توفر أحد الشرطين يكفي لإثبات أن المثلثين متشابهان حيث إن الشرط الآخر سيكون محققًا أيضًا.

نظرية (١)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.

$\triangle$أب جـ ~ $\triangle$ل م ن.



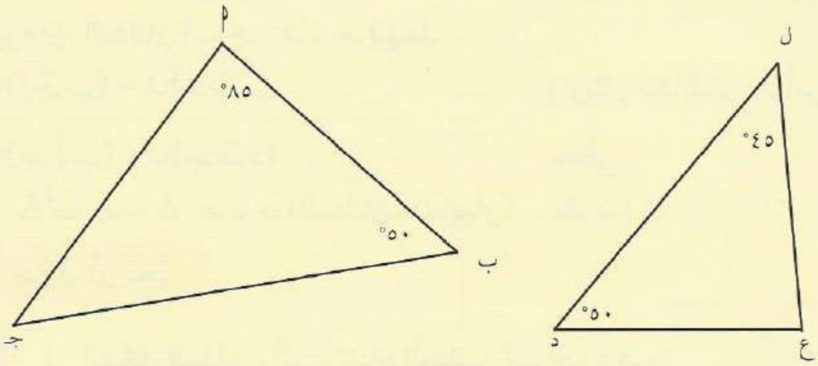
مثال (١)

في الشكل المقابل أب جـ، ع ل د مثلثان، فإذا كان:

ق$(\hat{ب})$ = ٥٠°، ق$(\hat{أ})$ = ٨٥°

ق$(\hat{ل})$ = ٤٥°، ق$(\hat{د})$ = ٥٠°

أثبت تشابه المثلثين أب جـ، ع د ل.



المعطيات:

ق$(\hat{ب})$ = ٥٠°، ق$(\hat{أ})$ = ٨٥°

ق$(\hat{ل})$ = ٤٥°، ق$(\hat{د})$ = ٥٠°

المطلوب:

إثبات تشابه المثلثين ﺃب جـ، ع د ل.

البرهان: في المثلثين ﺃب جـ، ع د ل:

ق(بˆ) = ق(دˆ) = ٥٠° (معطى) (١)

ق(جـˆ) = ١٨٠° − (٥٠° + ٨٥°)

= ١٨٠° − ١٣٥° = ٤٥°. مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°.

∴ ق(جـˆ) = ق(لˆ) (٢)

من (١)، (٢)، نستنتج أن المثلثين ﺃب جـ، ع د ل متشابهان أي أن Δﺃب جـ ~ Δع د ل.

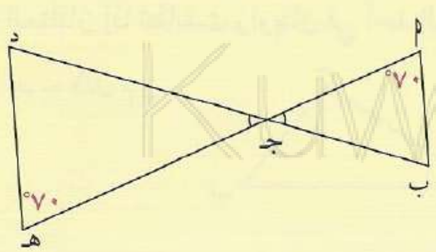
من الاستخدامات:
يستخدم منفذو الحفر على المفروشات الخشبية التشابه بين المثلثات لوضع تصاميم لأعمالهم قبل تنفيذها.

حاول أن تحل

١ المثلث ﺃب جـ قائم الزاوية ﺃ، ق(بˆ) = ٥٥°.
المثلث م ل ح قائم الزاوية م، ق(لˆ) = ٣٥°.
أثبت تشابه المثلثين ﺃب جـ، م ح ل.

مثال (٢)

أثبت أن المثلثين في الشكل المقابل متشابهان. اكتب عبارة التشابه.



الحل:

المعطيات:

Δﺃب جـ، Δد هـ جـ فيهما:

ق(ﺃˆ) = ٧٠°، ق(هـˆ) = ٧٠°

ﺃ جـˆ ب، هـ جـˆ د متقابلتان بالرأس

المطلوب:

إثبات تشابه المثلثين ﺃب جـ، هـ د جـ، وكتابة عبارة التشابه.

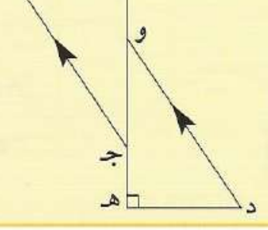
البرهان: المثلثان ﺃب جـ، هـ د جـ فيهما:

ق(ﺃ جـˆ ب) = ق(هـ جـˆ د) زاويتان متقابلتان بالرأس

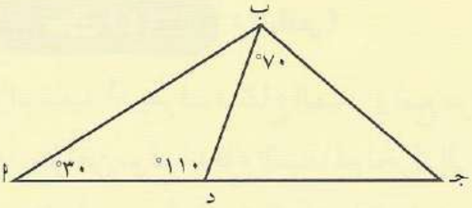
ق(جـ ﺃˆ ب) = ق(جـ هـˆ د) معطى

∴ Δﺃب جـ ~ Δ هـ د جـ (المثلثان متشابهان) نظرية (١)

حاول أن تحل



٢ في الشكل المقابل، أثبت تشابه المثلثين ﺃب جـ، د هـ و.



مثال (٣)

أثبت أن المثلثين أب د ، أجـ ب متشابهان. اكتب عبارة التشابه.

المعطيات:

في الشكل:

ق(جـ ب̂ د) = ٧٠°، ق(أ د̂ ب) = ١١٠°، ق(ب أ̂ د) = ٣٠°.

المطلوب:

إثبات تشابه المثلثين أب د، أجـ ب.

البرهان:

المثلثان أب د، أجـ ب فيهما:

ق(ب أ̂ د) = ق(ب أ̂ جـ) = ٣٠°   زاوية مشتركة

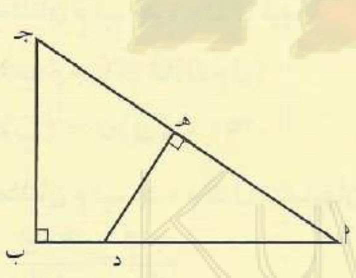
ق(أ ب̂ د) = ١٨٠° − (١١٠° + ٣٠°) = ٤٠°   مجموع زوايا المثلث أب د = ١٨٠°

ق(أ ب̂ جـ) = ٤٠° + ٧٠° = ١١٠°

∴ ق(أ ب̂ جـ) = ق(أ د̂ ب)

المثلثان متشابهان   (تطابق زاويتين)

Δأب د ~ Δأجـ ب.

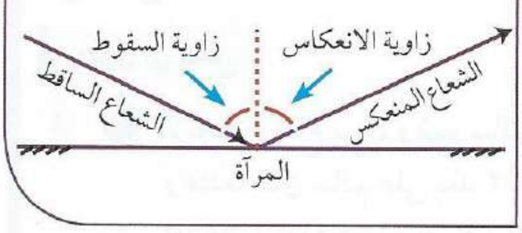


حاول أن تحل

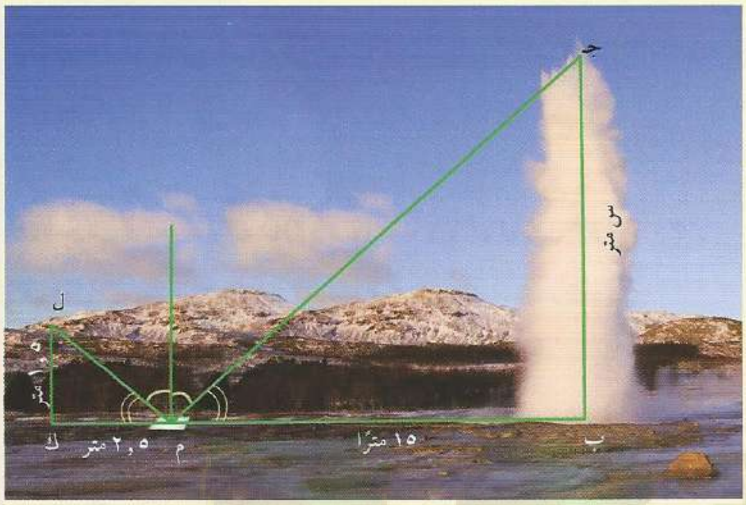
٣ في الشكل المقابل، أثبت تشابه المثلثين أب جـ، أهـ د، واكتب عبارة التشابه.

في بعض الحالات، يصعب قياس مسافة أو ارتفاع معين مباشرة. في هذه الحالة، يمكنك استخدام تشابه المثلثات لإيجاد هذا القياس بطريقة غير مباشرة.
إحدى الطرائق تستخدم خاصية انعكاس الضوء في المرآة المستوية.
فكما تعرف في الفيزياء، إن **قياس زاوية السقوط يساوي قياس زاوية الانعكاس**.

تذكر:
قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس



مثال (٤) **(إثرائي)**



أراد سعيد أن يعرف ارتفاع المياه. وضع مرآة على مسافة ١٥ مترًا من موقع اندفاع المياه، ثم تحرك إلى الخلف حتى استطاع أن يرى أعلى نقطة بلغتها المياه في وسط المرآة. عند هذه النقطة كان سعيد قد تحرك بعيدًا عن المرآة بمسافة ٢,٥ متر، وكانت عيناه على ارتفاع ١,٥ متر فوق الأرض. إذا كانت قدماه والمرآة وموقع اندفاع المياه على استقامة واحدة، فأوجد ارتفاع المياه.

المعطيات:

م ب = ١٥ مترًا ، م ك = ٢,٥ متر ، ك ل = ١,٥ متر

قدما سعيد، المرآة، موقع اندفاع المياه على استقامة واحدة.

المطلوب: معرفة ارتفاع المياه.

البرهان:

المثلثان م ب جـ ، م ك ل فيهما:

ق(ب م̂ جـ) = ق(ك م̂ ل)   زاوية الانعكاس = زاوية السقوط

ق(ب̂) = ق(ك̂) = ٩٠°

المثلثان م ب جـ ، م ك ل متشابهان (تطابق زاويتين)

$\therefore \frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ل}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م ك}}$ تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة

$\frac{\text{س}}{١,٥} = \frac{١٥}{٢,٥}$

٢,٥س = ١,٥ × ١٥

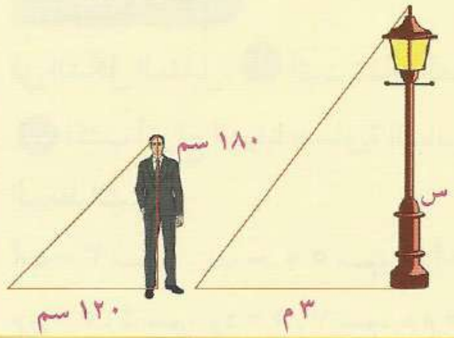
$\text{س} = \frac{١,٥ \times ١٥}{٢,٥} = ٩$

يبلغ ارتفاع المياه ٩ أمتار.

حاول أن تحل

٤ (أ) لإيجاد ارتفاع برج، وضع سالم مرآة مستوية على الأرض على بعد ١٢ مترًا من قاعدة البرج. وعندما كان سالم على بعد ١,٢ متر من المرآة استطاع أن يرى قمة البرج. إذا كان ارتفاع عين سالم عن الأرض ١,٨ متر في هذه النقطة، فكم يكون ارتفاع البرج؟ (علمًا بأن قاعدة البرج وقدمي سالم والمرآة على استقامة واحدة).

ب عمود طول ظله ٣ م في الوقت نفسه الذي يكون فيه طول ظل محمد ١٢٠ سم. إذا كان طول محمد ١٨٠ سم، فكم سيكون طول العمود؟



نظرية (٢)

يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما.

المعطيات: Δأب جـ، Δم ك ل فيهما:

$$\frac{\text{أب}}{\text{م ك}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{م ل}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ل}}.$$

المطلوب: إثبات أن Δأب جـ $\sim$ Δم ك ل.

العمل:

نأخذ س $\in$ $\overline{\text{م ك}}$ حيث م س = أب ونرسم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ك}}$.

