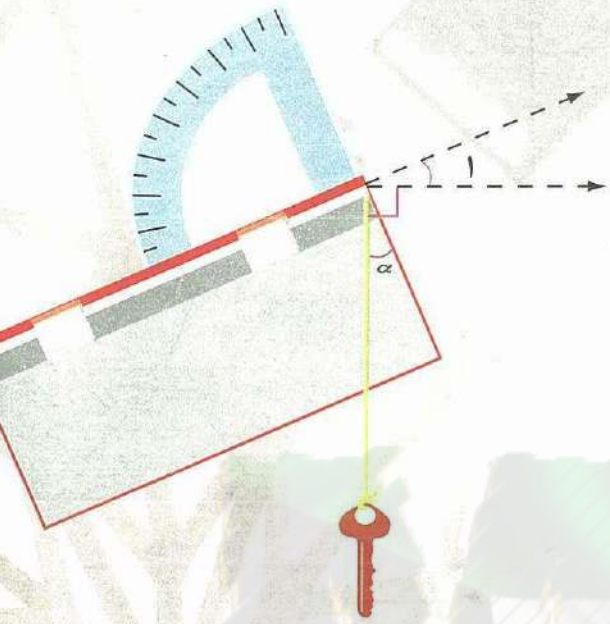
الوحدة الثانية

وحدة حساب المثلثات
Trigonometry



مشروع الوحدة: صنع المميال (Clinometer) واستخدامه.

١ مقدمة المشروع: كيف لنا أن نعرف كم تبعد الشمس عنا من دون أن نمد أشرطة القياس لملايين الكيلومترات؟
كيف نعرف كتلة إلكترون عندما لا نستطيع أن نراه؟
أوجد الإنسان منذ القدم طرقًا للقياس غير المباشر عندما عجز عن القياس المباشر.

٢ الهدف: صنع آلة مشابهة للآلات التي استخدمها علماء الفلك الأقدمون والرحّالة لقياس ارتفاعات لا يمكن بلوغها.

٣ اللوازم: منقلة، سلك، شريط لاصق، قطعة من الورق المقوّى، مصّاصة شرب.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ انظر من خلال مصّاصة الشرب إلى الهدف الذي تريد قياسه (رأس برج مثلًا).
واطلب إلى أحد طلاب مجموعتك قراءة الزاوية بين المنقلة والخيط المتدلي عموديًّا مع المفتاح.
لماذا تساوي هذه الزاوية زاوية المصّاصة مع خطّ الأفق؟
(الزاوية ١ في الرسم).

ب استخدم آلة المميال لقياس حساب زاوية ارتفاع بناء مدرستك مثلًا؛ وأوجد المسافة الأفقية بينك وبين البناء ثم احس
ارتفاع البناء.

جـ تختار المجموعة بعض المباني أو الأشياء الأخرى الموجودة في المدرسة أو في جوارها ثم يصار إلى قياس ارتفاعا
هذه الأشياء من مسافات مختلفة.

٥ التقرير: تضع كل مجموعة تقريرًا مفصلًا حول كيفية صنع المميال وكيفية استخدامه للإجابة عن الأسئلة (أ)، (ب)، (جـ

دروس الوحدة

الزوايا وقياساتها	النسب المثلثية: الجيب وجيب التمام ومقلوباتهما	ظل الزاوية ومقلوبه	النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة	حل المثلث القائم الزاوية
٢-١	٢-٢	٢-٣	٢-٤	٢-٥
زوايا الارتفاع والانخفاض	القطاع الدائري والقطعة الدائرية			
٢-٦	٢-٧			

الوحدة الثانية

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كيفية استخدام نظرية فيثاغورث لإيجاد طول أحد أضلاع مثلث قائم الزاوية وإيجاد علاقة بين أطوال أضلاع مثلثات قائمة الزاوية في حالات خاصة، وتطبيق نظرية فيثاغورث على مسائل حياتية.
- تعلمت كيفية إثبات تشابه مثلثات واستنتاج أطوال الأضلاع المتناسبة والزوايا المتساوية القياس.
- استخدمت تشابه المثلثات في حل مسائل حياتية.
- تعلمت تطابق المثلثات واستنتجت تطابق الأضلاع المتناظرة والزوايا المتساوية القياس.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تتعرف الزاوية الموجهة لتستنتج الزاوية الموجهة الموجبة والزاوية الموجهة السالبة والزاوية الموجهة في الوضع القياسي.
- سوف تتعرف القياس الستيني والقياس الدائري والعلاقة بينهما.
- سوف تستخدم تشابه المثلثات القائمة لتعريف النسب المثلثية.
- سوف تستخدم النسب المثلثية لتحل مسائل حياتية تتضمن إيجاد ارتفاعات ومسافات وزوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض.
- سوف تستخدم النسب المثلثية لإيجاد مساحة المثلث بدلالة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما وإيجاد مساحة القطاع الدائري ومساحة القطعة الدائرية.

المصطلحات الأساسية

زاوية موجهة - زاوية موجهة موجبة - زاوية موجهة سالبة - زاوية موجهة في الوضع القياسي - قياس ستيني - قياس دائري - جيب الزاوية - جيب تمام الزاوية - قاطع الزاوية - قاطع تمام الزاوية - ظل الزاوية - ظل تمام الزاوية - زاوية الارتفاع - زاوية الانخفاض - القطاع الدائري - القطعة الدائرية.

أضف إلى معلوماتك

يذكر بعض المؤرخين أن الرياضي العربي نصير الدين الطوسي هو أول من فصل حساب المثلثات عن الفلك، كما يذكر المؤرخون أن طاليس (٦٠٠ قبل الميلاد) تطرق إلى حساب المثلثات، عندما تمكن من قياس ارتفاع الهرم عن طريق المقارنة بين طول عصًا عمودية وطول ظلها وبين ارتفاع الهرم وطول ظله في الوقت نفسه.

ولقد كان لحساب المثلثات نصيبه من اهتمامات العرب. ويذكر أن اصطلاح «الظل» قد وصفه العالم العربي أبو الوفا البوزجاني في القرن العاشر الميلادي. وهذا الاصطلاح مأخوذ من ظلال الأجسام، التي تتكون نتيجة سير الضوء المنبعث من الشمس في خطوط مستقيمة.

كما أن للعرب إضافات عديدة في حساب المثلثات المستوي والكري أو الكروي (نسبة إلى سطح الكرة)، وعنهم أخذ الغربيون المعلومات المهمة وأضافوا أيضًا الكثير، حتى أصبح حساب المثلثات متضمنًا في الكثير من الأبحاث الرياضية، وأصبحت تطبيقاته في شتى المناحي العلمية والعملية.

نصير الدين الطوسي

٢ - ١

الزوايا وقياساتها
Angles and their Measurement

سوف تتعلم

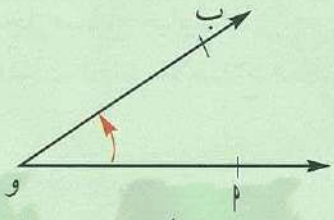
- الزاوية الموجهة
- الزاوية الموجهة الموجبة
- الزاوية الموجهة السالبة
- الزاوية في الوضع القياسي
- أنظمة قياس الزاوية
- القياس الستيني
  - أجزاء الدرجة
- القياس الدائري
  - طول القوس
  - الزاوية النصف قطرية
- العلاقة بين القياسين الدائري والستيني

دعنا نفكر ونتناقش

١ - الزاوية: Angle

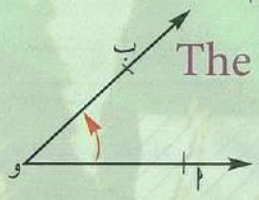
تعلمنا سابقًا أن الزاوية هي **اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية واحدة تسمى «رأس الزاوية»، والشعاعان هما ضلعا الزاوية.**

الزاوية الموجهة Oriented Angle



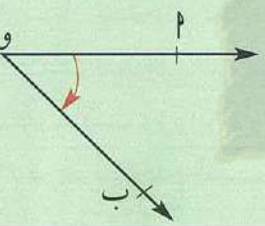
في الشكل المقابل، رأس الزاوية هو نقطة و، وضلعا الزاوية هما $\overleftarrow{\text{وأ}}$، $\overleftarrow{\text{وب}}$ ونرمز للزاوية بالرمز: أوَب وتسمى الزاوية في هذه الحالة بالزاوية الموجهة ويرمز لها أيضًا ($\overleftarrow{\text{وأ}}$، $\overleftarrow{\text{وب}}$) ويسمى $\overleftarrow{\text{وأ}}$ الضلع الأساسي أو الضلع الابتدائي، $\overleftarrow{\text{وب}}$ الضلع النهائي لها.

الزاوية الموجهة الموجبة: The Positive Oriented Angle



إذا كان الضلع الابتدائي هو $\overleftarrow{\text{وأ}}$ والضلع النهائي لها هو $\overleftarrow{\text{وب}}$ كما في الشكل المقابل، فإن قياس الزاوية في هذه الحالة يكون موجبًا.

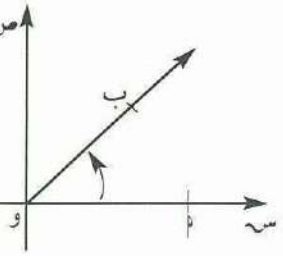
الزاوية الموجهة السالبة: The Negative Oriented Angle



إذا كان الضلع الابتدائي هو $\overleftarrow{\text{وأ}}$ والضلع النهائي هو $\overleftarrow{\text{وب}}$ كما في الشكل المقابل، فإن قياس الزاوية في هذه الحالة يكون سالبًا.

تكون الزاوية الموجهة موجبة إذا كان الانتقال من الضلع الابتدائي $\overleftarrow{\text{وأ}}$ إلى الضلع النهائي $\overleftarrow{\text{وب}}$ عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، وتكون سالبة إذا كان الانتقال من $\overleftarrow{\text{وأ}}$ إلى $\overleftarrow{\text{وب}}$ مع اتجاه دوران عقارب الساعة.

الزاوية الموجهة في الوضع القياسي: The Angle in the Standard Position

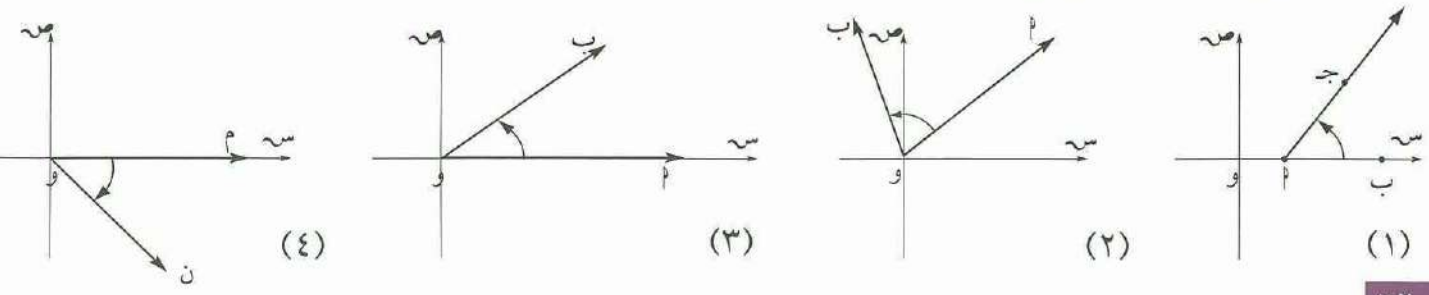


تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي إذا كان الضلع الابتدائي لها ينطبق على الجزء الموجب من محور السينات ورأسها نقطة الأصل كما في الشكل المقابل.

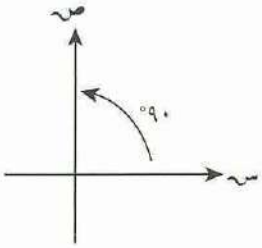
في الأشكال التالية:

أ سمّ الضلع الابتدائي والضلع النهائي، واذكر إذا كان قياس الزاوية سالبًا أو موجبًا.

ب حدّد الزوايا الموجهة التي في وضع قياسي.



الزاوية الربعية Quarter Angle



هي زاوية موجهة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي على أحد محوري الإحداثيات مثل الزوايا ٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠° أو −٩٠°، −١٨٠°، −٢٧٠°، −٣٦٠°.

٢- أنظمة قياس الزاوية: Angle Measurement Systems

توجد أنظمة مختلفة لقياس الزاوية، أهمها القياس الستيني والقياس الدائري.

أولا: القياس الستيني: The Degree Measure

في هذا القياس تقسم الزاوية التي تمثل دورة كاملة إلى ٣٦٠ قسمًا متساويًا، قياس كل منها يسمى درجة. وقد اتخذت هذه الدرجة وحدة لقياس الزوايا في هذا القياس ويرمز إليها بالرمز (°).

قياس الزاوية القائمة يساوي ٩٠°. وقياس الزاوية المستقيمة يساوي ١٨٠°.

أجزاء الدرجة: الدقيقة minute وتساوي $\frac{١}{٦٠}$ من الدرجة ويرمز إليها بالرمز (′).

والثانية second وتساوي $\frac{١}{٦٠}$ من الدقيقة ويرمز إليها بالرمز (″).

فمثلًا سنكتب الزاوية التي قياسها ٧٥ درجة و٤٥ دقيقة و١٥ ثانية على الصورة التالية: ٧٥°٤٥′١٥″.

