الوحدة الثالثة

الجبر - التغير
Algebra - Variation

مشروع الوحدة: تحويل التروس Shifting Gears في الدراجات الهوائية الرياضية.

١ مقدمة المشروع:

يستخدم الرياضيون في سباقات الدراجات الهوائية دراجات لها تروس متغيّرة.
يمكن للتروس والروافع أن تسهّل العمل، لكن تبقى هناك مفاضلة للجودة. فالتروس العالية في الدراجة تسمح بالسير مسافة أكبر مع كل دورة من الدواسات ولكن بمجهود أكبر.

٢ الهدف:

كيف تختار التروس الملائمة خلال ركوب الدراجة: أماكن مسطحة، صعود الجبال، سباقات السرعة، أو المسافات الطويلة.
سوف تستخدم ما تتعلمه في الوحدة حول التغير والتناسبات في عملك.

٣ اللوازم:

أوراق، أوراق رسم بياني، آلة حاسبة.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ ضع جدولًا يبيّن المسافات التي تقطعها على دراجتك مستخدمًا تروسات مختلفة، ولمدة زمنية ثابتة وعلى الطريق نفسها.
ب أعد التجربة واختر طريقًا غير مسطحة (صعودًا ثم نزولًا).
جـ اسأل أحد المحال التجارية عن خصائص الدراجات التي يستخدمها الرياضيون في السباقات وقارنها بخصائص الدراجات التي قدتها.
د التقرير: ضع تقريرًا مفصلًا تبيّن فيه كيف استفدت من النسب والتناسب في تنفيذ المشروع.

دروس الوحدة

النسبة والتناسب	التغير الطردي	التغير العكسي
٣-١	٣-٢	٣-٣

الوحدة الثالثة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت تمثيل العلاقات بيانيًّا باستخدام المتغيرات.
- استكشفت أنماط الدوال.
- تعرفت طرائق حل معادلات ومتباينات من الدرجة الأولى بمتغير واحد أو بمتغيرين.
- تعرفت طرائق حل معادلات ومتباينات من الدرجة الثانية بمتغير واحد ومثلت الحلول بيانيًّا.
- تعرفت التناسب وبعض خواص التناسب.

ماذا سوف تتعلم؟

- النسبة والتناسب واستخدامهما في حل مسائل حياتية.
- خواص التناسب المتسلسل.
- التغير الطردي.
- التغير العكسي.

المصطلحات الأساسية

النسبة – مقياس الرسم – التناسب – التناسب المتسلسل (الهندسي) – التغير الطردي – التغير العكسي.

أضف إلى معلوماتك

الجبر كلمة عربية استخدمها محمد بن موسى الخوارزمي (القرن التاسع الميلادي في عصر الخليفة العباسي المأمون) في كتابه الذي ألفه وكان عنوانه «الجبر والمقابلة» والذي وضع فيه طرقًا أصيلةً لحلّ المعادلات، وبذلك يعتبر الخوارزمي مؤسس علم الجبر بعد أن كان الجبر جزءًا من الحساب. وقد ترجم الكتاب إلى اللغات الأوروبيّة بعنوان «الجبر» ومنها أخذ العلم «الجبر» (algebra) هذا الاسم.

ويقول ابن الياسمين (أحدُ الرياضيّين الشعراء):

على ثلاثة يدور الجبر
المال والأعداد ثم الجذر
فالمال كل عدد مربع
وجذره واحد تلك الأضلع
والعدد المطلق ما لم ينسب
للمال أو للجذر، فافهم تصب

محمد بن موسى الخوارزمي

٣ – ١

النسبة والتناسب
Ratio and Proportion

سوف تتعلم
- بعض خواص التناسب
- تمارين وتطبيقات هندسيّة
- خواص التناسب المتسلسل

دعنا نفكر ونتناقش

تعلم أن **النسبة** هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه يمكن تمثيلها بكسر.
فمثلًا: النسبة بين العدد ٣ (الحد الأول)، والعدد ٤ (الحد الثاني) هي $\frac{٣}{٤}$ ويمكن التعبير عن هذه النسبة بالصورة ٣:٤ وتُقرأ ٣ إلى ٤.

يستخدم التناسب في تطبيقات حياتية، ومن أهمها **مقياس الرسم** الذي يستخدم في عمل الخرائط والرسوم الهندسية بمقاييس مصغرة للأشكال الحقيقية، وذلك بنسبة ثابتة بين الأبعاد في الرسم والأبعاد في الحقيقة.

مثال (١)

إذا كانت المسافة بين الكويت العاصمة والرياض هي ٥٥٠ كم، وكانت هذه المسافة ممثَّلةً في إحدى الخرائط بقطعة مستقيمة طولها ١١ سم. أوجد مقياس الرسم، ثم أوجد النسبة بين الطول على الخريطة والمسافة الحقيقيّة.

تذكر:
١ كم = ١٠٠٠٠٠ سم

الحلّ:

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{\text{المسافة على الخريطة}}{\text{المسافة الحقيقية}}$$

$$= \frac{\text{١١ سم}}{\text{٥٥٠ كم}} = \frac{\text{١١ سم}}{\text{٥٥٠٠٠٠٠٠ سم}}$$

حيث إن الكميتين من النوع نفسه يمكن كتابتها كنسبة بالصورة:

$\frac{١١}{٥٥٠٠٠٠٠٠}$ أو ١١ : ٥٥٠٠٠٠٠٠

أي النسبة تساوي ١ : ٥٠٠٠٠٠٠

حاول أن تحل

١ من مثال (١) استخدم مقياس الرسم على الخريطة لإيجاد المسافة الحقيقيّة بين الدمام والكويت العاصمة.