$\therefore$ Δم س ص ، Δم ك ل متشابهان. لماذا؟ (١)

$$\frac{\text{م س}}{\text{م ك}} = \frac{\text{م ص}}{\text{م ل}} = \frac{\text{س ص}}{\text{ك ل}}$$ تناسب الأضلاع المتناظرة

$$\frac{\text{أب}}{\text{م ك}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{م ل}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ل}}$$ معطى

بما أن م س = أب إذًا $\frac{\text{م س}}{\text{م ك}} = \frac{\text{أب}}{\text{م ك}}$

ومنه $\frac{\text{م ص}}{\text{م ل}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{م ل}}$ ، $\frac{\text{س ص}}{\text{ك ل}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ل}}$ تساوي التناسبين

م ص = أجـ ، س ص = ب جـ. لماذا؟

Δم س ص ، Δأب جـ متطابقان. (ض. ض. ض) فهما متشابهان (٢)

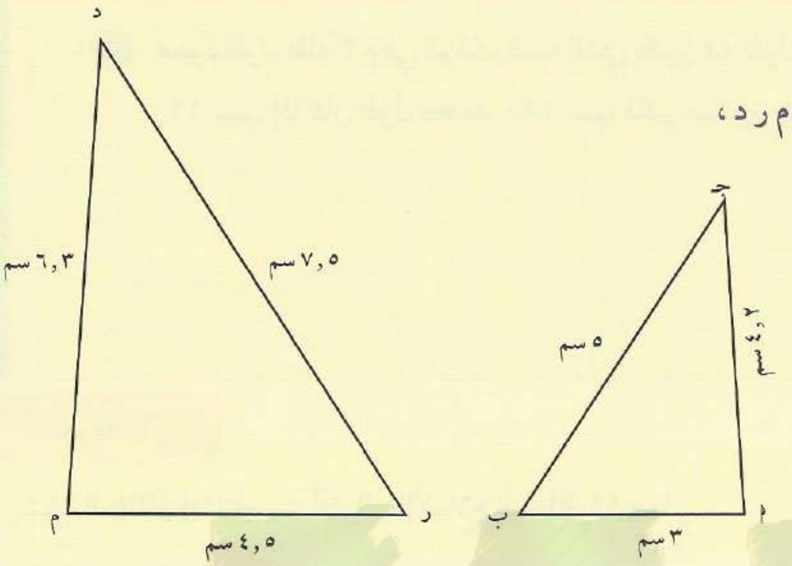
من (١)، (٢)

$\therefore$ Δأب جـ $\sim$ Δم ك ل وهو المطلوب.

لاحظ أن:

ق($\hat{\text{أ}}$) = ق($\hat{\text{م}}$) ، ق($\hat{\text{ب}}$) = ق($\hat{\text{ك}}$) ، ق($\hat{\text{جـ}}$) = ق($\hat{\text{ل}}$).

مثال (٥)



في الشكل المقابل، أ أثبت تشابه المثلثين أب جـ، م ر د ،

ب اكتب أزواج الزوايا متساوية القياس.

المعطيات:

أب = ٣ سم، ب جـ = ٥ سم، جـأ = ٤,٢ سم

م ر = ٤,٥ سم، رد = ٧,٥ سم، د م = ٦,٣ سم.

المطلوب:

أ إثبات تشابه المثلثين أب جـ، م ر د.

ب كتابة أزواج الزوايا متساوية القياس.

البرهان:

أ $\frac{\text{أب}}{\text{م ر}} = \frac{٣}{٤,٥} = \frac{٢}{٣}$ (١)

$\frac{\text{ب جـ}}{\text{رد}} = \frac{٥}{٧,٥} = \frac{٢}{٣}$ (٢)

$\frac{\text{جـأ}}{\text{دم}} = \frac{٤,٢}{٦,٣} = \frac{٢}{٣}$ (٣)

من (١)، (٢)، (٣) نستنتج أن $\frac{\text{أب}}{\text{م ر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{رد}} = \frac{\text{جـأ}}{\text{دم}} = \frac{٢}{٣}$

∴ المثلثان متشابهان أي أن $\triangle$أب جـ ~ $\triangle$م ر د.

ب $\hat{\text{جـ}}$ هي الزاوية المقابلة للضلع $\overline{\text{أب}}$، $\hat{\text{د}}$ هي الزاوية المقابلة للضلع $\overline{\text{م ر}}$.

∴ ق($\hat{\text{جـ}}$) = ق($\hat{\text{د}}$)

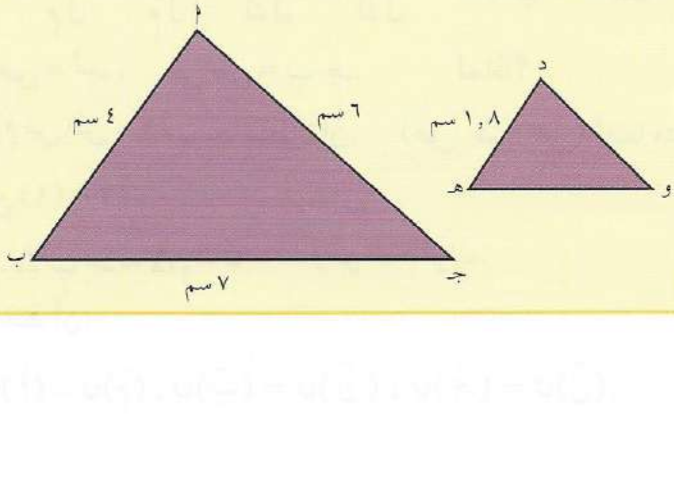
الزاوية $\hat{\text{أ}}$ مقابلة للضلع $\overline{\text{ب جـ}}$، الزاوية $\hat{\text{م}}$ مقابلة للضلع $\overline{\text{رد}}$.

∴ ق($\hat{\text{أ}}$) = ق($\hat{\text{م}}$)

ويبقى: ق($\hat{\text{ب}}$) = ق($\hat{\text{ر}}$).

ق($\hat{\text{جـ}}$) = ق($\hat{\text{د}}$)، ق($\hat{\text{أ}}$) = ق($\hat{\text{م}}$)، ق($\hat{\text{ب}}$) = ق($\hat{\text{ر}}$).

حاول أن تحل

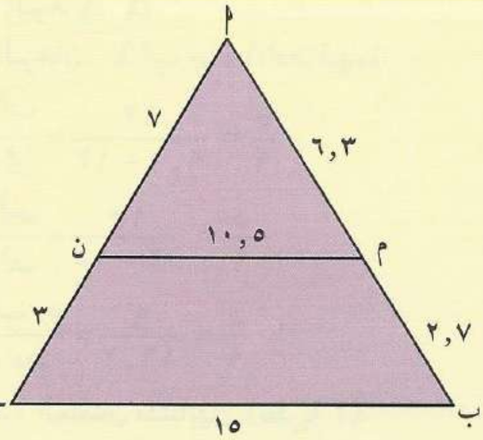


٥ في الشكل المقابل المثلثان أب جـ ، د هـ و متشابهان.

أوجد طول كل من $\overline{\text{دو}}$ ، $\overline{\text{وهـ}}$.

مثال (٦)

في الشكل المرسوم،



أولًا: أثبت أن:

أ $\triangle$أ ب جـ $\sim$ $\triangle$أ م ن.   **ب** $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{م ن}}$.

ثانيًا: أوجد النسبة بين محيطي المثلثين. ماذا تلاحظ؟

المعطيات:

أم = ٦,٣ ، أن = ٧، م ن = ١٠,٥ ، م ب = ٢,٧ ، ن جـ = ٣، ب جـ = ١٥

أولًا: المطلوب: **أ** إثبات تشابه المثلثين أ ب جـ، أ م ن. **ب** $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{م ن}}$.

البرهان: **أ** $\frac{\text{أم}}{\text{أب}} = \frac{٦,٣}{٦,٣ + ٢,٧} = \frac{٦,٣}{٩} = ٠,٧$

أوجد: $\frac{\text{أن}}{\text{أجـ}}$ = ...، $\frac{\text{م ن}}{\text{ب جـ}}$ = ... ماذا تلاحظ؟

استخدم نظرية (٢) . $\triangle$أ م ن $\sim$ $\triangle$أ ب جـ وهو المطلوب (أ).

ب من تشابه المثلثين: ق($\hat{\text{أم}}$ ن) = ق($\hat{\text{أب}}$ جـ) وهما في وضع تناظر.

$\therefore$ $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{م ن}}$.

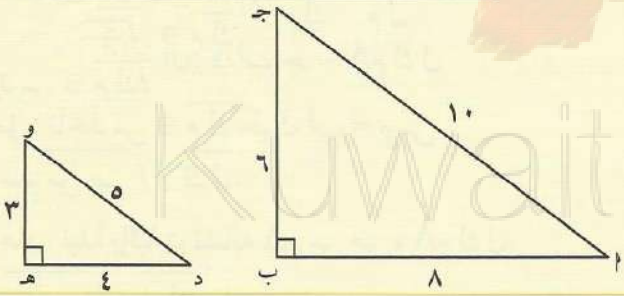
ثانيًا: المطلوب: إيجاد النسبة بين محيطي المثلثين أ ب جـ، أ م ن.

البرهان: $\frac{\text{محيط } \triangle \text{أم ن}}{\text{محيط } \triangle \text{أب جـ}} = \frac{٢٣,٨}{٣٤} = ٠,٧$

نلاحظ أن النسبة بين محيطي المثلثين تساوي نسبة التشابه.

> **معلومة:**
> في أي شكلين متشابهين:
> النسبة بين المحيطين = نسبة التشابه
> النسبة بين المساحتين = مربع نسبة التشابه
> نسبة التشابه بين محيطي دائرتين تساوي النسبة بين طولي نصفي قطري الدائرتين.

حاول أن تحل

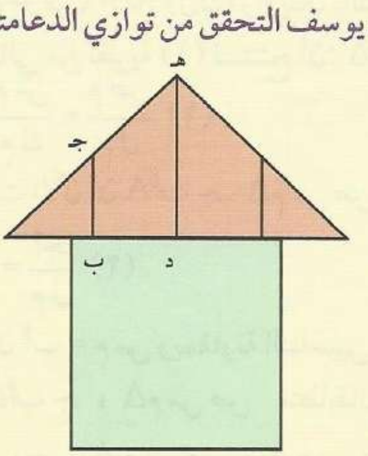


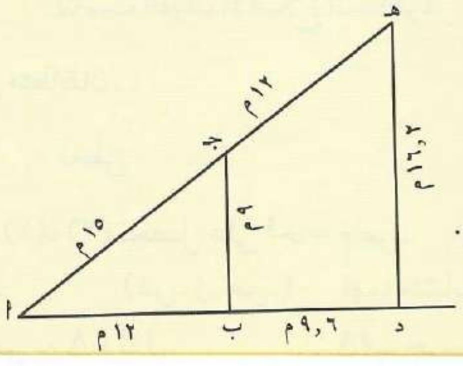
٦ في الشكل المقابل، أثبت أن المثلثين متشابهان.

ثم أوجد العلاقة بين نسبة مساحتي المثلثين ونسبة التشابه.

مثال (٧) تطبيقات حياتية

يبيّن الشكل المقابل قسمًا من المنطقة العلوية في أحد الأهراءات (مخازن الحبوب). أراد يوسف التحقق من توازي الدعامتين $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{دهـ}}$. هل يمكنك مساعدته؟





المعطيات: أ، ب، د على استقامة واحدة.

أ، جـ، هـ على استقامة واحدة.

أب = ١٢ م، ب د = ٩,٦ م، ب جـ = ٩ م،

د هـ = ١٦,٢ م، أجـ = ١٥ م، جـ هـ = ١٢ م.

المطلوب: إثبات أن $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{دهـ}}$.

البرهان: Δأب جـ، Δأدهـ فيهما:

$$\frac{\text{أب}}{\text{أد}} = \frac{\text{١٢}}{\text{١٢ + ٩,٦}} = \frac{\text{٥}}{\text{٩}}$$

$$\frac{\text{أجـ}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{١٥}}{\text{١٥ + ١٢}} = \frac{\text{٥}}{\text{٩}}$$

$$\frac{\text{ب جـ}}{\text{دهـ}} = \frac{\text{٩}}{\text{١٦,٢}} = \frac{\text{٥}}{\text{٩}}$$

$\therefore$ المثلثان متشابهان (نظرية ٢)

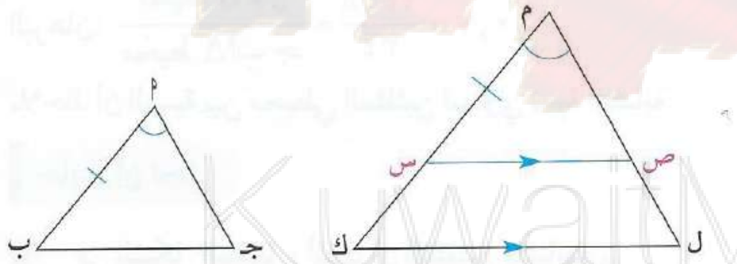
الزاويتان أ$\hat{\text{ب}}$ جـ، أ$\hat{\text{د}}$ هـ متناظرتان ومتساويتان في القياس إذًا $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{دهـ}}$.

حاول أن تحل

٧ في المثال (٧)، أثبت أن Δأب جـ قائم الزاوية ب ثم أوجد قياس الزاوية أ.

نظرية (٣)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاوية في أحدهما مع زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طولا الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين.



