الوحدة الثامنة

حساب المثلثات (٢)
Trigonometry (2)

مشروع الوحدة: موجة المستقبل

١ مقدمة المشروع: يحتوي مد وجزر المحيط على كمّ هائل من الطاقة. استخدمَتْ هذه الطاقة خلال القرون الغابرة لإدارة الطواحين. أما في العقود الأخيرة فقد اكتشفت الشركات كيفية تسخير هذه الطاقة لتوليد الكهرباء. تتغير قوة المد والجزر بدرجة عالية ولكن بطريقة متوقّعة ومتكررة مما سهل الاستفادة منها.

يجب إجراء دراسة دقيقة لحركة المد والجزر لتحديد مكان وضع المحرّكات، بغية (الهدف) الاستفادة القصوى من الطاقة المولدة. يبنى السّد عادة حيث يوجد أكبر فرق بين المد والجزر. تتولد الطاقة من دخول الماء وخروجه من خلال السد. يتمُّ استخدام مصادر أخرى للطاقة لدعم تلك المتولّدة من حركة المد والجزر عندما تخف هذه الحركة.

٢ الأهداف: دراسة حول الطاقة المتولدة من حركة المد والجزر، وإمكانية الاستفادة منها في توليد الطاقة الكهربائية.

٣ اللوازمُ: أوراق مليمترية، آلة حاسبة بيانية.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ يسجل يوميًّا في مواقع معيّنة من العالم ارتفاع المياه فوق مستوى معين، يُسمى متوسط المياه المنخفضة **Low Water Mean**. يُبيِّن الجدولان المرفقان المعلومات المسجلة في موقعين. قدّر فترة ومدى الدالة التي تنمذج دورة المد والجزر في كل موقع.

الموقع الأول	
الوقت	ارتفاع المياه
١١:٣٠ ق.ظ	١٨ سم
٥:٤٢ ب.ظ	١٤٦ سم
١١:٥٥ ب.ظ	١٨ سم
٦:٠٧ ق.ظ	١٤٦ سم

الموقع الثاني	
الوقت	ارتفاع أو انخفاض المياه
٤:٤٦ ب.ظ	−٧٣ سم
١٠:٥٩ ب.ظ	١٠١ سم
٥:١١ ق.ظ	−٧٣ سم
١١:٢٤ ق.ظ	١٠١ سم

ب يتأثر المد والجزر بمواقع الشمس والقمر، يحدث أصغر أو أكبر مد وجزر عندما يكون القمر هلالًا أو بدرًا. ابحث عن ترابط موقع القمر وقوة المد والجزر، وارسم تمثيلًا بيانيًّا يُبيِّن تحولات المد والجزر بدلالة الوقت خلال شهر قمري معين.

جـ كيف يمكن تفسير عدم ثبات الطاقة المتولدة من حركة المد والجزر؟

د أوجد بعض المناطق على الكرة الأرضية حيث يمكن إقامة سدود للاستفادة من حركة المدّ والجزر.

٥ التقرير: مرتكزًا على الأبحاث التي قمت بها، أُكتب مقالًا صغيرًا تبين فيه مزايا وعيوب هذه الطاقة. هل تعتقد أنه يمكن تشكيل مصدر عمليّ للطاقة الكهربائية في المستقبل؟

دروس الوحدة

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)	العلاقات بين الدوال المثلثية (١)	العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)
٨-١	٨-٢	٨-٣

الوحدة الثامنة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كيفية استخدام النسب المثلثية.
- تعلمت كيفية استخدام نظرية فيثاغورث.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تتعرف دائرة الوحدة.
- سوف توجد إحداثيات النقطة على دائرة الوحدة لتستخدمها في إيجاد قيم الدوال المثلثية.
- سوف توجد العلاقة بين الدوال المثلثية لزاوية حادة لحل المعادلات المثلثية.
- سوف تقوم بتبسيط عبارات جبرية تحتوي على دوال مثلثية.
- سوف توجد العلاقة بين:

– جا$^{٢}\theta$، جتا$^{٢}\theta$ لأي زاوية θ.

– ظا$^{٢}\theta$ وقا$^{٢}\theta$ لأي زاوية θ.

– ظتا$^{٢}\theta$ وقتا$^{٢}\theta$ لأي زاويةθ.

- سوف تبسط عبارات تتضمن دوالَّ مثلثية وتبرهن صحة متطابقات مثلثية.

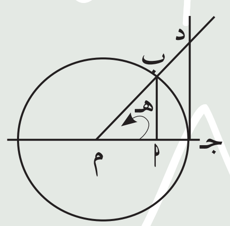
المصطلحات الأساسية

دائرة الوحدة – دوال مثلثية – إشارات الدوال المثلثية – إشارات مقلوب دالة مثلثية – الربع الأول – الربع الثاني – الربع الثالث – الربع الرابع – زاوية الإسناد – متطابقات.

أضف إلى معلوماتك

أُطلق اسم جيب (sin) على دالة الجيب (sin function) نتيجة عدم وضوح حصل في القرون الوسطى. جاءت هذه التّسمية من كلمة سنسكريتية (Sanskrit) وهي «جيڤا» (Jiva) وتعني الوتر. وقد استخدمت أولًا في الهند مع «أريابتا» (Araybheta) سنة ٥١٠ م. وكانت تعني نصف وتر ولكن تم اختصارها، ونقلت إلى اللغة العربية تحت اسم «جيبا» (jiba) وهي مشابهة لكلمة «جيب» (jaib) وتعني الصدر (أو التجويف). أما في الوقت الحاضر فكلمة جيب في اللغة العربية هي مرادفة لكلمة (sin).

وجد المترجمون عند نقل الناتج الفكري العربي إلى اللاتينية أنّ كلمة جيب (sinus) تعني أيضًا الصدر (أو التجويف) ومن كلمة (sinus) حصلنا على كلمة (sin) جيب، أمّا كلمة ظل (tangent) فهي تعود إلى «توماس فينك» (Thomas Finck) عام ١٥٨٣، التي يمكن فهمها بالنظر إلى الرسم:



القطعة المستقيمة $\overline{\text{دجـ}}$ هي مماسة للدائرة في النقطة جـ. لنأخذ م ب = م جـ = ١ فيكون ظاهـ $= \frac{\text{دجـ}}{\text{م جـ}} = \frac{\text{دجـ}}{١}$ = دجـ، كما وعرفت tangent قديمًا بعبارة «umbra versa» وتعني الظل المدار. تستخدم دائرة الوحدة في حل تمارين تتعلق بالدوال المثلثية.

٨–١

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)
The Unit Circle in the Coordinate Plane and Trigonometric Functions (Circular Functions)

سوف تتعلم
- دائرة الوحدة
- النقطة المثلثية
- الدوال المثلثية (الدائرية)
- إشارات الدوال المثلثية
- زاوية الإسناد

عمل تعاوني

استخدم الفرجار وارسم دائرة د طول نصف قطرها ١ (وحدة قياس) ومركزها نقطة الأصل للمحورين المتعامدين في المستوى الإحداثي. استخدم منقلة وارسم زاوية موجهة في وضع قياسي موجبة قياسها ٣٠°.

يقطع الضلع النهائي الدائرة (في الربع الأول) في النقطة $م_١$ $(س_١، ص_١)$.

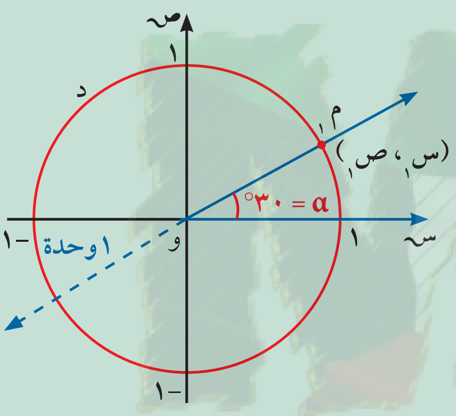
١ ما الطرق التي يمكنك استخدامها لإيجاد إحداثيات $م_١$؟ (بدون استخدام آلة حاسبة)

٢ استخدم إحدى هذه الطرق وأوجد قيم $س_١$، $ص_١$.
اكتب هذه القيم على شكل كسور عشرية.

٣ استخدم آلة حاسبة لإيجاد: جتا ٣٠°، جا ٣٠°.
قارن هذه القيم بما وجدته في السؤال (٢).

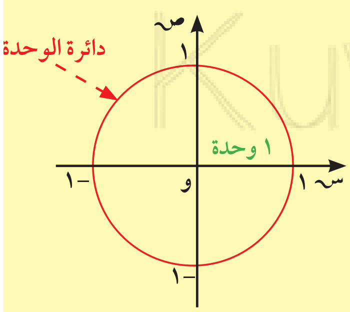
٤ أ كرر الخطوات أعلاه مستخدمًا زاوية قياسها ٤٥°. ما إحداثيات النقطة الجديدة $م_٢$؟

ب ضع تخمينًا. ما العلاقة بين إحداثيات النقطة م على الدائرة التي رسمتها وقيم جيب تمام وجيب الزاوية في الوضع القياسي والتي يمر ضلعها النهائي في م؟



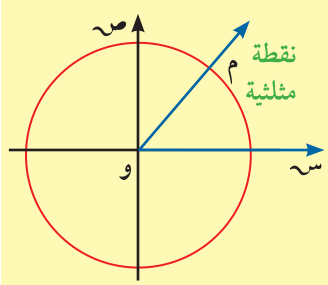
دائرة الوحدة Unit Circle

هي دائرة مركزها نقطة الأصل و، وطول نصف قطرها واحد وحدة.



النقطة المثلثية The Triangular Point

هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.



معلومة مفيدة:
عادة ما يستخدم الحرف اليوناني θ (يلفظ ثيتا) للتعبير عن قياس زاوية.

ملاحظة: تكون النقطة (س، ص) نقطة مثلثية إذا وفقط إذا كان $س^٢ + ص^٢ = ١$

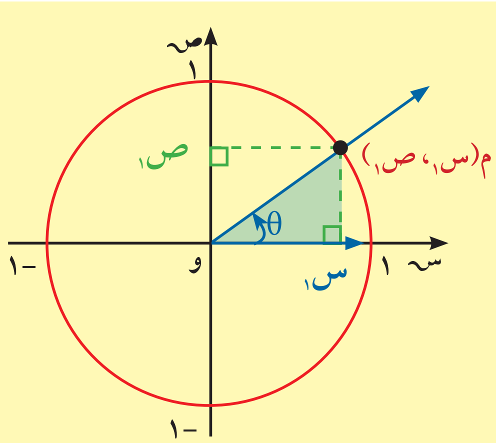
سوف نستخدم الرمز θ لنرمز إلى قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي.

النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ

بفرض أنّ زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ، يقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في النقطة م $(س_١، ص_١)$.

في الشكل المقابل المثلث المظلل قائم الزاوية.

تعرف من دراستك السابقة: أن جتاθ = $\dfrac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$



∵ طول الوتر = نق = ١

∴ جتاθ = $\dfrac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\dfrac{\text{س}_{١}}{١}$ = س$_{١}$ أي أن جتاθ = س$_{١}$

كذلك جاθ = $\dfrac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\dfrac{\text{ص}_{١}}{١}$ = ص$_{١}$ أي أن جاθ = ص$_{١}$

وبالتالي تكون النسب المثلثية للزاوية θ هي:

جتاθ = س$_{١}$	جاθ = ص$_{١}$
ظاθ = $\dfrac{\text{ص}_{١}}{\text{س}_{١}}$، س$_{١}$ $\neq$ ٠	ظتاθ = $\dfrac{\text{س}_{١}}{\text{ص}_{١}}$، ص$_{١}$ $\neq$ ٠
قاθ = $\dfrac{١}{\text{س}_{١}}$، س$_{١}$ $\neq$ ٠	قتاθ = $\dfrac{١}{\text{ص}_{١}}$، ص$_{١}$ $\neq$ ٠

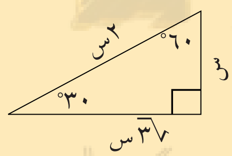
معلومة مفيدة:

عندما نقول الزاوية θ أو α أو ... نقصد الزاوية التي قياسها θ أو α أو ...

مثال (١)

باستخدام دائرة الوحدة أوجد جا ٦٠°، جتا ٦٠°.

مساعدة رياضية:



الحل:

نرسم دائرة الوحدة، ونرسم الزاوية الموجهة التي قياسها ٦٠° في الوضع القياسي.

فيكون م و = ١ وحدة طول

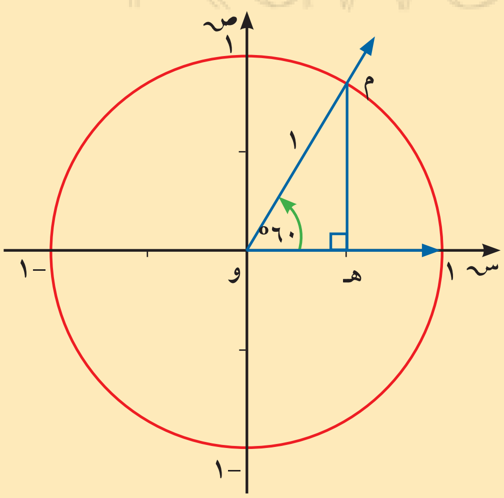
نسقط من م عمودًا على المحور السيني وليكن $\overline{\text{م هـ}}$.

$\triangle$م هـ و قائم الزاوية هـ.

ق(هـ$\hat{\text{م}}$و) = ٣٠°.

∴ وهـ = $\dfrac{١}{٢}$ (لأن في المثلث الثلاثيني الستيني طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° = $\dfrac{١}{٢}$ طول الوتر)

∴ م هـ = $\dfrac{\sqrt{٣}}{٢}$ من نظرية فيثاغورث



إحداثيا النقطة م هما: $\dfrac{١}{٢}$، $\dfrac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جتا ٦٠° = $\dfrac{١}{٢}$، جا ٦٠° = $\dfrac{\sqrt{٣}}{٢}$.

حاول أن تحل

١ على دائرة الوحدة، ارسم زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها ٤٥°. ثم أوجد جتا ٤٥°، جا ٤٥°.

يمكن استخدام مثلث قائم الزاوية لإيجاد جتاθ، جاθ لأي زاوية θ موجهة في الوضع القياسي لا يقع ضلعها النهائي في الربع الأول.

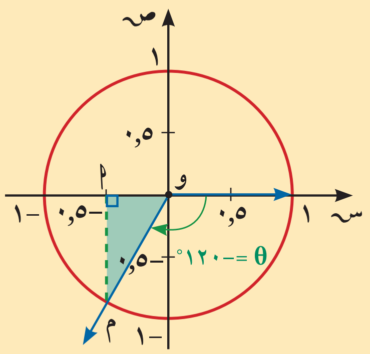
مثال توضيحي

باستخدام دائرة الوحدة أوجد جتا(−١٢٠°)، جا(−١٢٠°).

الحل:

الخطوة ١

ارسم زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها −١٢٠° ويقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في النقطة م.

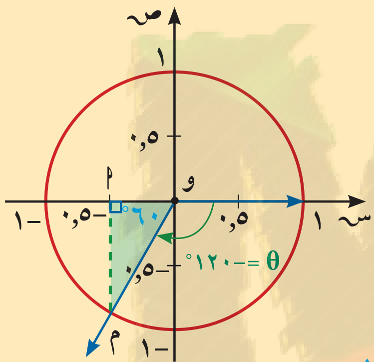


الإحداثي السيني = جتا(−١٢٠°)

الإحداثي الصادي = جا(−١٢٠°)

الخطوة ٢

ارسم مثلثًا قائم الزاوية بحيث ينطبق الوتر على الضلع النهائي للزاوية ثم ضع أحد ضلعيه على محور السينات (بحيث يكون الضلع الآخر موازيًا لمحور الصادات) وليكن المثلث ﺃوم.



المثلث ثلاثيني ستيني

الخطوة ٣

لاحظ أن ق(مَوْﺃ) = ٦٠° لماذا؟

أوجد طول كل ضلع في المثلث.

طول الوتر $\overline{\text{وم}}$ = ١ طول الوتر يساوي طول نصف قطر الدائرة

طول الضلع الأصغر $\overline{\text{وﺃ}}$ = $\frac{١}{٢}$ طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° يساوي نصف طول الوتر

طول الضلع الأكبر $\overline{\text{ﺃم}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ باستخدام نظرية فيثاغورث

بما أن النقطة تقع في الربع الثالث، فكلا الإحداثيين سالبان.

ينطبق الضلع الأصغر على محور السينات ∴ جتا(−١٢٠°) = −$\frac{١}{٢}$ ، جا(−١٢٠°) = −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$.

حاول أن تحل

٢ مستخدمًا طريقة المثال التوضيحي، أوجد جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ ، جا $\frac{٣\pi}{٤}$.

تدريب

استخدم آلة حاسبة وأكمل الجدول التالي مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين:

قياس الزاوية θ / النسبة	٢٠°	٤٠°	٨٠°	١٣٠°	١٦٠°	٢٢٠°	٢٥٠°	٣١٠°
جا θ (sinθ)								
جتا θ (cosθ)								
ظا θ (tanθ)								

الدوال الدائرية (المثلثية) Circular Functions (Trigonometric Functions)

إذا كانت م(س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ، وتحرك الضلع النهائي لهذه الزاوية في الاتجاه الموجب (الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة)، فإن م تتغير على دائرة الوحدة وبالتالي تتغير معها كل من س، ص ويكون: لكل قيمة تأخذها θ حيث θ ∈ [٠، ٢π)، قيمة واحدة لكل من المتغيرين س، ص حيث س، ص تنتميان إلى [-١، ١].

مما تقدم، نستطيع تعريف الدوال المثلثية (أو الدوال الدائرية) التالية:

تعريف:

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ حيث ٠ ≤ θ < ٢π فإن:

(١) دالة الجيب: د(θ) = جاθ حيث جاθ = ص (الإحداثي الصادي للنقطة المثلثية)

(٢) دالة جيب التمام: د(θ) = جتاθ حيث جتاθ = س (الإحداثي السيني للنقطة المثلثية)

(٣) دالة الظل: د(θ) = ظاθ حيث ظاθ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠

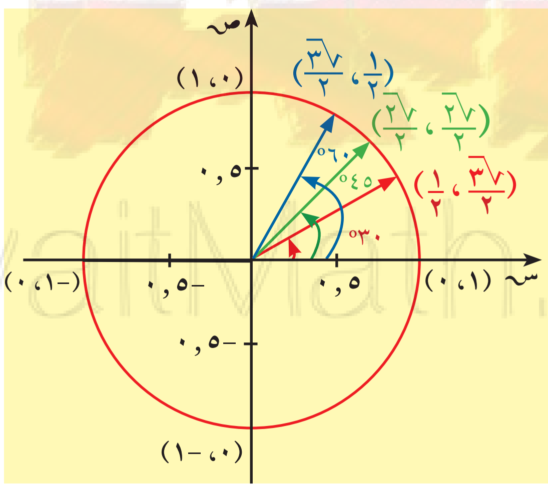
(٤) دالة القاطع: د(θ) = قاθ حيث قاθ = $\frac{١}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠

(٥) دالة قاطع التمام: د(θ) = قتاθ حيث قتاθ = $\frac{١}{\text{ص}}$ ، ص ≠ ٠

(٦) دالة ظل التمام: د(θ) = ظتاθ حيث ظتاθ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ، ص ≠ ٠

معلومة رياضية:

- الاتجاه الموجب هو الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة.
- النقطة المثلثية (س، ص) يمكن التعبير عنها بـ (جتاθ، جاθ).



يمكن بسهولة إيجاد قيم الدوال المثلثية لبعض قيم θ الخاصة.