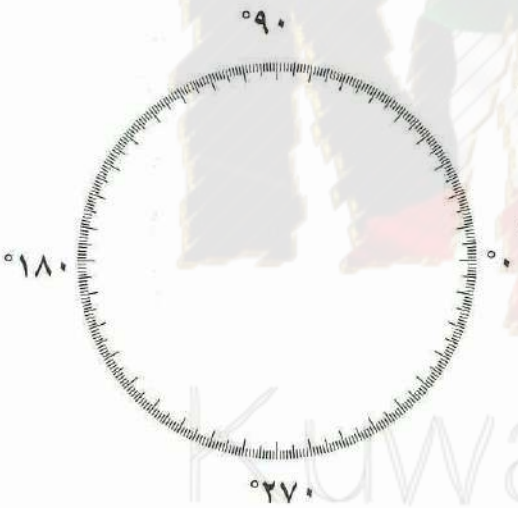
ملاحظة:

الدرجة = ٦٠ دقيقة

١° = ٦٠′

الدقيقة = ٦٠ ثانية

١′ = ٦٠″



مثال (١)

أوجد $\frac{٧}{٨}$ الزاوية القائمة بالقياس الستيني. (بالدرجات والدقائق)

الحل:

$\frac{٧}{٨}$ الزاوية القائمة = $\frac{٧}{٨} \times ٩٠° = \left(٧٨\frac{٣}{٤}\right)°$

لإيجاد $\frac{٣}{٤}$ الدرجة بالدقائق.

$\frac{٣}{٤} \times$ درجة = $\frac{٣}{٤} \times ٦٠′ = ٤٥′$

أي أن $\frac{٧}{٨}$ الزاوية القائمة = ٧٨°٤٥′

حاول أن تحل

١ اكتب كلًّا مما يلي بالقياس الستيني.

أ $\frac{٧}{٣٢}$ الزاوية القائمة

ب ٠,٦٢٥ الزاوية القائمة

مثال (٢)

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\frac{٥}{١١}$ الزاوية المستقيمة بالقياس الستيني (بالدرجات والدقائق والثواني والأجزاء من مئة من الثانية).

الحل:

$\frac{٥}{١١}$ الزاوية المستقيمة = $\frac{٥}{١١} \times ١٨٠°$

باستخدام الآلة الحاسبة:

= | °,,, | 180 | × | 11 | ÷ | 5 |

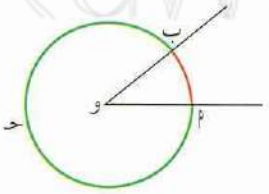
فيظهر على الشاشة 81° 49′ 5.45″

أي ٨١ درجة و٤٩ دقيقة و٥ ثوانٍ و٤٥ جزءًا من مئة من الثانية.

حاول أن تحل

٢ استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\frac{٣}{٧}$ الزاوية المستقيمة بالقياس الستيني.

ثانيا: القياس الدائري (الراديان): The Radian Measure



الزاوية المركزية زاوية رأسها مركز الدائرة.

ضلعا هذه الزاوية المركزية يقطعان الدائرة في نقطتين أ، ب.

طول القوس $\overset{\frown}{أب}$ هو المسافة على الدائرة بين النقطتين أ، ب.

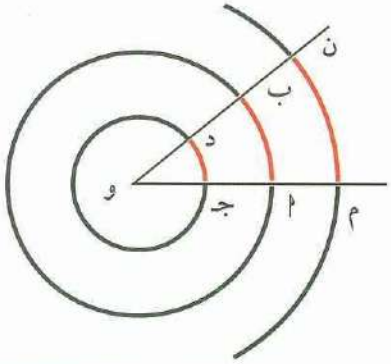
ملاحظة: يتشكل من تقاطع ضلعي الزاوية المركزية مع الدائرة قوسان: القوس الأصغر $\overset{\frown}{أب}$ (باللون الأحمر)، القوس الأكبر ($\overset{\frown}{أب}$) (باللون الأخضر) ويمكن التعبير عنه بـ ($\overset{\frown}{أجـ ب}$). يعتمد القياس الدائري على طول القوس في الدائرة الذي تحصره الزاوية المركزية وعلى طول نصف قطر الدائرة.

حقيقة هندسية: في الدوائر المتحدة المركز، النسبة بين طول قوس أي زاوية مركزية وطول نصف قطر دائرتها المناظرة تساوي مقدارًا ثابتًا يتوقف على قياس الزاوية التي تحصر هذا القوس.

في الشكل المجاور: $\frac{\text{طول } \overset{\frown}{من}}{\text{وم}} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{أب}}{\text{وأ}} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{جـ د}}{\text{وجـ}}$

أي أن $\frac{\text{طول القوس من الدائرة الذي تحصره زاوية مركزية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$ = مقدارًا ثابتًا

وهذا يعد نظامًا آخر لقياس الزاوية يسمى بالقياس الدائري للزاوية.



تعريف:

القياس الدائري لزاوية مركزية في دائرة = $\frac{\text{طول القوس الذي تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$

ويرمز إليه بالرمز هـ^{د}.

فإذا رمزنا إلى طول القوس بالرمز (ل) وإلى طول نصف القطر بالرمز نق

فإن $\text{هـ}^{د} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$ ومنها $\text{ل} = \text{هـ}^{د}\,\text{نق}$

وحدة قياس الزوايا لهذا النوع من القياس تسمى **الراديان** ويرمز لها بالرمز (١^{د})

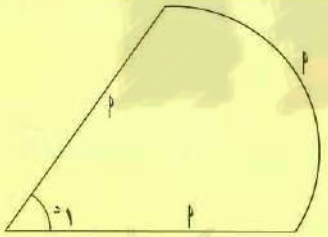
معلومة:

- في بعض الأنظمة، تقسم الزاوية القائمة إلى ١٠٠ جزء متساوٍ، كل منها يسمى "جراد" **Grad**.
- كل ١ جراد يعادل $\frac{٩}{١٠}$ من الدرجة.

تعريف الزاوية النصف قطرية: Radial Angle

هي زاوية مركزية في دائرة تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة.

وقياس الزاوية نصف القطرية يساوي ١ راديان (١^{د}).



وعلى هذا فإن الزاوية التي قياسها ٥^{د} هي زاوية مركزية في دائرة تحصر قوسًا من هذه الدائرة طوله يساوي خمسة أمثال طول نصف قطر هذه الدائرة.

مثال (٣)

ع$\hat{و}$د زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها ٤ سم. أوجد طول القوس $\overset{\frown}{\text{عد}}$ الذي تحصره هذه الزاوية إذا كان:

أ) ق(ع$\hat{و}$د) = $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{د}$

ب) ق(ع$\hat{و}$د) = (٣,١٤)^{د}

الحل:

أ) نفرض طول القوس = ل فيكون ل = هـ^{د} نق

∴ ل = طول $\overset{\frown}{\text{عد}}$ = $\left(\frac{٣}{٤}\right) \times ٤ = ٣$ سم

ب) ل = طول $\overset{\frown}{\text{عد}}$ = ٣,١٤ × ٤ = ١٢,٥٦ سم.

حاول أن تحل

٣ دائرة طول نصف قطرها ٦ سم. أوجد طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية قياسها

أ (١,٢)ᵈ ب (١,٥٧)ᵈ

٣- العلاقة بين القياسين الدائري والستيني: Degree-Radian Relation

إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوي الوحدة فإن:

١ قياس الزاوية المركزية (بالقياس الدائري) يساوي طول قوسها.

٢ الزاوية المركزية التي قياسها الستيني يساوي ٣٦٠°، يكون طول قوسها ٢π نق أي قياسها الدائري يساوي ٢π.

٣٦٠° يعادل ٢πᵈ ومنها ١٨٠° يعادل πᵈ.

١ᵈ = ١٨٠°/π ≃ ٥٧,٢٩٥٧° ≃ ٥٧° ١٧′ ٤٥″

١° = π/١٨٠° ≃ ٠,٠١٧٥ᵈ

ملاحظة:
عند عدم ذكر وحدة القياس، يعتبر الراديان هو الوحدة.

قانون: إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائري هـᵈ وقياسها الستيني س° فإن:

هـᵈ/π = س°/١٨٠° ومنها س° = هـᵈ × ١٨٠°/π هـᵈ = س° × π/١٨٠°

أمثلة

٤ زاوية قياسها ٥ᵈ، أوجد القياس الستيني لهذه الزاوية لأقرب دقيقة.

الحل:

س° = هـᵈ × ١٨٠°/π

∴ س° = ٥ᵈ × ١٨٠°/π ≃ ٢٨٦,٤٨° ≃ ٢٨٦° ٢٩′

٥ زاوية قياسها ٧٥°، أوجد القياس الدائري لها.

الحل:

هـᵈ = π/١٨٠° × س° هـᵈ = π/١٨٠° × ٧٥° ≃ ١,٣٠٩ᵈ

٦ أوجد القياس الستيني للزاوية ٣π/٤.

الحل:

س° = هـᵈ × ١٨٠°/π ∴ س° = ٣π/٤ × ١٨٠°/π = ١٣٥°.

حاول أن تحل

٤ أوجد بدلالة π القياس الدائري للزوايا التي قياساتها:

أ ٤٥° ب ٣٠٠° جـ ٢٢٥° د ١٥٠°

٥ أوجد القياس الستيني للزوايا التالية:

أ $\frac{٥}{٨} \times \pi$ ب ٠,٧٥ د جـ ٣,٣٥ د د $\frac{\pi}{٥}$

٦ أوجد القياس الستيني للزوايا التالية:

أ $\frac{\pi}{٢}$ ب $\frac{\pi}{٣}$ جـ $\frac{\pi}{٦}$ د $\frac{\pi}{٤}$

مثال (٧)

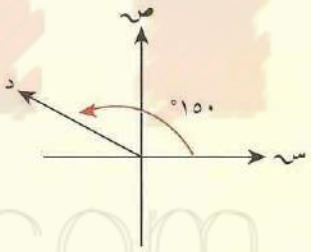
ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة التالية في الوضع القياسي، ثم حدّد الزوايا الربعية منها.

أ ١٥٠° ب −٢٧٠°

جـ $\frac{٣\pi}{٤}$ د $\frac{٣\pi}{٢}$

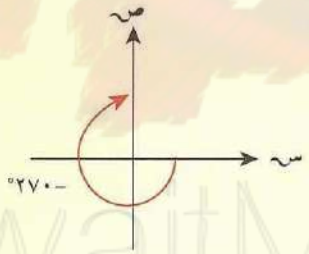
الحل:

أ



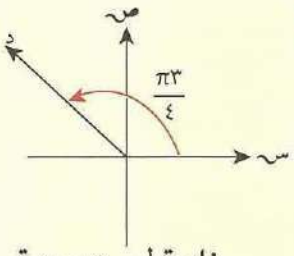
زاوية ليست ربعية

ب



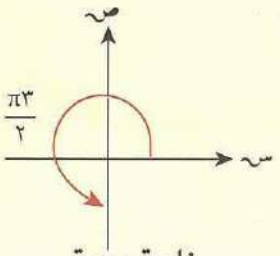
زاوية ربعية

جـ



زاوية ليست ربعية

د



زاوية ربعية

حاول أن تحل

٧ حدّد الزوايا الربعية من بين الزوايا التالية: π، ٢٥٠°، $\frac{٥\pi}{٧}$، $-\frac{\pi}{٢}$، ٣٣٠°.

مثال (٨)

زاوية قياسها ٢٣″ ١٨′ ٨٥°، أوجد القياس الدائري لهذه الزاوية مقربًا الناتج إلى رقمين عشريين.

الحل:

إذا كان هـ^{د} هو القياس الدائري فإن: هـ^{د} = $\frac{\pi}{١٨٠^{\circ}}$ × س$^{\circ}$

تضغط على المفاتيح بالترتيب التالي من جهة اليسار

=	,,,°	23	,,,°	18	,,,°	85	×	,,,°	180	÷	π

يظهر على الشاشة 1.488877359 ∴ القياس الدائري ≃ ١,٤٩

٢ - ٢

النسب المثلثية: الجيب وجيب التمام ومقلوباتهما
Trigonometric Ratios and their Reciprocals
Sine, Cosine, Secant and Cosecant

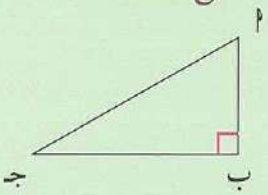
سوف تتعلم

- جيب الزاوية
- جيب تمام الزاوية
- قاطع الزاوية
- قاطع تمام الزاوية
- إيجاد قياس زاوية علم جيبها أوجيب تمامها

دعنا نفكر ونتناقش

١ - المقابل والمجاور لزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية:
The Opposite and Adjacent of an Acute Angle in a Right Triangle

في المثلث أب جـ الموضح بالشكل:



$\overline{\text{أب}}$ يسمى **الضلع المقابل** للزاوية جـ، $\overline{\text{ب جـ}}$ يسمى **الضلع المجاور** للزاوية جـ، $\overline{\text{أجـ}}$ يسمى الوتر.

وعلى هذا الأساس أكمل ما يلي:

.... هو مقابل $\hat{\text{أ}}$

.... هو مجاور $\hat{\text{أ}}$

ملاحظة:

للاختصار سنستخدم **المقابل** للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية. و**المجاور** للدلالة على طول الضلع المجاور لزاوية. و**الوتر** للدلالة على طول الوتر.

