الوحدة الخامسة

# المتتاليات (المتتابعات)
# Sequences

**مشروع الوحدة: استخدام المتتابعات في الرسوم الهندسية والتصاميم.**

١ **مقدمة المشروع:** يدعى كل حد في متتالية فيبوناتشي عدد فيبوناتشي. في العديد من النباتات والزهور والثمار عدد البتلات هو من أعداد فيبوناتشي.

٢ **الهدف:** دراسة بعض أنواع النباتات والزهور والثمار وتبيان توافق عدد بتلاتها مع أعداد فيبوناتشي.

٣ **اللوازمُ:** أوراق رسم بياني، آلة حاسبة، صور: زنابق، قزحية زهور على شكل نجمة، مخروط صنوبر، عباد الشمس (تباع الشمس).

٤ **أسئلة حول التطبيق:**

أ ابحث عن إحدى النباتات التي يتوافق نمو ساقها مع متتالية فيبوناتشي. ضع مخططًا وجدولًا يبينان هذا التوافق.

ب ابحث عن بعض الزنابق وعشب الحوزان والقزحية والأقحوانات. اعرض هذه الصور وبين كيف أن عدد بتلات كل منها هو عدد فيبوناتشي.

جـ ابحث عن صورة لزهرة الآلام (PASSI FLORA) واعرض صورتها من الجهتين الأمامية والخلفية، ثم بين أن أعداد مجموعتي بتلاتها الخضراء هي أعداد فيبوناتشي. كذلك من الجهة الخلفية، بيّن العلاقة بين الأوراق الخضراء والبتلات ومتتالية فيبوناتشي.

د اعرض صورة لزهرة إشنسا فرفرية Echinacea Purpura وصورة لقرص عباد الشمس Sun FLower. بين توافق المنحنيات الحلزونية مع أعداد فيبوناتشي.

هـ اجمع بعض مخاريط الصنوبر. عد الحلزونات في الاتجاهين في كل مخروط. ماذا تلاحظ؟ وماذا عن ثمرة الأناناس؟

٥ **التقرير:** ضع تقريرًا مفصلًا تبيّن فيه كيف استفدت منَ المتتاليات للإجابة عن الأسئلة فيما تنفذ المشروع.


عباد الشمس (تباع الشمس)


كوز صنوبر


أناناس

**دروس الوحدة**

| الأنماط الرياضية والمتتاليات (المتتابعات) | المتتالية الحسابية | المتتالية الهندسية |
|---|---|---|
| ٥-١ | ٥-٢ | ٥-٣ |

# الوحدة الخامسة

## أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت إيجاد قيم دوال بمعلومية المتغير.
- استخدمت بيان القطع المكافئ لرسم بيان دوال تربيعية.
- تعلمت تبسيط الكسور المركبة.
- تعلمت تبسيط الجذور التربيعية.

## ماذا سوف تتعلم؟

- الأنماط الرياضية.
- الحد النوني للمتتالية.
- المتتاليات الحسابية.
  الحد النوني ومجموع ن حدًّا الأولى من حدود المتتالية الحسابية.
- المتتاليات الهندسية.
  الحد النوني ومجموع ن حدًّا الأولى من حدود المتتالية الهندسية.

## أضف إلى معلوماتك

في العام ١٢٠٢ أصدر فيبوناتشي كتابه "ليبري أباتشي" وعرض فيه المتتالية: ٠، ١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ١٣، ٢١، ...

(متتالية فيبوناتشي) حيث كل حد هو ناتج جمع الحدين السابقين:

$ح_{ن} = ح_{ن-1} + ح_{ن-2} : ن \geqslant ٣$

لهذه المتتالية تطبيقات مهمة وكثيرة في مجالات متعددة، منها علم الأحياء وعلم النبات.

في متتالية فيبوناتشي، يقترب ناتج قسمة كل حد على الحد الذي يسبقه من العدد الذهبي ١,٦١٨.



## المصطلحات الأساسية

المتتالية (المتتابعة) - حد المتتالية - أساس المتتالية - المتتالية الحسابية - رتبة الحد - الأوساط الحسابية - المتتالية الهندسية - أساس المتتالية الهندسية - الأوساط الهندسية

# الأنماط الرياضية والمتتاليات (المتتابعات)
# Mathematical Patterns and Sequences

**سوف تتعلم**

- النمط الرياضي
- المتتالية الحقيقية
- الحد النوني للمتتالية



**عمل تعاوني**

افترض أن كل طالبين من الفصل تجري بينهما مكالمة هاتفية.
ما أقل عدد من المكالمات الهاتفية التي يمكنك الحصول عليها بحيث يتحدث كل طالب من فصلك مع الآخر هاتفيًا؟
ثم أجب عن الأسئلة التالية باستخدام الشكل المجاور:

١ كم مكالمة يمكن أن تجري بين طالبين؟

٢ كم مكالمة يمكن أن تجري بين ٣ طلاب أو ٤ طلاب؟

٣ استخدم الشكل المجاور لتحديد عدد المكالمات الممكنة بين ٥ طلاب، ثم أكمل الجدول التالي:

| عدد الطلاب (ن) | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد المكالمات (م) | ٠ | ١ | ■ | ■ | ■ |

٤ **النمط الرياضي**: أي من الصيغ التالية تمثل النمط الموجود في الجدول السابق؟

أ م = ٢ن – ٣ ب م = ن (ن – ١) – ٥ ج م = $\frac{\text{ن (ن – ١)}}{٢}$

حيث ن عدد الطلاب، م عدد المكالمات.

٥ أوجد عدد المكالمات م اللازم لمجموعة من ٧ طلاب مستخدمًا الصيغة المناسبة.

٦ ما عدد المكالمات اللازم ليتحدث كل طلاب صفك مع بعضهم بعضًا؟



**مثال (١)**

**سقطت كرة من ارتفاع ٥ , ١٢ مترًا عن سطح الأرض وكانت ترتفع إلى ٨٠٪ من الارتفاع السابق في كل مرة نتيجة اصطدامها بالأرض. احسب ارتفاع الكرة بعد الاصطدام الرابع.**

**الحل:**

**الارتفاع الأصلي ٥ , ١٢ م.**

- **بعد الاصطدام الأول بالأرض، يكون ارتفاع الكرة: ٨ , ٠ × ٥ , ١٢ = ١٠ أمتار.**
- **بعد الاصطدام الثاني بالأرض، يكون ارتفاع الكرة: ٨ , ٠ × ١٠ = ٨ أمتار.**
- **بعد الاصطدام الثالث بالأرض، يكون ارتفاع الكرة: ٨ , ٠ × ٨ = ٤ , ٦ أمتار.**
- **بعد الاصطدام الرابع بالأرض، يكون ارتفاع الكرة: ٨ , ٠ × ٤ , ٦ = ١٢ , ٥ أمتار.**

**وبالتالي يكون الارتفاع ١٢ , ٥ م بعد الاصطدام الرابع للكرة بالأرض.**

**لاحظ تتابع الارتفاعات (٥ , ١٢ ، ١٠ ، ٨ ، ٤ , ٦ ، ١٢ , ٥ ، ...)**

## حاول أن تحل

١ سقطت كرة من ارتفاع ١٠ أمتار، وكانت ترتفع إلى ٦٠٪ من الارتفاع السابق في كل مرة نتيجة اصطدامها بالأرض. احسب ارتفاع الكرة بعد الاصطدام الثالث.

### هل تعلم:

ليس من الضروري أن تكون جميع حدود المتتالية مختلفة. فمثلًا المتتابعة ٢، ٢، ٢، ٢... حيث $ح_{ن} = ٢$ جميع حدودها متساوية وهذه تسمى متتابعة ثابتة.

### معلومة رياضية:

يستخدم الرمز $(ح_{ن})$ للتعبير عن المتتابعة. بينما يعبر $ح_{ن}$ عن الحد النوني لهذه المتتابعة.