الدالة \ قياس الزاوية θ	٠° / ٠	٣٠° / $\frac{\pi}{٦}$	٤٥° / $\frac{\pi}{٤}$	٦٠° / $\frac{\pi}{٣}$	٩٠° / $\frac{\pi}{٢}$	١٨٠° / π	٢٧٠° / $\frac{٣\pi}{٢}$	٣٦٠° / ٢π
جاθ	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١	٠	-١	٠
جتاθ	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	٠	-١	٠	١
ظاθ	٠	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	١	$\sqrt{٣}$	غير معرّف	٠	غير معرّف	٠

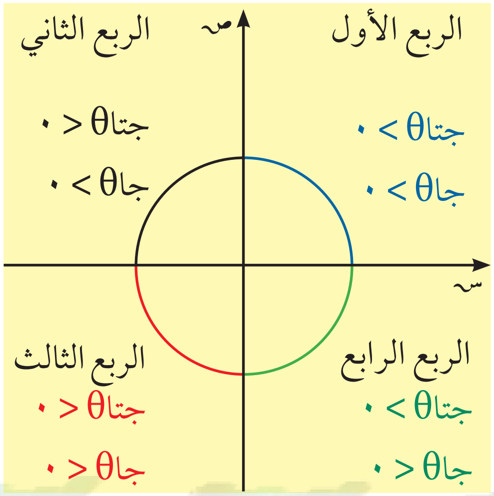
من الشكل: يمكن ملاحظة ما يلي:

إذا كانت θ في الربع الأول فإن: جاθ > ٠، جتاθ > ٠

إذا كانت θ في الربع الثاني فإن: جاθ > ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الثالث فإن: جاθ < ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الرابع فإن: جاθ < ٠، جتاθ > ٠



مثال (٢)

حدّد إشارة جاθ، جتاθ في كل مما يلي:

أ θ = ١٣٥° ب $\theta = \frac{٧\pi}{٦}$ ج θ = ٣٠٥°

الحل:

أ ∵ θ = ١٣٥°، ∴ ٩٠° < θ < ١٨٠° أي أن θ تقع في الربع الثاني.

∴ جا θ > ٠، جتا θ < ٠

ب ∵ $\theta = \frac{٧\pi}{٦}$ ، ∴ $\pi < \theta < \frac{٣\pi}{٢}$ أي أن θ تقع في الربع الثالث.

∴ جاθ < ٠ ، جتاθ < ٠

ج ∵ θ = ٣٠٥°، ∴ ٢٧٠° < θ < ٣٦٠° أي أن θ تقع في الربع الرابع.

∴ جاθ < ٠ ، جتاθ > ٠

حاول أن تحل

٣ أ إذا كانت ٩٠° < θ < ٢٧٠°. ما هي إشارة جتاθ؟

ب إذا كانت ٠° < θ < π. ما هي إشارة جاθ؟

زاوية الإسناد Reference Angle

تحتاج أحيانًا إلى معرفة قيم النسب المثلثية لزاوية θ ضلعها النهائي موجود في الربع الثاني أو الربع الثالث أو الربع الرابع. يمكن إسناد هذه الزاوية إلى زاوية حادة α، محددة بمحور السينات والضلع النهائي للزاوية θ.

معلومة

الرمز α يُقرأ ألفا.

تعريف زاوية الإسناد:

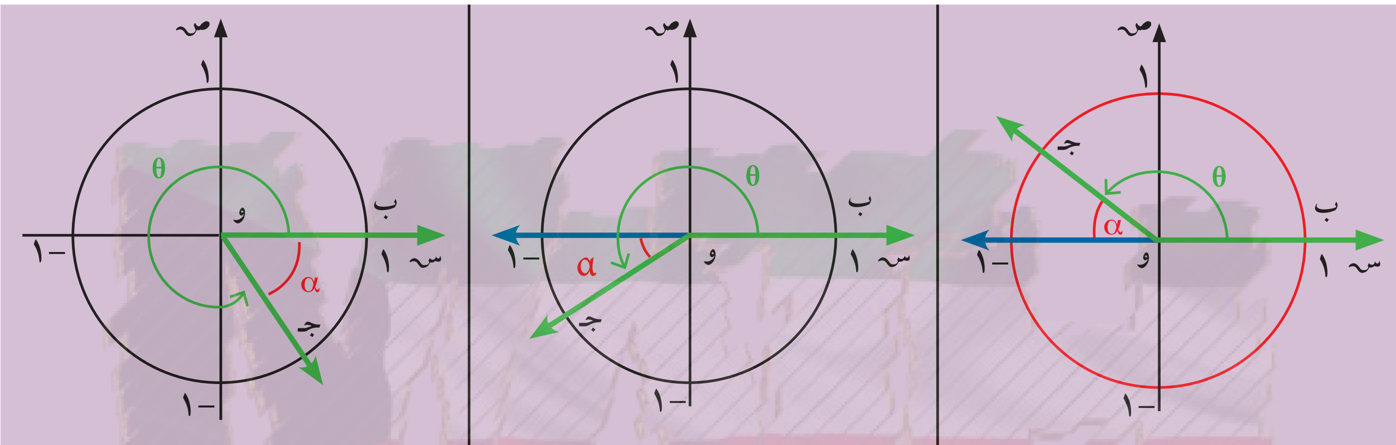
زاوية الإسناد للزاوية الموجهة ($\overrightarrow{\text{وب}}$، $\overrightarrow{\text{وجـ}}$) التي في وضع قياسي هي الزاوية **الحادة** α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.

فإذا كان α زاوية الإسناد فإن: $°٠ < \alpha < °٩٠$

تذكر

الزاوية الموجهة ب وَ جـ يمكن أن نرمز لها بالرمز ($\overrightarrow{\text{وب}}$، $\overrightarrow{\text{وجـ}}$) حيث $\overrightarrow{\text{وب}}$ الضلع الابتدائي، $\overrightarrow{\text{وجـ}}$ الضلع النهائي.

الأشكال التالية توضح الحالات المختلفة لإيجاد زاوية الإسناد:



عندما θ تقع في الربع الثاني

$\alpha° = ١٨٠° - \theta°$

$\alpha^{د} = \pi - \theta^{د}$

عندما θ تقع في الربع الثالث

$\alpha° = \theta° - ١٨٠°$

$\alpha^{د} = \theta^{د} - \pi$

عندما θ تقع في الربع الرابع

$\alpha° = ٣٦٠° - \theta°$

$\alpha^{د} = ٢\pi - \theta^{د}$

مثال (٣)

ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة في وضع قياسي، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها لكل مما يلي:

أ $°١٢٥$ ب $°٢١٥$ جـ $\frac{١١\pi}{٦}$

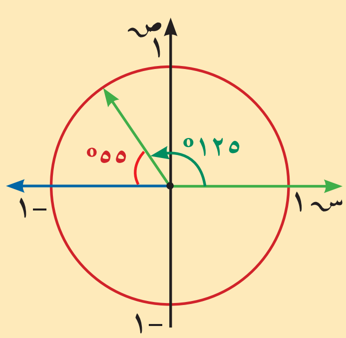
الحل:

أ $\theta = °١٢٥$ تقع في الربع الثاني

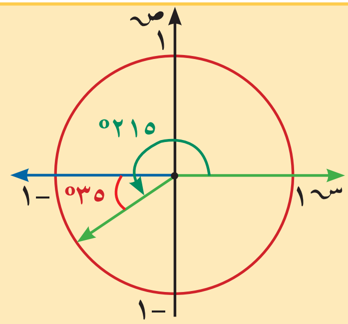
∴ قياس زاوية الإسناد $\alpha° = ١٨٠° - \theta°$

$= ١٨٠° - ١٢٥°$

$= °٥٥$



ب $\theta = ٢١٥^\circ$ تقع في الربع الثالث

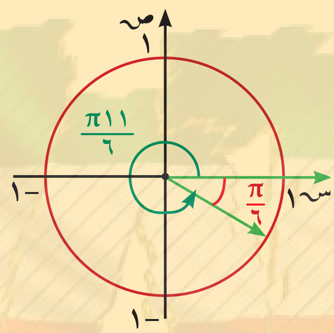


∴ قياس زاوية الإسناد $\alpha = \theta - ١٨٠^\circ$

$= ٢١٥^\circ - ١٨٠^\circ$

$= ٣٥^\circ$

ج $\theta = \frac{١١\pi}{٦}$ تقع في الربع الرابع



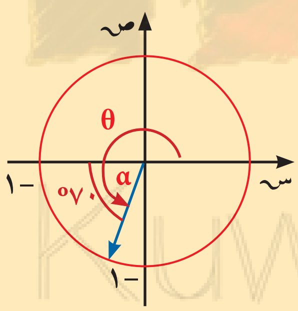
∴ قياس زاوية الإسناد $\alpha = ٢\pi - \theta$

$= ٢\pi - \frac{١١\pi}{٦}$

$= \frac{\pi}{٦}$

حاول أن تحل

٤ يبيّن الشكل المقابل، زاوية الإسناد α° للزاوية θ°. أوجد θ.



٨–٢

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)
Relations Between Trigonometric Functions (1)

سوف تتعلم

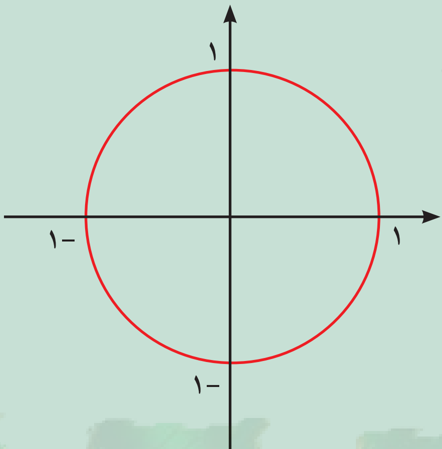
- العلاقات بين الدوال المثلثية للزاوية θ والزوايا: $-\theta$، $\pi - \theta$، $\pi + \theta$، $\frac{\pi}{2} - \theta$، $\frac{\pi}{2} + \theta$، $\theta + ٢ك\pi$
- حل معادلات مثلثية
- تبسيط تعبيرات جبرية تحتوي على دوال مثلثية

عمل تعاوني

١ أ على دائرة الوحدة، عيّن زاوية موجهة موجبة θ في الوضع القياسي ضلعها النهائي في الربع الأول.

ب أوجد θ.

جـ استخدم آلة حاسبة لإيجاد:
جاθ، جتاθ، جا$(-\theta)$، جتا$(-\theta)$.



٢ كرر الخطوات في ١ مع زاوية موجهة موجبة س ضلعها النهائي في الربع الثاني.

٣ ضع تخمينًا حول العلاقة بين قيم الدوال المثلثية لزاويتين كل منهما المعكوس الجمعي للأخرى.