التناسب Proportion

التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.

فمثلًا: $\frac{٣}{٤} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{١٥}{٢٠} = ...$

ويمكن كتابة ذلك كالآتي: ٣:٤ = ١٢:١٦ = ١٥:٢٠ ...

وتقرأ ٣ إلى ٤ هي نفسها ١٢ إلى ١٦ هي نفسها ١٥ إلى ٢٠ ...

خاصيّة التساوي:

ليكن أ، ب، جـ، د، ∈ ح*، ك ∈ ح.

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنّ $\frac{أ}{ب} \times ك = \frac{جـ}{د} \times ك$ ، $ك \times \frac{أ}{ب} = ك \times \frac{جـ}{د}$

تذكر:

ح* هي مجموعة الأعداد الحقيقية غير الصفرية

ح* = ح − {٠}

الرمز ∈ يقرأ ينتمي إلى

فمثلًا:

نعلم أن $\frac{٣}{٤} = \frac{١٥}{٢٠}$ بضرب الطرفين في ٢ نجد أن:

$\frac{٣}{٤} \times ٢ = \frac{١٥}{٢٠} \times ٢$ أي أن $\frac{٣}{٢} = \frac{١٥}{١٠}$

مثال (٢)

إذا كان $\frac{أ}{٩} = \frac{٥}{٦}$ فأوجد قيمة أ.

الحل: $\frac{أ}{٩} = \frac{٥}{٦}$

$٩ \times \frac{أ}{٩} = ٩ \times \frac{٥}{٦}$ بضرب الطرفين في ٩ (النظير الضربي لـ $\frac{١}{٩}$)

$أ = \frac{١٥}{٢}$ بالتبسيط

أ = ٧,٥

حاول أن تحل

٢ إذا كان $\frac{٤}{٦} = \frac{ص}{٩}$ فأوجد قيمة ص.

خاصيّة الضرب التقاطعي:

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$

ليكن أ، ب، جـ، د ∈ ح*

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإن أ د = ب جـ

فمثلًا: $\frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$ من ذلك نجد أن:

$١٢ \times ٤ \stackrel{?}{=} ١٦ \times ٣$

$٤٨ = ٤٨$ عبارة صحيحة

مثال (٣)

أوجد قيمة ص في التناسب: $\frac{\text{ص}}{٢,٥} = -\frac{٣}{٤}$

الحل:

$\text{ص} \times ٤ = -٣ \times ٢,٥$ ضرب تقاطعي

$٤\text{ص} = -٧,٥$

$\text{ص} = -\frac{٧,٥}{٤}$ بقسمة الطرفين على ٤

$\text{ص} = -١,٨٧٥$

حاول أن تحل

٣ أوجد قيمة ب في التناسب: $\frac{٢}{\text{ب}} = \frac{٨}{٢٠}$

تعريف:

ليكن أ، ب، جـ، د ∈ ح*

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإنه يقال أن أ، ب، جـ، د **أعداد متناسبة**.

وإذا كانت أ، ب، جـ، د أعداد متناسبة فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$

ويسمى أ، د **طرفي التناسب**، كما يسمى جـ، ب **وسطي التناسب**.

ولأنّ في هذه الحالة أ د = ب جـ خاصيّة الضرب التقاطعي

فإنّ: حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين.

مثال (٤)

أثبت أن ٤ ، ١,٥ ، ٨ ، ٣ أعداد متناسبة.

الحل:

تكون الأعداد ٤، ١,٥، ٨، ٣ أعدادًا متناسبة عندما تتساوى النسبتان $\frac{٤}{١,٥}$ ، $\frac{٨}{٣}$

وحيث أن $\frac{٤}{١,٥} = \frac{٤٠}{١٥} = \frac{٨}{٣}$

أي أن $\frac{٤}{١,٥} = \frac{٨}{٣}$

∴ الأعداد متناسبة.

حاول أن تحل

٤ أثبت أن ٣,٤ ، ٧ ، ٢,٠٤ ، ٤,٢ أعداد متناسبة.

تدريب

أعط أمثلة عددية توضح خواص التناسب التالية:

ليكن أ، ب، جـ، د أعدادًا حقيقية غير صفرية:

خواص التناسب	أمثلة عددية
إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$. فإن: ١ أد = ب جـ	
٢ $\frac{ب}{أ} = \frac{د}{جـ}$	
٣ $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$	
٤ $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{جـ + د}{د}$	
٥ $\frac{أ + جـ}{ب + د} = \frac{أ}{ب}$	

مثال (٥)

إذا كانت أ، ب، جـ أعدادًا متناسبة مع الأعداد ٢، ٥، ٧. فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{أ + ٣ب}{٢ب + جـ}$.

معلومة رياضية:

إذا كانت أ، ب، جـ أعدادًا متناسبة مع الأعداد د، هـ، و، فإن: $\frac{أ}{د} = \frac{ب}{هـ} = \frac{جـ}{و} = م$ حيث م عدد ثابت

الحل:

∵ أ، ب، جـ متناسبة مع ٢، ٥، ٧

∴ $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٥} = \frac{جـ}{٧} = م$ حيث م عدد ثابت

∴ أ = ٢م، ب = ٥م، جـ = ٧م

∴ المقدار $\frac{أ + ٣ب}{٢ب + جـ} = \frac{٢م + ٣(٥م)}{٢(٥م) + ٧م} = \frac{١٧م}{١٧م} = ١$

حاول أن تحل

٥ إذا كانت الأعداد أ، ب، جـ متناسبة مع ٣، ٥، ١١. فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{أ + ٣ب}{٥ب + جـ}$.