### تدريب (١)

صف النمط التالي ثم أكمل بكتابة الحدود الثلاثة التالية:

أ ٢، ٤، ٦، ٨، —، —، —

ب ٢٤٣، ٨١، ٢٧، ٩، —، —، —

مثل الأنماط الرياضية السابقة تسمى متتابعات أو متتاليات ويمكننا إيجاد الحدود التالية باتباع قاعدة النمط.

اعتبر متتالية الأعداد في (أ):

| الحد الأول | الحد الثاني | الحد الثالث | الحد الرابع | ... | الحد النوني |
|---|---|---|---|---|---|
| $ح_{١}$ | $ح_{٢}$ | $ح_{٣}$ | $ح_{٤}$ | | $ح_{ن}$ |

$ح_{١} = ٢$، $ح_{٢} = ٤$، $ح_{٣} = ٦$، $ح_{٤} = ٨$، ...، ...

ويرمز إلى الحد النوني في المتتابعة بالرمز $ح_{ن}$ حيث $ن \in ص_{+}$ وهي تعبر عن رتبة الحد.

**تعريف:**

المتتالية الحقيقية هي دالة حقيقية مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو مجموعة جزئية منها مرتبة على الصورة {١، ٢، ٣، ٤، ...، م} ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

**ملاحظة:** يمكن التعبير عن المتتالية بكتابة حدودها $(ح_{١}، ح_{٢}، ح_{٣}، ...)$

ويمكن الحصول على حدود المتتالية من صور عناصر مجال المتتالية.

## مثال (٢)

لتكن الدالة ت: {١، ٢، ٣، ٤، ٥} ← ح حيث ت(ن) = ن$^{٢}$

بين في ما إذا كانت هذه الدالة متتالية، ثم أوجد حدودها.

الحل:

ت دالة مجالها مجموعة جزئية مرتبة من ص$_{+}$ وتبدأ بالعدد ١ وبالصورة {١، ٢، ٣، ....، م}.

∴ ت متتالية.

| ن | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ |
|---|---|---|---|---|---|
| ت(ن) | ١ | ٤ | ٩ | ١٦ | ٢٥ |

حدود المتتالية هي: ١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥

### حاول أن تحل

٢ لتكن الدالة ت : {١، ٢، ٣، ٤} ← ح حيث ت(ن) = ن$^{٣}$ + ١

بيّن في ما إذا كانت هذه الدالة متتالية، ثم أوجد حدودها.

تسمى المتتالية في مثال (٢) متتالية منتهية لأنه يمكن حصر عدد حدودها.

## مثال (٣)

لتكن ت: ص$_{+}$ ← ح دالة معرفة بالقاعدة ت (ن) = $\frac{١}{ن}$.

بين في ما إذا كانت ت متتالية، ثم اكتب المتتالية مكتفيًا بالحدود الثلاثة الأولى منها.

الحل:

ت دالة مجالها ص$_{+}$ ∴ ت متتالية.

ت(١) = ١، ت(٢) = $\frac{١}{٢}$، ت(٣) = $\frac{١}{٣}$.

أي أنه يمكن كتابة المتتالية على الصورة $\left(١، \frac{١}{٢}، \frac{١}{٣}، ...\right)$

### حاول أن تحل

٣ لتكن ت: ص$_{+}$ ← ح دالة معرفة بالقاعدة ت (ن) = $\frac{ن}{ن + ١}$.

بين في ما إذا كانت ت متتالية، ثم أوجد الحدود الثلاثة الأولى منها.

تسمى المتتالية في مثال (٣) متتالية غير منتهية لأن مجالها $ص_+$.

## الصيغة الارتدادية Recursive Formula

تعرف الصيغة الارتدادية حدود المتتالية بربط كل حد بالحد (أو بالحدود) الذي يسبقه مباشرة ويمكن اعتبارها **حد عام** للمتتالية.

في مثال (١) كان النمط ارتداديًّا لأن ارتفاع الكرة بعد كل اصطدام بالأرض يساوي ٨٠٪ من الارتفاع الذي يسبقه مباشرة.

الصيغة الارتدادية التي تصف ارتفاع الكرة هي $ح_ن = ٠,٨ \times ح_{ن-١}$ مع $ح_١ = ١٢,٥$ حيث ن عدد طبيعي أكبر من ١.

### مثال (٤)

أ) صف النمط الذي يسمح بإيجاد الحد التالي من المتتالية (٦، ١، -٤، -٩، ...).

ب) أوجد الحدين الخامس والسادس ($ح_٥$، $ح_٦$) من هذه المتتالية.

**الحل:**

أ) نحصل على أي حد من المتتالية بطرح ٥ من الحد الذي يسبقه مباشرة.

١ = ٦ - ٥ ، -٤ = ١ - ٥ ، -٩ = -٤ - ٥ ∴ النمط ارتدادي

∴ الصيغة الارتدادية هي: $ح_ن = ح_{ن-١} - ٥$ مع $ح_١ = ٦$

ب) بما أن $ح_٤ = -٩$، $ح_٥ = ح_٤ - ٥ = -٩ - ٥ = -١٤$،

$ح_٦ = ح_٥ - ٥ = -١٤ - ٥ = -١٩$.

**ملاحظة:** في كل متتالية معرفة بالصيغة الارتدادية، يجب إعطاء الحد الأول (أو الحدود الأولى).



### حاول أن تحل

٤) اكتب الصيغة الارتدادية (الحد العام) مما يلي ثم أوجد الحد التالي:

أ) (-٢، -١، ٠، ١، ٢، ...)

ب) (٤٣، ٤١، ٣٩، ٣٧، ٣٥، ...)

ج) (٤٠، ٢٠، ١٠، ٥، $\frac{٥}{٢}$، ...)

د) ($\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٨}$، $\frac{١}{١٦}$، $\frac{١}{٣٢}$، ...)

## الصيغة الصريحة (الحد النوني للمتتالية) Explicit Formula

يمكنك أحيانًا معرفة قيمة الحد في متتالية دون معرفة الحد الذي يسبقه. بدلًا منه يمكنك استخدام عدد الحدود لحساب قيمة الحد. الصيغة التي تعبر عن الحد النوني بدلالة ن تسمى **صيغة صريحة**.

مثال (٥) **الهندسة**

يمثل الجدول التالي أطوال أضلاع المربعات ومحيطاتها.

| الحد | $ح_١$ | $ح_٢$ | $ح_٣$ | $ح_٤$ | $ح_٥$ | $ح_٦$ | $ح_٧$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| طول ضلع المربع | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ... |
| المحيط | ٤ | ٨ | ١٢ | ١٦ | ٢٠ | ٢٤ | ... |

أ) في كل متتالية، أوجد الحد التالي ($ح_٧$) والحد الرابع والعشرين ($ح_{٢٤}$).

ب) اكتب صيغة صريحة لكل متتالية.

الحل:

أ) في المتتالية الخاصة بأطوال أضلاع المربع، كل حد يساوي قيمة رتبته، وبالتالي $ح_٧ = ٧$، $ح_{٢٤} = ٢٤$.

في المتتالية الخاصة بالمحيط، كل حد يساوي أربعة أمثال قيمة رتبته، وبالتالي $ح_٧ = ٤ \times ٧ = ٢٨$.

$ح_{٢٤} = ٤ \times ٢٤ = ٩٦$.

ب) الصيغة الصريحة للمتتالية الخاصة بأطوال أضلاع المربع هي $ح_ن = ن$،

والصيغة الصريحة الخاصة بالمحيط هي: $ح_ن = ٤ن$.

**حاول أن تحل**

٥ أ) في المثال (٥) اكتب الحدود الستة الأولى للمتتالية التي تبين مساحة المربع.

ب) اكتب الصيغة الصريحة لهذه المتتالية.

٦ اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) لكل متتالية في ما يلي، ثم أوجد $ح_{١٢}$.

أ) (٤، ٧، ١٠، ١٣، ١٦، ...)

ب) (٣، ٧، ١١، ١٥، ١٩، ...)