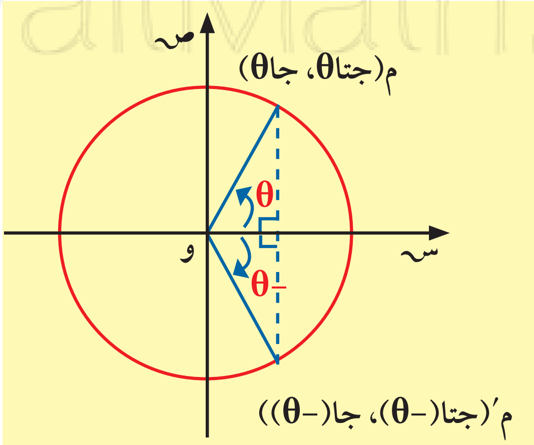
تسمى جاθ، جتاθ، ظاθ النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ وتدعى **النسب المثلثية الأساسية**

علمًا بأن
$-١ \leq$ جتا$\theta \leq ١$
$-١ \leq$ جا$\theta \leq ١$
ظا$\theta \in$ ح

النسب المثلثية للزاويتين θ، $-\theta$.

النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور السينات حيث م(س، ص) $\xrightarrow{ع_س}$ م′(س، −ص)

ويكون جتا$(-\theta)$ = جتاθ
جا$(-\theta)$ = −جاθ



تذكر
$ع_س$ تعني انعكاس في محور السينات.

قانون:
جتا$(-\theta)$ = جتاθ
جا$(-\theta)$ = −جاθ
وبالتالي ظا$(-\theta)$ = −ظاθ بشرط أن يكون ظاθ معرّف.

مثال (١)

أ إذا كان جتا $\frac{٣\pi}{٨} = \frac{\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}}{٢}$ ، فأوجد جتا $\left(-\frac{٣\pi}{٨}\right)$.

ب إذا كان جا ٣٦° ≃ ٠,٥٨٧٨ ، فأوجد جا(−٣٦°).

جـ إذا كان ظا ٤٥° = ١ ، فأوجد ظا(−٤٥°).

الحل:

أ جتا$\left(-\frac{٣\pi}{٨}\right)$ = جتا $\frac{٣\pi}{٨} = \frac{\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}}{٢}$.

ب جا(−٣٦°) = −جا ٣٦° ≃ −٠,٥٨٧٨ .

جـ ظا(−٤٥°) = −ظا ٤٥° = −١ .

حاول أن تحل

١ أكمل إذا كان:

أ جا م = ٠,٣ فإن جا(−م) = …

ب جتا ل = ٠,٣٨ فإن جتا(−ل) = …

جـ ظا س = ٣,١٤ فإن ظا(−س) = …

د جتا(−ص) = $\frac{١}{٤}$ فإن جتا ص = …

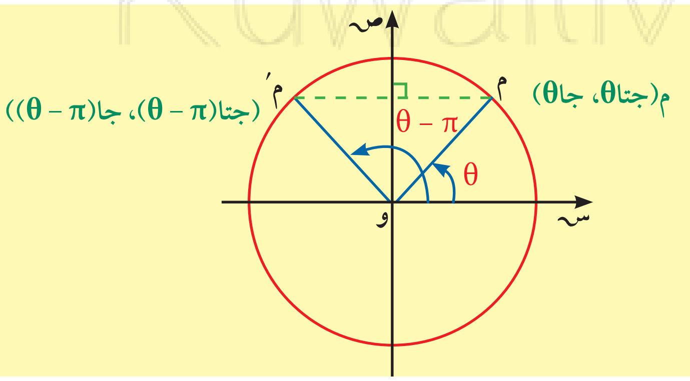
النسب المثلثية للزاويتين θ ، (π − θ).

النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور الصادات.

حيث م(س، ص) $\xrightarrow{ع_{ص}}$ م′(−س، ص)

فيكون: جتا(π − θ) = −جتاθ

جا(π − θ) = جاθ



قانون:

جتا(π − θ) = −جتاθ

جا(π − θ) = جاθ

وبالتالي ظا(π − θ) = −ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

تذكر

$ع_{ص}$ تعني انعكاس في محور الصادات.

مثال (٢)

بدون استخدام الآلة الحاسبة

إذا كان:

أ) جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ ، أوجد جتا ١٢٠°.

ب) جا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، أوجد جا $\frac{٣\pi}{٤}$.

ج) ظاθ = $\frac{٣}{٥}$ ، أوجد ظا$(\pi - \theta)$.

الحل:

أ) جتا ١٢٠° = جتا(١٨٠° − ٦٠°) = − جتا ٦٠° = − $\frac{١}{٢}$.

ب) جا $\frac{٣\pi}{٤}$ = جا$\left(\pi - \frac{\pi}{٤}\right)$ = جا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$.

ج) ظا$(\pi - \theta)$ = − ظاθ = − $\frac{٣}{٥}$.

معلومة مفيدة:

إذا كانت الزاوية α هي زاوية الإسناد للزاوية θ فإن:

جاα = |جاθ|

جتاα = |جتاθ|

ظاα = |ظاθ|

فمثلًا: الزاوية ٦٠° زاوية إسناد للزاوية ١٢٠°.

جتا٦٠° = |جتا ١٢٠°|

حاول أن تحل

٢) بدون استخدام الآلة الحاسبة. إذا كان:

أ) جا٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، فأوجد جا ١٥٠°.

ب) جتاس = $\frac{٤}{٥}$ ، فأوجد جتا$(\pi -$ س$)$.

ج) ظا $\frac{\pi}{١٢}$ = ٢ − $\sqrt{٣}$، فأوجد ظا $\frac{١١\pi}{١٢}$.

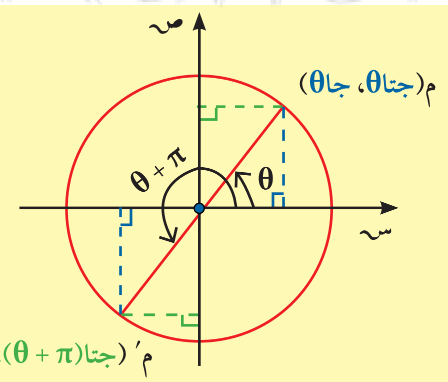
النسب المثلثية للزاويتين θ، $(\pi + \theta)$.

النقطة م′ هي انعكاس للنقطة م في نقطة الأصل.

حيث م(س، ص) $\xrightarrow[\text{نقطة الأصل}]{\text{انعكاس في}}$ م′(−س، −ص)

فيكون: جتا$(\pi + \theta)$ = −جتاθ

جا$(\pi + \theta)$ = −جاθ



قانون:

جتا$(\pi + \theta)$ = −جتاθ

جا$(\pi + \theta)$ = −جاθ

وبالتالي ظا$(\pi + \theta)$ = ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

مثال (٣)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان:

أ) جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، فأوجد جا ٢١٠°.

ب) ظا $\frac{\pi}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$ ، فأوجد ظا $\frac{٩\pi}{٨}$.

الحل:

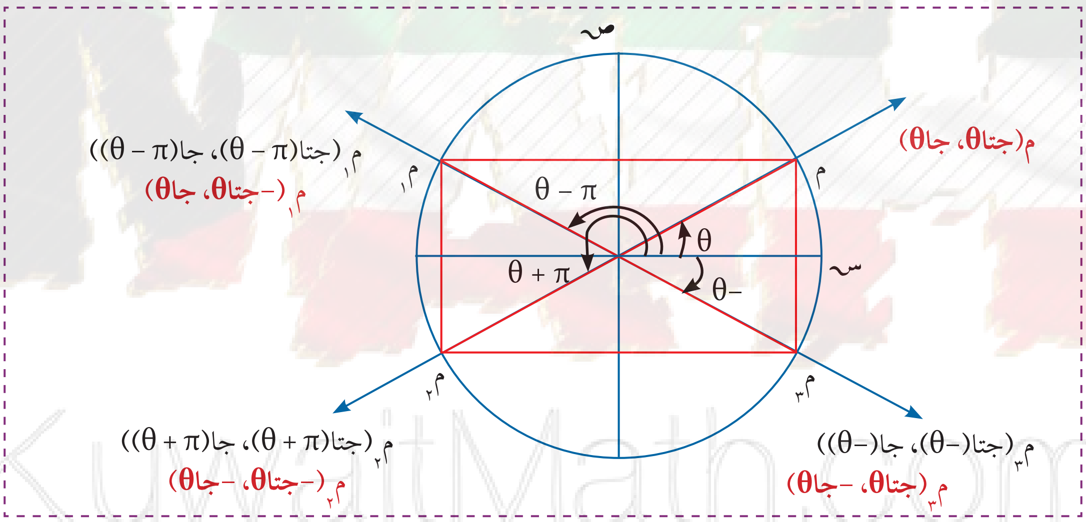
أ) جا ٢١٠° = جا(١٨٠° + ٣٠°) = −جا ٣٠° = −$\frac{١}{٢}$.

ب) ظا $\frac{٩\pi}{٨}$ = ظا$\left(\pi + \frac{\pi}{٨}\right)$ = ظا $\frac{\pi}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$.

حاول أن تحل

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتا ٤٠° ≃ ٠,٧٦٦ . فأوجد جتا ٢٢٠°.

الخلاصة:



مثال (٤)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، أوجد:

أ) جا ١٥٠°.

ب) جتا ٢٤٠°.

ج) ظا $\frac{٢\pi}{٣}$.

الحل:

أ) جا ١٥٠° = جا(١٨٠° − ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$.

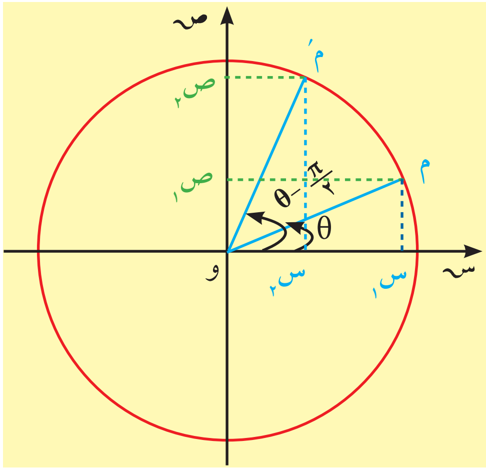
ب) جتا ٢٤٠° = جتا(١٨٠° + ٦٠°) = −جتا ٦٠° = −$\frac{١}{٢}$.

ج) ظا $\frac{٢\pi}{٣}$ = ظا$\left(\pi - \frac{\pi}{٣}\right)$ = −ظا $\frac{\pi}{٣}$ = −$\sqrt{٣}$.