المعطيات: ق($\hat{\text{أ}}$) = ق($\hat{\text{م}}$)، $\frac{\text{أب}}{\text{م ك}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{م ل}}$

المطلوب: إثبات أن: Δأب جـ $\sim$ Δم ك ل

العمل: نأخذ س $\in$ $\overline{\text{م ك}}$ حيث أب = م س

ونرسم $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ك ل}}$.

البرهان: نبدأ بإثبات تشابه Δم س ص، Δم ك ل.

$\because$ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ك}}$

$\therefore$ ق(م$\hat{\text{س}}$ص) = ق(م$\hat{\text{ك}}$ل) زاويتان بالتوازي والتناظر،

ق(م$\hat{\text{ص}}$س) = ق(م$\hat{\text{ل}}$ك) زاويتان بالتوازي والتناظر.

وبالتالي من نظرية (١) نستنتج أن: Δم س ص $\sim$ Δم ك ل متشابهان.

$\therefore$ $\frac{\text{م س}}{\text{م ك}} = \frac{\text{م ص}}{\text{م ل}}$ (١) تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة.

سنثبت الآن أن Δأب جـ، Δم س ص متطابقان.

$\frac{\text{أب}}{\text{م ك}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{م ل}}$ (٢) معطى

بما أن أب = م س وبمقارنة التناسبين (١)، (٢) نحصل على أجـ = م ص.

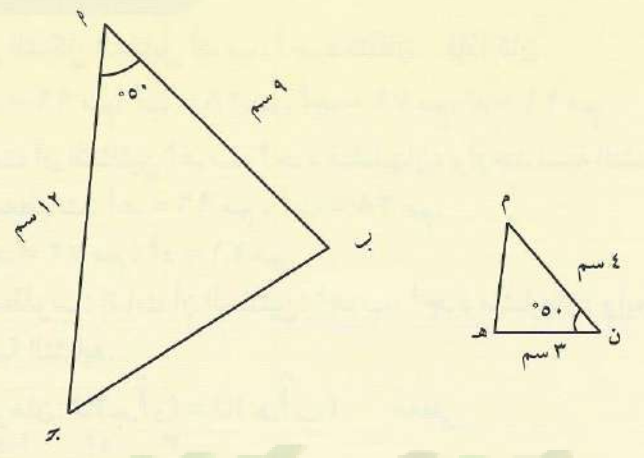
$\therefore$ Δأب جـ، Δم س ص متطابقان (ض. ز. ض.) فهما متشابهان.

Δأب جـ $\sim$ Δم س ص، Δم س ص $\sim$ Δم ك ل. $\therefore$ Δأب جـ $\sim$ Δم ك ل.

معلومة مفيدة:

عندما نقول (بالتوازي والتناظر) نعني وجود مستقيمين متوازيين وقاطع لهما، وزاويتان في وضع تناظر.

مثال (٨)



في الشكل المقابل أب جـ، ن هـ م مثلثان، فإذا كان:

ق$(\hat{أ})$ = ق$(\hat{ن})$ = ٥٠°

أب = ٩ سم، أجـ = ١٢ سم، م ن = ٤ سم، ن هـ = ٣ سم.

أثبت تشابه المثلثين أب جـ، ن هـ م.

المعطيات:

ق$(\hat{أ})$ = ق$(\hat{ن})$ = ٥٠°

أب = ٩ سم، أجـ = ١٢ سم، م ن = ٤ سم، ن هـ = ٣ سم

المطلوب:

إثبات تشابه المثلثين أب جـ، ن هـ م.

البرهان:

المثلثان أب جـ، ن هـ م فيهما

ق$(\hat{أ})$ = ق$(\hat{ن})$ = ٥٠° (معطى) (١)

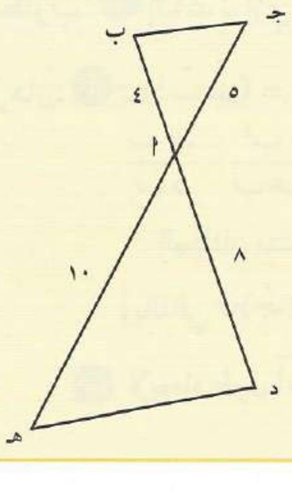
$\frac{\text{أب}}{\text{ن هـ}} = \frac{٩}{٣} = ٣$

$\frac{\text{أجـ}}{\text{م ن}} = \frac{١٢}{٤} = ٣$

$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{ن هـ}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{م ن}}$ (٢)

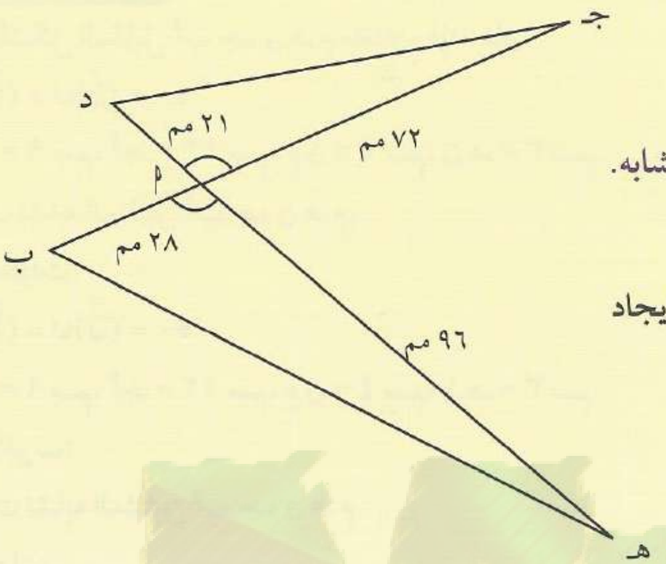
من (١)، (٢) نستنتج أن المثلثين أب جـ، ن هـ م متشابهان.

حاول أن تحل



٨ في الشكل المقابل $\overline{\text{ب د}} \cap \overline{\text{جـ هـ}}$ = {أ} ، أثبت أنّ المثلثين أب جـ، أد هـ متشابهان.

مثال (٩)



في الشكل المقابل أهـ ب، أجـ د مثلثان. فإذا كان

أهـ = ٩٦ مم، أب = ٢٨ مم، أجـ = ٧٢ مم، أد = ٢١ مم

أثبت أن المثلثين أهـ ب، أجـ د متشابهان، وأوجد نسبة التشابه.

المعطيات: أهـ = ٩٦ مم ، أب = ٢٨ مم.

أجـ = ٧٢ مم ، أد = ٢١ مم.

المطلوب: إثبات أن المثلثين: أهـ ب، أجـ د متشابهان، وإيجاد نسبة التشابه.

البرهان: ق(جـ$\hat{أ}$د) = ق(هـ$\hat{أ}$ب) معطى

$$\frac{أجـ}{أهـ} = \frac{أد}{أب} = \frac{٣}{٤}$$

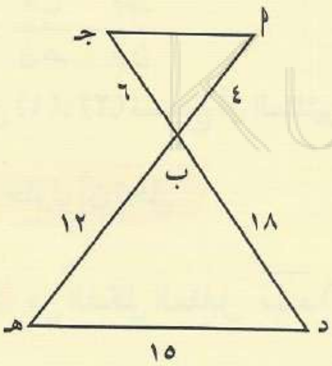
∴ المثلثان متشابهان. نسبة التشابه: $\frac{٣}{٤}$ أو $\frac{٤}{٣}$.

حاول أن تحل

٩ في المثلثين أب جـ، ف د ي: أب = ٧ سم ، ب جـ = ٦ سم، ق($\hat{ب}$) = ٦٣°.

دي = ٤,٥ سم، ق($\hat{د}$) = ٦٣°، ف د = ٣,٦ سم. هل المثلثان أب جـ، د ي ف متشابهان؟

مثال (١٠)



في الشكل $\overline{أهـ} \cap \overline{جـ د}$ = {ب} ، برهن أن: (أ) $\overline{أجـ}$ // $\overline{دهـ}$. (ب) أوجد طول $\overline{أجـ}$.

المعطيات: أ، ب، هـ على استقامة واحدة. جـ، ب، د على استقامة واحدة.

أب = ٤ ، ب هـ = ١٢ ، ب جـ = ٦ ، ب د = ١٨ ، دهـ = ١٥ .

المطلوب: (أ) إثبات توازي $\overline{أجـ}$ ، $\overline{دهـ}$. (ب) إيجاد طول $\overline{أجـ}$

البرهان: (أ) ق(أ$\hat{ب}$ جـ) = ق(هـ $\hat{ب}$ د) متقابلتان بالرأس

$$\frac{ب جـ}{ب د} = \frac{أب}{ب هـ} = \frac{١}{٣}$$

∴ المثلثان متشابهان ومنه نستنتج أن الزوايا المتناظرة متساوية القياس.

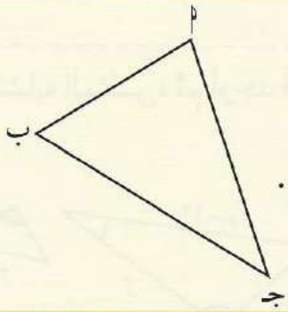
وبالتالي ق($\hat{جـ}$) = ق($\hat{د}$) وهما في وضع تبادل. إذًا $\overline{أجـ}$ // $\overline{دهـ}$.

(ب) لإيجاد طول $\overline{أجـ}$ نكتب التناسب: $\frac{أجـ}{دهـ} = \frac{١}{٣}$

أي $\frac{أجـ}{١٥} = \frac{١}{٣}$

$$أجـ = \frac{١٥}{٣} = ٥$$

حاول أن تحل



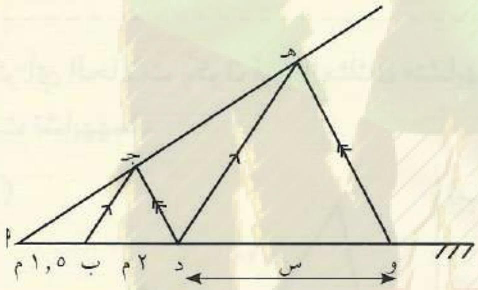
١٠ ارسم بشكل تقريبي $\overline{\text{دهـ}}$ في المثلث أب جـ توازي $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث د تنتمي إلى $\overline{\text{أب}}$، هـ تنتمي إلى $\overline{\text{أجـ}}$ على أن تكون نسبة التشابه بين المثلثين أد هـ، أب جـ تساوي $\frac{٢}{٣}$.

مثال (١١) تطبيقات حياتية

يبيّن الرسم المقابل حلبة منحدرة مدعّمة تستخدم في لعبة التزحلق (سكيت بورد **Skateboard**).

إذا كان $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{دهـ}}$، $\overline{\text{دجـ}}$ // $\overline{\text{وهـ}}$، أوجد قيمة س.

حيث أ، ب، د، و على استقامة واحدة، أ، جـ، هـ على استقامة واحدة.



المعطيات: أب = ١,٥م ، ب د = ٢م، د و = س.

$\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{دهـ}}$، $\overline{\text{دجـ}}$ // $\overline{\text{وهـ}}$

المطلوب: إيجاد س.

البرهان: المثلثان أب جـ ، أد هـ فيهما:

ق(ب$\hat{\text{أ}}$ جـ) = ق(د$\hat{\text{أ}}$هـ) — زاوية مشتركة

ق(أ$\hat{\text{ب}}$ جـ) = ق(أ$\hat{\text{د}}$ هـ) — بالتناظر والتوازي

∴ Δأب جـ ~ Δأدهـ

ومنه $\frac{\text{أب}}{\text{أد}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أهـ}}$ — تناسب الأضلاع المتناظرة

$\frac{١,٥}{١,٥ + ٢} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أهـ}}$ (١)

نثبت بالطريقة نفسها أن المثلثين أدجـ ، أوهـ متشابهان.

ومنه $\frac{\text{أد}}{\text{أو}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أهـ}}$ — تناسب الأضلاع المتناظرة

$\frac{٣,٥}{٣,٥ + \text{س}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أهـ}}$ (٢)

من (١)، (٢) نستنتج: $\frac{١,٥}{١,٥ + ٢} = \frac{٣,٥}{٣,٥ + \text{س}}$

١,٥(٣,٥ + س) = ٣,٥(١,٥ + ٢) — الضرب التقاطعي

$\text{س} = \frac{٣,٥ \times ٣,٥}{١,٥} - ٣,٥$

$\text{س} = \frac{١٤}{٣} = ٤,\overline{٦}$

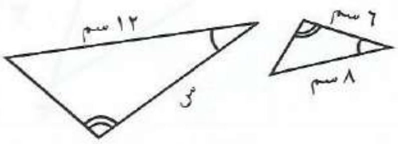
حاول أن تحل

١١ في المثال (١١) إذا كان طول $\overline{\text{هـ جـ}}$ يساوي ٣ م، أوجد طول $\overline{\text{أجـ}}$.