ج) $\left(-٢\frac{١}{٢}، -١\frac{١}{٢}، -\frac{١}{٢}، ...\right)$

## مثال (٦)

اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) للمتتالية (٢، ٥، ١٠، ١٧، ٢٦، ...).

الحل:

$ح_{١} = ٢ = ١^{٢} + ١$ $\quad$ $ح_{٢} = ٥ = ٢^{٢} + ١$

$ح_{٣} = ١٠ = ٣^{٢} + ١$ $\quad$ $ح_{٤} = ١٧ = ٤^{٢} + ١$

$ح_{٥} = ٢٦ = ٥^{٢} + ١$

الصيغة الصريحة هي $ح_{ن} = ن^{٢} + ١$.

### حاول أن تحل

٧ اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) للمتتالية (٠، ٣، ٨، ١٥، ٢٤، ...).

## مثال (٧) صنع متتالية

لإيجاد ضلع من «رقعة كوش» **Koch snowflake**، استبدل كل بـ .

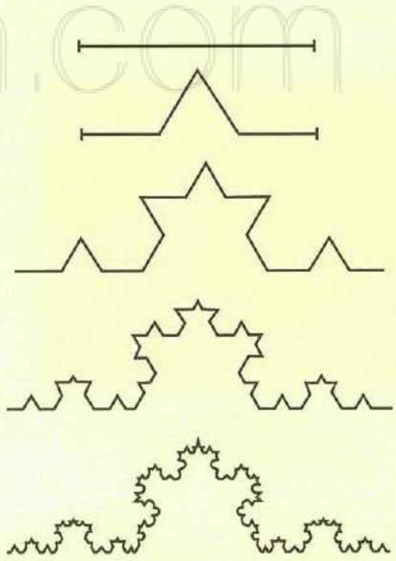
أ ارسم الأشكال الأربعة الأولى من النمط.

ب اكتب عدد القطع في كل شكل من أ أعلاه على صورة متتالية.

جـ توقع الحد التالي من المتتالية ثمّ فسّر اختيارك.

الحل:

أ



ب في الشكل الأول قطعة واحدة (١)

في الشكل الثاني ٤ قطع (٤)

في الشكل الثالث ١٦ قطعة (١٦)

في الشكل الرابع ٦٤ قطعة (٦٤)

∴ المتتالية (١، ٤، ١٦، ٦٤، ...)

جـ كل حد يساوي ٤ أمثال الحد السابق.

الحد التالي = ٤ × ٦٤ = ٢٥٦. يوجد ٢٥٦ قطعة في الشكل التالي أي الحد الخامس من المتتالية = ٢٥٦.

### حاول أن تحل

٨ صف كل نمط وأوجد الحدود الثلاثة التالية.

أ ٢٧، ٣٤، ٤١، ٤٨، ...

ب ٢٤٣، ٨١، ٢٧، ٩، ...

**مثال (٨)** **متتالية فيبوناتشي** Fibonacci Sequence

**الصيغة الارتدادية لمتتالية فيبوناتشي هي: $ف_{ن} = ف_{ن-٢} + ف_{ن-١}$ حيث $ف_{١} = ١$، $ف_{٢} = ١$.**
**استخدم الصيغة الارتدادية لإيجاد الحدود السبعة الأولى من المتتالية ثم اكتب المتتالية.**

الحل:

$ف_{١} = ١$

$ف_{٢} = ١$

$ف_{٣} = ف_{١} + ف_{٢} = ١ + ١ = ٢$

$ف_{٤} = ف_{٢} + ف_{٣} = ١ + ٢ = ٣$

$ف_{٥} = ف_{٣} + ف_{٤} = ٢ + ٣ = ٥$

$ف_{٦} = ف_{٤} + ف_{٥} = ٣ + ٥ = ٨$

$ف_{٧} = ف_{٥} + ف_{٦} = ٥ + ٨ = ١٣$

∴ متتالية فيبوناتشي هي (١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ١٣، ...)

**حاول أن تحل**

**٩** اختر عددين متساويين غير العدد ١، ١ واكتب الحدود الخمسة الأولى لمتتالية مشابهة لمتتالية فيبوناتشي.



**غالبًا ما نجد أعداد فيبوناتشي في الطبيعة.**

التريليوم
٣ بتلات: الحد الرابع

الحوذان الزاحف
٥ بتلات: الحد الخامس

زهرة البق
٨ بتلات: الحد السادس

**بالنسبة إلى زهرة تباع الشمس، عند حساب عدد بتلاتها من الداخل إلى الخارج سنجدها: ١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ...**

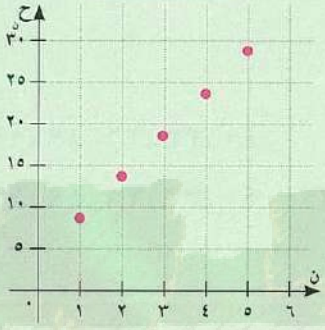
# ٥ – ٢

# المتتالية الحسابية
# Arithmetic Sequence

**سوف تتعلم**

- المتتالية الحسابية وأساسها
- الحد النوني للمتتالية الحسابية
- الأوساط الحسابية
- مجموع (ن) حدًّا الأولى من حدود المتتالية الحسابية

$ح_{١}$ ← ٩
$ح_{٢}$ ← ١٤
$ح_{٣}$ ← ١٩
$ح_{٤}$ ← ٢٤
$ح_{٥}$ ← ٢٩




**عمل تعاوني**

١ أ أوجد الحد السادس من المتتالية المبينة جهة اليسار.

ب اكتب صيغة للحد السادس مستخدمًا الحد الخامس.

جـ اكتب صيغة ارتدادية للمتتالية.

٢ في المتتالية (٩، ١٤، ١٩، ٢٤، ٢٩، ...)، ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة هو مقدار ثابت.

أ كون متتاليتين، إحداهما بإضافة عدد ثابت والأخرى بطرح العدد الثابت نفسه من كل حد من حدود المتتالية الأصلية.

ب أوجد ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة في كل متتابعة حصلت عليها. ماذا تلاحظ.

جـ ارسم في شكل بياني واحد العلاقة بين ن، $ح_{ن}$ للمتتالية الأصلية والمتتاليات التي حصلت عليها في ٢ - أ.
قارن بين الرسوم الثلاثة. ماذا تلاحظ؟

**تعريف:**

المتتالية (المتتابعة) الحسابية هي متتالية ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة عددًا ثابتًا. يسمى هذا الناتج أساس المتتالية ويرمز إليه بالرمز ء. وعلى ذلك $ح_{ن+١} - ح_{ن} = ء$ أو $ح_{ن+١} = ح_{ن} + ء$.

**أي أنه يمكن الحصول على أي حد من حدود المتتالية الحسابية (بعد الحد الأول) وذلك بإضافة ء إلى الحد الذي يسبقه مباشرة.**



**مثال (١)**

**بين أن المتتالية (٦، ١٢، ١٨، ٢٤) هي متتالية حسابية.**

**الحل:**

١٢ - ٦ = ١٨ - ١٢ = ٢٤ - ١٨ = ٦

ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة يساوي ٦. لاحظ أن أساس المتتالية ء = ٦.

∴ المتتالية حسابية.

**حاول أن تحل**

١ هل المتتاليتان التاليتان حسابيتان؟ إذا كانتا كذلك، فأوجد أساس كل منهما.

أ المتتالية (٢، ٥، ٧، ١٢)

ب المتتالية (٤٨، ٤٥، ٤٢، ٣٩)

**مثال (٢)**

إذا كان $ح_١ = ٥$، $ى = ٧$ في متتالية حسابية فاكتب الحدود الستة الأولى من المتتالية.

الحل:

$ح_١ = ٥$

$ح_٢ = ح_١ + ى = ٥ + ٧ = ١٢$

$ح_٣ = ح_٢ + ى = ١٢ + ٧ = ١٩$

الحدود الستة الأولى هي: ٥، ١٢، ١٩، ٢٦، ٣٣، ٤٠

وتكون المتتالية: $(ح_ن) = (٥، ١٢، ١٩، ٢٦، ٣٣، ٤٠، \ldots)$

**حاول أن تحل**

٢ إذا كان $ح_١ = ٤$، $ى = -٣$ في متتالية حسابية، فاكتب الحدود الستة الأولى من المتتالية.