مثال (٦) **تطبيقات حياتية**

تشارك سالم ومنصور بتنفيذ أعمال الدهان. إن نسبة الزمن الذي أمضياه في العمل هي ٧:٤. قبضا معًا ٨٨ دينارًا. كيف سيتوزع هذا المبلغ بينهما إذا عمل سالم فترة زمنية أطول من منصور؟

الحل: لتكن س نصيب سالم، م نصيب منصور من المبلغ.

$\frac{س}{م} = \frac{٧}{٤}$ كتابة التناسب

$\frac{س + م}{م} = \frac{٧ + ٤}{٤}$ من خواص التناسب

$\frac{٨٨}{م} = \frac{١١}{٤}$

$م = \frac{٤ \times ٨٨}{١١} = ٣٢$

س = ٨٨ − ٣٢ = ٥٦

ينال سالم ٥٦ دينارًا، وينال منصور ٣٢ دينارًا.

حاول أن تحل

٦ في مثال (٧)، كيف سيتوزع المبلغ بين سالم ومنصور إذا كانت نسبة الزمن ٥ : ٣ ، إذا عمل منصور فترة زمنية أطول من سالم؟

مثال (٧) تطبيقات حياتية

عند القيام بأنشطة رياضية فإن الشخص يفقد سعرات حراريّة تتناسب تقريبًا مع وزنه.

والجدول المجاور يبيّن ذلك لشخص وزنه ٦٥ كجم، عند قيامه بالنشاطات المذكورة لمدة ٦٠ دقيقة.

النشاط لمدة ٦٠ دقيقة	السعرات المحروقة
المشي بسرعة ٤–٥ كم/ ساعة	٣٠٠
السباحة أو التزلج	٥٠٠
لعبة كرة قدم	٤٠٠

قام هذا الشخص بأحد هذه الأنشطة لمدة ٨٠ دقيقة. اكتب تناسبًا تستطيع بواسطته أن تحسب عدد السعرات الحراريّة التي يفقدها (بالتقريب).

الحلّ: بفرض أن س عدد السعرات الحرارية التي يفقدها في كل نشاط

عند المشي ٦٠ دقيقة يحرق ٣٠٠ سعرة حرارية

عند المشي ٨٠ دقيقة يحرق س سعرة حرارية

أي أن $\frac{س}{٣٠٠} = \frac{٨٠}{٦٠}$

٦٠س = ٣٠٠ × ٨٠ باستخدام الضرب التقاطعي

$س = \frac{٣٠٠ \times ٨٠}{٦٠}$

س = ٤٠٠ سعرة حرارية تقريبًا

وبالمثل السباحة: $\frac{س}{٥٠٠} = \frac{٨٠}{٦٠}$ ، س = ٦٦٧ سعرة حرارية تقريبًا.

وبالمثل كرة القدم: $\frac{س}{٤٠٠} = \frac{٨٠}{٦٠}$ ، س = ٥٣٣ سعرة حرارية تقريبًا.

حاول أن تحل

٧ إذا مارست رياضة كرة السلة لمدة ٢٠ دقيقة، تفقد ٣٠٠ سعرة. اكتب تناسبًا تستطيع بواسطته أن تحسب عدد السعرات الحرارية التي تفقدها إذا مارست هذه الرياضة لمدة ٥٠ دقيقة.

التناسب المتسلسل الهندسي Geometric Proportion

ليكن أ، ب، جـ ∈ ح*

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ فإنّه يقال إن أ، ب، جـ في **تناسب متسلسل** (أو تناسب هندسي)

وبالعكس: إذا كانت أ، ب، جـ في تناسب متسلسل فإنّ: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

ويسمى ب **الوسط المتناسب** للعددين أ، جـ أو **الوسط الهندسي** لهما كما يسمى أ، جـ **طرفي التناسب**.

فمثلًا: ٢، ٤، ٨ في تناسب متسلسل لأن $\frac{٢}{٤} = \frac{٤}{٨}$.

ولاحظ أن ٨، ٤، ٢ كذلك في تناسب متسلسل لأن $\frac{٨}{٤} = \frac{٤}{٢}$.

إذا كان أ، ب، جـ ∈ ح* في تناسب متسلسل فإن جـ، ب، أ في تناسب متسلسل أيضًا.

مثال (٨)

أثبت أن الأعداد ٣، ٩، ٢٧ في تناسب متسلسل.

الحلّ:

$\frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{٩}{٢٧} = \frac{٩ \div ٩}{٢٧ \div ٩} = \frac{١}{٣}$

$\therefore \frac{٣}{٩} = \frac{٩}{٢٧}$

أي أن : ٣، ٩، ٢٧ في تناسب متسلسل.

حاول أن تحل

٨ اكتب ٣ أعداد في تناسب متسلسل.

مثال (٩)

إذا كانت الأعداد ٥، س، ٢٠ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س، ثم تحقق.

الحل: نكتب التناسب المتسلسل: $\frac{٥}{س} = \frac{س}{٢٠}$

$س^٢ = ١٠٠$ الضرب التقاطعي

س = ١٠ أو س = −١٠

التحقق:

س = ١٠	س = −١٠
$\frac{٥}{س} = \frac{س}{٢٠}$	$\frac{٥}{س} = \frac{س}{٢٠}$
$\frac{٥}{١٠} \stackrel{?}{=} \frac{١٠}{٢٠}$	$\frac{٥}{-١٠} \stackrel{?}{=} \frac{-١٠}{٢٠}$
١٠٠ = ١٠٠ ✓	١٠٠ = ١٠٠ ✓

حاول أن تحل

٩ هل يمكن إيجاد قيمة س بحيث تكون الأعداد −٩، س، ٤ في تناسب متسلسل؟ فسّر.