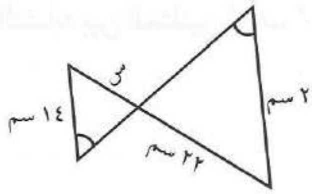
تدريب (١)

اكتب نسبة تشابه المثلثين، ثم أوجد قيمة س في كلٍّ مما يلي:

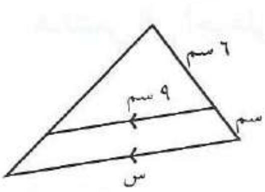
(أ)



(ب)



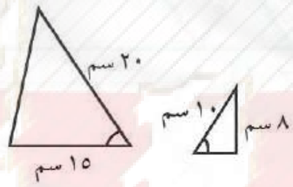
(جـ)



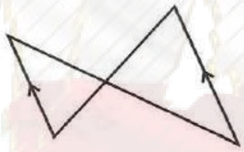
تدريب (٢)

اذكر أي الحالات يكون فيها المثلثان متشابهين، وأيها يكونان فيها غير متشابهين. وفي حالة التشابه، اذكر النظرية التي تثبت تشابههما.

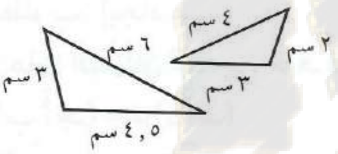
(أ)



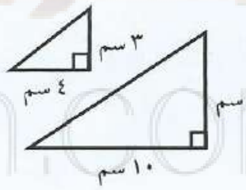
(ب)



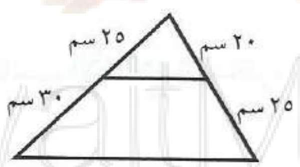
(جـ)



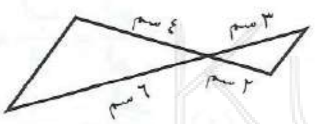
(د)



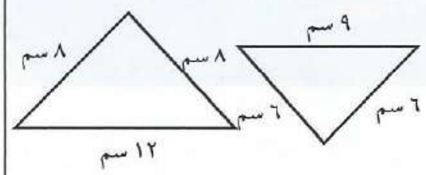
(هـ)



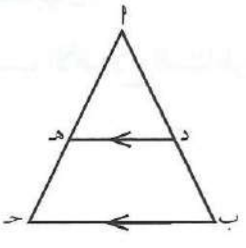
(و)



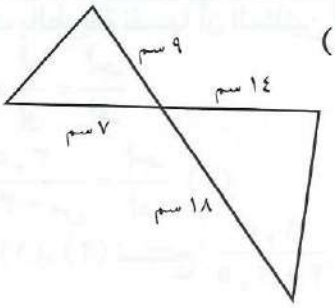
(ز)



(ح)



(ط)



٤ – ٣

التشابه في المثلثات قائمة الزاوية
Similarity in Right Triangles

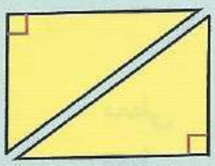
سوف تتعلم

- خصائص العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية

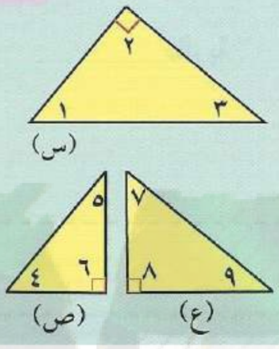
عمل تعاوني

اشترك مع أحد زملائك في التالي:

- أحضر قطعة ورق مستطيلة الشكل. ارسم قطرًا للمستطيل.
  اقطع الورقة كما في الشكل لتحصل على مثلثين قائمي الزاوية متطابقين.

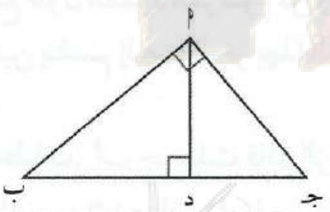


- خذ أحد المثلثين. اقطع المثلث لتحصل على مثلثين قائمي الزاوية صغيرين كما في الشكل.
  في المثلثات الثلاثة: س، ص، ع.
- أي الزوايا لها نفس قياس $\hat{1}$؟
- أي الزوايا لها نفس قياس $\hat{2}$؟
- أي الزوايا لها نفس قياس $\hat{3}$؟
- معتمدًا على نتائجك، ماذا تستنتج بالنسبة إلى المثلثات الثلاثة؟



تدريب (١)

أكمل العبارة: Δ أب جـ ~ Δ ... ~ Δ ...



نظرية (١)

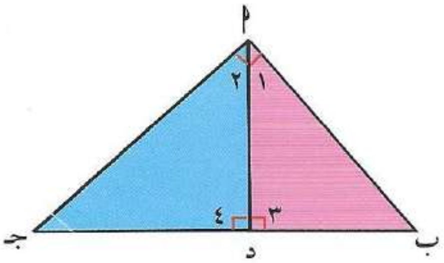
العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي.

المعطيات: أب جـ مثلث قائم الزاوية أ، $\overline{أد} \perp \overline{ب جـ}$.

المطلوب: ١ إثبات تشابه المثلثين أب د، جـ أد.

٢ إثبات تشابه المثلثين أب د، جـ ب أ.

٣ إثبات تشابه المثلثين أجـ د، ب جـ أ.



البرهان:

(١) المثلثان أب د، جـ أد فيهما:

ق(٣̂) = ق(٤̂) = ٩٠° — معطى

ق(١̂) + ق(٢̂) = ٩٠° — معطى

ق(١̂) + ق(ب̂) = ٩٠° — لماذا؟

∴ ق(٢̂) = ق(ب̂)

Δأب د ~ Δجـ أد. — نظرية

تاريخ الرياضيات:

إقليدس **EUCLID**

هو عالم رياضيات لقب بأبي الهندسة.

اشتهر بكتابة «العناصر» عرض فيه مجموعة بديهيات وتطرق للعديد من مجالات الرياضيات.

تدريب (٢)

أكمل إثبات (٢)، (٣).

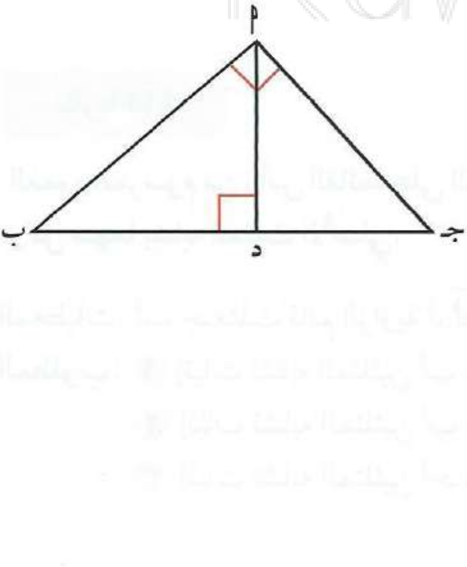
نتيجة (١)

مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود.

المعطيات: أب جـ مثلث قائم الزاوية أ، $\overline{أد}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$.

المطلوب: إثبات أن: (أد)^{٢} = ب د × د جـ.

البرهان: Δأب د ~ Δجـ أد (نظرية ١)



$$\frac{أب}{جـ أ} = \boxed{\frac{ب د}{أد} = \frac{أد}{جـ د}}$$

$$\boxed{(أد)^{٢} = ب د \times جـ د}$$

نتيجة (٢)

إذا كان △أب جـ قائم الزاوية أ، $\overline{\text{أد}} \perp \overline{\text{جـ ب}}$:

١ (أب)^{٢} = ب د × ب جـ

٢ (أجـ)^{٢} = جـ د × جـ ب

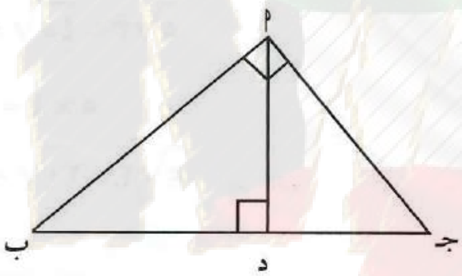
٣ أب × أجـ = أد × ب جـ

المعطيات: △أب جـ مثلث قائم الزاوية أ.

$\overline{\text{أد}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$.

المطلوب: ١ إثبات (أب)^{٢} = ب د × ب جـ.

٢ (أجـ)^{٢} = جـ د × جـ ب.



البرهان:

١ △أب د ~ △جـ ب أ (نظرية ١)

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب أ}}$

ومنها (أب)^{٢} = ب د × ب جـ.

٢ △أجـ د ~ △ب جـ أ (نظرية ١)

∴ $\frac{\text{أجـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{جـ أ}}$

ومنها (أجـ)^{٢} = جـ د × جـ ب

٣ (أب)^{٢} × (أجـ)^{٢} = ب د × ب جـ × جـ د × جـ ب (نتيجة ٢)

= (ب جـ)^{٢} × ب د × جـ د

= (ب جـ)^{٢} × (أد)^{٢} (نتيجة ١)

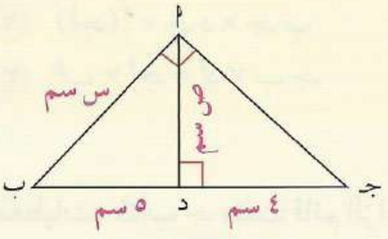
∴ أب × أجـ = ب جـ × أد

طريقة أخرى: مساحة المثلث أب جـ = $\frac{١}{٢}$ × أب × أجـ = $\frac{١}{٢}$ × أد × ب جـ

∴ أب × أجـ = أد × ب جـ

مثال (١)

أوجد س، ص بحسب المعطيات في الشكل.



المعطيات:

$\triangle$أب جـ قائم الزاوية أ، $\overline{\text{أد}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$.

المطلوب: إيجاد س، ص.

البرهان:

باستخدام نتائج النظرية (١):

$$س^2 = ٥ \times (٥ + ٤) = ٤٥$$

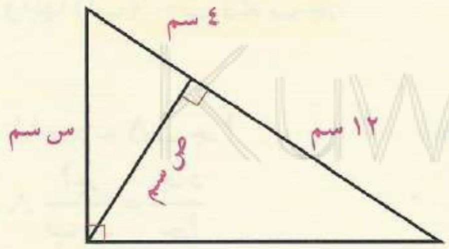
$$س = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$$

$$ص^2 = ٤ \times ٥$$

$$ص = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$$

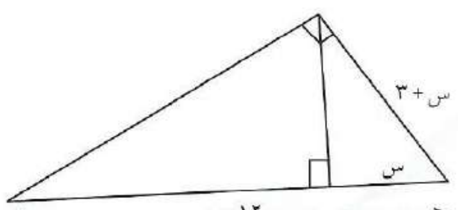
حاول أن تحل

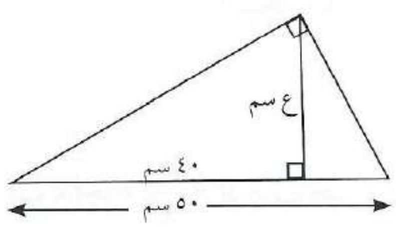
١ أوجد من الشكل المرسوم س، ص في أبسط صورة.

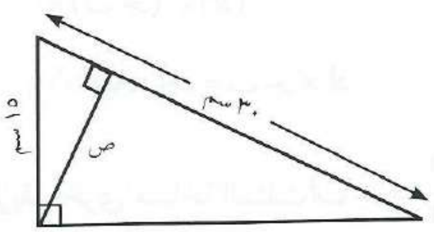


تدريب (٣)

أوجد قيمة س، ص، ع في أبسط صورة في كل من الحالات التالية:





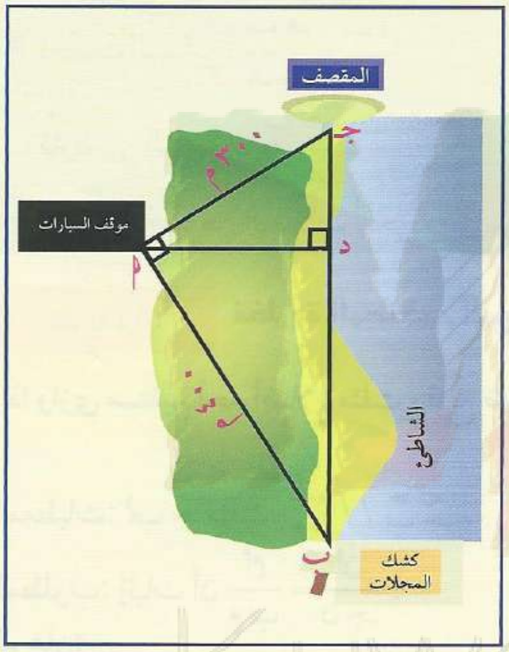


مثال (٢) تطبيقات حياتية

في إحدى الحدائق العامة، التي تقيمها الدولة على الشاطئ للترويح عن المواطنين، كان طول الممر المرصوف داخل الحديقة حتى المقصف يساوي ٣٠٠ م، وطول الممر حتى كشك المجلات ٤٠٠ م، وكان الممران يتقابلان في زاوية قائمة كما في الشكل أمام موقف السيارات. سار جاسم من موقف السيارات على مسار مستقيم عمودي على الشاطئ حتى وصل إلى الشاطئ. كم مترًا على جاسم أن يسير من مكانه على الشاطئ الذي وصل إليه ليشتري شطائر من المقصف؟

المعطيات:

أج = ٣٠٠ م، أب = ٤٠٠ م، ق(ب أ ج) = ٩٠°، أد ⊥ ب ج.