## الحد النوني للمتتالية الحسابية General Term of an Arithmetic Sequence

إذا كان الحد الأول في المتتالية الحسابية $(ح_ن)$ هو $ح_١$ وأساس المتتالية يساوي ى. واعتبرنا الحد النوني هو $ح_ن$،
فمن تعريف المتتالية الحسابية:

$ح_٢ = ح_١ + ى$

$ح_٣ = ح_١ + ٢ى$

$ح_٤ = ح_١ + ٣ى$



**وبصفة عامة**

$ح_ن = ح_١ + (ن - ١)ى$ لكل $ن \in ص_+$.

إذا كان الحد المعروف $ح_ك$، فإن $ح_ك = ح_١ + (ك - ١)ى$ : $ك \in ص_+$

ومنه يكون $ح_ن - ح_ك = (ن - ك)ى$

أي أن $ح_ن = ح_ك + (ن - ك)ى$

وتكون الصورة العامة للمتتالية الحسابية:

$(ح_١، ح_١ + ى، ح_١ + ٢ى، \ldots، ح_١ + (ن - ١)ى، \ldots)$

لاحظ أن $ى = \frac{ح_ن - ح_ك}{ن - ك}$ : $ن \neq ك$

**ملاحظة:**

ن تمثل رتبة الحد $ح_ن$ أما $ح_ن$ فتمثّل قيمة الحد، فمثلًا: $ح_٧ = ٣٥$ تعني أن قيمة الحد السابع تساوي ٣٥.

### مثال (٣)

أوجد الحد العاشر والحد المائة من المتتالية الحسابية (٨، ٦، ٤، ...).

الحل:

$ح_{١} = ٨$ ، $ء = ٦ - ٨ = -٢$

$ح_{١٠} = ح_{١} + ٩ء$

$ح_{١٠} = ٨ + ٩ \times (-٢) = -١٠$ أي أن $ح_{١٠} = -١٠$

$ح_{١٠٠} = ح_{١} + ٩٩ء$

$= ٨ + ٩٩ \times (-٢)$

$= -١٩٠$

أو

$ح_{١٠٠} = ح_{١٠} + (١٠٠ - ١٠)ء$

$= -١٠ + (١٠٠ - ١٠) \times (-٢)$

$= -١٩٠$

أي أن: $ح_{١٠٠} = -١٩٠$

#### حاول أن تحل

٣ في المتتالية الحسابية $ح_{١} = ٤$، $ء = ٣$.

أوجد $ح_{١٢}$.

### مثال (٤)



أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٩٩ من المتتالية الحسابية (٧، ٩، ١١، ...).

الحل:

$ح_{١} = ٧$ ، $ء = ٢$ ، $ح_{ن} = ٩٩$

$ح_{ن} = ح_{١} + (ن - ١)ء$

$٩٩ = ٧ + (ن - ١) \times ٢$

$٩٢ = (ن - ١) \times ٢$

$٤٦ = ن - ١$ $\quad$ $ن = ٤٧$

أي أن الحد من المتتالية الحسابية الذي قيمته ٩٩ هو $ح_{٤٧}$.

#### حاول أن تحل

٤ (أ) في المتتالية الحسابية (٢، ٥، ٨، ١١، ...): أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٧١.

(ب) أوجد عدد حدود المتتالية الحسابية (٧، ١١، ١٥، ...، ٤٧).

## مثال (٥)

في المتتالية ($ح_ن$) حيث $ح_ن = ٧ن - ٣$ لكل $ن \in صـ_+$، أثبت أن المتتالية حسابية.

الحل:

$ح_ن = ٧ن - ٣$

$ح_{ن+١} = ٧(ن + ١) - ٣ = ٧ن + ٤$

$ح_{ن+١} - ح_ن = (٧ن + ٤) - (٧ن - ٣) = ٧$

= مقدارًا ثابتًا

$\therefore$ المتتالية ($ح_ن$) حيث $ح_ن = ٧ن - ٣$ متتالية حسابية.

### حاول أن تحل

٥ في المتتالية ($ح_ن$) حيث $ح_ن = ٣ن + ٥$: $ن \in صـ_+$

أثبت أن المتتالية حسابية.

## مثال (٦)

إذا كان الحد الخامس من متتالية حسابية يساوي ٩ والحد الثامن يساوي ١٥، فأوجد أساس المتتالية.

**الطريقة الأولى**

$ح_ن = ح_١ + (ن - ١)ء$

$ح_٥ = ح_١ + ٤ء$

$\therefore ح_١ + ٤ء = ٩$ (١)

$ح_٨ = ح_١ + ٧ء$

$\therefore ح_١ + ٧ء = ١٥$ (٢)

بطرح (١) من (٢)

$\therefore ٣ء = ٦$

$\therefore ء = ٢$

**الطريقة الثانية**

$ح_ن = ح_ك + (ن - ك)ء$

$ح_٥ = ٩$ ، $ح_٨ = ١٥$

$ح_٨ - ح_٥ = (٨ - ٥) \times ء$

$١٥ - ٩ = ٣ء$

$\therefore ٦ = ٣ء$

$\therefore ء = ٢$

إذًا، أساس المتتالية الحسابية هو ٢.

### حاول أن تحل

٦ إذا كان الحد الثاني من متتالية حسابية يساوي ٩ والحد السادس يساوي -٣، فأوجد أساس المتتالية ثم أوجد المتتالية الحسابية مكتفيًا بالحدود الأربعة الأولى منها.

مثال (٧)

بفرض أنك تشارك في سباق دراجات لدعم مشروع خيري. على المتسابق الأول تأمين مبلغ ٥ دنانير. وكل متسابق تالي يؤمن مبلغ يزيد ١,٥ دينارًا عن المتسابق الذي يسبقه مباشرةً. ما المبلغ الذي سيدفعه المتسابق الخامس والسبعون؟

الحل:

$ح_{١} = ٥$ ، $ح_{٢} = ٦,٥$ ، $ح_{٣} = ٨$ ، ... لماذا؟

$ح_{ن} = ح_{١} + (ن - ١)ء$ استخدام الصيغة الصريحة

$ح_{٧٥} = ٥ + (٧٥ - ١) × ١,٥$ التعويض

$ح_{٧٥} = ٥ + ٧٤ × ١,٥$

$= ١١٦$

سيدفع المتسابق الخامس والسبعون ١١٦ دينارًا.

حاول أن تحل

٧ استخدم الصيغة الصريحة لإيجاد الحد الخامس والعشرين ($ح_{٢٥}$) من المتتالية الحسابية (٥، ١١، ١٧، ٢٣، ٢٩، ...).

## الأوساط الحسابية Arithmetic Means

إذا كونت أ، ب، جـ متتالية حسابية حيث أ، ب، جـ هي عناصر من ح (أعداد حقيقية):

فإن: ب - أ = جـ - ب

٢ب = جـ + أ

$$ب = \frac{أ + جـ}{٢}$$

أي أن ب هو **الوسط الحسابي** للعددين أ، جـ.

مثال (٨)

إذا كانت (٨٤، س، ١١٠) متتالية حسابية، فأوجد قيمة س.

الحل:

الحد س هو الوسط الحسابي بين ٨٤، ١١٠.

$$س = \frac{٨٤ + ١١٠}{٢} = ٩٧$$

حاول أن تحل

٨ أوجد قيمة ص من المتتالية الحسابية (٤٣، ص، ٥٧).

**بصورةٍ عامّةٍ**

إذا كانت (أ، ب، جـ، د، ...، ف، ص) متتالية حسابية فإن ب، جـ، د، ...، ف تسمى أوساطًا حسابية للعددين أ، ص.
وتسمى عملية إيجاد الأوساط الحسابية إدخال أوساط حسابية بين العددين أ، ص.