في المثلث ل ن م الموضح بالشكل المقابل:

الضلع المقابل لـ $\hat{\text{م}}$ هو ...

الضلع المجاور لـ $\hat{\text{ل}}$ هو ...

$\overline{\text{ن ل}}$ هو مجاور الزاوية ...

$\overline{\text{م ن}}$ هو مجاور الزاوية ...

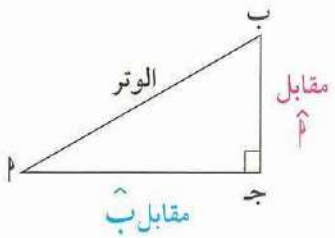
٢- جيب الزاوية: Sine of the Angle

في المثلث قائم الزاوية: نسبة طول الضلع المقابل للزاوية الحادة إلى طول الوتر تسمى جيب الزاوية، ويرمز لها بالرمز (جا) بالإنكليزية (sin).

أي أن

$$\text{جيب الزاوية} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

في الشكل المقابل:



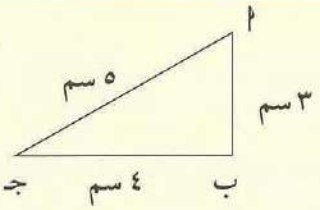
جيب الزاوية أ:

$$\text{جا أ} = \frac{\text{مقابل } \hat{\text{أ}}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أب}}$$

بالمثل جيب الزاوية ب:

$$\text{جا ب} = \frac{\text{مقابل } \hat{\text{ب}}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أب}}$$

مثال (١)



في الشكل المقابل:

أثبت أن المثلث أب جـ قائم الزاوية في ب، ثم أوجد جاأ، جاجـ.

الحل:

(أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} = ٣^{٢} + ٤^{٢} = ٢٥ عكس نظرية فيثاغورث

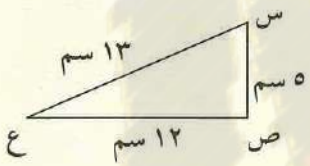
(أجـ)^{٢} = ٥^{٢} = ٢٥

∴ المثلث أب جـ قائم الزاوية في ب.

جاأ = $\frac{\text{مقابل } \hat{أ}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أجـ}}$ = $\frac{٤}{٥}$

جاجـ = $\frac{\text{مقابل } \hat{جـ}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$ = $\frac{٣}{٥}$

حاول أن تحل



١ أ أثبت أن المثلث س ص ع قائم في $\hat{ص}$.

ب أوجد جاس، جاع.

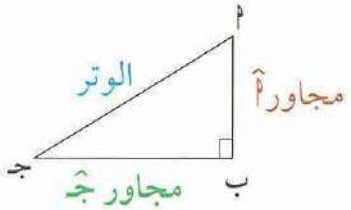
٣- جيب تمام الزاوية: Cosine of the Angle

في المثلث قائم الزاوية: نسبة طول الضلع المجاور للزاوية الحادة، إلى طول الوتر تسمى جيب تمام الزاوية، ويرمز لها بالرمز (جتا) وبالإنكليزية (cos).

جيب تمام الزاوية = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

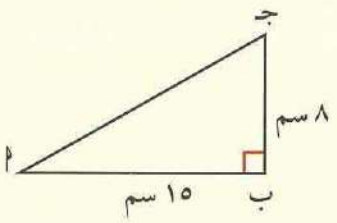
جيب تمام الزاوية جـ: جتاجـ = $\frac{\text{مجاور } \hat{جـ}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أجـ}}$

جيب تمام الزاوية أ: جتاأ = $\frac{\text{مجاور } \hat{أ}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$



مثال (٢)

Δأ ب جـ قائم في بَ، أوجد كلًّا من: أجـ، جاأ، جتاأ، جاجـ، جتاجـ. ماذا تستنتج؟



الحل: بتطبيق نظرية فيثاغورث

$(\text{أجـ})^{٢} = (\text{ب جـ})^{٢} + (\text{أب})^{٢}$

$(\text{أجـ})^{٢} = (٨)^{٢} + (١٥)^{٢}$

أجـ = ١٧ سم

$\text{جاأ} = \frac{\text{مقابل } \hat{\text{أ}}}{\text{الوتر}} = \frac{٨}{١٧}$

$\text{جتاأ} = \frac{\text{مجاور } \hat{\text{أ}}}{\text{الوتر}} = \frac{١٥}{١٧}$

$\text{جاجـ} = \frac{\text{مقابل } \hat{\text{جـ}}}{\text{الوتر}} = \frac{١٥}{١٧}$

$\text{جتاجـ} = \frac{\text{مجاور } \hat{\text{جـ}}}{\text{الوتر}} = \frac{٨}{١٧}$

ماذا تستنتج؟

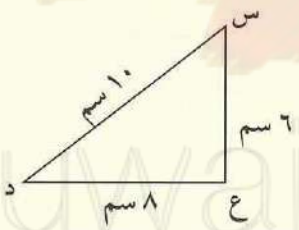
جاأ = جتاجـ = $\frac{٨}{١٧}$، جتاأ = جاجـ = $\frac{١٥}{١٧}$ ،لأن مقابل $\hat{\text{أ}}$ مجاور $\hat{\text{جـ}}$.

هل تعلم؟

في الإنكليزية كلمة **cosine** مشتقة من كلمتي **complement's** متمم و**sine** جيب ومنه جيب تمام الزاوية يساوي جيب الزاوية المتممة لها.

أي أن جتا س = جا (٩٠° − س)

حاول أن تحل



٢ أ أثبت أن المثلث س ع د قائم الزاوية في ع.

ب أوجد كلًّا من: جا($\hat{\text{س}}$)، جتا($\hat{\text{س}}$)، جا($\hat{\text{د}}$)، جتا($\hat{\text{د}}$).

جـ ماذا تلاحظ بالنسبة إلى النسب المثلثية للزاويتين $\hat{\text{س}}$، $\hat{\text{د}}$.

٤- مقلوبات الجيب وجيب التمام: Cosec and Sec

مقلوب جاأ هو $\frac{١}{\text{جاأ}}$ ويسمى قاطع تمام الزاوية أ ويرمز إليه بالرمز قتاأ وبالإنكليزية (cosec) Cosecant.

$\text{قتاأ} = \frac{١}{\text{جاأ}}$: جاأ ≠ ٠

$\text{قتاأ} = \frac{١}{\text{جاأ}} \Leftarrow$ قتاأ × جاأ = ١

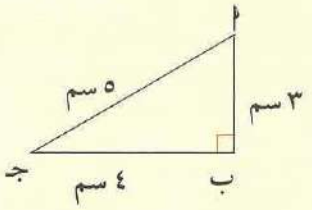
ومقلوب جتاأ هو $\frac{١}{\text{جتاأ}}$ ويسمى قاطع زاوية أ ويرمز إليه بالرمز قاأ وبالإنكليزية (sec) Secant.

قا أ = $\frac{١}{\text{جتا أ}}$: جتا أ ≠ ٠

قا أ = $\frac{١}{\text{جتا أ}}$ ⟸ قا أ × جتا أ = ١

مثال (٣)

في الشكل المقابل أوجد جاجـ، جتاجـ، قاجـ، قتاجـ.



الحل:

جاجـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٣}{٥}$

جتاجـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٤}{٥}$

قاجـ = $\frac{١}{\text{جتاجـ}}$ = $\frac{١}{\frac{٤}{٥}}$ = $\frac{٥}{٤}$

قتاجـ = $\frac{١}{\text{جاجـ}}$ = $\frac{١}{\frac{٣}{٥}}$ = $\frac{٥}{٣}$

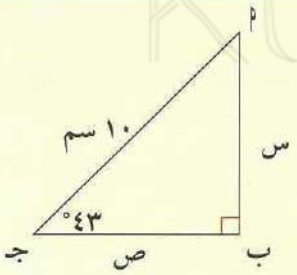
حاول أن تحل

٣ أ ب جـ مثلث فيه: أ ب = ٧ سم، ب جـ = ٢٤ سم، أ جـ = ٢٥ سم.

أثبت أن Δ أ ب جـ قائم الزاوية، ثم أوجد جا أ، جتا أ، قا أ، قتا أ، جاجـ، جتاجـ، قاجـ، قتاجـ.

مثال (٤) استخدام الآلة الحاسبة

في الشكل المجاور، أوجد س، ص



الحل:

جا (٤٣°) = $\frac{\text{س}}{١٠}$

س = ١٠ × جا (٤٣°)

تستخدم الآلة الحاسبة بالضغط على المفاتيح على الشكل التالي:

10	×	sin	43	=

يظهر 6.819983 ويساوي تقريبًا ٦,٨ سم.

جتا (٤٣°) = $\frac{\text{ص}}{١٠}$

ص = ١٠ × جتا (٤٣°)

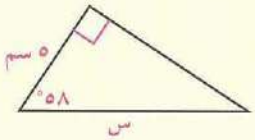
تستخدم الآلة الحاسبة بالضغط على المفاتيح على الشكل التالي:

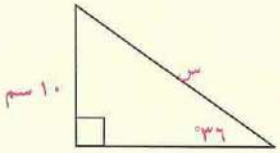
10	×	cos	43	=

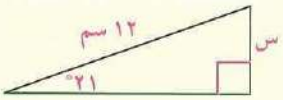
يظهر 7.313537 ويساوي تقريبًا ٧,٣ سم.

حاول أن تحل

٤ أوجد قيمة س لأقرب جزء من عشرة.

أ


ب


جـ


كان نيكولاي كوبرنيك **Nicolaus Copernicus** (١٤٧٣م - ١٥٤٣م) عالمًا رياضيًّا وفلكيًّا، درس الطب وألمّ بمعظم العلوم في عصره. يعتبر أول من صاغ نظرية مركزية الشمس وأن الأرض جرم يدور في فلكها.

يعتبر كوبرنيك مؤسس الفلك الحديث.

وحدة الفلك (و.ف أو **AU**) تمثل متوسط المسافة بين الأرض والشمس وهي تساوي تقريبًا ١٤٩٦٠٠٠٠٠ كم.

مثال (٥) تطبيقات حياتية (إثرائي)

هل تعلم؟

١ ميل ≃ ١,٦٠٩ كم

في الشكل المقابل، إذا كان ق($\hat{أ}$) = ٢٢,٣°،

أوجد بعد كوكب عطارد عن الشمس علمًا بأن بعد الأرض عن الشمس يساوي ١ وحدة الفلك ١**AU**.

الحل:

بفرض أن : س = بعد كوكب عطارد عن الشمس.

ل = بعد الأرض عن الشمس

فيكون:

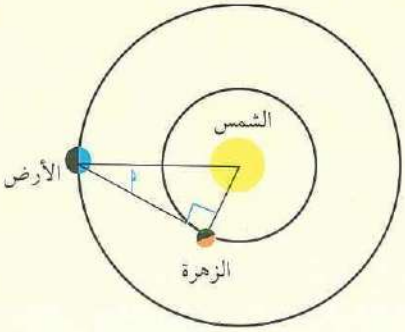
جا (٢٢,٣°) = $\frac{س}{ل}$.

∴ بعد عطارد عن الشمس = س = ل × جا (٢٢,٣°) .

≃ ١ × ٠,٣٨ ≃ ٠,٣٨ **AU**

حاول أن تحل

٥ كما في التطبيق السابق، أوجد بعد كوكب الزهرة عن الشمس علمًا بأن ق($\hat{أ}$) = ٤٦,١°



٥ إيجاد قياس زاوية علم جيبها او جيب تمامها

تريد معرفة قياس زاوية، تبين العلاقة التالية الترابط بين قياس الزاوية ونسبها المثلثية.

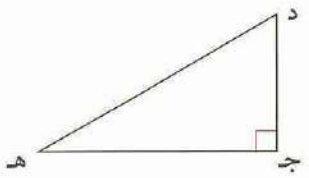
إذا كان جاد = ص فإننا نستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياس الزاوية د

ننقر على : [ص] [Sin] [shift] لإيجاد د

وإذا كان جتاد = س فإننا نستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياس الزاوية د

غالبًا ما تستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياسات هذه الزوايا.

ننقر على: [س] [Cos] [shift] لإيجاد د



مثال (٦)

في الشكل المقابل، احسب ق(ل̂) لأقرب درجة.

الحل:

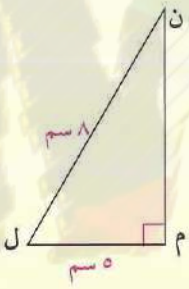
جتا ل = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$.

جتا ل = $\frac{٥}{٨}$ باستخدام النسب المثلثية لجيب التمام

[shift] [Cos] [(] [5] [÷] [8] [)] [=]

يظهر [51.317813]

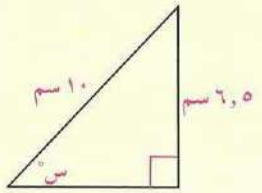
وبالتالي ق(ل̂) ≃ ٥١°



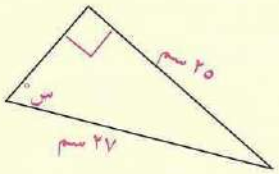
حاول أن تحل

٦ أوجد قيمة س° لأقرب درجة.