حاول أن تحل

٤ إذا كان جا ٥٦° ≃ ٠,٨٢٩ . بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جا ٢٣٦°.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$



Δوس١ م $\cong$ Δ وص٢ م′ لماذا؟

استخدم تطابق الأضلاع المتناظرة لإثبات:

جتا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = جاθ

جا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = جتاθ

استنتاج: لأي زاويتين متتامتين، فإن جيب إحداهما يساوي جيب تمام الأخرى.

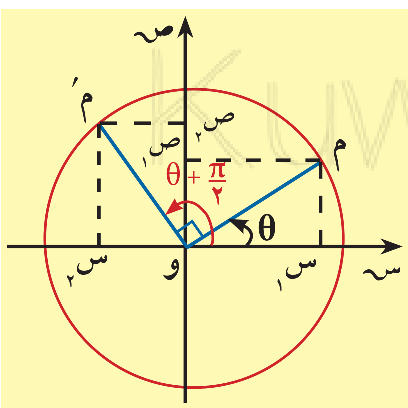
قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$



المثلثان وس١ م $\cong$ و ص٢ م′ متطابقان. لماذا؟

ما هي إحداثيات كلٍّ من م، م′؟

ما إشارة كلٍّ من جتا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$، جا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$؟

أثبت: جتا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = −جاθ، جا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = جتاθ.

قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = −جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = −ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

الدوال المثلثية (الدائرية) على ح   Trigonometric Functions on ℝ

رأينا حتى الآن قيم الدوال الدائرية (المثلثية) على الفترة [٠، ٢π) أو على مجموعة جزئية من هذه الفترة مثل:

[٠، $\frac{\pi}{٢}$) أو ($\frac{\pi}{٢}$، π)، ... على أساس أن الضلع النهائي للزاوية الموجهة في وضعها القياسي يكمل دورة واحدة على مجال التعريف أي عندما θ ∈ [٠، ٢π).

ولكن ماذا يحدث إذا سمحنا للضلع النهائي للزاوية θ بالدوران أكثر من دورة؟

يتبين لنا أنه إذا كانت θ قياس زاوية موجهة في وضع قياسي حيث نقطتها المثلثية (س، ص) سوف ترافقها زوايا موجهة كلًّا منها في وضع قياسي أيضًا وقياساتها (θ + ٢ك π) حيث ك عدد صحيح ولها النقطة المثلثية (س، ص)

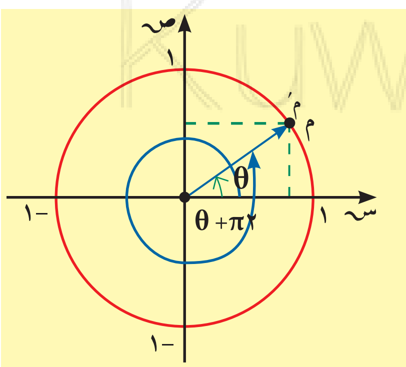
ونطلق عليها اسم «زوايا متكافئة»

وأصغر قياس غير سالب للزوايا المتكافئة يسمى القياس الأساسي.

فمثلًا: ٣٠°، ٣٠° + ١ × ٣٦٠°، ٣٠° + ٢ × ٣٦٠°، ٣٠° + ٣ × ٣٦٠°، ٣٠° − ٣٦٠°، ٣٠° − ٢ × ٣٦٠°

↓ ٣٠°، ٣٩٠°، ٧٥٠°، ١١١٠°، −٣٣٠°، −٦٩٠°

هي قياسات لزوايا متكافئة مع الزاوية التي قياسها الأساسي ٣٠°.



كما أن: $\frac{\pi}{٣}$، $\frac{٧\pi}{٣}$، $\frac{١٣\pi}{٣}$، $\frac{-٥\pi}{٣}$، $\frac{-١١\pi}{٣}$، هي قياسات لزوايا متكافئة مع الزاوية التي قياسها الأساسي $\frac{\pi}{٣}$.

وهكذا يمكن استنتاج ما يلي:

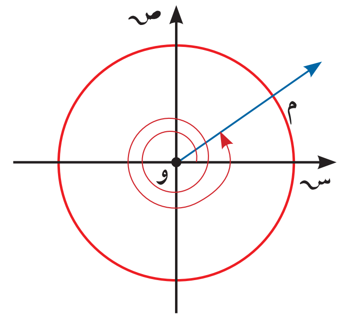
إذا كان ك عددًا صحيحًا فإن:

جا(θ + ٢ك π) = جاθ

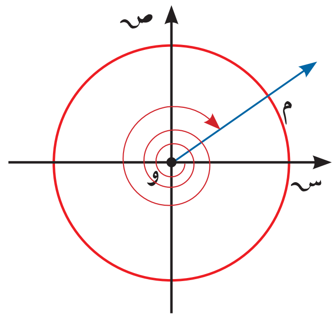
جتا(θ + ٢ك π) = جتاθ

ظا(θ + ك π) = ظاθ   حيث ظاθ معرّف

يبين الشكلان أدناه أن القوانين السابقة هي صحيحة أيضًا لأي زاوية قياسها θ:



دوران بالاتجاه الموجب

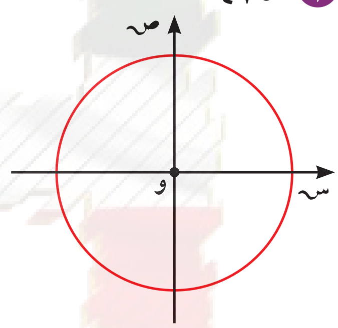


دوران بالاتجاه السالب

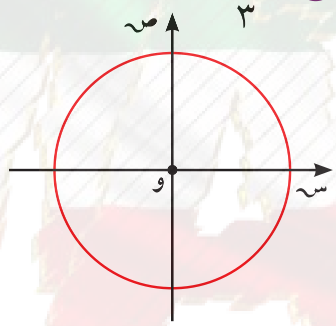
تدريب (١)

ارسم وحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية التي قياسها:

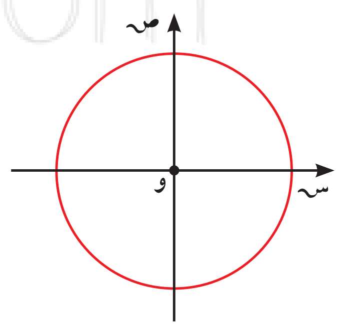
أ ٤٧٥°



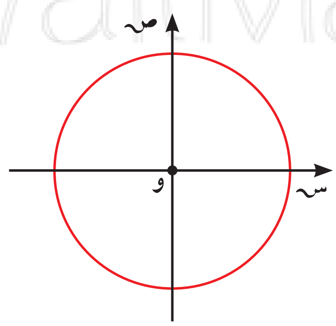
ب $\frac{17\pi}{3}$ (١٧π / ٣)



جـ $\frac{-16\pi}{3}$ (−١٦π / ٣)



د −٨٩٠°



تدريب (٢)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، أكمل:

جا ٣٩٠° = جا(٣٠° + ٣٦٠°) = ... = ...

جتا ٧٦٥° = ... = ... = ...

ظا $\left(\frac{-11\pi}{3}\right)$ = ظا(...............) = ... = ...

من العرض السابق يمكننا إعادة تعريف الدوال الدائرية باعتبار المجال هو ح فيكون:

تعريف:

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ فإن:

١ جاθ = ص ‏ ‏ $\forall\ \theta \in$ ح

٢ جتاθ = س ‏ ‏ $\forall\ \theta \in$ ح

٣ ظاθ = $\frac{ص}{س}$ ، س $\neq$ ٠ ‏ ‏ حيث $\theta \in$ ح

٤ قاθ = $\frac{١}{س}$ ، س $\neq$ ٠ ‏ ‏ حيث $\theta \in$ ح

٥ قتاθ = $\frac{١}{ص}$ ، ص $\neq$ ٠ ‏ ‏ حيث $\theta \in$ ح

٦ ظتاθ = $\frac{س}{ص}$ ، ص $\neq$ ٠ ‏ ‏ حيث $\theta \in$ ح

مثال (٥)

بسط التعبير التالي لأبسط صورة:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س).

الحل:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س)

= جا س + جتا س − جا س + جتا س

= ٢ جتا س

حاول أن تحل

٥ بسّط كلًّا من التعبيرات التالية لأبسط صورة:

أ جتا(θ + ٩π)

ب جتا$\left(-\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

حل معادلات مثلثية Solving Trigonometric Equations

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $-\theta$ تقع في الربع الرابع.

تعلمت في هذا الدرس أن جتاθ = جتا$(-\theta)$.

ولكن إذا عرفت جيب التمام لإحدى الزوايا، فهل يمكنك الجزم إن كانت الزاوية تساوي θ أو $-\theta$؟ عليك اعتماد الحلّين.

حل المعادلة: جتا س = جتاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = $-\theta$ + ٢ك π (ك $\in$ صـ)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

مثال (٦)

حل كلًّا من المعادلتين:

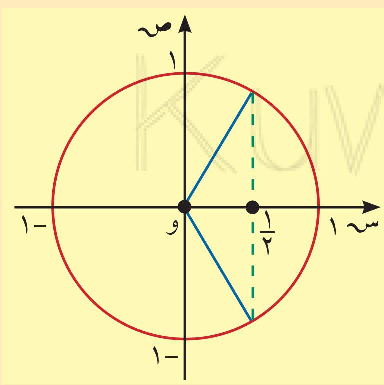
أ جتا س = $\frac{١}{٢}$

ب ٢ جتا س − $\sqrt{٣}$ = ٠

الحل:

أ جتا س = $\frac{١}{٢}$

جتا س = جتا $\frac{\pi}{٣}$ (نعتمد عادة على أصغر قياس غير سالب)



∵ جتا س > ٠

∴ سَ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

∴ س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π أو س = $-\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π (ك $\in$ صـ)

ب ٢جتا س − $\sqrt{٣}$ = ٠

جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا س = جتا $\frac{\pi}{٦}$

∵ جتا س > ٠

∴ سَ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

∴ س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π أو س = $-\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π (ك $\in$ صـ)

حاول أن تحل

٦ حل المعادلة : $\sqrt{٢}$ جتا س = ١.

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(\pi - \theta)$ تقع في الربع الثاني.

تعلمت أيضًا أن جاθ = جا$(\pi - \theta)$.