**مثال (٩)**

**أدخل ٥ أوساط حسابية بين ٢٣، ٦٥.**

**الحل:**

(٢٣، ■، ■، ■، ■، ■، ٦٥).

$ح_{١}$ = ٢٣، عدد الحدود: ٥ + ٢ = ٧، $ح_{٧}$ = ٦٥.

إذًا $ح_{٧} = ح_{١} + ٦ء$

$٦ء + ٢٣ = ٦٥$

$٦ء = ٤٢$

$ء = ٧$

الأوساط الحسابية هي ٣٠، ٣٧، ٤٤، ٥١، ٥٨.

**حاول أن تحل**

**٩** (أ) أدخل ثلاثة أوساط حسابية بين −٩، ٣.

(ب) أدخل خمسة أوساط حسابية بين ١٣، ١.



## مجموع ن حدًا الأولى من حدود متتالية حسابية

## Sum of The First n Terms of an Arithmetic Sequence

مجموع ن حدًّا الأولى من حدود متتالية حسابية ($ح_{ن}$) يعطى بالقاعدة:

$$جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}(ح_{١} + ح_{ن}) \quad \text{أو} \quad جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}[٢ح_{١} + (ن - ١)ء]$$

حيث $ح_{ن}$ هو الحد الذي ترتيبه ن من المتتالية الحسابية وحدها الأول $ح_{١}$.

## البرهان

ليكن د أساس المتتالية.

$$جـ_ن = ح_١ + (ح_١ + د) + (ح_١ + ٢د) + \dots + (ح_ن - ٢د) + (ح_ن - د) + ح_ن$$

$$جـ_ن = ح_ن + (ح_ن - د) + (ح_ن - ٢د) + \dots + (ح_١ + ٢د) + (ح_١ + د) + ح_١$$

$$٢جـ_ن = (ح_١ + ح_ن) + (ح_١ + ح_ن) + (ح_١ + ح_ن) + \dots + (ح_١ + ح_ن)$$ بالجمع

$$٢جـ_ن = ن(ح_١ + ح_ن)$$ ن حدًّا

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن) \quad (١)$$ لكن $ح_ن = ح_١ + (ن - ١)د$

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[ح_١ + ح_١ + (ن - ١)د]$$ بالتعويض

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[(٢ح_١) + (ن - ١)د] \quad (٢)$$

**القانون (١):** يعطي مجموع حدود متتالية حسابية بمعلومية الحد الأول والحد الأخير.

**القانون (٢):** يعطي مجموع ن حدًّا الأولى من حدود متتالية حسابية بمعلومية الحد الأول والأساس د.

### مثال (١٠)

**أوجد مجموع العشرين حدًّا الأولى من حدود متتالية حسابية التي حدها الأول ١٠ وحدها العشرون ٥٠٠.**



**الحل:**

$ح_١ = ١٠$، $ح_{٢٠} = ٥٠٠$، $ن = ٢٠$

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن)$$

$$جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢}(١٠ + ٥٠٠) = ٥١٠٠$$

### حاول أن تحل

**١٠** أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول $-١٢$ وحدها العاشر ٢٤.

## مثال (١١)

أوجد مجموع الستة عشر حدًّا الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول ١٥ وأساسها ٧.

الحل:

$ح_١ = ١٥ ، ء = ٧ ، ن = ١٦$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ح_١ + (ن - ١)ء]$

$جـ_{١٦} = \frac{١٦}{٢} (٢ \times ١٥ + ١٥ \times ٧)$

$جـ_{١٦} = ٨(٣٠ + ١٠٥)$

$جـ_{١٦} = ١٠٨٠$

### حاول أن تحل

١١ أ) متتالية حسابية حدها الأول $-٧$ وأساسها ٤. أوجد مجموع أول خمسة وعشرين حدًّا منها.

ب) أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية (٥، ٧، ٩، ...، ٩٥).

## مثال (١٢)

كم حدًّا يلزم أخذه من المتتالية الحسابية (١٠، ١٥، ٢٠، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ٤٥٠؟

الحل:

$ح_١ = ١٠ ، ء = ٥ ، جـ_ن = ٤٥٠$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ح_١ + (ن - ١)ء]$

$٤٥٠ = \frac{ن}{٢} [٢٠ + (ن - ١)٥]$

$٤٥٠ = \frac{ن}{٢} (١٥ + ٥ن)$

$٩٠٠ = ١٥ن + ٥ن^٢$

$ن^٢ + ٣ن - ١٨٠ = ٠$

$(ن + ١٥)(ن - ١٢) = ٠$

$ن = -١٥ ، ن = ١٢$

وحيث إن $ن = -١٥$ مرفوض لأن $-١٥ \notin ص_+$

$\therefore ن = ١٢$ أي أن عدد الحدود المطلوبة هو ١٢ حدًّا.

### حاول أن تحل

١٢ أ كم حدًّا يلزم أخذه من المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٥ وأساسها ٣ ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ٩٤٨؟

ب كم حدًّا يلزم أخذه من المتتالية الحسابية (٣٠، ٢٥، ٢٠، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ١٠٠؟

### مثال (١٣)

**أراد فهد حفر بئر في مزرعته. تبلغ كلفة حفر المتر الأول ٧ دنانير، وتزيد كلفة حفر كل متر دينارين عن كلفة حفر المتر السابق. دفع فهد للمتعهد ٤٣٢ دينارًا. ما عمق البئر الذي حفر؟**

الحل: بما أن الزيادة ثابتة وهي ديناران، إذًا المتتالية حسابية. ليكن $جـ_ن$ المبلغ المدفوع لقاء حفر ن متر.

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ح_١ + (ن - ١) \times ٢]$

$٤٣٢ = \frac{ن}{٢} (٢ \times ٧ + ٢ن - ٢)$

$٤٣٢ = ٦ن + ن^٢$

أي $ن^٢ + ٦ن - ٤٣٢ = ٠$

$(ن + ٢٤)(ن - ١٨) = ٠$

ن = −٢٤ (مرفوض)، ن = ١٨

يبلغ عمق البئر ١٨ مترًا.


### حاول أن تحل

١٣ في المثال (١٣)، كم ستبلغ كلفة الحفر بالدينار إذا بلغ عمق البئر ٢٥ مترًا؟

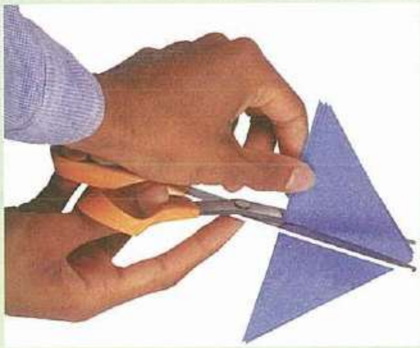
# ٥ – ٣

## المتتالية الهندسية
## Geometric Sequence

**سوف تتعلم**

- المتتالية الهندسيّة وأساسها
- الحد النوني للمتتالية الهندسيّة
- الأوساط الهندسية
- مجموع (ن) حدًا الأولى من حدود متتالية هندسيّة

**عمل تعاوني**



- ارسم مثلثًا قائم الزاوية ومتطابق الضلعين.
- قصّ المثلث إلى مثلّثين قائمي الزاوية، وكل منهما متطابق الضلعين.

كرّر الشيء نفسه كما في الشكل وأوجد عدد المثلثات في كل مرة.