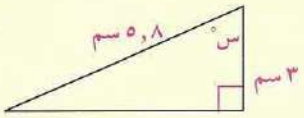
أ



ب



جـ



٢-٣

ظل الزاوية ومقلوبه
Tangent and Cotangent of an Angle

سوف تتعلم

- ما هو ظل الزاوية
- إيجاد قياس الزاوية إذا علم ظلها
- مقلوب ظل الزاوية
- حل المثلث قائم الزاوية

عمل تعاوني

سنعمل في مجموعات صغيرة، نختار قياسات الزوايا
١٠°، ٢٠°، ٣٠°، ...، ٨٠°
كل طالب في مجموعته يرسم مثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب، ويختار إحدى الزوايا من المثلث بحيث تنتمي إلى مجموعة قياسات الزوايا. يحسب كل طالب أطوال أضلاع المثلث باستخدام المسطرة لأقرب ملليمتر، ويستخدم الآلة الحاسبة في حساب النسب:

$\frac{\text{مقابل الزاوية جـ}}{\text{المجاور للزاوية جـ}}$ لأقرب رقمين عشريين

في المثلث قائم الزاوية نسبة طول الضلع المقابل لزاوية حادة إلى طول الضلع المجاور للزاوية نفسها تسمى ظل الزاوية ونرمز إليها بالرمز ظاجـ وبالإنكليزية (Tangent (tan.

أي أن $\text{ظل الزاوية} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

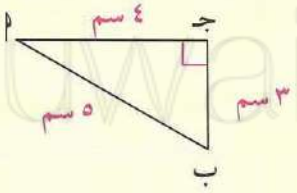
مثلًا في الشكل المقابل ظاجـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

قارن بين ظا ١٠°، ظا ٢٠°، ظا ٣٠°، ظا ٤٠°، ... ماذا تستنتج؟

من العمل التعاوني السابق، يتبيّن أن قيمة ظاجـ تزداد كلما زاد قياس الزاوية جـ بين ٠°، ٩٠°.

مثال (١)

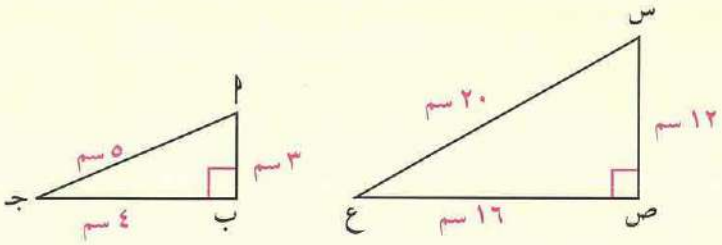
في الشكل المقابل أوجد ظل الزاوية أ، ظل الزاوية ب.



الحل: ظاأ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{٣}{٤}$

ظاب = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٤}{٣}$

حاول أن تحل



١ أ استعن بالمثلثين المجاورين في إيجاد:
$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}}$ ، $\frac{\text{أ جـ}}{\text{س ع}}$ ، $\frac{\text{جـ ب}}{\text{ع ص}}$. ماذا تستنتج؟

ب هل ظاس = ظاأ، ظاع = ظاجـ؟ ماذا تستنتج؟

جـ هل هذا صحيح بالنسبة إلى النسب: جاس، جاأ وكذلك جتاس، جتاأ؟ ماذا تستنتج؟

مثال (٢) تطبيقات حياتية

أراد أحد أعضاء فريق الكشافة قياس المسافة بين قمتي جبلين، فوقف على قمة أحد الجبلين عند النقطة أ وحدّد علامة مميزة أمامه على قمة الجبل الآخر ولتكن ب، ثم اتبع التالي:

١ وضع مؤشر البوصلة باتجاه العلامة المميزة ب وحدّد قراءة المؤشر.

٢ سار مسافة ٥٠ مترًا على خط مستقيم عمودي على الخط المستقيم الواصل بين القمتين.

٣ وضع مؤشر البوصلة مرة ثانية في اتجاه العلامة المميزة وحدّد قراءة المؤشر.

٤ باستخدام قراءتي المؤشر وجد أن: ق(جـ) = ٨٦°.

استخدم ظل الزاوية في حساب المسافة بين قمتي الجبلين عند النقطة التي بدأ منها القياس.

الحل: باستخدام ظل الزاوية

$$\text{ظا}(٨٦°) = \frac{\text{أب}}{٥٠}$$

$$\text{أب} = ٥٠ \times \text{ظا}(٨٦°)$$

تستخدم الآلة الحاسبة

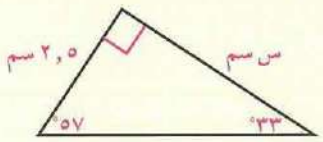
50 × TAN 86 =

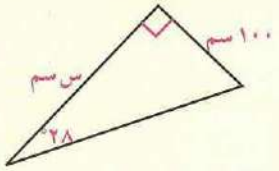
يظهر 715.03331

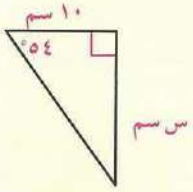
إذًا، المسافة بين قمتي الجبلين هي ٧١٥ مترًا تقريبًا.

حاول أن تحل

٢ أوجد قيمة س لأقرب جزء من عشرة.

أ


ب


جـ


مثال (٣)

الهرم القائم المقابل قاعدته مربعة الشكل. أوجد طول ارتفاعه المائل ل إذا كان قياس الزاوية θ يساوي ٦٠°.

الحل:

في Δن أ ب المتطابق الضلعين

$\overline{\text{ن هـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

∴ هـ أ = هـ ب = ٧٥ م

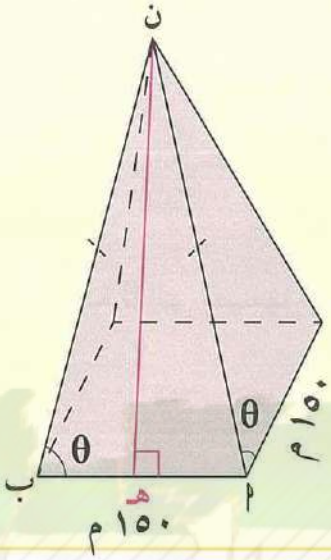
في Δن هـ ب القائم الزاوية هـ

ظا θ = $\frac{\text{ل}}{٧٥}$

ظا ٦٠° = $\frac{\text{ل}}{٧٥}$

ل = ٧٥ × ظا ٦٠° ≃ ١٣٠ مترًا.

طول الارتفاع المائل ≃ ١٣٠ مترًا.



تذكر:
الارتفاع المائل:
هو العمود المرسوم من رأس الهرم إلى أحد أضلاع قاعدته.

١ - إيجاد قياس زاوية إذا علم ظلها: Finding the Measure of an Angle Knowing its Tangent

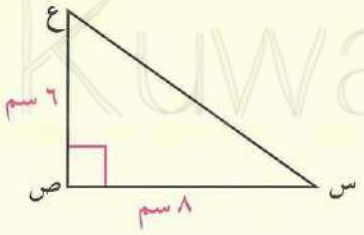
قد تعلم ظل زاوية وتريد معرفة قياس هذه الزاوية. تبين العلاقة التالية الترابط بين قياس الزاوية ونسبتها المثلثية:

إذا كان ظا θ = س فإننا نستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياس الزاوية θ

ننقر على: [س] [tan] [shift] لإيجاد θ

مثال (٤)

في الشكل المقابل أوجد ق(س̂) في Δس ص ع.



الحل:

ظاس = $\frac{٦}{٨}$ = ٠,٧٥

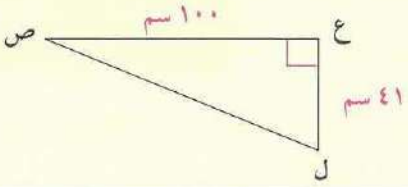
لإيجاد ق(س̂) تستخدم الآلة الحاسبة.

[Shift] [TAN] [0.75] [=]

يظهر [36.86989765] [°'''] يظهر [36° 52′ 11.63″]

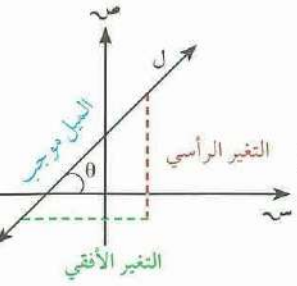
إذًا ق(س̂) ≃ ١٢″ ٥٢′ ٣٦°.

حاول أن تحل

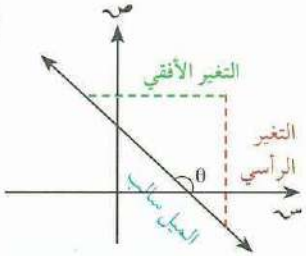


٣ أوجد ق(س̂) حيث ظاس = ٠,٥

٤ في الشكل المقابل، أوجد ق(ل̂) لأقرب درجة.



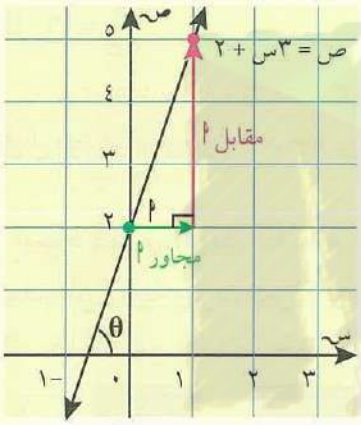
إذا كان المستقيم ل يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن θ تسمى زاوية ميل المستقيم ويكون طاθ = ميل المستقيم = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$



إذا كانت معادلة المستقيم: ص = م س + ب فإن ميل المستقيم = م.

مثال (٥)

في الشكل المقابل: احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة θ التي يصنعها المستقيم ص = ٣س + ٢ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.



الحل:

من الشكل ق(θ) = ق(أ) . زاويتان متناظرتان.

ظاأ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٣}{١} = ٣$

Shift | TAN | 3 | =

يظهر 71.565051 | ° ' " | يظهر 71° 33′ 54.18″

ق(أ) ≃ ٥٤″ ٣٣′ ٧١°

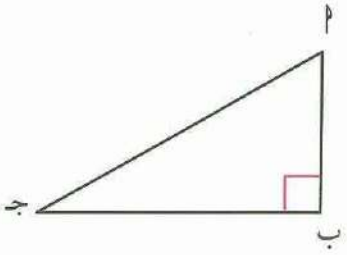
حاول أن تحل

٥ احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم ص = $\frac{١}{٤}$ س + ٦ مع الاتجاه الموجب للمحور السيني.

٢- مقلوب ظل الزاوية (ظتا): cot (Cotangent)

مقلوب ظل الزاوية أ = $\frac{١}{\text{ظاأ}}$ ويسمى ظل تمام الزاوية أ ويرمز إليه بالرمز ظتاأ وبالإنكليزية (cot) Cotangent.

ظتاأ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}}$

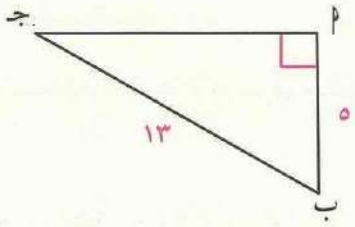


ويكون ظتاأ = $\frac{١}{\text{ظاأ}}$: ظاأ ≠ ٠

ظاأ × ظتاأ = ١

مثال (٦)

في الشكل المقابل أوجد ظاجـ، ظتاجـ.



الحل:

من نظرية فيثاغورث $(\text{أجـ})^{٢} = (١٣)^{٢} - (٥)^{٢} = ١٤٤$،

أجـ = ١٢

ظاجـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٥}{١٢}$ ، ظتاجـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{١٢}{٥}$

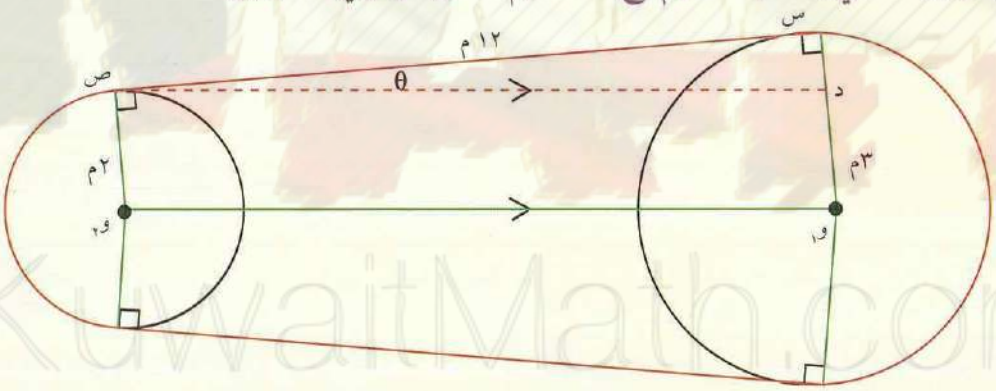
ملاحظة:
عند عدم ذكر وحدة الطول في رسم الأشكال يمكنك اعتبار أي وحدة طول.

حاول أن تحل

٦ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أب = ٧ سم، أ جـ = ٢٥ سم. أوجد: ظاجـ، ظتاجـ.

مثال (٧)

يلتف حزام حول بكرتين أسطوانتي الشكل. طول نصف قطر البكرة الكبرى ٣ م وطول نصف قطر الصغرى ٢ م.
نريد معرفة قياس الزاوية θ التي يصنعها الحزام مع المستقيم المار بمركزي الدائرتين.