خواص التناسب المتسلسل Properties of Chaine Proportion

خاصيّة (١)

ليكن أ، ب، جـ ∈ ح*

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ (أي أن أ، ب، جـ في تناسب متسلسل)

فإن $ب^٢ = أجـ$ وذلك من خاصية الضرب التقاطعي

فمثلًا: في حالة ٣، ٩، ٢٧ نجد أن:

$٣ \times ٢٧ = (٩)^٢$ (كل من الطرفين يساوي ٨١)

خاصيّة (٢)

ليكن أ، ب، جـ، د ∈ ح*

إذا كان:

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$ (أي أن أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل) حيث م عدد ثابت

فإن:

جـ = د × م، ب = د × م^٢، أ = د × م^٣

فمثلًا: في حالة $\frac{١٦}{٨} = \frac{٨}{٤} = \frac{٤}{٢} = ٢$ نجد أن:

٤ = ٢ × ٢، ٨ = ٢ × (٢)^٢، ١٦ = ٢ × (٢)^٣

مثال (١٠)

إذا كانت الأعداد ٦، س، ٥٤، ١٦٢ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.

الحل:

∵ الأعداد في تناسب متسلسل

$∴ \frac{٦}{س} = \frac{س}{٥٤} = \frac{٥٤}{١٦٢}$

$∴ \frac{٦}{س} = \frac{٥٤}{١٦٢}$

س × ٥٤ = ٦ × ١٦٢ الضرب التقاطعي

$س = \frac{٦ × ١٦٢}{٥٤} = ١٨$

قيمة س = ١٨

حاول أن تحل

١٠ إذا كانت الأعداد ٤، س − ٢، ١، $\frac{١}{٢}$ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.

مثال (١١) **إثرائي**

إذا كانت الأعداد أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل، فأثبت أن $\frac{أ + ب + جـ}{ب + جـ + د} = \frac{أ}{ب}$

الحل:

∵ أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$ تناسب متسلسل

∴ جـ = د × م، ب = د × $م^٢$، أ = د × $م^٣$

$\frac{أ + ب + جـ}{ب + جـ + د} = \frac{دم^٣ + دم^٢ + دم}{دم^٢ + دم + د} = \frac{دم(م^٢ + م + ١)}{د(م^٢ + م + ١)} = م = \frac{أ}{ب}$

حل آخر: من التناسب السابق أ = ب م، ب = جـ م، جـ = د م

$\frac{أ + ب + جـ}{ب + جـ + د} = \frac{ب م + جـ م + دم}{ب + جـ + د} = \frac{م(ب + جـ + د)}{ب + جـ + د} = م = \frac{أ}{ب}$

حاول أن تحل

١١ إذا كانت الأعداد أ، ب، جـ في تناسب متسلسل

فأثبت أن: $\frac{أ + ٣ب}{ب + ٣جـ} = \frac{أ - ٢ب}{ب - ٢جـ}$ (بشرط المقام ≠ ٠)

التغير الطردي
Direct Variation

دعنا نفكر ونتناقش

سوف تتعلم
- التغير
- التغير الطردي
- دالة التغير الطردي
- ثابت التغير الطردي
- معدل التغير الطردي

التغير

التغيّر هو ظاهرة طبيعية في الحياة نلمسها ونشاهدها في العديد من المواقف والأشياء.
فمثلًا:
- درجات الحرارة تتغيّر بالارتفاع والانخفاض في اليوم الواحد وفي الفصول المختلفة.
- وزن الطفل يتغيّر مع نموه.
- الزمن يتغيّر مع توالي الليل والنهار والأشهر والسنين.
- الأسعار تتغيّر.
- حجم الغاز يتغيّر بتغيّر درجة حرارته.
- المسافة التي يقطعها جسم متحرّك تتغيّر بمرور الزمن.

تدريب

١ أُذكر بعض الأشياء التي تتغيّر في حياتك.
٢ عدِّد بعض الأشياء التي تتغيّر بسبب تغيّر أشياء أخرى.
٣ هل تتغيّر مساحة المربع بتغيّر طول ضلعه؟
٤ عدِّد بعض الظواهر التي لا تتغيّر - أي الظواهر الثابتة.
٥ أُذكر أمثلة لبعض الثوابت التي مرّت عليك في الرياضيّات.

التغير الطردي

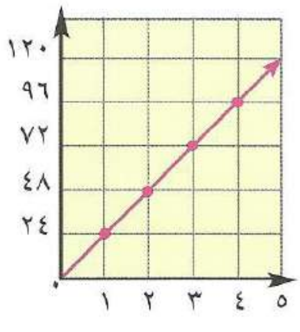
مثال توضيحي: الصورة المتحركة في السينما

عندما تشاهد فيلمًا سينمائيًّا عاديًّا، فإن ٢٤ صورة فرديّة تسطع سريعًا على الشاشة كل ثانية. في ما يلي ثلاث طرائق لبيان العلاقة بين عدد الصور (أو الإطارات التي تعرض) وعدد الثواني:

الطريقة الأولى
الجدول

س عدد الثواني	ص عدد الصور
١	٢٤
٢	٤٨
٣	٧٢
٤	٩٦
٥	١٢٠

الطريقة الثانية
الشكل المرسوم



الطريقة الثالثة
العلاقة بين عدد الصور (ص)
وعدد الثواني (س) هي:
ص = ٢٤ س

من الطرائق الثلاث السابقة أجب عن التالي:

(أ) ما معدل التغيّر في البيانات المبينة في الجدول؟

(ب) ما ميل المستقيم في الشكل البيانيّ؟

(جـ) ما معامل س في العلاقة بين ص ، س؟

ما العلاقة التي تلاحظها بين: معدل التغيّر، ميل المستقيم، معامل س؟

• نلاحظ في هذا المثال أن **عدد الصور يتغيّر مع عدد الثواني التي تظهر فيها.**

معلومة مفيدة:

لتكن أ (س$_1$، ص$_1$)، ب(س$_2$، ص$_2$) فإن

ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$: س$_1$ ≠ س$_2$

وعندما يمر المستقيم بنقطة الأصل والنقطة (س$_1$ ، ص$_1$)

يصبح ميل المستقيم = $\frac{\text{ص}_1}{\text{س}_1}$: س$_1$ ≠ ٠

ويسمى الميل في هذه الحالة ثابت التغير أو معدل التغير

(كلما زاد عدد الثواني زاد عدد الصور التي تعرض بنفس النسبة) وفي هذه الحالة نقول إن العلاقة تمثل **تغيّرًا طرديًّا**.

التغيّر الطردي Direct Variation

هو دالة خطية يمكن أن تكتب بالصورة: ص = ك س حيث ك ≠ ٠

ويسمى ك ثابت التغير أو معدل التغير.

ويمكن التعبير عن العلاقة ص = ك س على الصورة ص α س.

ملاحظات

١ يمكن تمثيل دالة التغير الطردي: ص = ك س بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل.

٢ يمكن كتابة المعادلة الخطيّة ص = ك س بالصورة: ك = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ حيث س ≠ ٠

٣ ثابت التغيّر ك = معدل التغيّر في البيانات التي تصف التغيّر.

٤ الثابت ك = ميل الخط المستقيم الذي يمثّل المعادلة بيانيًّا.

٥ في حالة التغيّر الطردي فإنّ: ثابت التغيّر = معدل التغيّر = ميل المستقيم الممثل لمعادلة التغيّر.

٦ التغير قد يكون بالزيادة أو بالنقصان.

٧ إذا كانت ص α س فمعنى ذلك أن $\frac{\text{ص}_1}{\text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2}{\text{س}_2} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{التغير في ص}}{\text{التغير في س}}$: المقام ≠ صفر

تعميم

إذا كانت ص تتغير طرديًّا مع س أي ص α س فإن:

ص = ك س حيث ك ثابت لا يساوي الصفر

والعكس صحيح.

سنكتفي بدراسة التغير الطردي عندما ك > ٠

مثال (١)

إذا كانت ص α س وكانت ص = ٣٠ عندما س = ١٠، فأوجد قيمة ص عندما س = ٤٠، ثم مثل العلاقة بين س، ص بيانيًا.

الحل: ∵ ص α س

∴ ص = ك س   ك ثابت التغير

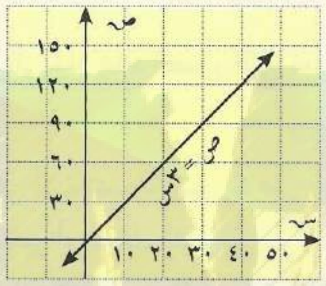
∴ ٣٠ = ك × ١٠

ك = ٣

∴ ص = ٣ س

عندما س = ٤٠ تكون ص = ٣ × ٤٠ = ١٢٠

س	٠	١٠	٤٠
ص = ٣س	٠	٣٠	١٢٠



حاول أن تحل

١ إذا كانت ص α س وكانت ص = ١,٥ عندما س = ١٠، أوجد قيمة ص عندما س = ١٥

ثم مثّل العلاقة بين س، ص بيانيًا.

مثال (٢)

في إحدى المناطق ترتفع درجة الحرارة بانتظام خلال النهار بمعدل ٣° في الساعة. اكتب معادلة تغيّر طردي تمثل هذا الارتفاع.

الحل:

∵ درجة الحرارة ترتفع بانتظام

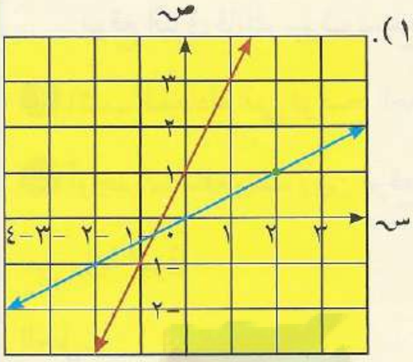
∴ معدل التغيير = ٣

المعادلة هي ص = ٣س   حيث ص درجة الحرارة، س عدد الساعات.

مثال (٣)

في الشكل المقابل، أي من المستقيمين يمثل تغيّرًا طرديًّا؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.

الحل:



المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل يمثل تغيّرًا طرديًّا بين س ، ص وهو يمر بالنقطة (٢، ١).

ثابت التغير = $\frac{\text{ص}_1}{\text{س}_1} = \frac{١}{٢}$

المستقيم الثاني لا يمر بنقطة الأصل فهو لا يمثّل تغيّرًا طرديًّا.