$ح_١ = \blacksquare$ ، $ح_٢ = \blacksquare$ ، $ح_٣ = \blacksquare$ ، $ح_٤ = \blacksquare$

هل الحدود الناتجة تكون متتالية حسابية؟ وإذا لم تكن كذلك، فلماذا؟

ماذا تلاحظ في العلاقة بين الحدود الناتجة؟

هل يمكنك إيجاد الحد السادس $ح_٦$ ؟

هل يمكنك إيجاد الحد السادس $ح_٦$ بدلالة الحد الخامس $ح_٥$ ؟

هل يمكنك إيجاد الحد النوني $ح_ن$ بدلالة الحد $ح_{ن-١}$ ؟

**جملة مفتوحة:**

**في المتتالية السابقة،** اضرب كل حد من حدود المتتالية في عدد ثابت غير صفري واكتب المتتالية الجديدة الناتجة. ما العلاقة التي تجدها بين المتتاليتين؟

لنأخذ المتتالية (١، ٢، ٤، ٨، ١٦، ...). لاحظ النمط المتمثل في كل حد وسابقه.

**تعريف:**

**المتتالية الهندسيّة:** هي متتالية ناتج قسمة أي حد فيها على الحد السابق له مباشرة، يساوي عددًا حقيقيًا ثابتًا غير صفري،

فيكون $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = ر$ حيث $ح_ن \neq ٠$.

لكل $ن \in ص_+$ ، ر عدد حقيقي ثابت يسمى **أساس المتتالية الهندسية** common ratio

فمثلًا، المتتالية (٥، ١٠، ٢٠، ٤٠) متتالية هندسية.

أما (٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ...) فليست متتالية هندسية.

لماذا لا يمكن لأي حد في المتتالية الهندسية أن يساوي الصفر؟

**مثال (١)**

**لتكن $(ح_ن)$ متتالية حيث $ح_ن = ٣^ن$.**

**أ** **اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية $(ح_ن)$.**

**ب** **أثبت أن $(ح_ن)$ متتالية هندسية.**

**الحل:**

**أ** $ح_١ = ٣^١ = ٣$  $ح_٢ = ٣^٢ = ٩$

$ح_٣ = ٣^٣ = ٢٧$  $ح_٤ = ٣^٤ = ٨١$

$ح_٥ = ٣^٥ = ٢٤٣$  الحدود الخمسة الأولى هي: ٣، ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣.

∴ المتتالية $(ح_ن) = (٣، ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣، ...)$

**ب** $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٣^{ن+١}}{٣^ن} = ٣^{ن+١-ن} = ٣$  **(مقدار ثابت)**

∴ **المتتالية هندسية.**

**حاول أن تحل**

**١** **أثبت أن المتتالية $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = (٢)^ن$، هي متتالية هندسية.**



## الحد النوني للمتتالية الهندسية General term of an Geometrie Sequence

إذا كانت $(ح_ن)$ متتالية هندسية أساسها $ر \neq ٠$ فإن $ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$

حيث $ح_١$ هو الحد الأول، $ح_ن$ هو الحد النوني، $ر$ هو أساس المتتالية الهندسية.

ويكون $ح_٢ = ح_١ \times ر$ ، $ح_٣ = ح_١ \times ر^٢$ ، $ح_٤ = ح_١ \times ر^٣$ ، ...

وتكون الصورة العامة للمتتالية الهندسية $ح_١، ح_١ ر، ح_١ ر^٢، ح_١ ر^٣، ...، ح_١ ر^{ن-١}، ...$

إذا كان الحد المعروف $ح_ك$ فإن $ح_ك = ح_١ \times ر^{ك-١}$

ومنه يكون $\frac{ح_ن}{ح_ك} = \frac{ح_١ \times ر^{ن-١}}{ح_١ \times ر^{ك-١}} = ر^{ن-ك}$

أي أن $ح_ن = ح_ك \times ر^{ن-ك}$

## مثال (٢)

**اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٩ وأساسها ٣.**

الحل:

$ح_{١} = ٩$ ، $ر = ٣$

$ح_{٢} = ح_{١} \times ر = ٩ \times ٣ = ٢٧$

$ح_{٣} = ح_{١} \times ر^{٢} = ٩ \times ٣^{٢} = ٨١$

$ح_{٤} = ح_{١} \times ر^{٣} = ٩ \times ٣^{٣} = ٢٤٣$

$ح_{٥} = ح_{١} \times ر^{٤} = ٩ \times ٣^{٤} = ٧٢٩$

$\therefore$ الحدود الخمسة الأولى هي: ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣، ٧٢٩

### حاول أن تحل

**٢** اكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٥ وأساسها −٣.

## مثال (٣)

**متتالية هندسية حدها الأول ٤ وحدها السادس ١٢٨ . اكتب المتتالية الهندسية مكتفيًا بالحدود الأربعة الأولى منها.**



الحل:

الحد الأول: $ح_{١} = ٤$ ، الحد السادس: $ح_{٦} = ١٢٨$

نعلم أن $ح_{ن} = ح_{١} \times ر^{ن-١}$

$ح_{٦} = ح_{١} \times ر^{٥}$

$١٢٨ = ٤ \times ر^{٥}$

$ر^{٥} = ٣٢$ $\qquad$ $\therefore ر = ٢$

$\therefore$ الحدود الأربعة الأولى هي: ٤، ٨، ١٦، ٣٢.

المتتالية هي: (٤، ٨، ١٦، ٣٢، ...)

### حاول أن تحل

**٣** متتالية هندسية حدها الأول ٢٧ وحدها الخامس $\frac{١}{٣}$ . اكتب المتتالية مكتفيًا بالحدود الخمسة الأولى منها.

مثال (٤)

**متتالية هندسية حدودها موجبة، ومجموع الحدين الأول والثاني ٣٦، وحدها الثالث يساوي ٣. أوجد الحد الخامس.**

الحل:

$ح_١ + ح_٢ = ٣٦$ ، $ح_٣ = ٣$

في المتتالية الهندسية : $ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$

$\therefore ح_١ + ح_١ ر = ٣٦$

$ح_١ (١ + ر) = ٣٦$

$ح_٣ = ح_١ ر^٢ = ٣$

بالقسمة $\frac{ح_١ ر^٢}{ح_١ (١ + ر)} = \frac{٣}{٣٦}$

$\frac{ر^٢}{١ + ر} = \frac{١}{١٢}$

$١٢ ر^٢ = ر + ١$ الضرب التقاطعي

$١٢ ر^٢ - ر - ١ = ٠$

$(٤ ر + ١)(٣ ر - ١) = ٠$

$ر = -\frac{١}{٤}$ (مرفوض لأن الحدود موجبة) أو $ر = \frac{١}{٣}$.

$ح_٥ = ح_٣ \times ر^٢$

$= ٣ \times \left(\frac{١}{٣}\right)^٢ = \frac{١}{٣}$.

الحد الخامس $= \frac{١}{٣}$.

حاول أن تحل

٤ $(ح_ن)$ متتالية هندسية، مجموع حديها الأول والثاني يساوي ٢، ومجموع حديها الثالث والرابع يساوي ٨.

أوجد الحد الأول والحد الخامس منها.

## الأوساط الهندسية بين عددين Geometric Means Between two Numbers

إذا كوّنت أ، ب، جـ متتالية هندسية حيث أ، ب، جـ أعداد حقيقية غير صفرية وحيث أجـ > ٠ فإن: $\frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ب}}$ ومنه ب$^{٢}$ = أجـ

∴ ب = ± √أجـ.

يسمى ب وسطًا هندسيًا بين العددين أ، جـ، أي أن: √أجـ أو −√أجـ وسطًا هندسيًا بين العددين أ، جـ.