المطلوب:

إيجاد دج.

البرهان:

$\triangle$ أب ج قائم الزاوية أ.

بتطبيق نظرية فيثاغورث

(ب ج)^2 = (٣٠٠)^2 + (٤٠٠)^2

(ب ج)^2 = ٢٥٠٠٠٠

ب ج = ٥٠٠ م

بتطبيق نتائج التشابه

(أج)^2 = ج د × ج ب

(٣٠٠)^2 = ج د × ٥٠٠

ج د = $\frac{٣٠٠ \times ٣٠٠}{٥٠٠}$ = ١٨٠

أي أن جاسم سيسير من مكانه ١٨٠ م ليصل إلى المقصف.

حاول أن تحل

٢ أ) احسب أد المسافة من موقف السيارات إلى الشاطئ بطريقتين مختلفتين.

ب) هل يمكنك حل المثال (٢) بطريقة أخرى؟

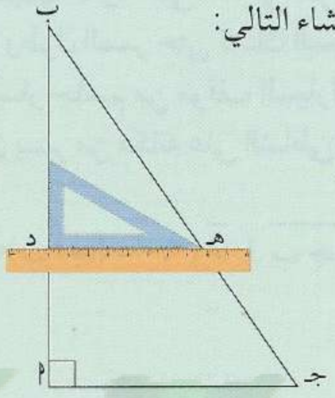
٤ – ٤

التناسبات والمثلثات المتشابهة
Proportions and Similar Triangles

سوف تتعلم

- خصائص الخط الموازي لأي ضلع في المثلث
- نظرية طاليس
- خصائص منصفات الزوايا الداخلية في المثلث

عمل تعاوني



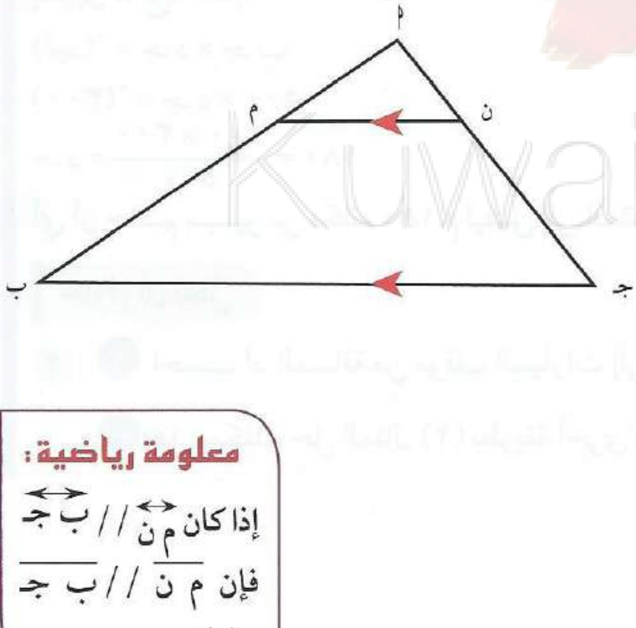
استخدم الأدوات الهندسية (المسطرة والمثلث القائم) في إنشاء التالي:

- ارسم Δٲب جـ. خذ نقطة د على $\overline{\text{ٲب}}$.
- ارسم خطًّا مستقيمًا يمر بنقطة د ويوازي $\overline{\text{ٲجـ}}$.
- لتكن هـ هي نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ مع $\overline{\text{ب جـ}}$.
- أوجد بالقياس طول كل من: $\overline{\text{ب د}}$، $\overline{\text{دٲ}}$، $\overline{\text{ب هـ}}$، $\overline{\text{هـ جـ}}$.
- احسب النسبتين: $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$ ، $\frac{\text{ب د}}{\text{دٲ}}$.

  قارن بين النسبتين: $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$ ، $\frac{\text{ب د}}{\text{دٲ}}$.
- قارن بين عدد من الحالات يتحرك فيها موقع $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ محافظًا على توازيه مع $\overline{\text{ٲجـ}}$.

نظرية (١) نظرية المستقيم الموازي Parallel Line Theory

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.



المعطيات: ٲب جـ مثلث، $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$.

المطلوب: إثبات أن $\frac{\text{ٲم}}{\text{م ب}} = \frac{\text{ٲن}}{\text{ن جـ}}$.

البرهان:

$\overline{\text{م ن}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

Δٲجـ ب $\sim$ Δٲن م   لماذا؟

$$\frac{\text{ٲجـ}}{\text{ٲن}} = \frac{\text{ٲب}}{\text{ٲم}}$$

$$\frac{\text{ٲن} + \text{ن جـ}}{\text{ٲن}} = \frac{\text{ٲم} + \text{م ب}}{\text{ٲم}}$$

$$1 + \frac{\text{ن جـ}}{\text{ٲن}} = 1 + \frac{\text{م ب}}{\text{ٲم}}$$

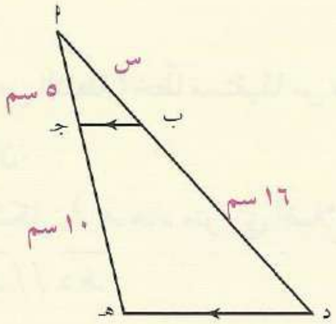
$$\frac{\text{ن جـ}}{\text{ٲن}} = \frac{\text{م ب}}{\text{ٲم}}$$

$$\therefore \frac{\text{ٲم}}{\text{م ب}} = \frac{\text{ٲن}}{\text{ن جـ}} .$$

معلومة رياضية:

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$
فإن $\overline{\text{م ن}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$
والعكس صحيح.

مثال (١)



استخدم نظرية المستقيم الموازي السابقة لإيجاد قيمة س.

المعطيات:

في المثلث أ د هـ ، $\overline{ب جـ} // \overline{د هـ}$

أجـ = ٥ سم ، جـ هـ = ١٠ سم ، ب د = ١٦ سم ، أ ب = س.

المطلوب: إيجاد س.

البرهان:

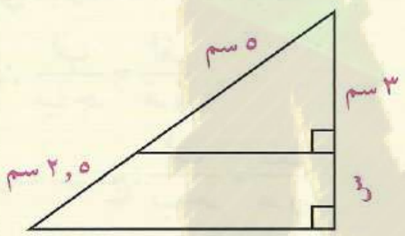
∵ $\overline{ب جـ} // \overline{د هـ}$ وباستخدام نظرية المستقيم الموازي نكتب التناسب:

$\frac{٥}{١٠} = \frac{س}{١٦}$ الأجزاء المتناسبة

١٠ س = ٨٠ باستخدام الضرب التقاطعي

س = ٨ بالقسمة على ١٠

حاول أن تحل



١ في الشكل المقابل، استخدم نظرية المستقيم الموازي السابقة لإيجاد قيمة س.

نظرية (٢) نظرية طاليس Thales Theory

إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

أوّلًا: إذا كان المستقيمان القاطعان متوازيان.

- ارسم ثلاثة مستقيمات متوازية م، ن، ز.
- ارسم مستقيمين متوازيين ك، س بحيث يقطعان المستقيمات م، ن، ز.
- أثبت تناسب أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

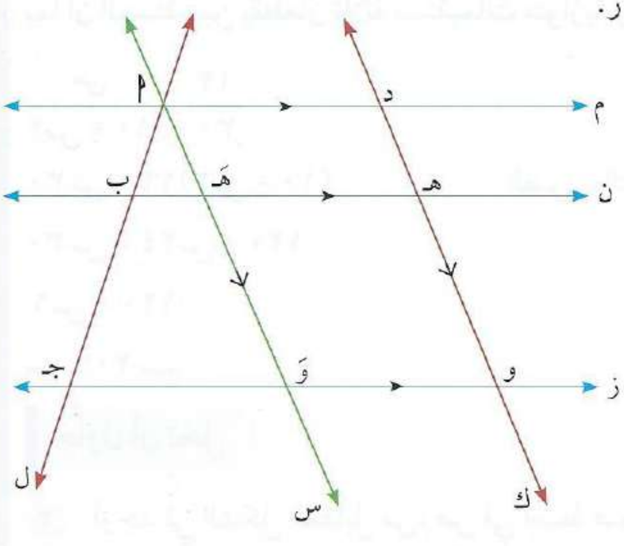
ثانيًا: إذا كان المستقيمان القاطعان غير متوازيين.

المعطيات: لدينا المستقيمات م، ن، ز حيث م // ن // ز.

المستقيم ل يقطع م، ن، ز بالنقاط أ، ب، جـ على الترتيب.

المستقيم ك يقطع م، ن، ز بالنقاط د، هـ، وعلى الترتيب.

المطلوب: إثبات أن: $\frac{أب}{ب جـ} = \frac{د هـ}{هـ و}$



العمل:

نأخذ من النقطة أ خطًا مستقيمًا س موازيًا للمستقيم ك حيث يقطع ن بالنقطة هَـ ويقطع ز بالنقطة وَ.

البرهان:

في الشكل: أ هَـ هـ د متوازي أضلاع

∴ أهَـ // د هـ

أهَـ = د هـ

وبالمثل هَـ وَ و هـ متوازي أضلاع

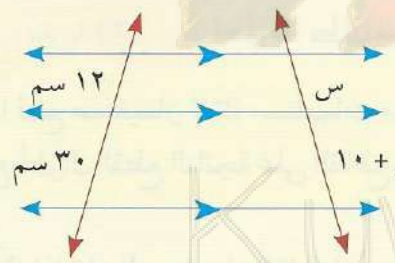
∴ هَـ وَ = هـ و

في Δ أوَجـ، هَـ ب // وَ جـ

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أهَـ}}{\text{هَـ وَ}}$ نظرية (١)

ومنه نستنتج: $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{دهـ}}{\text{هـ و}}$ بالتعويض

مثال (٢)



من الشكل المقابل أوجد قيمة س.

المعطيات: لدينا مستقيمان غير متوازيين يقطعان ثلاثة مستقيمات متوازية.

أطوال القطع الناتجة هي س، ٢س + ١٠، ١٢، ٣٠ بالترتيب.

المطلوب: إيجاد قيمة س.

البرهان:

بما أن المستقيمين يقطعان ثلاثة مستقيمات متوازية وباستخدام نظرية طاليس

$$\frac{\text{س}}{\text{٢س + ١٠}} = \frac{١٢}{٣٠}$$

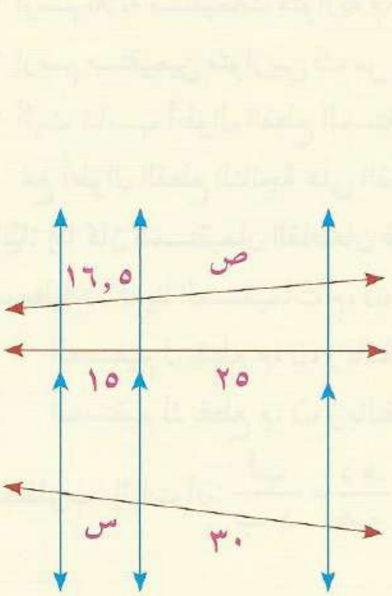
٣٠ س = ١٢(٢س + ١٠) الضرب التقاطعي

٣٠ س = ٢٤س + ١٢٠

٦س = ١٢٠

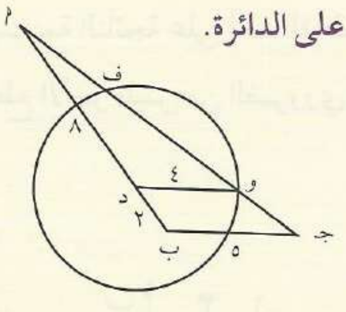
س = ٢٠ سم

حاول أن تحل



٢ أوجد في الشكل المقابل س، ص في أبسط صورة.