الحل:

نرسم $\overline{\text{د ص}}$ // $\overline{\text{و١ و٢}}$

الشكل د و١ و٢ ص متوازي أضلاع

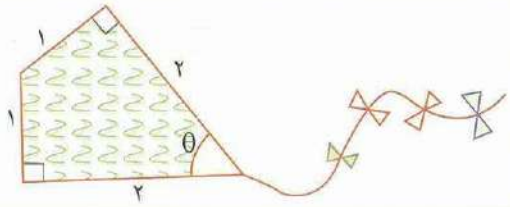
س د = س و١ − د و١ = ٣ − ٢ = ١ م

في المثلث د س ص قائم الزاوية:

ظθ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{١}{١٢}$

ق(θ̂) = $4°45'49.11''$

قياس الزاوية θ يساوي ٤٩″٤٥′٤° تقريبًا.



حاول أن تحل

٧ يبيّن الشكل المقابل طائرة ورقية. أوجد قياس الزاوية θ.

٢ – ٤

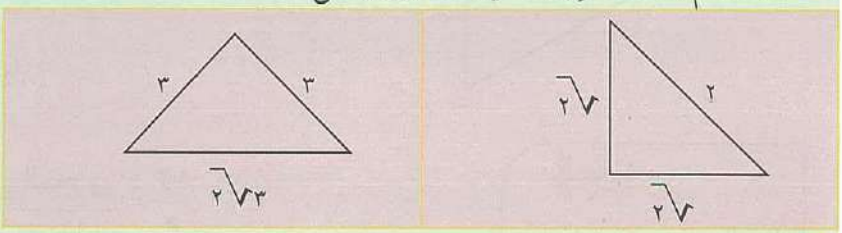
النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة
Trigonometric Ratios for Some Particular Angles

سوف تتعلم

- النسب المثلثية للزوايا ٣٠°، ٤٥°، ٦٠°.
- متطابقات مثلثية
- الزاوية الربعية

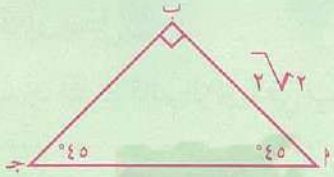
دعنا نفكر ونتناقش

١ استخدم المنقلة لإيجاد قياسات زوايا كل مثلث.



٢ قارن بين أطوال الأضلاع.

٣ استخدم نظرية فيثاغورث لإثبات ما حصلت عليه في ٢ .



المثلث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°.

في المثلث أب جـ، قياس كل من الزاويتين الحادتين يساوي ٤٥°.

المثلث أب جـ قائم الزاوية ب̂ متطابق الضلعين، ويسمى أحيانًا **المثلث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°.**

إذا كان طول كل من ضلعي الزاوية القائمة يساوي س، فإن طول الوتر = س √٢

في هذا المثلث جا٤٥° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{س}}{\text{س}\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

كذلك جتا٤٥° = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{س}}{\text{س}\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

ظا٤٥° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{س}}{\text{س}} = ١$

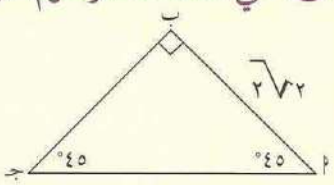
جا٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

جتا٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

ظا٤٥° = ١

مثال (١)

أ في المثلث المرسوم، أوجد طول الوتر $\overline{\text{أجـ}}$.



الحل:

جتاأ = $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$

جتا٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}\,٢}{\text{أجـ}}$

أجـ = $\frac{\sqrt{٢}\,٢}{\text{جتا}٤٥°} = \frac{\sqrt{٢}\,٢}{\frac{\sqrt{٢}}{٢}} = ٤$

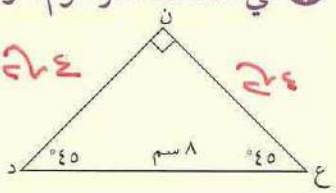
طول الوتر $\overline{\text{أجـ}}$ = ٤ سم.

طريقة أخرى:

أجـ = ٢√٢ × √٢ = ٤

∴ أجـ = ٤ سم

ب في المثلث المرسوم، أوجد طول الضلع $\overline{\text{ع ن}}$.



الحل:

جتاع = $\frac{\text{ع ن}}{\text{ع د}}$

جتا٤٥° = $\frac{\text{ع ن}}{٨}$

ع ن = ٨ × جتا٤٥° = ٨ × $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ = ٤√٢

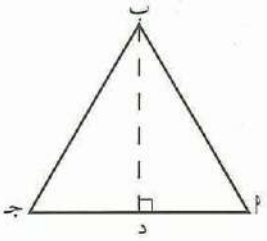
طول الضلع $\overline{\text{ع ن}}$ ≃ ٥,٦٥٦ سم.

حاول أن تحل

١ أ أب جـ مثلث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°. أوجد طول الوتر إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة = ٥ سم.

ب الحساب الذهني: إذا كان ظا جـ = ١ فكيف توجد ق (جـ̂) دون استخدام الآلة الحاسبة؟

المثلث ثلاثيني ستيني 30° – 60° triangle



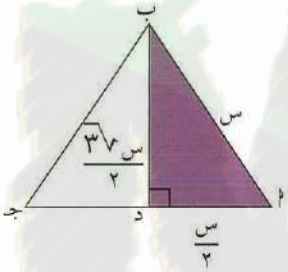
∵ Δ أب جـ مثلث متطابق الأضلاع.

∵ $\overline{\text{ب د}}$ ⊥ $\overline{\text{أجـ}}$.

∴ $\overline{\text{ب د}}$ هي منصف الزاوية أب̂جـ.

ومنه ق(أب̂د) = $\frac{٦٠°}{٢}$ = ٣٠°، ق(أ̂) = ٦٠°

∴ أب د مثلث ثلاثيني ستيني (٣٠°، ٦٠°، ٩٠°).



إذا كان طول الضلع $\overline{\text{أجـ}}$ يساوي س فإن أد = $\frac{س}{٢}$

وباستخدام نظرية فيثاغورث في المثلث أب د نحصل على ب د = $\frac{س\sqrt{٣}}{٢}$.

كذلك $\overline{\text{ب د}}$ هي المنصف العمودي للقطعة $\overline{\text{أجـ}}$.

جا أ̂ = جا ٦٠° = $\frac{\text{ب د}}{\text{أب}}$ = $\frac{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}}{س}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا أ̂ = جتا ٦٠° = $\frac{\text{أد}}{\text{أب}}$ = $\frac{\frac{س}{٢}}{س}$ = $\frac{١}{٢}$

ظا أ̂ = ظا ٦٠° = $\frac{\text{ب د}}{\text{أد}}$ = $\frac{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{س}{٢}}$ = $\sqrt{٣}$

جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

كذلك جا ب̂ = جا ٣٠° = $\frac{\text{أد}}{\text{أب}}$ = $\frac{\frac{س}{٢}}{س}$ = $\frac{١}{٢}$

جتا ب̂ = جتا ٣٠° = $\frac{\text{ب د}}{\text{أب}}$ = $\frac{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}}{س}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا ب̂ = ظا ٣٠° = $\frac{\frac{س}{٢}}{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

لاحظ أن جا ٦٠° = جتا ٣٠°

جتا ٦٠° = جا ٣٠°

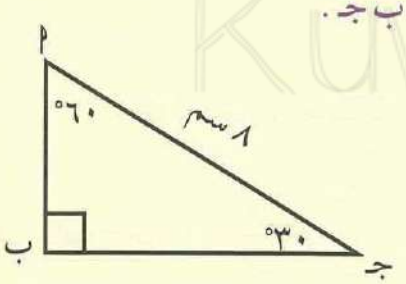
باستخدام الحاسبة يمكنك إيجاد كل من الجيب، جيب التمام والظل لكل زاوية ربعية. والجدول التالي يبيّن النسب المثلثية للزوايا الخاصة والربعية.

الزاوية هـ		جاهـ	جتاهـ	ظاهـ
القياس الستيني	القياس الدائري			
٠°	٠ د	٠	١	٠
٣٠°	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$
٤٥°	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	١
٦٠°	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$
٩٠°	$\frac{\pi}{٢}$	١	٠	غير معرّف
١٨٠°	π	٠	١-	٠
٢٧٠°	$\frac{٣\pi}{٢}$	١-	٠	غير معرّف
٣٦٠°	٢π	٠	١	٠

هل تعلم؟
وضعت جداول النسب المثلثية منذ أكثر من ٢٠٠٠ عام لتستخدم في علم الفلك.

مثال (٢)

أ ب جـ مثلث ثلاثيني ستيني. طول الوتر = ٨ سم. أوجد طول كل من الضلعين $\overline{أب}$، $\overline{ب جـ}$.



الحل:

في Δ أ ب جـ ، جاجـ = جا ٣٠° = $\frac{أب}{أجـ}$

$\frac{١}{٢} = \frac{أب}{٨}$

أب = ٤

جتاجـ = جتا(٣٠°) = $\frac{ب جـ}{أجـ}$

$\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{ب جـ}{٨}$

ب جـ = $٤\sqrt{٣}$

طول الضلع $\overline{أب}$ = ٤ سم وطول الضلع $\overline{ب جـ}$ = $٤\sqrt{٣} \simeq ٦,٩$ سم.

حاول أن تحل

٢ في مثلث ثلاثيني ستيني إذا كان طول الضلع الأصغر = $\sqrt{٦}$ سم، فأوجد طول الضلعين الآخرين.

مثال (٣) تطبيق لوحة إرشادية لمدرسة

تشير إحدى لوحات السير على وجود مدرسة. اللوحة على شكل مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٦٠ سم. أوجد مساحة هذه اللوحة.

الحل:

طول العمود النازل من رأس مثلث متطابق الأضلاع إلى القاعدة = ارتفاع المثلث = طول الضلع × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= ٦٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ≃ ٥٢ سم.

مساحة اللوحة = $\frac{\text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{٢}$ = $\frac{٦٠ \times ٥٢}{٢}$ = ١٥٦٠ سم^{٢}.

مساحة اللوحة تساوي حوالى ١٥٦٠ سم^{٢}.

حاول أن تحل

٣ معيّن يتكوّن من مثلثين متطابقي الأضلاع. أوجد مساحة المعين إذا كان طول ضلع المثلث = ٨ سم.

مثال (٤) تطبيقات حياتية

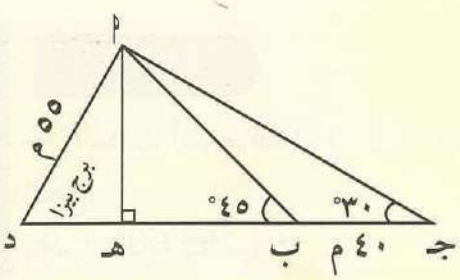
برج بيزا معلم أثري مشهور في إيطاليا. كان ارتفاع البرج ٥٥ مترًا قبل ميله نحو الجنوب. ($\overline{أد}$ في الرسم).

شاهد مراقبان موجودان في النقطتين ب، جـ قمة البرج بزاويتين قياساهما ٤٥°، ٣٠° على الترتيب.

أ عبّر عن طول كل من $\overline{هـ ب}$، $\overline{هـ جـ}$ بدلالة طول $\overline{أهـ}$.

ب أوجد $\overline{أهـ}$ علمًا أن المسافة بين النقطتين ب، جـ تساوي ٤٠ مترًا.

جـ نتيجة للأشغال المهمة على البرج بين العامين ١٩٩٣ - ٢٠٠١ تقلص البعد بين النقطتين هـ، د من ٥,٤ مترًا إلى ٤ أمتار. ما قياس ($\hat{أدهـ}$) التي يصنعها البرج مع الأرض قبل الأشغال؟ وبعد الأشغال؟



الحل: أ في المثلث أهـ ب: ظا ٤٥° = $\frac{\overline{هـأ}}{\overline{هـ ب}}$ = ١ ومنه هـ ب = هـأ

في المثلث أهـ جـ: ظا ٣٠° = $\frac{\overline{هـأ}}{\overline{هـ جـ}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنه هـ جـ = $\sqrt{٣}$ هـأ

ب هـ جـ = هـ ب + ب جـ

$\sqrt{٣}$ أهـ = هـأ + ٤٠ أي ($\sqrt{٣}$ - ١) أهـ = ٤٠

أهـ = $\frac{٤٠}{\sqrt{٣} - ١}$ ≃ ٥٤,٦٤

جـ قبل الأشغال: جتا($\hat{أدهـ}$) = $\frac{٥,٤}{٥٥}$ ، ق($\hat{أدجـ}$) ≃ ٥٦″ ٢١′ ٨٤°

بعد الأشغال: جتا($\hat{أدهـ}$) = $\frac{٤}{٥٥}$ ، ق($\hat{أدجـ}$) ≃ ٤٦″ ٤٩′ ٨٥°

٢ – ٥

حل المثلث قائم الزاوية
Solving Right Triangle

سوف تتعلم

- إيجاد قياسات زوايا مثلث قائم.
- إيجاد أطوال أضلاع مثلث قائم.

عمل تعاوني

استخدم برنامج رسم هندسي على الحاسوب.