حاول أن تحل

٢ هل المستقيم الذي يمر بالنقطتين: أ (٢، ٣)، ب (٤، ٦) يمثل تغيّرًا طرديًّا بين س، ص. اشرح إجابتك

مثال (٤)

أي من المعادلتين التاليتين تمثّل تغيّرًا طرديًّا؟ أوجد ثابت التغيّر في حالة التغيّر الطرديّ.

أ ٥س − ٣ص = ٣س + ٥ص

ب ٥س + ٢ص = ٩

الحل:

أ ٥س − ٣ص = ٣س + ٥ص

٨ص = ٢س

ص = $\frac{٢}{٨}$ س = $\frac{١}{٤}$ س على الصورة ص = ك س

هذه المعادلة تمثل تغيّرًا طرديًّا،

حيث ثابت التغيّر = $\frac{١}{٤}$

ب ٥س + ٢ص = ٩

٢ص = −٥س + ٩

ص = − $\frac{٥}{٢}$ س + $\frac{٩}{٢}$ وهذه ليست على الصورة ص = ك س

إذًا هذه المعادلة لا تمثّل تغيّرًا طرديًّا.

حاول أن تحل

٣ أي من المعادلات التالية تمثّل تغيّرًا طرديًّا؟ أوجد ثابت التغيّر في حالة التغير الطردي.

أ ٧ص = ٢س

ب ٣س + ٤ص = ٨

جـ ص + ٣س = ٢(س + ٢ص)

مثال (٥) تطبيقات حياتية

الطقس: الزمن الذي تستغرقه لسماع الرعد يتغيّر طرديًّا مع المسافة بينك وبين موقع البرق. فإذا كنت على مسافة ٣ كم من موقع البرق فإنك سوف تسمع الرعد بعد ١٠ ثوانٍ من رؤية البرق.

أ اكتب المعادلة التي توضح العلاقة بين المسافة والزمن.

ب أوجد المسافة بينك وبين موقع البرق إذا سمعت الرعد بعد ١٨ ثانية من رؤية البرق.

الحل:

أ لتكن س المسافة بالكيلومترات بينك وبين موقع البرق،

وليكن ص الزمن بالثواني الذي يمر بين رؤية البرق وسماع الرعد.

بما أن الزمن يتغيّر طرديًّا مع المسافة

∴ معادلة التغيّر الطرديّ:

ص = ك س

وحيث إن س = ٣، ص = ١٠

٣ × ك = ١٠

$ك = \frac{١٠}{٣}$

= ثابت التغيّر

∴ المعادلة هي: $ص = \frac{١٠}{٣} س$ هي المعادلة المطلوبة

حيث س تقاس بالكيلومترات، ص بالثواني.

ب $ص = \frac{١٠}{٣} س$

$١٨ = \frac{١٠}{٣} س$

$س = \frac{١٨ \times ٣}{١٠} = ٥,٤$

المسافة المطلوبة = ٥,٤ كيلومتر.

مثال (٦)

البيولوجيا: تتغير كمية الدم في جسم الإنسان طرديًّا مع وزنه. تبلغ كمية الدم في جسم رجل يزن ٧٥ كجم نحو ٥ ليترات.

أ أوجد ثابت التغيّر.

ب اكتب معادلة تربط العلاقة بين كمية الدم والوزن.

الحل:

نفرض أن كمية الدم في جسم الانسان هي ص وزن الجسم هو س

أ ثاتب التغيّر $= \frac{ص}{س}$

$= \frac{٥}{٧٥} = \frac{١}{١٥}$

ب معادلة التغيّر الطردي:

$ص = \frac{١}{١٥} س$

المعادلة المطلوبة:

كمية الدم = ثابت التغير × الوزن

كمية الدم = $\frac{١}{١٥}$ الوزن.

حاول أن تحل

٤ السؤال المفتوح: قدّر كمية الدم في جسمك مستخدما مثال (٦).

التعبير عن التغير الطردي

في التغيّر الطرديّ تكون النسبة $\frac{ص}{س}$ ثابتة لكل زوج مرتّب حيث س ≠ ٠ في جميع الحالات. وبالتالي يمكن التعبير عن التغيّر الطرديّ باستخدام التناسب.

فيكون: $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$ ... لجميع الأزواج المرتبة $(س_١، ص_١)$، $(س_٢، ص_٢)$، ...

حيث $س_١ \neq ٠$، $س_٢ \neq ٠$، ...

وكل من هذه النسب تساوي ثابت التغيّر ك.(معدل التغير).

مثال (٧)

بيّن ما إذا كانت ص تتغيّر طرديًّا مع س في كل من بيانات الجدولين أ، ب. اكتب معادلة التغيّر في حالة التغيّر الطرديّ.

الحل:

أ

س	٢	٤	٦
ص	-١	١	٣
$\frac{ص}{س}$	-٠,٥	٠,٢٥	٠,٥

ب

س	٣	١	٤
ص	٢,٢٥	٠,٧٥	٣
$\frac{ص}{س}$	٠,٧٥	٠,٧٥	٠,٧٥

• الجدول **أ** لا يمثّل تغيّرًا طرديًّا لأن $\frac{ص}{س}$ ليست ثابتة لكل البيانات.

• الجدول **ب** يمثّل تغيّرًا طرديًّا حيث ثابت التغيّر يساوي ٠,٧٥ . معادلة التغيّر هي ص = ٠,٧٥ س.