مثال (٣) تجنب الخطأ



في الشكل المقابل: د مركز الدائرة، طول نصف قطر الدائرة = ٤ سم.

أب = ١٠ سم ، أد = ٨ سم ، ب جـ = ٥ سم ، و، ف نقطتان على الدائرة.

قال فهد: النقاط أ، د، ب على استقامة واحدة كذلك النقاط أ، و، جـ وبالترتيب نفسه.

$\therefore \frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ ، $\frac{\text{ود}}{\text{جـ ب}} = \frac{٤}{٥}$

$\therefore \overline{\text{ود}} \,//\, \overline{\text{جـ ب}}$

أجابهُ سلطان: في هذه الحالة، $\overline{\text{ف د}}$، $\overline{\text{جـ ب}}$ متوازيتان أيضًا.

أ اشرح علام ارتكز سلطان في إجابته.

ب أين الخطأ في الحل الذي أعطاه فهد؟

الحل:

أ كيف فكر سلطان:

$\because$ $\overline{\text{ف د}}$ نصف قطر في الدائرة.

$\therefore$ ف د = ٤ سم

$\therefore \frac{\text{ف د}}{\text{ب جـ}} = \frac{٤}{٥}$

أي أن $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\text{ف د}}{\text{ب جـ}} = \frac{٤}{٥}$

واستنادًا على ما اقترحه فهد يكون $\overline{\text{ف د}} \,//\, \overline{\text{جـ ب}}$ وهذا خطأ

ب يجب أن يكون $\overline{\text{ود}} \,//\, \overline{\text{جـ ب}}$ (نظرية طاليس)

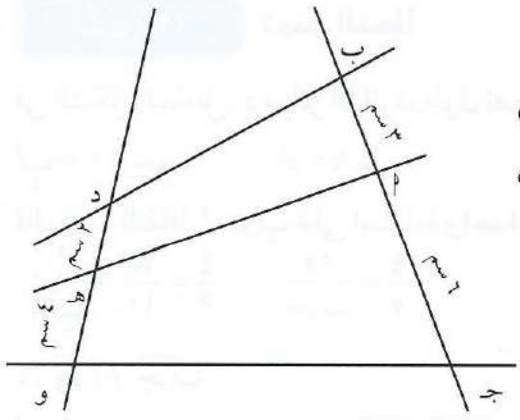
توازي المستقيمات يعطي قطعًا أطوالها متناسبة وليس العكس.

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، إذا كان أيضًا $\overline{\text{ود}} \,//\, \overline{\text{جـ ب}}$، وجـ = ٣ سم، فأوجد طول $\overline{\text{أو}}$.

ملاحظة:

نستنتج من المثال (٣) أن عكس النظرية غير صحيح: إذا كانت أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر فليس من الضروري أن تكون المستقيمات متوازية.



في الرسم: $\frac{\text{ب ٰ}}{\text{ٰ جـ}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{د هـ}}{\text{هـ و}} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

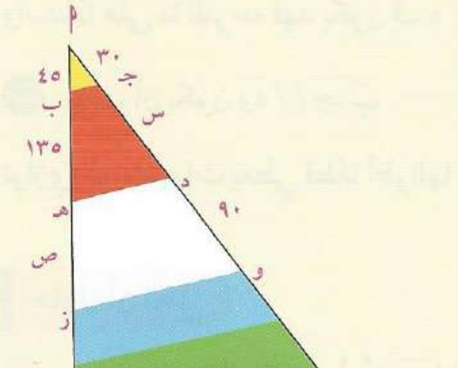
بينما المستقيمات $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ٰ هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ و}}$ ليست متوازية.

تدريب

حل مثال (١١) في صفحة ١٤٥، باستخدام نظرية طاليس.

مثال (٤) **تطبيقات حياتية**

تصميم أنماط لشراع المركب: يستخدم صانعو الأشرعة الحاسوب لتكوين نمط لكل شراع يصنعونه، ثم يرسمون مخططًا له بالطباشير على الأرضية التي يقصونه عليها. بعد أن يقطعوا إطارات الشراع، يحيكونها معًا لتكوين الشراع بأكمله. الخطوط المحاكة تكون متوازية كما في الشكل حيث الأبعاد بالسنتيمتر. أوجد س، ص.



المعطيات: $\overline{\text{ب جـ}} // \overline{\text{د هـ}} // \overline{\text{و ز}}$، ٰجـ = ٣٠، دو = ٩٠، ٰب = ٤٥، ب هـ = ١٣٥

جـ د = س ، هـ ز = ص.

المطلوب:

إيجاد س، ص.

البرهان:

من توازي القطع المستقيمة واستنادًا إلى نظرية طاليس، نكتب التناسب:

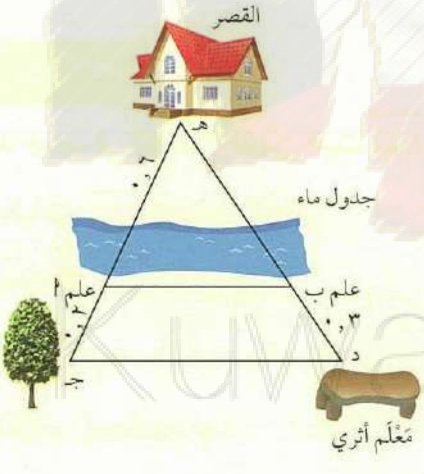
$\frac{٣٠}{س} = \frac{٤٥}{١٣٥}$ باستخدام نظرية طاليس

س = ٩٠

$\frac{ص}{١٣٥} = \frac{٩٠}{٩٠}$

∴ ص = ١٣٥ سم.

حاول أن تحل



٤ باستخدام نظام إشارة (طبوغرافيا)، وضع علمان عند النقطتين أ، ب كما في الشكل المقابل بحيث يكون $\overline{أب} // \overline{جـ د}$.

إذا كان ب د = ٠,٣ كم، أهـ = ٠,٦ كم، أجـ = ٠,٢ كم.

فأوجد المسافة بين القصر هـ والمَعْلَم الأثري د.

نظرية (٣) نظرية منصف الزاوية في مثلث

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.

المعطيات: Δأب جـ فيه، $\overleftarrow{أء}$ ينصف ب$\hat{أ}$جـ من الداخل شكل (١)، ينصف الزاوية الخارجة عن المثلث عند أ شكل (٢).

المطلوب: إثبات أن: $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{ب أ}{أ جـ}$

العمل: نرسم $\overleftrightarrow{جـ و}$ // $\overleftrightarrow{ءأ}$ ويقطع $\overleftrightarrow{ب أ}$ في نقطة و.

البرهان: ∵ $\overleftrightarrow{جـ و}$ // $\overleftrightarrow{ءأ}$

∴ $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{ب أ}{أ و}$ (١) نظرية

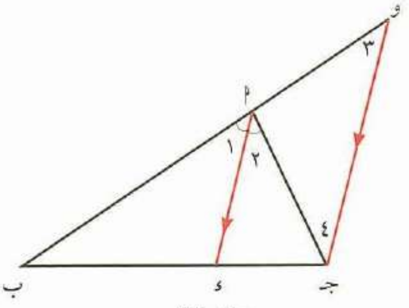
∵ $\overline{جـ و}$ // $\overline{ءأ}$

∴ ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٣}$) بالتناظر ، ق($\hat{٢}$) = ق($\hat{٤}$) بالتبادل

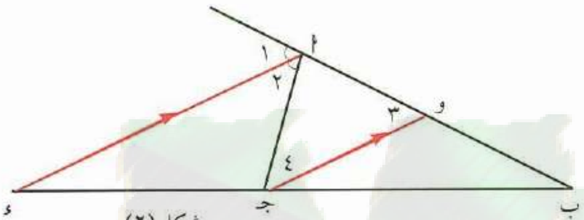
∵ ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٢}$) ∴ ق($\hat{٣}$) = ق($\hat{٤}$)

∴ أو = أجـ (٢)

وبالتعويض من (٢) في (١) ∴ $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{ب أ}{أ جـ}$.



شكل (١)



شكل (٢)

ملاحظة: سنكتفي بدراسة الحالة التي ينصف فيها شعاع زاوية داخلية في مثلث.

مثال (٥)

أوجد جـ ب في الشكل المبيّن حيث $\overline{ب د}$ ينصف أ$\hat{ب}$جـ.

المعطيات: $\overline{ب د}$ منصف أ$\hat{ب}$جـ.

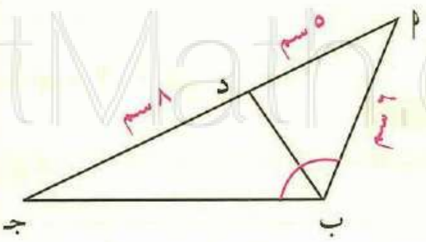
أب = ٦ سم، أد = ٥ سم،

جـ د = ٨ سم

المطلوب: إيجاد جـ ب.

البرهان:

في المثلث أجـ ب، $\overline{ب د}$ منصف أ$\hat{ب}$جـ.

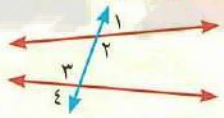


∴ $\frac{جـ د}{د أ} = \frac{جـ ب}{ب أ}$ نظرية منصف الزاوية

$\frac{جـ ب}{ب أ} = \frac{٨}{٥}$

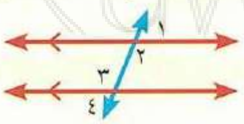
ب جـ = $\frac{٨ \times ب أ}{٥} = \frac{٨ \times ٦}{٥}$ = ٩,٦ سم

معلومة رياضية:



($\hat{٢}$)، ($\hat{٣}$): زاويتان متبادلتان داخليًا

($\hat{١}$)، ($\hat{٤}$): زاويتان متبادلتان خارجيًا



ق($\hat{٢}$) = ق($\hat{٣}$): التوازي والتبادل الداخلي

ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٤}$): التوازي والتبادل الخارجي

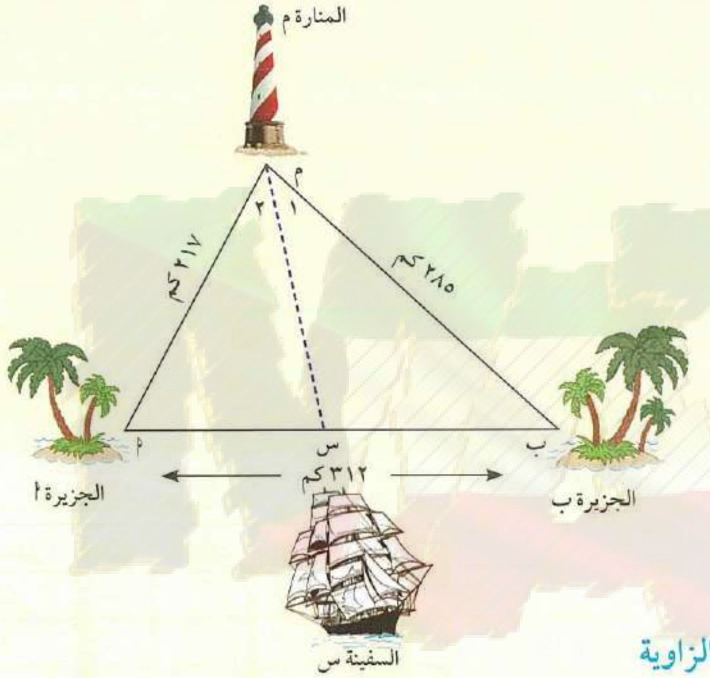
حاول أن تحل

٥ أب جـ مثلث حيث أب = ٦ سم، أجـ = ٨ سم، ثم رسم $\overrightarrow{أد}$ منصف ب$\hat{أ}$جـ ويقطع $\overline{ب جـ}$ في د. إذا كان ب د = ٣ سم، أوجد جـ د.

مثال (٦)

في الشكل المرسوم تبيّن لمراقب موجود في المنارة (م) أن قياسي الزاويتين (١)، (٢) المكونتين من كل من الجزيرتين (أ)، (ب) والمنارة (م) والسفينة (س) متساويان.

أوجد بعد السفينة عن كل من الجزيرتين إذا كانت السفينة والجزيرتين على استقامة واحدة.



الحل:

المعطيات:

تكوّن المنارة والجزيرتان مثلثًا م أ ب أبعاده: م أ = ٢١٧،

م ب = ٢٨٥ ، أ ب = ٣١٢

المستقيم المار بالمنارة والسفينة ينصف الزاوية أ م̂ ب.

السفينة والجزيرتان على استقامة واحدة.