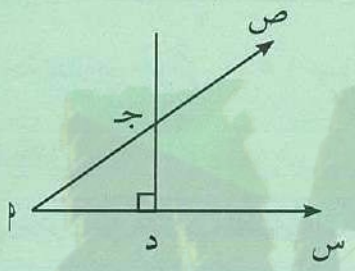
ارسم شعاعين $\overleftarrow{\text{أس}}$ ، $\overleftarrow{\text{أص}}$ يشكلان زاوية حادة س $\hat{\text{أ}}$ ص.

من نقطة د على $\overleftarrow{\text{أس}}$ ارسم شعاعًا متعامدًا مع $\overleftarrow{\text{أس}}$ يقطع $\overleftarrow{\text{أص}}$ في جـ.

بتحريك النقطة د تتحرك تبعًا لها النقطة جـ محافظًا على جـ$\hat{\text{د}}$أ قائمة، يكبر المثلث أد جـ أو يصغر. وبتحريك النقطة ص يكبر أو يصغر قياس الزاوية $\hat{\text{أ}}$.

١ – أوجد قياس الزاوية $\hat{\text{أ}}$.

٢ – أوجد أطوال أضلاع المثلث أدجـ.



احسب النسبة $\frac{\text{دجـ}}{\text{أجـ}}$ $\left(\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية } \hat{\text{أ}}}{\text{الوتر}}\right)$

حرّك $\overleftarrow{\text{أص}}$ بحيث يتغيّر قياس الزاوية $\hat{\text{أ}}$.

ما الذي تلاحظه حول النسبة $\frac{\text{دجـ}}{\text{أجـ}}$ عندما يتغيّر قياس الزاوية $\hat{\text{أ}}$.

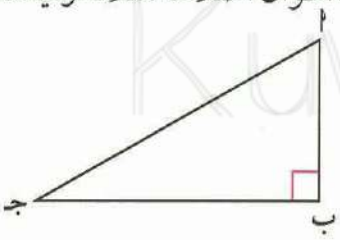
من أي قيمة تقترب هذه النسبة عندما يقترب قياس $\hat{\text{أ}}$ من ٠°؟ ومن ٩٠°؟

٣ – اصنع جدولًا يبيّن قيم الزاوية $\hat{\text{أ}}$ والنسبة $\left(\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية } \hat{\text{أ}}}{\text{الوتر}}\right)$ يتضمن القياسات ١٠°، ٢٠°، ٣٠°، ... ٨٠° للزاوية $\hat{\text{أ}}$.

٣ – حل المثلث قائم الزاوية Solving Right Triangle

نعلم أن للمثلث ستة عناصر هي أضلاعه الثلاثة وزواياه الثلاث. حلّ المثلث يعني إيجاد أطوال أضلاعه الثلاثة وقياسات زواياه الثلاث. سيقتصر عملنا في هذا البند على المثلث قائم الزاوية.

في الشكل المقابل المثلث أب جـ قائم الزاوية في ب.



الأضلاع: $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$

الزوايا: $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ ، $\hat{\text{جـ}}$

غالبًا ما تعطى ثلاثة عناصر في المثلث أحدها على الأقل طول أحد الأضلاع ويتعين علينا إيجاد الباقي.

مثال (١)

حلّ المثلث أب جـ القائم في $\hat{\text{ب}}$ إذا علم أن: أب = ٤ سم، ب جـ = ٣ سم

الحل:

بتطبيق نظرية فيثاغورث

$(\text{أجـ})^2 = (\text{أب})^2 + (\text{ب جـ})^2$

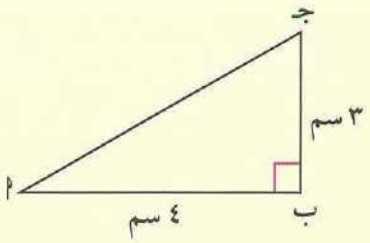
أجـ = ٥ سم

ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٣}{٤} = ٠,٧٥$

استخدم حاسبة الجيب لإيجاد ق(أ̂).

Shift	TAN	0.75	=	36.869897

ق(أ̂) ≃ ٣٧°. ق(جـ̂) ≃ ٩٠° − ٣٧° ≃ ٥٣°



حاول أن تحل

١ حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في جـ̂ حيث: ب جـ = ١٥ سم، أ جـ = ١٢ سم

مثال (٢)

حلّ المثلث أ ب جـ القائم في (جـ̂) إذا علم أن: أ ب = ٤٠ سم، ق(ب̂) = ٢٥°

الحل:

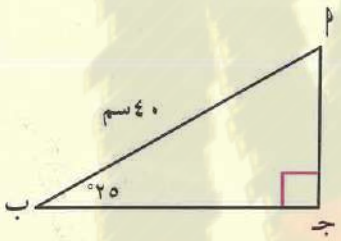
ق(أ̂) = ٩٠° − ٢٥° = ٦٥°

جتا(ب̂) = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ ، جتا (٢٥°) = $\frac{\text{ب جـ}}{٤٠}$

ب جـ = ٤٠ × جتا(٢٥°) ≃ ٣٦,٢٥ سم

جا ب = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$ ، جا (٢٥°) = $\frac{\text{أ جـ}}{٤٠}$

أ جـ = ٤٠ جا (٢٥°) ≃ ١٧ سم



حاول أن تحل

٢ حل المثلث أ ب جـ القائم في جـ حيث: أ جـ = ٢٠ سم، ق(ب̂) = ٧٥°

مثال (٣)

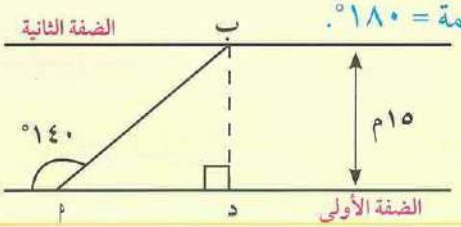
حاول أحد السباحين عبور النهر انطلاقًا من النقطة أ الموضحة بالشكل المرسوم جرفه التيار ووصل إلى النقطة ب.

ما المسافة التي قطعها السباح؟

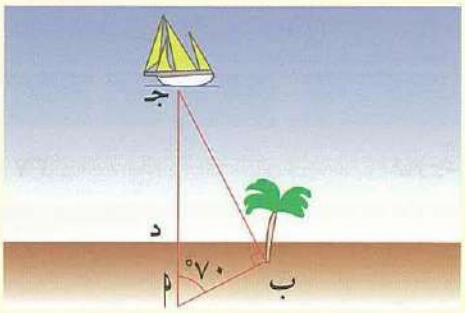
الحل: ليكن ب د البعد العمودي يبيّن الضفتين

في المثلث أ ب د، ق(د أ̂ ب) = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠° قياس الزاوية المستقيمة = ١٨٠°.

جا(أ) = $\frac{\text{ب د}}{\text{أ ب}}$ جا(٤٠°) = $\frac{١٥}{\text{أ ب}}$ بالتعويض



أب = $\frac{١٥}{جا(٤٠°)}$ ≃ ٢٣,٣ أي أن السباح قطع حوالى ٢٣,٣ مترًا.



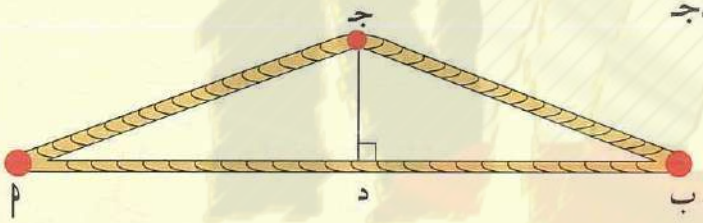
حاول أن تحل

٣ في الشكل المقابل إذا كان، أد = ١٠٠ متر، أب = ١٥٠ متر.
أوجد:
(أ) البعد بين الزورق والشجرة (ب) البعد بين الزورق والشاطىء

مثال (٤)

حبل طوله ١٠ أمتار مثبت في مسمارين عند النقطتين أ، ب. حبل آخر طوله ١١ مترًا مثبت في نفس النقطتين، شُدّ من وسطه (النقطة جـ) إلى أعلى.

أ أوجد ق(د $\hat{أ}$ جـ) ب أوجد طول $\overline{دجـ}$



الحل:

أد = $\frac{أب}{٢}$ = ٥ أمتار.

أجـ = $\frac{١١}{٢}$ = ٥,٥ أمتار.

جتا أ = $\frac{أد}{أجـ}$ = $\frac{٥}{٥,٥}$ ≃ ٠,٩١

∴ ق($\hat{أ}$) ≃ ٢٤° ٢٩′ ٤١″ باستخدام الآلة الحاسبة

ق(د $\hat{أ}$ جـ) ≃ ٢٤° ٢٩′ ٤١″.

ب باستخدام نظرية فيثاغورث (جـ د)^٢ + (أد)^٢ = (جـ أ)^٢

أي (جـ د)^٢ = (جـ أ)^٢ − (أد)^٢

(جـ د)^٢ = (٥,٥)^٢ − ٥^٢ = ٥,٢٥

∴ جـ د = $\sqrt{٥,٢٥}$ ≃ ٢,٣

طول القطعة $\overline{جـ د}$ يساوي حوالي ٢,٣ متر.

حاول أن تحل

٤ في المثال السابق أوجد ق($\hat{أ}$) إذا كان طول الحبل من أ إلى ب والمار بالنقطة جـ يساوي ١٢ مترًا.

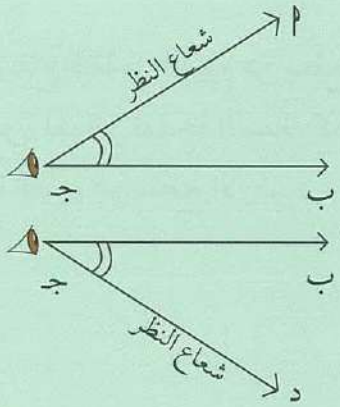
٢-٦

زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض
Angles of Elevation and Angles of Depression

سوف تتعلم

- زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض
- استخدام زوايا الارتفاع والانخفاض في حل مسائل حياتية

دعنا نفكر ونتناقش



١ - إذا رصد شخص (جـ) نقطة أ أعلى من مستوى نظره الأفقيّ $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ فإن الزاوية التي يحددها $\overleftarrow{\text{جـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ تسمى **زاوية ارتفاع أ** عن المستوى الأفقي لنظر الشخص جـ.

٢ - وإذا رصد الشخص جـ نقطة د أدنى من مستوى نظره الأفقي $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ فإن الزاوية التي يحددها $\overleftarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ تسمّى **زاوية انخفاض د** عن المستوى الأفقي لنظر الشخص جـ.

ملاحظة:

إذا كان أ شخصًا موجودًا على سطح الأرض، وكان ب شخصًا موجودًا في منطاد مرتفع عن سطح الأرض، ونظر كلّ منهما إلى الآخر فإنّ:

$\hat{\theta}_1$ هي زاوية ارتفاع ب عن المستوى الأفقيّ لنظر (أ).

$\hat{\theta}_2$ هي زاوية انخفاض (أ) عن المستوى الأفقيّ لنظر (ب)

ونلاحظ في هذه الحالة أنّ:

زاوية الارتفاع ($\hat{\theta}_1$) = زاوية الانخفاض ($\hat{\theta}_2$).

٣ -يقف بدر عند قمة التل ويقف ناصر عند الكشاف ويقف أحمد عند الكوخ.

صف كلّ زاوية في الشكل عندما ينظر:

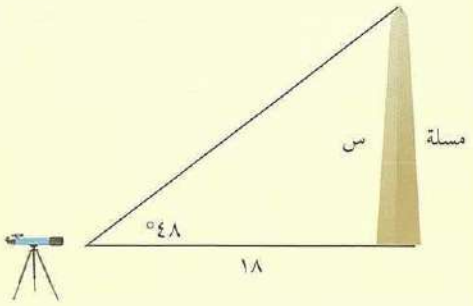
(أ) بدر إلى ناصر

(ب) ناصر إلى أحمد

(جـ) ناصر إلى بدر

مثال (١)

لقياس طول إحدى المسلات قام مرشد سياحيّ برصد قمة المسلة من خلال جهاز للرصد، فوجد أنّ قياس زاوية الارتفاع ٤٨°. إذا كان الجهاز يبعد عن قاعدة المسلة مسافة ١٨ م فاحسب ارتفاع المسلة.



الحل:

$$\text{ظا}(٤٨)° = \frac{\text{س}}{١٨}$$

$$\text{س} = ١٨ \times \text{ظا}(٤٨)° \simeq ٢٠$$

ارتفاع المسلة: ٢٠ م تقريبًا

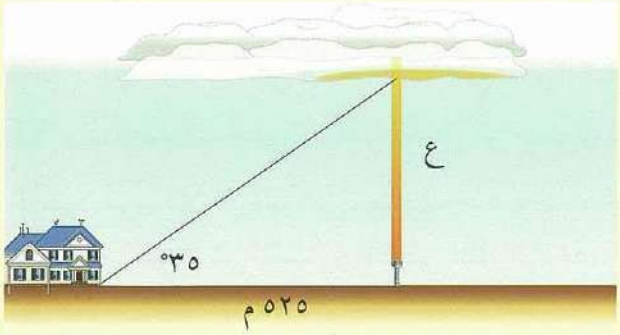
حاول أن تحل

١ من نقطة على سطح الأرض تبعد ١٠٠ متر عن قاعدة مئذنة، وجد أن قياس زاوية ارتفاع المئذنة ١٢° . أوجد ارتفاع المئذنة عن سطح الأرض.