حاول أن تحل

٥ هل تتغيّر ص طرديًّا مع س في الجدول:

س	١	-١	٢	-٣
ص	٣	-١	٥	-٥

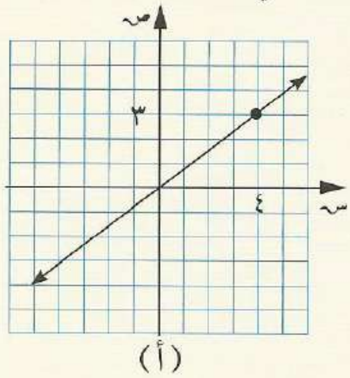
مثال (٨)

تفكير ناقد: هل كل معادلة خط مستقيم تعبّر عن تغيّر طرديٍّ؟ فسر إجابتك.

الحل: لا: ليست كل معادلة خط مستقيم تعبّر عن تغيّر طرديّ.

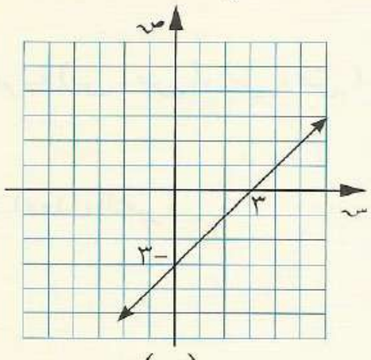
معادلة التغيّر الطرديّ تكون بالصورة ص = ك س، أي أن المستقيم الممثل لها يمر بنقطة الأصل.

مثلًا: البيانات في الشكل (أ) تمثّل بالمعادلة ص = ٠,٧٥ س، وهي معادلة تغيّر طرديّ، لأنها بالصورة ص = ك س بينما البيانات في الشكل (ب) تمثّل بالمعادلة ص = س - ٣ وهي ليست بالصورة ص = ك س.



(أ)

معادلة خط مستقيم تمثّل تغيّرًا طرديًّا



(ب)

معادلة خط مسقيم لا تمثّل تغيّرًا طرديًّا

مثال (٩) تطبيقات حياتية

معلومة فيزيائية:
من قوانين الحركة: الوزن هو كمية فيزيائية لها نفس وحدة القوة (نيوتن) وهي ناتجة من تأثير عجلة الجاذبية الارضية على كتلة الجسم أي وزن ١ كجم = ١٠ نيوتن

الفيزياء: القوة التي تستخدمها لرفع جسم تتغيّر طرديًّا مع وزن الجسم.

فأنت تحتاج إلى استخدام قوة قدرها ٠,٢٧٥ نيوتن لتتمكن إحدى المعدات من رفع جسم وزنه ١٢ نيوتن. أوجد مقدار القوة اللازم استخدامه في هذه الآلة لرفع جسم وزنه ٤٥ نيوتن.

الحل:

لنرمز إلى القوة بالرمز ق، وإلى وزن الجسم بالرمز و.

$\because$ ق α و

$\therefore \frac{ق_١}{و_١} = \frac{ق_٢}{و_٢}$

$\frac{ق_٢}{٤٥} = \frac{٠,٢٧٥}{١٢}$

$ق_٢ \times ١٢ = ٤٥ \times ٠,٢٧٥$

$ق_٢ = \frac{٤٥ \times ٠,٢٧٥}{١٢} = ١,٠٣١٢٥$ نيوتن

أي أنك تحتاج إلى كيلوجرام تقريبًا لرفع ٤٥ نيوتن.

حاول أن تحل

٦ اكتب معادلة التغيّر الطردي للمثال السابق، واستخدمها لإيجاد الوزن الذي يمكن أن ترفعه باستخدام قوّة قدرها ٤,٣ نيوتن في الرافعة نفسها.

٣ـ٣

التغير العكسي
Inverse Variation

سوف تتعلم

- التغير العكسي
- ثابت التغير العكسي
- دالة التغير العكسي
- مقارنة بين التغيّر الطردي والتغيّر العكسي

عمل تعاوني

يرغب فريق من الشباب في استصلاح قطعة أرض لجعلها صالحة للزراعة، ويتطلب هذا العمل ١٦٠ يوم عمل. ويمكن لفريق مكون من ٢٠ شابًا أن ينجزوا هذا العمل في ٨ أيام؛ فإذا استمر العمل بالمعدل نفسه:

١ كم يومًا يتطلب العمل إذا كان عدد أعضاء الفريق مكونًا من ٤٠ شخصًا؟

٢ أكمل الجدول التالي:

عدد أعضاء الفريق (س)	عدد أيام العمل (ص)	س ص
٢	٨٠	١٦٠
٥	٣٢	١٦٠
٨	....	....
....	١٦	....
٢٠	٨	١٦٠
٤٠	....	....

هل تعلم؟

روبرت بويل (١٦٢٧- ١٦٩١) عالم إيرلندي. درس العلاقة بين حجم الغاز وضغطه. اشتهر بقانونه: حجم الغاز × ضغط الغاز = مقدار ثابت.
يسمى القانون أيضًا قانون بويل ماريوت.

٣ يمثل الجدول العلاقة بين س ،ص في هذا النوع من التغيّر.

٤ صف ما يحدث لعدد أيام العمل (ص) عندما يزداد عدد أعضاء الفريق(س).