وبالتالي، إذا كانت جا س = جاθ فإنّ: س = θ + ٢ك π أو س = $(\pi - \theta)$ + ٢ك π (ك $\in$ ص)

حل المعادلة جا س = جاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = $(\pi - \theta)$ + ٢ك π ، (ك $\in$ ص)

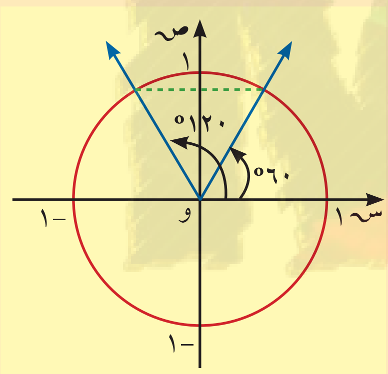
لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

مثال (٧)

حل كلًّا من المعادلتين:

أ) جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ب) ٢ جا س = $\sqrt{٢}$

الحل:



أ) جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

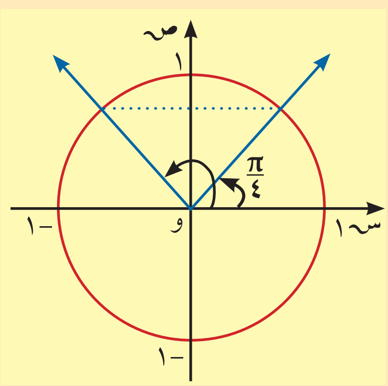
جا س = جا $\frac{\pi}{٣}$

$\because$ جاس > ٠

$\therefore$ سٓ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني.

س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π أو س = $\left(\pi - \frac{\pi}{٣}\right)$ + ٢ك π (ك $\in$ ص)

س = $\frac{٢\pi}{٣}$ + ٢ك π



ب) ٢ جا س = $\sqrt{٢}$

جا س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

$\therefore$ جا س = جا $\frac{\pi}{٤}$

$\because$ جا س > ٠

$\therefore$ سٓ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني.

$\therefore$ س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ك π أو س = $\left(\pi - \frac{\pi}{٤}\right)$ + ٢ك π (ك $\in$ ص)

س = $\frac{٣\pi}{٤}$ + ٢ك π

حاول أن تحل

٧) حل المعادلة: ٢ جا س – ١ = ٠.

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(\theta + \pi)$ تقع في الربع الثالث.

الزاويتان θ، $\theta + \pi$ لهما الظل نفسه.

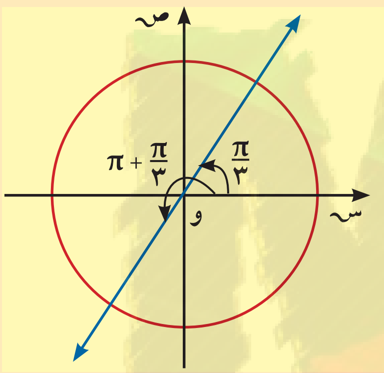
ظاθ = ظا$(\theta + \pi)$

حل المعادلة ظا س = ظاθ هو س = θ + ك π، (ك $\in$ ص)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

مثال (٨)

حل المعادلة: ظا س = $\sqrt{٣}$.



الحل:

ظا س = $\sqrt{٣}$

ظا س = ظا $\frac{\pi}{٣}$ وحيث ظا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الربع الثالث.

س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π أو س = $\left(\pi + \frac{\pi}{٣}\right)$ + ٢ك π (ك $\in$ ص)

س = $\frac{٤\pi}{٣}$ + ٢ك π

حاول أن تحل

٨ حل المعادلة: $\sqrt{٣}$ ظا س = ١.

مثال (٩)

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جتا$\left(٣س + \frac{\pi}{٦}\right)$ = جتا$\left(س - \frac{\pi}{٣}\right)$

ب جا ٢ س = جتا$\left(س + \frac{\pi}{٤}\right)$

الحل:

أ جتا$\left(٣س + \frac{\pi}{٦}\right)$ = جتا$\left(س - \frac{\pi}{٣}\right)$

٣س + $\frac{\pi}{٦}$ = س − $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π أو ٣س + $\frac{\pi}{٦}$ = −$\left(س - \frac{\pi}{٣}\right)$ + ٢ك π (ك $\in$ ص)

٢س = −$\frac{\pi}{٣}$ − $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π أو ٤س = $\frac{\pi}{٣}$ − $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π

$٢س = -\frac{\pi}{٢} + ٢ك\pi$ أو $٤س = \frac{\pi}{٦} + ٢ك\pi$

$س = -\frac{\pi}{٤} + ك\pi$ أو $س = \frac{\pi}{٢٤} + \frac{١}{٢}ك\pi$

ب جا ٢س = جا$\left(س + \frac{\pi}{٤}\right)$

$٢س = س + \frac{\pi}{٤} + ٢ك\pi$ أو $٢س = \pi - \left(س + \frac{\pi}{٤}\right) + ٢ك\pi$ (ك ∈ ص)

$٢س - س = \frac{\pi}{٤} + ٢ك\pi$ أو $٢س + س = \pi - \frac{\pi}{٤} + ٢ك\pi$

$س = \frac{\pi}{٤} + ٢ك\pi$ أو $٣س = \frac{٣\pi}{٤} + ٢ك\pi$

$س = \frac{\pi}{٤} + ٢ك\pi$ أو $س = \frac{\pi}{٤} + \frac{٢}{٣}ك\pi$

حاول أن تحل

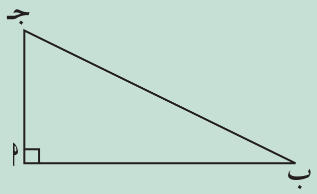
٩ حل كلًّا من المعادلتين:

أ جتا$\left(٣س - \frac{\pi}{٤}\right)$ = جتا$\left(س + \frac{\pi}{٣}\right)$ **ب** جا$\left(٢س + \frac{\pi}{٥}\right)$ = جا س

٨-٣

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)
Relations Between Trigonometric Functions (2)

عمل تعاوني



١ (أ) ارسم مثلثًا ﺃب جـ قائم الزاوية ﺃ.

(ب) أوجد ق(ب̂)، ق(جـ̂) مستخدمًا منقلة.

(جـ) استخدم آلة حاسبة لإيجاد: جا ب، جتا ب، جا^{٢} ب، جا^{٢} ب + جتا^{٢} ب.

جا جـ، جتا جـ، جا^{٢} جـ، جا^{٢} جـ + جتا^{٢} جـ.

٢ كرر الخطوات أ، ب، جـ مع مثلث آخر ﺃ' ب' جـ' قائم الزاوية ﺃ'.

٣ ضع تخمينًا يبيّن ما حصلت عليه.

سوف تتعلم

- متطابقات فيثاغورث
- علاقات مثلثية
- تبسيط عبارات تتضمن دوالّ مثلثية
- برهنة صحة بعض المتطابقات المثلثية

في هذا الدرس كلّه، θ زاوية ليست ربعية.

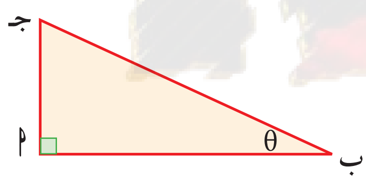
يمكن استخدام المثلث ﺃب جـ قائم الزاوية ﺃ، لإثبات المتطابقات المثلثية الأساسية.

تدريب

أكمل:

$\text{جا}\,\theta = \frac{\dots}{\text{الوتر}}$ ، $\text{جتا}\,\theta = \frac{\dots}{\text{الوتر}}$

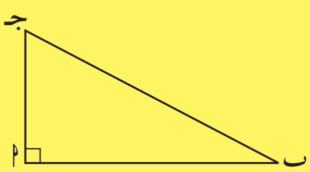
$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\dots} = \frac{\frac{\dots}{\text{الوتر}}}{\frac{\dots}{\text{الوتر}}} = \frac{\dots}{\dots}$



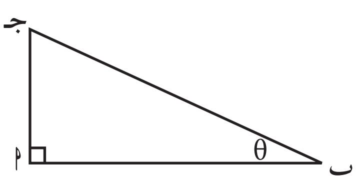
المتطابقات المثلثية الأساسية Basic Trigonometric Identities

$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{1}{\text{ظا}\,\theta}$ حيث المقام ≠ ٠

$\text{قا}\,\theta = \frac{1}{\text{جتا}\,\theta}$ ، $\text{قتا}\,\theta = \frac{1}{\text{جا}\,\theta}$



متطابقات فيثاغورث Pythagorian Identities



في الشكل المقابل ∆بﺃجـ قائم الزاوية ﺃ:

$\text{جا}\,\theta = \frac{\text{ﺃجـ}}{\text{ب جـ}}$ ، $\text{جتا}\,\theta = \frac{\text{ﺃب}}{\text{ب جـ}}$ ، $\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{ﺃجـ}}{\text{ﺃب}}$

$\text{جا}^2\,\theta + \text{جتا}^2\,\theta = \left(\frac{\text{ﺃجـ}}{\text{ب جـ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ﺃب}}{\text{ب جـ}}\right)^2 = \frac{(\text{ﺃجـ})^2}{(\text{ب جـ})^2} + \frac{(\text{ﺃب})^2}{(\text{ب جـ})^2}$

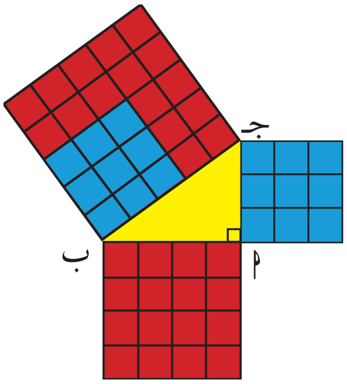
$= \frac{(\text{ﺃجـ})^2 + (\text{ﺃب})^2}{(\text{ب جـ})^2}$ (١)

∵ ﺃب جـ قائم الزاوية في ﺃ

∴ (أجـ)^{٢} + (أب)^{٢} = (ب جـ)^{٢} **نظرية فيثاغورث**

وبالتعويض في (١) نحصل على: جا^{٢} θ + جتا^{٢} θ = $\frac{(\text{ب جـ})^{٢}}{(\text{ب جـ})^{٢}}$ = ١

جا^{٢} θ + جتا^{٢} θ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث



(أب)^{٢} تساوي عدد المربعات الصغيرة الموجودة في المربع الذي ضلعه $\overline{\text{أب}}$ كذلك بالنسبة إلى $\overline{\text{أجـ}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$.