المطلوب:

إيجاد س أ ، س ب.

البرهان:

∵ $\overline{\text{م س}}$ منصف أ م̂ ب

∴ $\frac{\text{س أ}}{\text{س ب}} = \frac{\text{م أ}}{\text{م ب}}$ نظرية منصف الزاوية

$\frac{\text{س أ} + \text{س ب}}{\text{س ب}} = \frac{\text{م أ} + \text{م ب}}{\text{م ب}}$ من خواص التناسب

$\frac{٣١٢}{\text{س ب}} = \frac{٢١٧ + ٢٨٥}{٢٨٥}$

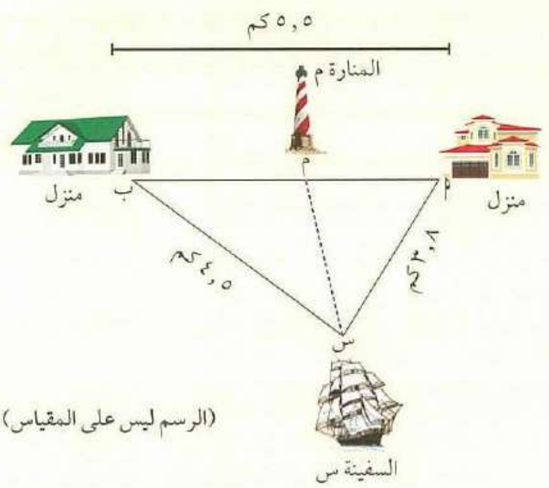
∴ $\text{س ب} = \frac{٣١٢ \times ٢٨٥}{٢١٧ + ٢٨٥} = ١٧٧$

$\text{س أ} = ٣١٢ - ١٧٧ = ١٣٥$

تبعد السفينة عن الجزيرة أ حوالى ١٣٥ كم وتبعد عن الجزيرة ب حوالى ١٧٧ كم.

حاول أن تحل

٦ في الشكل المرسوم أوجد المسافة بين المنارة وكل من المنزلين إذا علمنا أن المنزلين والمنارة على استقامة واحدة، وأن المستقيم المار بالسفينة والمنارة ينصف الزاوية أ س̂ ب.



الربط بالتعلم السابق

العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتيهما
Relation Between Perimeters and Areas of Two Similar Figures

سوف تتعلم

- العلاقة بين محيطات الأشكال المتشابهة ونسبة التشابه
- العلاقة بين مساحات الأشكال المتشابهة ونسبة التشابه

عمل تعاوني

اعمل مع زميل لك لبحث العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتيهما.

خطوات العمل:

١ على ورقة المربعات حدّد مستطيلًا أبعاده ٣ وحدات، ٤ وحدات.

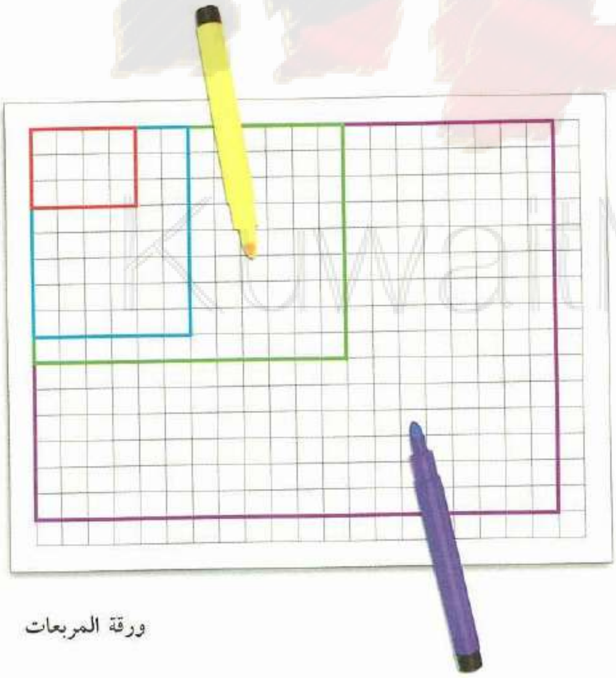
٢ حدد ثلاثة مستطيلات مشابهة للمستطيل الأصلي.

٣ استخدم الرسم في ملء الجدول (١).

٤ استعن بالمعلومات التي حصلت عليها في الجدول (١) لتكمل الجدول (٢).

٥ ماذا تعني النسب التي حصلت عليها مقارنة بنسبة التشابه؟

٦ قارن بين النتائج التي حصلت عليها والنتائج التي حصل عليها زملاؤك في الفصل.



ورقة المربعات

جدول (١)

المستطيل	العرض	الطول	المحيط	المساحة
الأصلي				
I				
II				
III				

جدول (٢)

المستطيل	النسبة بين العرضين	النسبة بين الطولين	النسبة بين المحيطين	النسبة بين المساحتين	نسبة التشابه
	١:٢	١:٢			٢
I: الأصلي					
II: الأصلي					
III: الأصلي					

نظرية (١) نظرية العلاقة بين محيطات أو مساحات الأشكال المتشابهة
Relation Theory Between Perimeters or Areas of Similar Figures

إذا كانت نسبة التشابه لأي شكلين متشابهين هي $\frac{م}{ب}$ فإن:

١ النسبة بين محيطي الشكلين = $\frac{م}{ب}$ = نسبة التشابه.

٢ النسبة بين مساحتي الشكلين = $\frac{م^{٢}}{ب^{٢}} = \left(\frac{م}{ب}\right)^{٢}$ = مربع نسبة التشابه.

معلومة مفيدة:
مساحة شبه المنحرف = $\frac{\text{مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين}}{٢}$ × الارتفاع

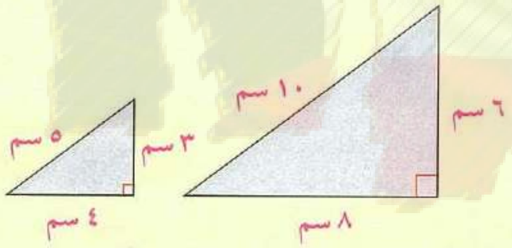
نسبة التشابه بين أي دائرتين هي النسبة بين طولي نصفي قطريهما.

مثال (١)

تحقق من صحة النظرية السابقة بإيجاد نسبة التشابه والنسبة بين محيطي ثمّ بين مساحتي:

أ المثلثين المتشابهين.

ب شبهي المنحرف المتشابهين.



المعطيات:

مثلثان قائمي الزاوية متشابهان، أطوال أضلاعهما ٣ سم ، ٤ سم ، ٥ سم و٦ سم ، ٨ سم ، ١٠ سم بالترتيب .

المطلوب:

إيجاد نسبة التشابه.

إيجاد النسبة بين محيطي المثلثين وبين مساحتيهما.

البرهان:

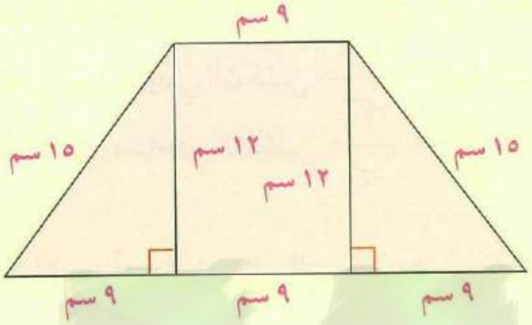
أ نسبة التشابه = النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

النسبة بين محيطي المثلثين = $\frac{١٢}{٢٤} = \frac{١}{٢}$ = نسبة التشابه.

النسبة بين مساحتي المثلثين = $\frac{\frac{١}{٢} \times ٣ \times ٤}{٢٤} = \frac{٦}{٢٤} = \frac{١}{٤} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ = مربع نسبة التشابه.

ب المعطيات:

شبهي منحرف متطابقي الضلعين، أطوال أضلاعهما ٦ سم، ١٠ سم، ١٨ سم، ١٠ سم و ٩سم، ١٥سم، ٢٧سم، ١٥سم بالترتيب.



المطلوب: إيجاد نسبة التشابه.

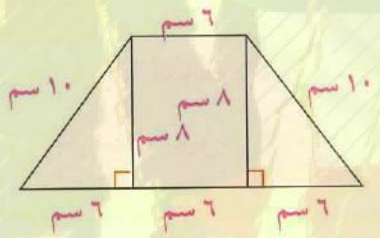
إيجاد النسبة بين محيطي شبهي المنحرف والنسبة بين مساحتيهما.

البرهان:

نسبة التشابه = $\frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

النسبة بين محيطي شبهي المنحرف = $\frac{٢٠ + ١٨ + ٦}{٩ + ٢٧ + ٣٠}$

$= \frac{٤٤}{٦٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$ = نسبة التشابه.



النسبة بين مساحتي شبهي المنحرف = $\frac{١٢ \times ٨}{١٨ \times ١٢}$

$= \frac{٨}{١٨} = \frac{٤}{٩} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}$ = مربع نسبة التشابه.

حاول أن تحل

١ لدينا مثلثان متشابهان بنسبة $\frac{٢}{٣}$. إذا كان محيط المثلث الأكبر ٤٥ سم، فأوجد محيط المثلث الأصغر.

مثال (٢)

مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه٣ سم، ٥ سم، ٦ سم، ٨ سم، ١٠ سم والآخر محيطه ٤٨ سم، أوجد أطوال أضلاع المضلع الثاني.

المعطيات: مضلعان متشابهان

أطوال أضلاع الأول: ٣ سم، ٥ سم، ٦ سم، ٨ سم، ١٠ سم.

محيط المضلع الثاني = ٤٨ سم.

المطلوب: إيجاد أطوال أضلاع المضلع الثاني.

البرهان:

محيط المضلع الأول = ٣ + ٥ + ٦ + ٨ + ١٠ = ٣٢ سم.

النسبة بين محيطي المضلعين = $\frac{٣٢}{٤٨} = \frac{٢}{٣}$.

لتكن أ، ب، جـ، د، هـ على التوالي أطوال أضلاع المضلع الثاني المناظرة للأطوال ٣، ٥، ٦، ٨، ١٠ في المضلع الأول.

النسبة بين ضلعين متناظرين = النسبة بين محيطي المضلعين.

$\frac{٣}{أ} = \frac{٢}{٣}$ ∴ أ = ٤,٥ سم $\qquad \frac{٥}{ب} = \frac{٢}{٣}$ ∴ ب = $\frac{١٥}{٢}$ = ٧,٥ سم

$\frac{٦}{جـ} = \frac{٢}{٣}$ ∴ جـ = ٩ سم $\qquad \frac{٨}{د} = \frac{٢}{٣}$ ∴ د = ١٢ سم

$\frac{١٠}{هـ} = \frac{٢}{٣}$ ∴ هـ = ١٥ سم

حاول أن تحل

٢ مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه ٣ سم، ٥ سم، ٦ سم، ٨ سم، ١٠ سم والآخر ينقص محيطه ٨ سم عن محيط المضلع الأول. أوجد أطوال أضلاع المضلع الثاني.

مثال (٣)

ليكن لدينا دائرتان م، ن: الأولى طول نصف قطرها $نق_١$، والثانية طول نصف قطرها $نق_٢$.

أوجد النسبة بين محيطي الدائرتين والنسبة بين مساحتيهما.

المعطيات:

دائرتان طول نصف قطر الأولى $نق_١$، وطول نصف قطر الثانية $نق_٢$.

المطلوب:

إيجاد النسبة بين محيطي الدائرتين والنسبة بين مساحتيهما.

البرهان:

نسبة التشابه = $\frac{نق_١}{نق_٢}$

النسبة بين المحيطين = $\frac{٢\pi نق_١}{٢\pi نق_٢} = \frac{نق_١}{نق_٢}$

النسبة بين المساحتين = $\frac{\pi(نق_١)^٢}{\pi(نق_٢)^٢} = \frac{(نق_١)^٢}{(نق_٢)^٢} = \left(\frac{نق_١}{نق_٢}\right)^٢$

حاول أن تحل

٣ دائرتان م، ن، طول نصف قطر الأولى = ٥ سم وطول نصف قطر الثانية = ٨ سم. أوجد النسبة بين محيطي الدائرتين والنسبة بين مساحتيهما.

النسبة بين محيطي دائرتين تساوي نسبة التشابه بين الدائرتين.

النسبة بين مساحتي دائرتين تساوي مربع نسبة التشابه بين الدائرتين.

مثال (٤)

لدينا شكلان رباعيان متشابهان بنسبة تشابه $\frac{٥}{٤}$. إذا كانت مساحة الشكل الرباعي الأكبر ٣٠ سم^{٢}، فما مساحة الشكل الرباعي الأصغر؟

المعطيات: رباعيان متشابهان.