مثال (٢)

علم الأرصاد الجوية: لمعرفة ارتفاع طبقة من الغيوم عن سطح الأرض يستخدم علماء الفلك قياس زاوية الارتفاع في اللحظة التي يصل فيها البرق إلى الأرض. (يمكن نمذجة المسألة كما في الصورة).

أوجد قيمة تقريبية لارتفاع طبقة الغيوم عن سطح الأرض.



الحل:

$$\text{ظا}\,(٣٥°) = \frac{\text{ع}}{٥٢٥}$$

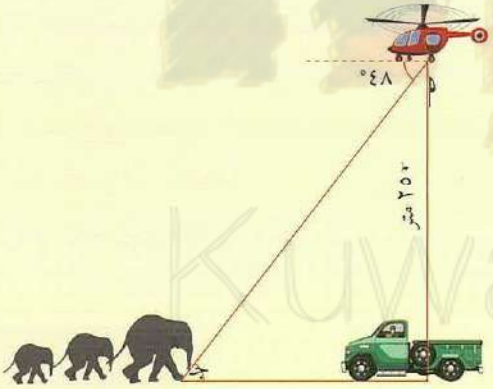
$$\text{ع} = ٥٢٥ \times \text{ظا}\,(٣٥°)$$

$$\text{ع} \simeq ٣٦٧,٦ \text{ مترًا}$$

مثال (٣)

تحلق مروحية فوق محمية طبيعية على ارتفاع ٢٥٠ مترًا وتواكبها على الأرض سيارة حرس المحمية. شاهد ربان المروحية قطيعًا من الفيلة بزاوية انخفاض قياسها ٤٨°. ما المسافة بين المروحية والقطيع في تلك اللحظة علمًا بأن السيارة مباشرة تحت المروحية؟

الحل:



لتكن أ موقع المروحية، ب موقع السيارة، جـ موقع القطيع.

$$\text{جاجـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\text{جا}٤٨° = \frac{٢٥٠}{\text{أجـ}}$$

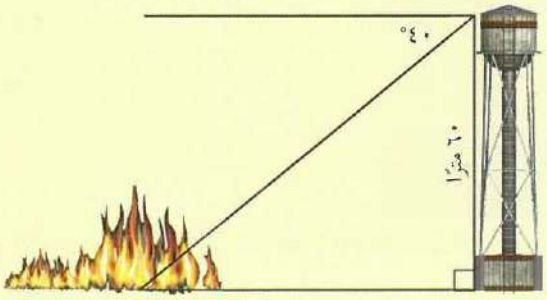
$$\text{أجـ} = \frac{٢٥٠}{\text{جا}٤٨°}$$

$$\text{أجـ} \simeq ٣٣٦,٤ \text{ مترًا}$$

يبعد قطيع الفيلة حوالى ٣٣٦ مترًا عن المروحية.

حاول أن تحل

٢ يقف مراقب فوق برج ارتفاعه ٦٠ مترًا. شاهد حريقًا بزاوية انخفاض قياسها ٤٠°. ما المسافة بين قاعدة برج المراقبة وموقع الحريق؟

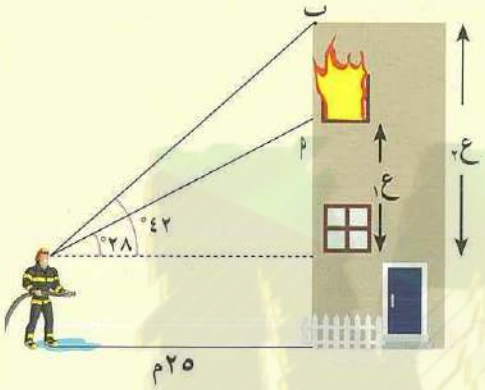


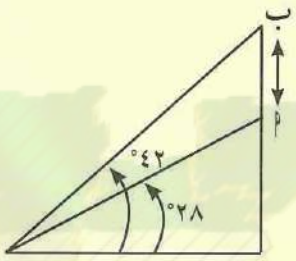
مثال (٤) (إثرائي)

شاهد رجل إطفاء وهو يقف على سطح الأرض ألسنة النيران تنبعث من إحدى النوافذ القريبة من سطح البناء. وجد أن قياس زاوية الارتفاع من مستوى نظره إلى القاعدة السفلية للنافذة (أ) حيث تندلع النيران هي ٢٨°، وزاوية الارتفاع من مستوى نظره إلى سطح البناء (ب) قياسها ٤٢°. علمًا أن رجل إطفاء يقف على مسافة ٢٥ مترًا من قاعدة البناء.

ما المسافة بين قاعدة النافذة (حيث ألسنة النيران) وسطح البناء؟

الحل: بفرض أن $ع_١$ هي البعد بين القاعدة السفلية للنافذة أ ومستوى النظر الأفقي.





$ظا ٢٨° = \frac{ع_١}{٢٥}$ ؛ $ع_١ = ٢٥ ظا ٢٨°$.

بفرض أن $ع_٢$ هي البعد بين سطح البناء والمستوى الأفقي للنظر.

$ظا ٤٢° = \frac{ع_٢}{٢٥}$ ؛ $ع_٢ = ٢٥ ظا ٤٢°$

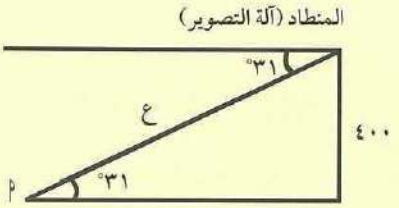
$ع = ع_٢ - ع_١ = ٢٥(ظا ٤٢° - ظا ٢٨°)$

$\simeq$ ٩,٢٢ أمتار ∴ المسافة المطلوبة $\simeq$ ٩,٢٢ أمتار

حاول أن تحل

٣ زُوِّد منطاد بهوائي تلفزيون لنقل مباراة كرة القدم، حيث تراقب آلة التصوير الملعب عند النقطة أ بزاوية انخفاض ٣١°. يبلغ ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض ٤٠٠ متر.

ما طول خط الضوء المرسل من آلة التصوير إلى الملعب؟



٢ – ٧

القطاع الدائري والقطعة الدائرية
Circular Sector and Circular Segment

تعريف:
القطاع الدائري هو جزء من سطح الدائرة محدود بنصفي قطرين وقوس.

سوف تتعلم
- القطاع الدائري
- إيجاد مساحة القطاع الدائري
- القطعة الدائرية
- إيجاد مساحة القطعة الدائرية

تمثل قطعة الشطيرة قطاعًا دائريًا

في الشكل المرسوم:

نصفا القطرين $\overline{م أ}$، $\overline{م ب}$ يقسمان الدائرة إلى قطاعين دائريين.

القطاع الأصغر م أ جـ ب زاويته المركزية هـ°، والقطاع الأكبر م أ ن ب زاويته المركزية ٢π – هـ°.

معلومة رياضية:
قياس القوس = قياس الزاوية المركزية التي تحصر القوس بين ضلعيها.

١ – مساحة القطاع الدائري: Area of Circular Sector

لإيجاد مساحة القطاع الدائري نستخدم التناسب: **(البرهان غير مطلوب)**

نسبة طول القوس إلى طول الدائرة (محيط الدائرة) هي نسبة مساحة القطاع الدائري إلى مساحة الدائرة.

$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{طول الدائرة}} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة الدائرة}}$$

$$\frac{ل}{٢\pi نق} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi نق^{٢}}$$

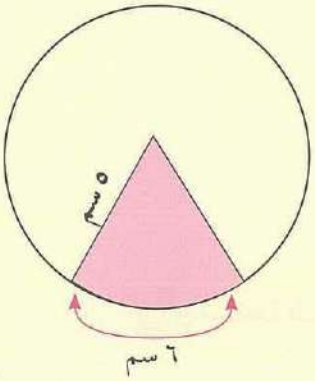
$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{ل}{٢\pi نق} \times \pi نق^{٢}$$

تذكر:
محيط الدائرة = ٢ π نق
مساحة الدائرة = π نق^{٢}
طول القوس ل = هـ° × نق

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ ل نق

مثال (١)

أوجد مساحة القطاع الأصغر في الشكل المقابل:



الحل:

مساحة القطاع $= \frac{١}{٢}$ ل نق $= \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٥$

$=$ ١٥ سم^{٢}

مساحة القطاع الدائري تساوي ١٥ سم^{٢}

حاول أن تحل

١ أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطر دائرته ١٠ سم وطول قوسه ٤ سم.

تعرّفت في بداية الوحدة الثانية أن طول القوس ل يساوي قياس الزاوية المركزية بالراديان مضروبًا في طول نصف القطر:

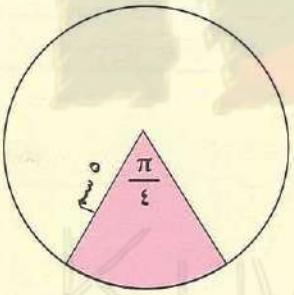
ل = هـ^{د} × نق

إذا عوّضنا عن ل بـ هـ^{د} × نق نحصل على:

مساحة القطاع الدائري $= \frac{١}{٢}$ هـ^{د} × نق × نق $= \frac{١}{٢}$ هـ^{د} نق^{٢}

مثال (٢)

أوجد مساحة القطاع الدائري الأصغر في الشكل المقابل:



الحل:

مساحة القطاع $= \frac{١}{٢}$ هـ^{د} نق^{٢} $= \frac{١}{٢} \times \frac{\pi}{٤} \times (٥)^{٢}$

$= \frac{\pi ٢٥}{٨} \simeq$ ٩,٨ سم^{٢}

مساحة القطاع الدائري تساوي حوالى ٩,٨ سم^{٢}

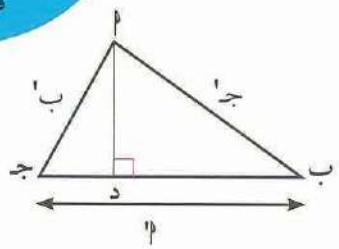
٢- القطعة الدائرية: Circular Segment

القطعة الدائرية هي جزء من سطح الدائرة محدود بقوس فيها ووتر.

٣- مساحة المثلث: Area of a Triangle

مساحة المثلث أب جـ $= \frac{١}{٢}$ ب جـ × أد

لكن جاب $= \frac{\text{أد}}{\text{أب}}$ ∴ أد = أب × جاب



مساحة المثلث أب جـ $= \frac{١}{٢}$ ب جـ × ب'أ × جاب.

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × ب أ × جا ب

= $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أ جـ × جا جـ

= $\frac{١}{٢}$ أ ب × أ جـ × جا أ

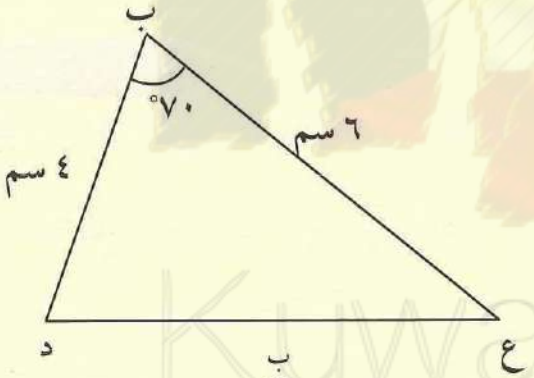
أي أن مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحددة بهما

وباختصار نكتب مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ' جـ' جا ب

= $\frac{١}{٢}$ أ' ب' × جا جـ

= $\frac{١}{٢}$ ب' جـ' جا أ

مثال (٣)



ب ع د مثلث فيه ب ع = ٦ سم، ب د = ٤ سم، ق(ب̂) = ٧٠°

أوجد مساحة هذا المثلث.

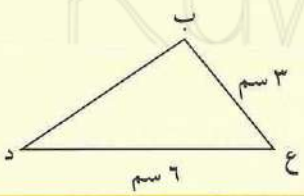
الحل:

مساحة المثلث ب ع د = $\frac{١}{٢}$ ب ع × ب د × جا(ب̂)

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤ × جا(٧٠°) ≃ ١١,٢٧٦

مساحة المثلث ب ع د هي حوالى ١١,٢٧٦ سم^{٢}.

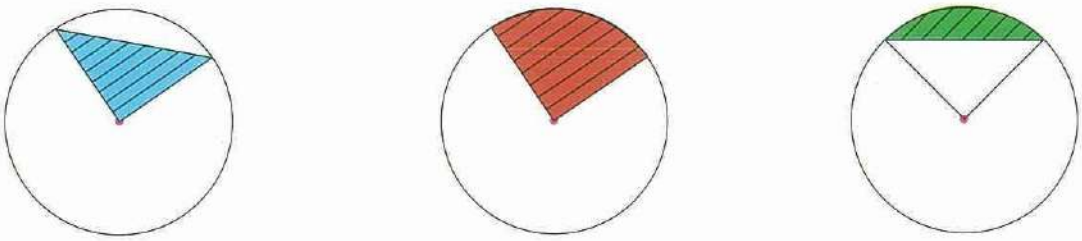
حاول أن تحل



٢ في المثلث المقابل إذا كانت مساحته = ٧ سم^{٢}. فأوجد ق(ع̂).