مثال (١)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتاθ = ٠,٤ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$.

أ) أوجد جاθ.

ب) استنتج ظاθ.

الحل:

أ) باستخدام متطابقة فيثاغورث:

جا^{٢} θ + جتا^{٢} θ = ١

جا^{٢} θ + (٠,٤)^{٢} = ١

جا^{٢} θ = ١ − (٠,٤)^{٢} = ٠,٨٤

جاθ ≃ ٠,٩١٧   أو   جاθ ≃ −٠,٩١٧ مرفوض لأن ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$.

ب) ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ ≃ $\frac{٠,٩١٧}{٠,٤}$ ≃ ٢,٢٩.

حاول أن تحل

١) بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جاθ = $\frac{٣}{٥}$ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$ فأوجد جتاθ، ظاθ.

العلاقة بين ظاθ، قاθ   Relation Between tan θ, sec θ

إذا قسمنا طرفي متطابقة فيثاغورث على جتا^{٢} θ نحصل على:

$\frac{\text{جتا}^{٢}\theta}{\text{جتا}^{٢}\theta} + \frac{\text{جا}^{٢}\theta}{\text{جتا}^{٢}\theta} = \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\theta}$ حيث جتا θ ≠ ٠

١ + ظا^{٢} θ = قا^{٢} θ

∴ **١ + ظا^{٢} θ = قا^{٢} θ**

مثال (٢)

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = ٢$\sqrt{٢}$، جتاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

الحل:

طريقة أولى:

ظاθ = ٢$\sqrt{٢}$

$\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ = ٢$\sqrt{٢}$

∴ جاθ = ٢$\sqrt{٢}$ جتاθ (١)

∵ جا^{٢} θ + جتا^{٢} θ = ١

∴ (٢$\sqrt{٢}$ جتاθ)^{٢} + جتا$^{٢}\theta$ = ١ متطابقة فيثاغورث

٨جتا^{٢} θ + جتا^{٢} θ = ١ عوّض عن جاθ بـ ٢$\sqrt{٢}$ جتاθ

٩جتا^{٢} θ = ١

∴ جتا^{٢} θ = $\frac{١}{٩}$

∴ جتاθ = $\frac{١}{٣}$ (قيمة مرفوضة لأن جتاθ < ٠) أو جتاθ = $-\frac{١}{٣}$

من (١) نحصل على: جاθ = ٢$\sqrt{٢}$ × $\left(-\frac{١}{٣}\right)$

جاθ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

طريقة ثانية:

قا^{٢} θ = ١ + ظا^{٢} θ

قا^{٢} θ = ١ + (٢$\sqrt{٢}$)^{٢}

قا^{٢} θ = ٩

∴ قاθ = ٣ أو قاθ = −٣

∴ $\frac{١}{\text{جتا}\theta}$ = ٣ أو $\frac{١}{\text{جتا}\theta}$ = −٣

∴ جتاθ = $\frac{١}{٣}$ (وهي قيمة مرفوضة لأن جتاθ < ٠) أو جتاθ = $-\frac{١}{٣}$

∵ $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ = ٢$\sqrt{٢}$ ومنه جاθ = $\frac{-١}{٣}$ × ٢$\sqrt{٢}$ أي جاθ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

معلومة رياضية:

إذا كان ظاθ > ٠

∴ جاθ، جتاθ لهما الإشارة نفسها.

حاول أن تحل

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظاθ = $\frac{٣}{٤}$، جاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

مثال (٣)

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظا θ = $\frac{١٢}{٥}$ ، جا θ < ٠ فأوجد جا θ، جتا θ.

الحل:

طريقة أولى: نبدأ بتحديد إشارة جتا θ

ظا θ = $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$

∴ جتا θ = $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{ظا}\,\theta}$ < ٠ لأن جا θ < ٠، ظا θ > ٠

١ + ظا^{٢} θ = قا^{٢} θ

١ + $\left(\frac{١٢}{٥}\right)^{٢}$ = قا^{٢} θ

قا^{٢} θ = ١ + $\frac{١٤٤}{٢٥}$ = $\frac{٢٥ + ١٤٤}{٢٥}$ = $\frac{١٦٩}{٢٥}$

قا θ = $\frac{١٣}{٥}$ قا θ = $-\frac{١٣}{٥}$ مرفوضة

جتا θ = $\frac{١}{\text{قا}\,\theta}$ = $\frac{٥}{١٣}$

ظا θ = $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$

جا θ = ظا θ × جتا θ

جا θ = $\frac{١٢}{٥}$ × $\left(\frac{٥}{١٣}\right)$ جا θ = $\frac{١٢}{١٣}$، جتا θ = $\frac{٥}{١٣}$

طريقة ثانية: نرسم Δ أ ب جـ قائم الزاوية أ حيث أب = ٥ك، أجـ = ١٢ك. (لأن الزاوية θ تقع في الربع الأول)

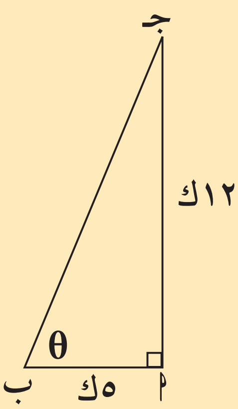
(ب جـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (أجـ)^{٢} نظرية فيثاغورث

ب جـ^{٢} = (٥ك)^{٢} + (١٢ك)^{٢} = ٢٥ك^{٢} + ١٤٤ك^{٢} = ١٦٩ك^{٢}

ب جـ = ١٣ك

جا θ = $\frac{١٢\text{ك}}{١٣\text{ك}}$ = $\frac{١٢}{١٣}$،

جتا θ = $\frac{٥\text{ك}}{١٣\text{ك}}$ = $\frac{٥}{١٣}$



حاول أن تحل

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظا θ = $\frac{٢٤}{٧}$ ، جتا θ < ٠ فأوجد جا θ، جتا θ.

العلاقة بين ظتاθ، قتاθ Relation Between cot θ, csc θ

$1 + \text{ظتا}^2\theta = 1 + \dfrac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}$

$1 + \text{ظتا}^2\theta = \dfrac{\text{جا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta} + \dfrac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}$

$1 + \text{ظتا}^2\theta = \dfrac{\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}$ المقام المشترك

$1 + \text{ظتا}^2\theta = \dfrac{1}{\text{جا}^2\theta} = \text{قتا}^2\theta$ جا$^2\theta$ + جتا$^2\theta$ = ١

$\therefore$ $\boxed{1 + \text{ظتا}^2\theta = \text{قتا}^2\theta}$

مثال (٤)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جا$\theta = \dfrac{3}{7}$ ، جتاθ > ٠ فأوجد ظتاθ، ظاθ.

الحل:

$1 + \text{ظتا}^2\theta = \dfrac{1}{\text{جا}^2\theta}$

$1 + \text{ظتا}^2\theta = \dfrac{1}{\left(\frac{3}{7}\right)^2} = \dfrac{1}{\frac{9}{49}} = \dfrac{49}{9}$

$\text{ظتا}^2\theta = \dfrac{49}{9} - 1 = \dfrac{40}{9}$

$\text{ظتا}\theta = \dfrac{\sqrt{40}}{3}$ أو $\text{ظتا}\theta = -\dfrac{\sqrt{40}}{3}$

$\because$ جاθ، جتاθ لهما الإشارة نفسها (موجبة)

$\therefore$ ظتاθ > ٠ وبالتالي $\text{ظتا}\theta = \dfrac{\sqrt{40}}{3}$

$\text{ظا}\theta = \dfrac{1}{\text{ظتا}\,\theta} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{40}}{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{40}} \simeq 0{,}474$

ملاحظة: يمكن حل المثال ٤ باستخدام متطابقة فيثاغورث: جا$^2\theta$ + جتا$^2\theta$ = ١.

أو رسم مثلث قائم الزاوية واستخدام نظرية فيثاغورث. حاول ذلك.

حاول أن تحل

٤ بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظتا$\theta = \dfrac{5}{8}$، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ.

مثال (٥)

أثبت صحة المتطابقة التالية: جا^{3}س + جاس × جتا^{2}س = جاس.

الحل:

جا^{3}س + جاس × جتا^{2}س = جا س (جا^{2}س + جتا^{2}س)

= جا س × ١   جا^2 س + جتا^2 س = ١

= جاس.

حاول أن تحل

٥ أثبت صحة المتطابقة: جتا^{4}س + جا^{2}س × جتا^{2}س = جتا^{2}س.

مثال (٦)

أثبت صحة المتطابقة التالية: $\frac{(\text{قا}\theta + ١)(\text{قا}\theta - ١)}{\text{جا}^2 \theta}$ = قا^2 θ. حيث المقام ≠ ٠

الحل:

$\frac{(\text{قا}\theta + ١)(\text{قا}\theta - ١)}{\text{جا}^2 \theta} = \frac{\text{قا}^2 \theta - ١}{\text{جا}^2 \theta}$ (أ + ب)(أ − ب) = أ^2 − ب^2

$= \frac{\text{ظا}^2 \theta}{\text{جا}^2 \theta}$ ١ + ظا^2 θ = قا^2 θ

$= \frac{\text{جا}^2 \theta}{\text{جتا}^2 \theta} \times \frac{١}{\text{جا}^2 \theta}$ ظا θ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

$= \frac{١}{\text{جتا}^2 \theta}$

= قا^2 θ

حاول أن تحل

٦ أثبت صحة المتطابقة: (قا^2 θ + قتا^2 θ) − (ظا^2 θ + ظتا^2 θ) = ٢.

مثال (٧) **إثرائي**

حلّ المعادلة: $\frac{\text{جتا}^{٣}\theta}{\text{جا}\theta}$ = ظتاθ، حيث $\theta \in$ (٠، ٢π).