نسبة التشابه = $\frac{٥}{٤}$ مساحة الشكل الرباعي الأكبر = ٣٠سم^{٢}

المطلوب: إيجاد مساحة الشكل الرباعي الأصغر.

البرهان: النسبة بين المساحتين = مربع نسبة التشابه

$$\frac{\text{مساحة الشكل الرباعي الأكبر}}{\text{مساحة الشكل الرباعي الأصغر}} = \left(\frac{٥}{٤}\right)^{٢} = \frac{٢٥}{١٦}$$

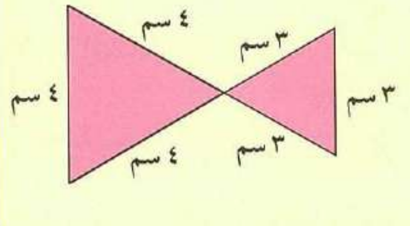
$$\frac{٣٠}{\text{مساحة الشكل الرباعي الأصغر}} = \frac{٢٥}{١٦}$$

$$\text{مساحة الشكل الرباعي الأصغر} = \frac{٣٠ \times ١٦}{٢٥} = ١٩,٢ \text{ سم}^{٢}.$$

حاول أن تحل

٤ النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين هي $\frac{١٦}{٩}$. ما محيط المضلع الأكبر إذا كان محيط المضلع الأصغر ٢٤ سم؟

مثال (٥) **تطبيقات حياتية**



رسم يوسف ربطة عنق على شكل عقدة فراشة. لاحظ أن قسمي الربطة غير متطابقين.
أوجد النسبة المئوية لمساحة المنطقة التي عليه أن يقطعها من المثلث الأكبر ليصبح القسمان متطابقين؟

الحل:

طريقة أولى للحل:

المثلثان كل منهما متطابق الأضلاع.

∴ المثلثان متشابهان

نسبة التشابه = $\frac{٣}{٤}$

∴ النسبة بين مساحتي المثلثين = $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٢} = \frac{٩}{١٦}$

إذا فرضنا أن مساحة Δ الأكبر = س

فإن مساحة Δ الأصغر = $\frac{٩س}{١٦}$

وعليه يكون الفرق بين المساحتين = س − $\frac{٩س}{١٦}$ = $\frac{٧}{١٦}$ س

النسبة المئوية لمساحة المنطقة المطلوبة = $\frac{\frac{٧}{١٦}س}{س}$ × ١٠٠٪ = ٤٣,٧٥٪.

يجب أن يقطع ٤٣,٧٥٪ من مساحة المثلث الأكبر.

طريقة ثانية للحل:

مساحة المثلث الأصغر = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحددة بهما

= $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٣ × جا ٦٠° لماذا؟

= $\frac{٩\sqrt{٣}}{٤}$ وحدة مربعة

مساحة المثلث الأكبر = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٤ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ وحدة مربعة

= ٤$\sqrt{٣}$ وحدة مربعة

الفرق بين مساحتي المثلثين = ٤$\sqrt{٣}$ − $\frac{٩\sqrt{٣}}{٤}$ وحدة مربعة

= $\frac{٧\sqrt{٣}}{٤}$ وحدة مربعة

النسبة المئوية للفرق بين المساحتين = $\left(\frac{٧\sqrt{٣}}{٤} \div ٤\sqrt{٣}\right)$ × ١٠٠٪

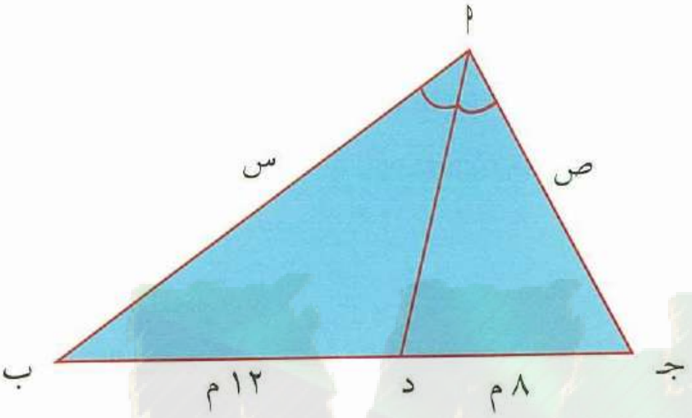
= ٤٣,٧٥٪

حاول أن تحل

٥ هل تبقى النسبة المئوية دون تغيير إذا كان طول ضلع المثلث الأصغر ٤ سم، وطول ضلع المثلث الأكبر ٥ سم؟ فسّر إجابتك.

المرشد لحل المسائل

١ محيط المثلث المقابل يساوي ٥٠ مترًا. $\overline{\text{أد}}$ منصف داخلي للزاوية أ. أوجد قيم س، ص.



ما الذي أعرفه؟ يجب عرض المعطيات

محيط المثلث أب جـ يساوي ٥٠ مترًا، أي أن:

أب + أجـ + ب جـ = ٥٠ م.

ثم ب د = ١٢ م، دجـ = ٨ م أي أن:

ب جـ = ١٢ + ٨ = ٢٠

$\overline{\text{أد}}$ منصف داخلي للزاوية أ.

ما الذي أريد معرفته؟

قيمة س، قيمة ص.

كيف سأحل المسألة؟

استخدم المعطيات، اكتب:

$$\begin{cases} \text{س + ص + ٢٠ = ٥٠ أي: س + ص = ٣٠} \\ \dfrac{\text{س}}{\text{ص}} = \dfrac{\text{١٢}}{\text{٨}} = \dfrac{\text{٣}}{\text{٢}} \quad \text{أي: س} = \dfrac{\text{٣ص}}{\text{٢}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{س + ص = ٣٠} \\ \text{س} = \dfrac{\text{٣ص}}{\text{٢}} \end{cases}$$

أوجد حل نظام المعادلتين باستخدام طريقة التعويض أحصل على:

$\dfrac{\text{٣ص}}{\text{٢}}$ + ص = ٣٠ ومنه ص = ١٢ وبالتالي س = ١٨

أي أن ص = ١٢ م، س = ١٨ م.

سوف أتحقق من صحة الحل:

س + ص + ٢٠ = ١٨ + ١٢ + ٢٠ = ٥٠ محيط المثلث يساوي ٥٠ م.

معلومة مفيدة:

يمكنك استكمال الحل بطرق أخرى ومنها:

$\dfrac{\text{س}}{\text{ص}} = \dfrac{\text{١٢}}{\text{٨}}$ ، $\dfrac{\text{س + ص}}{\text{ص}} = \dfrac{\text{١٢ + ٨}}{\text{٨}}$

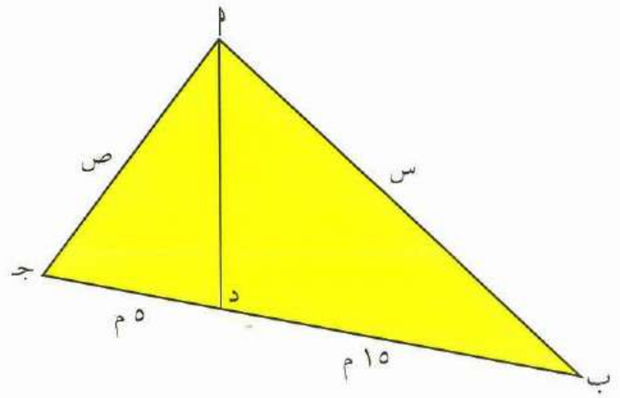
$\dfrac{\text{٣٠}}{\text{ص}} = \dfrac{\text{٢٠}}{\text{٨}}$

ومنها ص = ١٢ ∴ س = ١٨

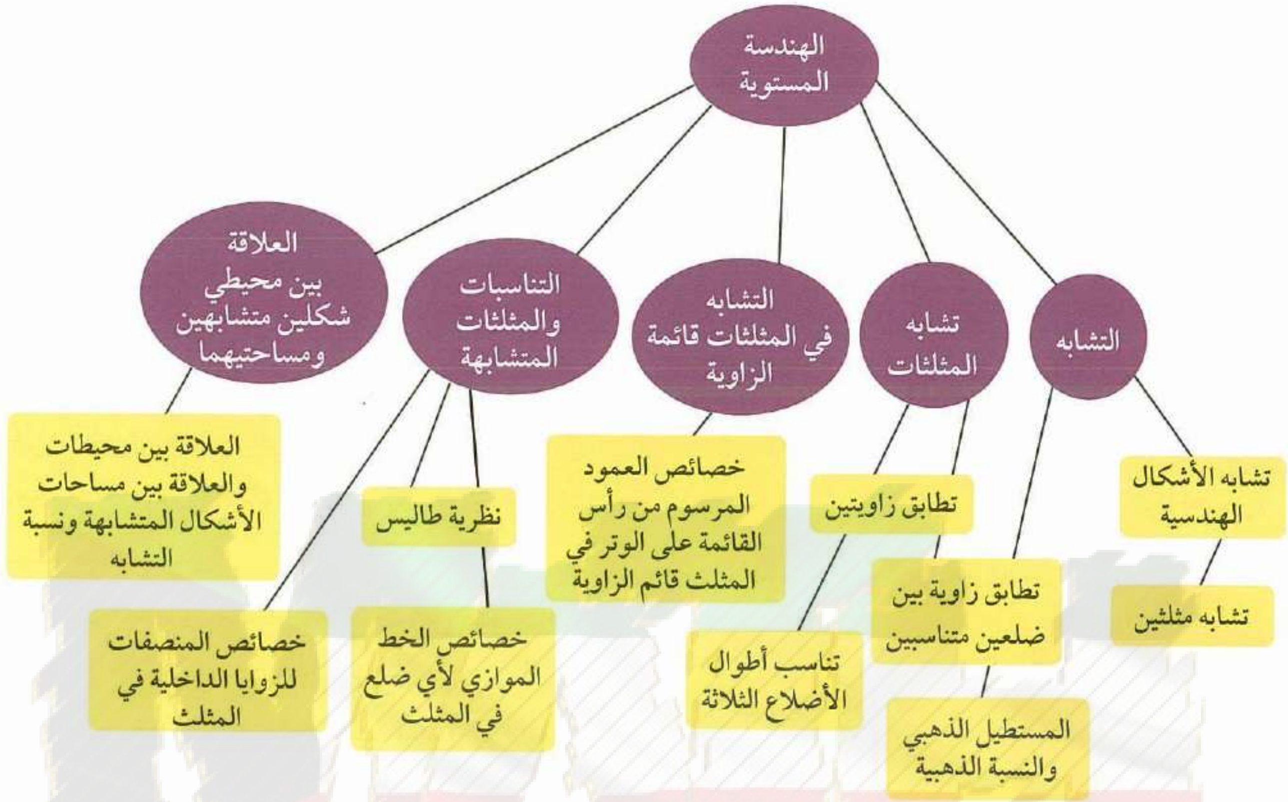
مسألة إضافية

محيط المثلث أدناه يساوي ٤٤ مترًا، $\overline{\text{أد}}$ منصف داخلي للزاوية أ.

أوجد قيم س، ص.



مخطط تنظيمي للوحدة الرابعة



ملخص

- يكون شكلان متشابهين عندما يكون لهما الشكل نفسه وأحدهما تكبيرًا أو تصغيرًا للآخر أو متطابقًا معه.
- يوجد في شكلين متشابهين أزواج من الزوايا متساوية القياس وأزواج من الأضلاع متناسبة الأطوال.
- يستخدم التناسب في الأشكال المتشابهة للتطبيق على مقياس الرسم.
- عند تطابق زاويتين في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر يكون المثلثان متشابهين.
- عند تطابق زاوية في مثلث مع زاوية في مثلث آخر وتناسب طولي الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين، يكون المثلثان متشابهين.
- عند تناسب أطوال الأضلاع الثلاثة المتناظرة في مثلثين، يكون المثلثان متشابهين.
- يقسم العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر، المثلث قائم الزاوية إلى مثلثين متشابهين وكل منهما مشابه للمثلث الأصلي.
- عندما يوازي مستقيم أحد أضلاع مثلث ويقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.
- تنص نظرية طاليس على أنه إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر مع بعضها بعضًا، فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.
- يقسم المنصف للزاوية الداخلية في المثلث الضلع المقابل لها إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.
- إذا كانت نسبة التشابه بين مضلعين متشابهين هي $\frac{أ}{ب}$ فإن:

  (١) النسبة بين محيطي مضلعين = $\frac{أ}{ب}$

  (٢) النسبة بين مساحتي مضلعين = $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{٢}$
- نسبة التشابه بين محيطي أي دائرتين هي النسبة بين طولي نصفي قطريهما.