**مثال (٥)**

**أوجد وسطًا هندسيًا بين العددين $\frac{١}{٣}$ ، ٢٧ .**

**الحل:**

**الوسط الهندسي:** $\sqrt{\frac{١}{٣} \times ٢٧} = \sqrt{٩} = ٣$

**أو الوسط الهندسي:** $-\sqrt{\frac{١}{٣} \times ٢٧} = -\sqrt{٩} = -٣$

**حاول أن تحل**

**٥** **أوجد وسطًا هندسيًا بين العددين في كل ما يلي:**

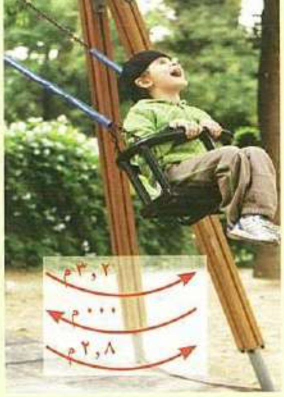
**أ** −٣ ، −٧٢

**ب** ٢٠ ، ٨٠

**جـ** ٣ ، ١٨,٧٥

**مثال (٦)** **إثرائي**

**عندما يتأرجح ولد دون تأثير قوة خارجية فإن مقاومة الهواء تؤدي إلى تناقص في طول قوس التأرجح. ويشكل التناقص في طول القوس متتالية هندسيّة. أوجد الوسط الهندسي لطولي القوسين (لأقرب عدد كلي.)**




**الحل:**

**الوسط الهندسي** = $\sqrt{٣,٢ \times ٢,٨}$

= $\sqrt{٨,٩٦}$

≃ ٣

**الوسط الهندسي لطولي القوسين يساوي حوالى ٣ أمتار.**

**حاول أن تحل**

**٦** **يتدرب عماد على القفزة الثلاثية. حقق في المحاولة الأولى ٨,٨ أمتار وفي المحاولة الثانية ٩,٢ أمتار. ما الوسط الهندسي لطولي القفزتين؟**

**بصورةٍ عامة**

في المتتالية الهندسية (أ، ب، جـ، د، ...، ك، ل). تسمى ب، جـ، د، ...، ك **أوساطًا هندسية** للعددين الحقيقيين أ، ل.
وتسمى عملية إيجاد ب، جـ، د، ...، ك عملية إدخال أوساط هندسية بين العددين أ، ل.

**مثال (٧)**

**أدخل خمسة أوساط هندسيّة موجبة بين العددين ٥١٢ ، ٨.**

**الحل:** (٥١٢، ■، ■، ■، ■، ■، ٨).

عدد حدود المتتالية الهندسية = عدد الأوساط + ٢.

ن = ٥ + ٢ = ٧

$ح_١ = ٥١٢$

$ح_ن = ٨$ أي أن $ح_٧ = ٨$

$\because ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$

$\therefore ٨ = ٥١٢ \times ر^٦$

$ر^٦ = \frac{٨}{٥١٢} = \frac{١}{٦٤} = \left(\frac{١}{٢}\right)^٦$

$ر = \frac{١}{٢}$ أو $ر = -\frac{١}{٢}$ مرفوضة لأن الأوساط موجبة.

**الأوساط هي:** ٢٥٦، ١٢٨، ٦٤، ٣٢، ١٦.

**حاول أن تحل**

٧ أدخل ثمانية أوساط هندسية بين ٢ ، ١٠٢٤.

## مجموع ن حدا الأولى من متتالية هندسية Sum of n First Terms of a Geometric Sequence

**قانون**

إذا كانت $(ح_ن)$ متتالية هندسية، $جـ_ن = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ... + ح_ن$ هو مجموع ن حدًّا الأولى، فإن:

١ $جـ_ن = ح_١ \times \frac{ر^ن - ١}{ر - ١}$ أو $جـ_ن = ح_١ \times \frac{١ - ر^ن}{١ - ر}$ ، $ر \neq ١$

٢ إذا كانت $ر = ١$ فإن $جـ_ن = ن ح_١$

## البرهان

ليكن $ر$ أساس المتتالية.

$$جـ_{ن} = ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + \dots + ح_{ن}$$

$$جـ_{ن} = ح_{١} + ح_{١} ر + ح_{١} ر^{٢} + \dots + ح_{١} ر^{ن-١} \qquad (١)$$

$$ر\, جـ_{ن} = ح_{١} ر + ح_{١} ر^{٢} + ح_{١} ر^{٣} + \dots + ح_{١} ر^{ن} \qquad (٢)$$ **يضرب طرفي المعادلة (١) في $ر \neq ٠$**

بطرح (١) من (٢) وبالتبسيط ينتج:

$$ر\, جـ_{ن} - جـ_{ن} = ح_{١} ر^{ن} - ح_{١}$$

$$جـ_{ن} \times (ر - ١) = ح_{١} (ر^{ن} - ١)$$

$$جـ_{ن} = ح_{١} \times \frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١} \quad \text{أو} \quad جـ_{ن} = ح_{١} \times \frac{١ - ر^{ن}}{١ - ر}،\quad ر \neq ١$$

أما إذا كانت $ر = ١$ فإن حدود المتتالية متساوية فيكون مجموع الحدود = قيمة الحد الأول مضروبة في عدد الحدود أي

$جـ_{ن} = ح_{١} \times ن$.



### مثال (٨)

**أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الهندسية (٢، ٤، ٨، ...).**

**الحل:**

$ح_{١} = ٢$، $ر = \frac{ح_{٢}}{ح_{١}} = \frac{٤}{٢} = ٢$، $ن = ١٠$

$$جـ_{ن} = ح_{١} \times \frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١}$$

$$جـ_{١٠} = \frac{٢ \times (٢^{١٠} - ١)}{(٢ - ١)}$$

$جـ_{١٠} = ٢ \times ١٠٢٣ = ٢٠٤٦$.

### حاول أن تحل

٨ أوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى من المتتالية الهندسية (٣، ٩، ٢٧، ...).

## مثال (٩)

الحد الأول من متتالية هندسية يساوي ٨ والحد الثالث منها يساوي $\frac{٨}{٩}$ . أوجد مجموع الحدود الستة الأولى منها.

الحل: ∵ المتتالية هندسية

$\therefore ح_٣ = ح_١ \times ر^٢$

$\frac{٨}{٩} = ٨ \times ر^٢$

$ر^٢ = \frac{١}{٩}$

$ر = \frac{١}{٣}$ أو $ر = -\frac{١}{٣}$ .

إذا كانت $ر = \frac{١}{٣}$

$ج_٦ = ٨ \times \frac{١ - \left(\frac{١}{٣}\right)^٦}{١ - \frac{١}{٣}}$

$= ٨ \times \frac{١ - \left(\frac{١}{٣}\right)^٦}{\frac{٢}{٣}}$

$= \frac{٢٩١٢}{٢٤٣} \simeq ١١,٩٨$

إذا كانت $ر = -\frac{١}{٣}$

$ج_٦ = ٨ \times \frac{١ - \left(-\frac{١}{٣}\right)^٦}{١ - \left(-\frac{١}{٣}\right)}$

$= ٨ \times \frac{١ - \left(-\frac{١}{٣}\right)^٦}{\frac{٤}{٣}}$

$= \frac{١٤٥٦}{٢٤٣} \simeq ٥,٩٩٢$



## حاول أن تحل

٩ أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الهندسية ( ٤، ■، ١، ■، $\frac{١}{٤}$، ... )

## معلومات عامة:

### رمز المجموع Summation Symbol

لكتابة مجموعة حدود المتتالية: $\text{ب}_{١} + \text{ب}_{٢} + \text{ب}_{٣} + \dots + \text{ب}_{\text{ن}} + \dots + \text{ب}_{\text{ك}}$

**بطريقة مختصرة** استخدم الرياضيون الحرف اليوناني $\sum$ (سيغما) على الشكل التالي: $\sum_{\text{ن}=١}^{\text{ك}} \text{ب}_{\text{ن}}$

يقرأ: مجموع الأعداد $\text{ب}_{\text{ن}}$ من ن = ١ إلى ن = ك

فمثلًا، المجموع: $\frac{٥}{٢} \times (١) + \frac{٥}{٢} \times (٢) + \frac{٥}{٢} \times (٣) + \dots + \frac{٥}{٢} \times (١٣)$ يكتب $\sum_{\text{ن}=١}^{١٣} \frac{٥}{٢}\,\text{ن}$.

الحد الأعلى
أكبر قيمة لـ ن

$$\sum_{\text{ن}=١}^{١٣} \frac{٥}{٢}\,\text{ن}$$

الصيغة الصريحة للمتتالية

الحد الأدنى
أصغر قيمة لـ ن

> **ملاحظة:**
> في دراستنا للمجموع $\sum$ سنقتصر على الحالات التي تكون فيها ن تبدأ من العدد ١ حيث ن $\in$ {١، ٢، ٣، ...} وهذا يمثل مجال المتتالية.