شرط أن تكون جا$\theta \neq$ ٠

الحل:

$\frac{\text{جتا}^{٣}\theta}{\text{جا}\theta}$ = ظتاθ

$\frac{\text{جتا}^{٣}\theta}{\text{جا}\theta} = \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$

$\because$ جا$\theta \neq$ ٠

$\therefore$ جتا$^{٣}\theta$ = جتاθ

جتا$^{٣}\theta$ − جتاθ = ٠

جتاθ (جتا$^{٢}\theta$ − ١) = ٠

جتاθ (− جا$^{٢}\theta$) = ٠ متطابقة فيثاغورث

جتاθ = ٠ أو جا$^{٢}\theta$ = ٠

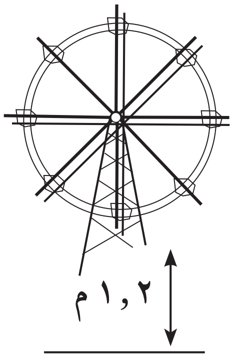
جتاθ = ٠ أو جاθ = ٠ مرفوضة

قيم θ على الفترة (٠، ٢π) التي تحقق جتاθ = ٠ هي $\theta = \frac{\pi}{٢}$ أو $\theta = \frac{٣\pi}{٢}$.

حاول أن تحل

٧ حلّ المعادلة: ٢ جا س جتا س − جتا س = ٠ حيث س $\in$ [٠، ٢π)

المرشد لحل المسائل

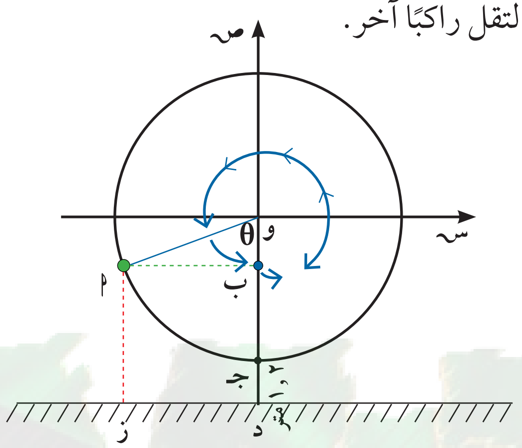


في مدينة الملاهي، ركب سلطان الدوارة.

دارت الدوارة عكس اتجاه دوران عقارب الساعة وتوقفت لتقل راكبًا آخر.

تساءل محمد: ما ارتفاع سلطان عن الأرض؟

كيف فكر محمد؟



بداية، سوف ارسم مخططًا.

تمثل النقطة أ موقع سلطان عند توقف الدوارة.

جـ د = ١,٢ متر (الارتفاع عن الأرض)

زاوية الدوران = ٢π − θ

عليّ إيجاد طول القطعة $\overline{\text{أز}}$.

أز = ب د

سأستخدم ما تعلمته في الوحدة عن النسب المثلثية.

المثلث أب و قائم الزاوية ب

جتا(٢π − θ) = $\frac{\text{وب}}{\text{وأ}}$

جتاθ = $\frac{\text{وب}}{\text{نق}}$

∴ وب = نق × جتاθ

سأستخدم خواص القطع المستقيمة.

ب د = ب جـ + جـ د

ولكن ب جـ = وجـ − وب

∴ ب د = وجـ − وب + جـ د

ب د = نق − نق × جتاθ + جـ د

ب د = نق(١ − جتاθ) + ١,٢

استنتاج محمد: عليّ معرفة طول نصف قطر الدوارة وزاوية الدوران لإيجاد ارتفاع سلطان عن الأرض.

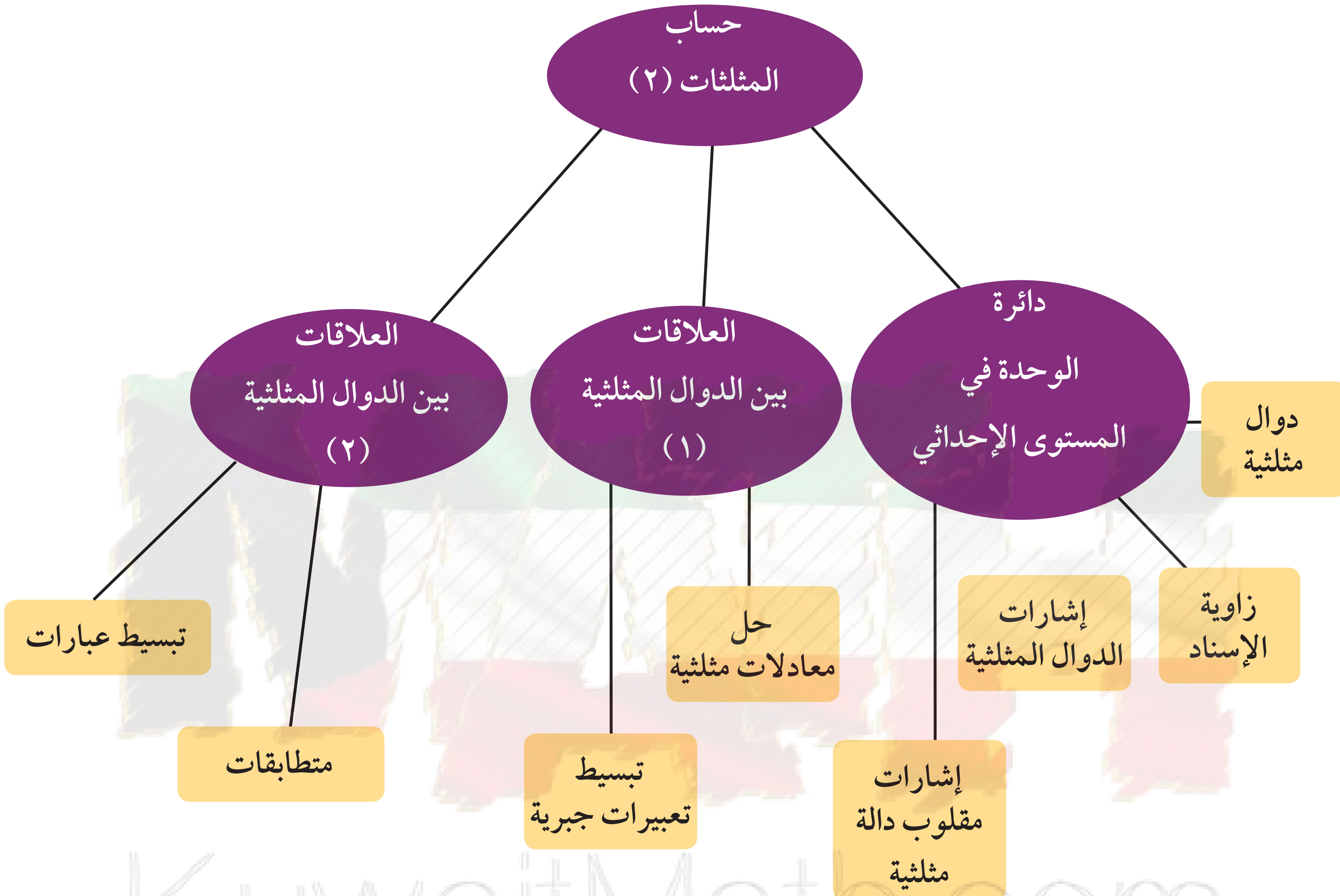
تطبيق

في المسألة أعلاه، أوجد ارتفاع سلطان عن الأرض إذا كان طول نصف قطر الدوارة ٥ أمتار وقياس الزاوية التي يصنعها مقعد سلطان مع المحور الرأسي للدوارة ٣٠°.

مسألة إضافية

ركب سالم دوارة طول نصف قطرها ٦ أمتار وترتفع قاعدتها ١,٥ متر عن الأرض. أوجد الزاوية التي يصنعها مقعد سالم مع المحور الرأسي للدوارة إذا كان سالم على ارتفاع ١١,٧ مترًا.

مخطط تنظيمي للوحدة الثامنة



ملخص

- الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها واحد وحدة تسمى «دائرة الوحدة».

- نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة تسمى «النقطة المثلثية».

- زاوية الإسناد للزاوية الموجهة ($\overrightarrow{\text{وب}}$، $\overrightarrow{\text{وجـ}}$) التي في وضع قياسي هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات. ($°٠ < \alpha < °٩٠$).

قاθ = $\frac{١}{\text{جتا}\theta}$ ؛ قتاθ = $\frac{١}{\text{جا}\theta}$ ؛ ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ ؛ ظتاθ = $\frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$ المقام ≠ ٠

- دالة الجيب: د(θ) = جاθ حيث جاθ = ص

- دالة جيب التمام: د(θ) = جتاθ حيث جتاθ = س

- دالة الظل: د(θ) = ظاθ حيث ظاθ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ؛ س ≠ ٠

- دالة القاطع: د(θ) = قاθ حيث قاθ = $\frac{١}{\text{س}}$ ؛ س ≠ ٠

- دالة قاطع التمام: د(θ) = قتاθ حيث قتاθ = $\frac{١}{\text{ص}}$ ؛ ص ≠ ٠

- دالة ظل التمام: د(θ) = ظتاθ حيث ظتاθ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ؛ ص ≠ ٠

- في الربع الأول جميع الدوال المثلثية موجبة.

- في الربع الثاني جاθ، قتاθ موجبتان وبقية الدوال سالبة.

- في الربع الثالث ظاθ، ظتاθ موجبتان وبقية الدوال سالبة.

- في الربع الرابع جتاθ، قاθ موجبتان وبقية الدوال سالبة.

- إشارة مقلوب دالة مثلثية هي إشارة الدالة المثلثية الأصلية نفسها.

– العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية:

جا$(-\theta)$ = –جاθ؛ جتا$(-\theta)$ = جتاθ؛ ظا$(-\theta)$ = –ظاθ

جا$(\pi - \theta)$ = جاθ؛ جتا$(\pi - \theta)$ = –جتاθ؛ ظا$(\pi - \theta)$ = –ظاθ

جا$(\pi + \theta)$ = –جاθ؛ جتا$(\pi + \theta)$ = –جتاθ ؛ ظا$(\pi + \theta)$ = ظاθ

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتاθ؛ جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جاθ

جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = جتاθ؛ جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = –جاθ

جا$(\theta + ٢$ك $\pi)$ = جاθ؛ جتا$(\theta + ٢$ك $\pi)$ = جتاθ حيث ك عدد صحيح

جا$^{٢}\,\theta$ + جتا$^{٢}\,\theta$ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث

قا$^{٢}\,\theta$ = ١ + ظا$^{٢}\,\theta$ = $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\,\theta}$ حيث المقام ≠ ٠

قتا$^{٢}\,\theta$ = ١ + ظتا$^{٢}\,\theta$ = $\frac{١}{\text{جا}^{٢}\,\theta}$ حيث المقام ≠ ٠