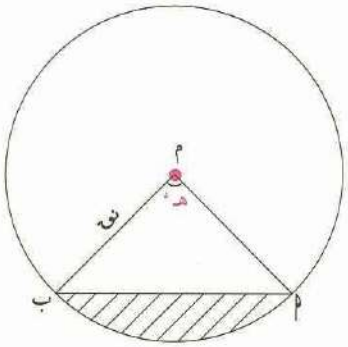
٤- مساحة القطعة الدائرية: Area of a Circular Segment

مساحة القطعة الدائرية تساوي مساحة القطاع الدائري مطروحًا منه مساحة المثلث.



مساحة القطعة الدائرية = مساحة القطاع الدائري - مساحة المثلث

إيجاد مساحة القطعة الدائرية:



مساحة القطاع الأصغر = $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} × نق^{٢}

مساحة المثلث م أ ب = $\frac{١}{٢}$ م أ × م ب × جا(هـ^{د})

= $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × جا(هـ^{د})

مساحة القطعة الدائرية = مساحة القطاع الأصغر − مساحة المثلث م أ ب

= $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} × نق^{٢} − $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × جا(هـ^{د})

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (هـ^{د} − جاهـ^{د})

تذكر:

هـ^{د} هو قياس الزاوية بالراديان.

انتبه لوضع الآلة الحاسبة.

مثال (٤)

احسب مساحة قطعة دائرية زاويتها المركزية ٦٠° وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم.

الحل:

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} [هـ^{د} − جاهـ^{د}]

نحول ٦٠° إلى القياس الدائري

هـ^{د} = ٦٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ ١,٠٤٧٢

نوجد جا (٦٠°) بالآلة الحاسبة

جا (٦٠°) ≃ ٠,٨٦٦ (لاحظ أن جا ١,٠٤٧٢ ≃ ٠,٨٦٦ أيضًا)

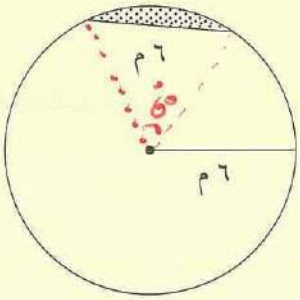
مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} [هـ^{د} − جاهـ^{د}]

≃ $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ [١,٠٤٧٢ − ٠,٨٦٦]

≃ ٩,٠٦ سم^{٢}

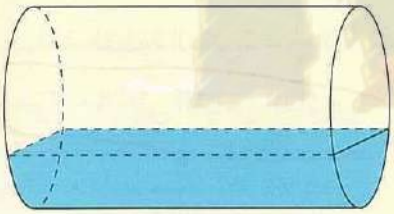
حاول أن تحل

٣ أ حوض زهور دائري طول نصف قطره ٦ م (انظر الشكل المقابل)، وفي هذا الحوض وتر طوله ٦ م. احسب مساحة القطعة الدائرية الصغرى.

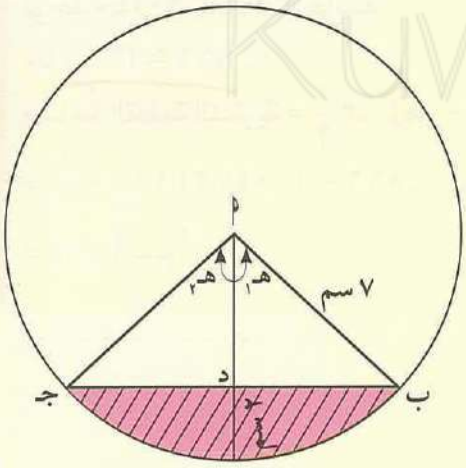


ب أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وقياس زاويتها المركزية ٧٠°.

مثال (٥)



يبيّن الشكل المقابل مقطعًا في أنبوب أسطواني الشكل، ومياهًا متجمعة في القاع.
إذا كان أقصى عمق الماء هو ٢ سم وطول نصف قطر الأنبوب ٧ سم،
فأوجد مساحة الجزء المظلل باللون الوردي.



الحل: أد = ٥ سم

هـ١ ≃ ٠,٧٧٥ = هـ٢

هـ = هـ١ + هـ٢ ≃ ١,٥٥

مساحة القطاع الأصغر = $\frac{١}{٢}$ × هـ × نق^{٢}

= $\frac{١}{٢}$ × ١,٥٥ × ٧^{٢} ≃ ٣٧,٩٧٥ سم^{٢}

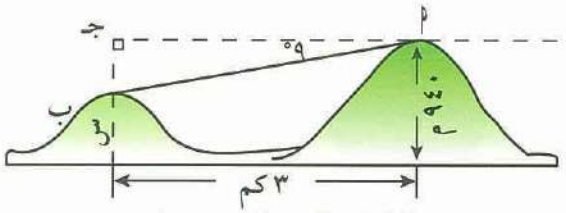
مساحة المثلث أب جـ = $\frac{١}{٢}$ × أجـ × أب × جا(١,٥٥) ≃ $\frac{١}{٢}$ × ٤٩ × جا (١,٥٥) ≃ ٢٤,٤٩٤٧ سم^{٢}

مساحة الجزء المظلل = ٣٧,٩٧٥ − ٢٤,٤٩٤٧ ≃ ١٣,٤٨ سم^{٢}

ملاحظة:
يمكن الحل باستخدام القانون

المرشد لحل المسائل

خلال بحثه على أحد المواقع الإنترنت وجد سلطان المسألة التالية:
يبعد تلان عن بعضهما ٣ كم. يبلغ ارتفاع القمة «أ» ٩٤٠ مترًا وقياس زاوية الانخفاض من القمة «أ» إلى القمة «ب» ٩°. أوجد ارتفاع القمة «ب».



قياسات الرسم غير صحيحة

كيف فكر سلطان لإيجاد ارتفاع القمة ب.

بداية، سوف أرسم مخططًا للمسألة.

البعد بين التلين = ٣ كم.

قياس زاوية الانخفاض = ٩°.

ارتفاع القمة «أ» = ٩٤٠ مترًا.

عليّ إيجاد ارتفاع القمة «ب». ليكن س هذا الارتفاع.

لإيجاد قيمة س، سوف أستخدم النسب المثلثية في المثلث أ ب جـ. طول أحد ضلعي القائمة البعد بين القمتين وقياس إحدى زواياه الحادة ٩°. سوف أستخدم ظل هذه الزاوية أو مقلوبه إذا استطعت إيجاد طول أحد أضلاع الزاوية القائمة. إذا تمعنت في الرسم أجد أن:

أجـ = ٣ كم = ٣٠٠٠ متر.

∵ كانت الزاوية هي زاوية انخفاض، فارتفاع القمة: «ب» سوف يكون أصغر من ارتفاع القمة «أ».

سأكتب معادلة — ظا٩° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{٣٠٠٠}$

سأحل المعادلة — ب جـ = ٣٠٠٠ × ظا٩°

سأستخدم آلة حاسبة وأقرب — ب جـ = ٤٧٥ متر تقريبًا

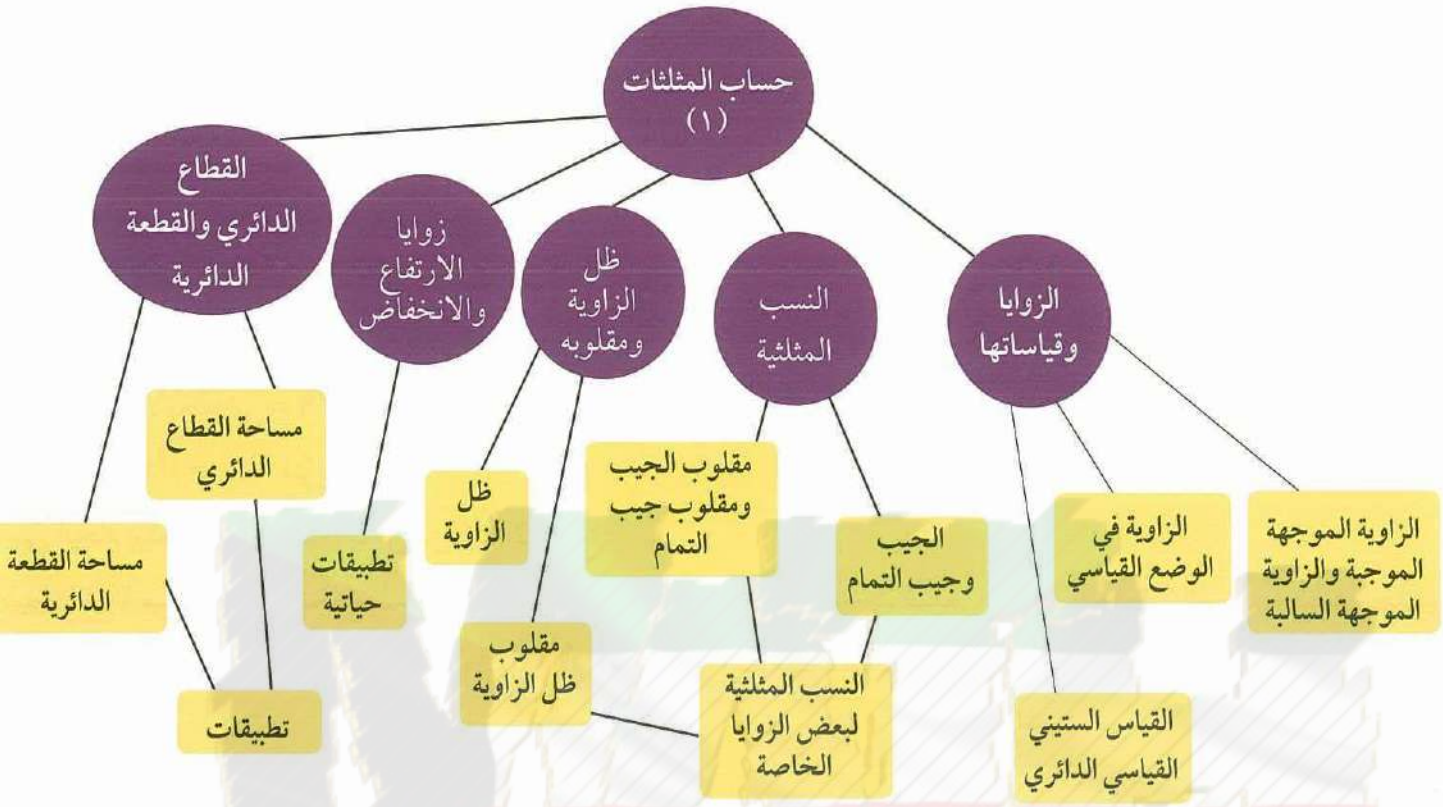
يبقى عليّ طرح هذه القيمة من ارتفاع القمة «أ» — س = ٩٤٠ − ٤٧٥ = ٤٦٥

لذا يكون ارتفاع القمة (ب) ٤٦٥ مترًا.

مسألة إضافية

في صف الطيران المظلي، وقف الطلاب على تل ارتفاعه ٤٧٠ مترًا يراقبون رفيقًا لهم يهبط بالمظلة. عندما وصل إلى الأرض كانت زاوية الانخفاض ٧٢°. ما بعد هذا المظلي عن قاعدة التل؟

مخطط تنظيمي للوحدة الثانية



ملخص

- تكون الزاوية الموجهة موجبة إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي عكس دوران عقارب الساعة.
- تكون الزاوية الموجهة سالبة إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي مع دوران عقارب الساعة.
- تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي إذا كان ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب من محور السينات ورأسها في نقطة الأصل لمحاور الإحداثيات.
- تقاس الزاوية بالدرجات أو بالراديان.
- الزاوية نصف القطرية هي زاوية مركزية في دائرة تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة وقياسها يساوي ١ راديان.
- العلاقة: $\frac{\text{هـ}^{\text{د}}}{\pi} = \frac{\text{س}^{\circ}}{١٨٠^{\circ}}$ تربط بين القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية.
- في المثلث قائم الزاوية جيب الزاوية هو نسبة الضلع المقابل إلى الوتر ويرمز إليه بـ جا أو sin.
- جيب التمام للزاوية هو نسبة الضلع المجاور إلى الوتر ويرمز إليه بـ جتا أو cos.
- قاطع الزاوية هو مقلوب جيب تمام الزاوية قاθ = $\frac{١}{\text{جتا}\theta}$ حيث جتا$\theta \neq ٠$.
- قاطع تمام الزاوية هو مقلوب جيب الزاوية قتاθ = $\frac{١}{\text{جا}\theta}$ حيث جا$\theta \neq ٠$.
- ظل الزاوية هو نسبة الضلع المقابل إلى الضلع المجاور ويرمز إليه ظا أو tan.
- ظل تمام الزاوية هو نسبة طول الضلع المجاور إلى طول الضلع المقابل ويرمز إليه ظتا أو cotan.

- جا ٤٥° = جتا ٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ؛ ظا ٤٥° = ١

جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ظا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

- زاوية الارتفاع: إذا كانت نقطة ما أعلى من مستوى النظر الأفقي.
- زاوية الانخفاض: إذا كانت نقطة ما أدنى من مستوى النظر الأفقي.
- القطاع الدائري هو جزء من الدائرة محدود بنصفي قطرين وقوس على الدائرة.
- مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} نق^{٢} حيث هـ^{د} قياس الزاوية المركزية للقطاع الدائري بالراديان، نق هو نصف قطر الدائرة.
- القطعة الدائرية هي جزء من الدائرة محدودة بوتر وقوس على الدائرة.
- مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (هـ^{د} - جاهـ^{د}).