لكتابة: ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ٤٥ نكتب $\sum_{\text{ن}=١}^{٤٥} \text{ن}$

لكتابة: $١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢ + \dots + ١٠^٢$ نكتب $\sum_{\text{ن}=١}^{١٠} \text{ن}^٢$



**مثال (١٠)**

**أ** أوجد قيمة $\sum_{\text{ن}=١}^{١٠٠} \text{ن}$.

**الحل:**

$\sum_{\text{ن}=١}^{١٠٠} \text{ن} = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + \dots + ١٠٠$

(١، ٢، ٣، ...، ١٠٠) متتالية حسابية حدها الأول ١ واساسها ١ وحدها الأخير $\text{ح}_{١٠٠} = ١٠٠$ لماذا؟

$\therefore \sum_{\text{ن}=١}^{١٠٠} \text{ن} = \text{جـ}_{١٠٠}$

وحيث إن $\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}(\text{ح}_{١} + \text{ح}_{\text{ن}})$

$\text{جـ}_{١٠٠} = \frac{١٠٠}{٢}(١ + ١٠٠)$

$\text{جـ}_{١٠٠} = \frac{١٠٠ \times ١٠١}{٢} = ٥٠٥٠$

### حاول أن تحل

١٠ أوجد قيمة: $\sum_{ن=١}^{٨٠} ن$

### تعميم

مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة الأولى التي عددها ن = $\frac{ن \times (ن + ١)}{٢}$

لاحظ أن $\sum_{ن=١}^{٤٥} ن = \frac{٤٥ \times ٤٦}{٢} = ١٠٣٥$

### مثال (١١)

أوجد قيمة $\sum_{ن=١}^{١٣} \frac{٥}{٢} ن$.

الحل:

$\sum_{ن=١}^{١٣} \frac{٥}{٢} ن = \frac{٥}{٢} \times (١) + \frac{٥}{٢} \times (٢) + \frac{٥}{٢} \times (٣) + \dots + \frac{٥}{٢} \times (١٣)$

$= \frac{٥}{٢} \times (١ + ٢ + ٣ + \dots + ١٣)$

$= \frac{٥}{٢} \times \frac{١٣ \times ١٤}{٢}$

$= ٢٢٧,٥$

### حاول أن تحل

١١ أوجد قيمة: $\sum_{ن=١}^{١٠} ٢ن$.

## مثال (١٢)

أوجد قيمة $\sum_{ن=١}^{٩}$ (٦ن − ٤)

الحل:

نفرض $ح_ن$ = ٦ن − ٤ هي الصيغة الصريحة للمتتالية.

فيكون $ح_{ن+١}$ = ٦(ن + ١) − ٤

= ٦ن + ٢

∴ $ح_{ن+١} - ح_ن$ = (٦ن + ٢) − (٦ن − ٤)

= ٦

= مقدارًا ثابتًا

∴ المتتالية ($ح_ن$) حيث $ح_ن$ = ٦ن − ٤ متتالية حسابية أساسها ٦.

والمطلوب هو إيجاد مجموع ٩ حدود الأولى منها وهو $جـ_٩$.

∴ $\sum_{ن=١}^{٩}$ (٦ن − ٤) = $\frac{ن}{٢}$ [٢$ح_١$ + (ن − ١)ء]

= $\frac{٩}{٢}$ [٢ × ٢ + (٩ − ١) × ٦]

= $\frac{٩}{٢}$ × ٥٢

= ٢٣٤

## حاول أن تحل

١٢ أوجد قيمة = $\sum_{ن=١}^{٨}$ (٣ن + ٥).

## مثال (١٣)

أوجد قيمة $\sum_{ن=١}^{٨} ٣^{ن}$

الحل:

الصيغة الصريحة للمتتالية: $ح_{ن} = ٣^{ن}$

$ح_{ن+١} = ٣^{ن+١}$

$\therefore \frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} = \frac{٣^{ن+١}}{٣^{ن}} = ٣$ = مقدارًا ثابتًا

$\therefore$ المتتالية $(ح_{ن})$ حيث $ح_{ن} = ٣^{ن}$ متتالية هندسية حدها الأول ٣ وأساسها ٣.

وهي على الصورة (٣، ٩، ٢٧، ...)

والمطلوب إيجاد مجموع ٨ حدود الأولى للمتتالية الهندسية.



$$\sum_{ن=١}^{ن} ٣^{ن} = ح_{١} \times \frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١}$$

$$= ٣ \times \frac{٣^{٨} - ١}{٣ - ١} = ٩٨٤٠$$

## حاول أن تحل

١٣ أوجد قيمة = $\sum_{ن=١}^{١٠} ٢^{ن}$

# المرشد لحل المسائل

**١** إذا كانت الأعداد أ، ب، جـ، هـ، على هذا الترتيب تمثل أبعاد المستطيلين (١)، (٢) كما في الشكل.

**أ** قارن بين مساحتي المستطيلين (١)، (٢). إذا كانت هذه الأعداد بنفس الترتيب تمثّل الحدود الأربعة الأولى من متتالية هندسية أساسها ر.

**ب** قارن بين محيطي المستطيلين (١)، (٢). إذا كانت هذه الأعداد بنفس الترتيب تمثّل الحدود الأربعة الأولى من متتالية حسابية أساسها ء.


**٢ كيف نفكر في حل المسألة**

**أ** في المتتالية الهندسية كل حد يساوي الحد الذي يسبقه مضروبًا في الأساس ر.

∴ ب = أر ، جـ = ب ر = أر$^{٢}$ ، هـ = جـ ر = أر$^{٣}$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

ومنه مساحة المستطيل (١) = أ × هـ = أ × أر$^{٣}$ = أ$^{٢}$ر$^{٣}$

مساحة المستطيل (٢) = ب × جـ = أر × أر$^{٢}$ = أ$^{٢}$ر$^{٣}$

**الاستنتاج:** وهكذا نستنتج أن مساحتي المستطيلين متساويتان.

**ب** بما أن المتتالية حسابية أساسها ء فإن ب = أ + ء ، جـ = ب + ء = أ + ٢ء ، هـ = جـ + ء = أ + ٣ء

محيط المستطيل (١) = ٢ × (أ + هـ) = ٢ × (أ + أ + ٣ء) = ٤أ + ٦ء

محيط المستطيل (٢) = ٢ × (ب + جـ) = ٢ × (أ + ء + أ + ٢ء) = ٤أ + ٦ء

**الاستنتاج:** للمستطيلين المحيط نفسه.

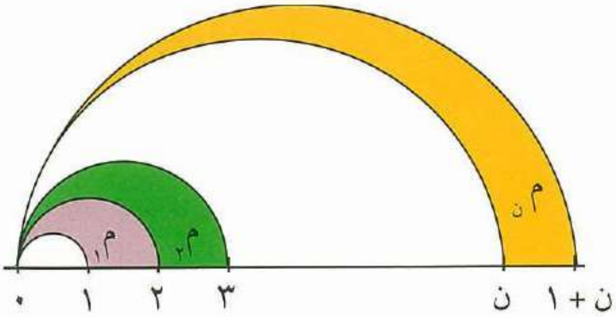


**٣ مسألة إضافية**

قارن بين مساحتي المستطيلين (١)، (٢) في الحالة (ب).

* **٤ تفكير منطقي**

في الشكل المقابل، تمثل م$_{١}$، م$_{٢}$، ...، م$_{ن}$ المساحات المحصورة بين أنصاف الدوائر.




**أ** أثبت أن المتتالية (م$_{١}$، م$_{٢}$، ...، م$_{ن}$) حسابية.

**ب** احسب بطريقتين مختلفتين المجموع: جـ$_{١٠}$ = م$_{١}$ + م$_{٢}$ + ... + م$_{١٠}$.