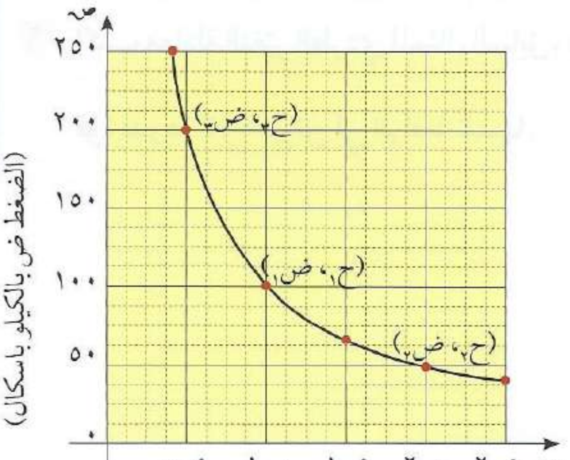
٥ ماذا تلاحظ على حاصل الضرب س ص في هذا النوع من التغيّر؟

قانون بويل

إن حاصل ضرب حجم الغاز في ضغطه يساوي مقدارًا ثابتًا.

$$ح \times ض = \text{مقدار ثابت}$$

في كل نقطة في الشكل المقابل حاصل الضرب ثابت.



١ - التغير العكسي

إذا تغيرت كمية س مع تغيّر كمية أخرى ص بحيث كان **حاصل ضرب الكميتين** ثابتًا، فإن هذا التغير يسمى **تغيّرًا عكسيًّا**. ويسمى حاصل الضرب س ص ثابت التغيّر، ويرمز إلى ذلك:

$$\text{س ص} = \text{ك} \quad \text{أو} \quad \text{ص} = \frac{\text{ك}}{\text{س}} \ ، \ \text{ك} \neq ٠$$

ويمكن التعبير عن التغيّر العكسي بالصورة ص α $\frac{١}{\text{س}}$

ففي العمل التعاوني السابق نجد أن:

س ص = ١٦٠

أي ص = $\frac{١٦٠}{\text{س}}$ حيث ثابت التغيّر هنا هو ١٦٠.

مثال (١)

أ أكمل الجدول التالي حيث س ص = ١٠٠

س	١	٢	٤	٥	١٠	٢٠	٥٠	١٠٠
ص	١٠٠	...	...	...	...	...	...	...

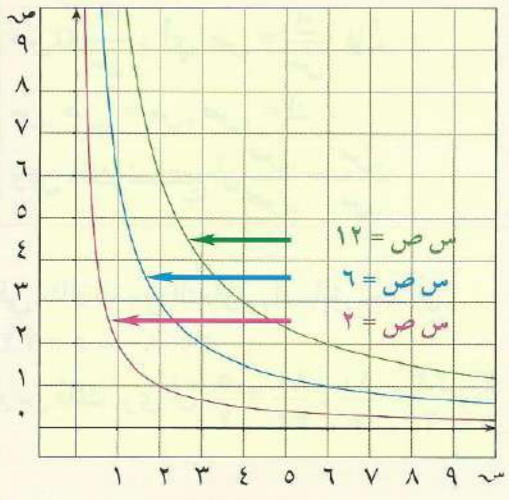
الحل:

س	١	٢	٤	٥	١٠	٢٠	٥٠	١٠٠
ص	١٠٠	٥٠	٢٥	٢٠	١٠	٥	٢	١

ب **كيف تتغيّر قيم ص مع زيادة قيم س في الجدول السابق؟ وما نوع هذا التغير؟**

الحل: نلاحظ أن كلما تزايدت قيمة س، تتناقص قيمة ص بحيث تحقق العلاقة س ص = ١٠٠ ∴ **التغير عكسي.**

جـ اذكر ثابت التغيّر ك في التغيرات العكسية الممثلة بالأشكال البيانيّة.



الحل: ثابت التغير ١٢، ٦، ٢.

د اذكر ثلاث نقاط تقع على كل من الأشكال البيانية المبينة.

الحل:

أ (٢، ٦)، ب (٣، ٤)، جـ (٤، ٣)

د (١، ٦)، هـ (٢، ٣)، و (٣، ٢)

حـ (١، ٢)، ط (٢، ١)، ي (٤، ٥, ٠)

مثال (٢)

منطقة مستطيل مساحتها ٢٤ سم^{٢}، وطولها س سم، وعرضها ص سم. إذا كان كل من س، ص أعدادًا كلية، فأوجد القيم الممكنة لـ س، ص ثم حدد نوع التغير الذي يمثل هذه العلاقة.

الحل:

س	٢٤	١٢	٨	٦
ص	١	٢	٣	٤

مساحة المستطيل = س ص = ٢٤

أي س ص = ثابت ونعبر عن ذلك رياضيًّا:

س × ص = ك   ك ثابت

أي أن ص = $\frac{ك}{س}$ ،   ص α $\frac{١}{س}$

∴ التغير عكسي.

حاول أن تحل

١

س	٢	٣	٤	٥	٦	١٠
ص	٣٠	٢٠	١٥	١٢	١٠	٦

بالنظر إلى الجدول أعلاه، هل س × ص يعبّر عن تغيير عكسي؟ اشرح إجابتك.

٢ كوّن جدولًا من س، ص على أن يكون س ص يعبّر عن تغيير عكسي.

ملاحظة: استخدام التناسب في التعبير عن التغيّر العكسي.

إذا كان (س$_١$، ص$_١$)، (س$_٢$، ص$_٢$) زوجين مرتبين في تغيّر عكسي.

ص α $\frac{١}{س}$ ، أي ص = $\frac{ك}{س}$ فإنّ

س$_١$ ص$_١$ = س$_٢$ ص$_٢$ = ك

ومن ذلك نستنتج أن $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$

في مثال العمل التعاوني السابق نجد أن:

٣٢ × ٥ = ٨٠ × ٢

ومن ذلك نرى أن: $\frac{٥}{٢} = \frac{٨٠}{٣٢}$ ، $\frac{٨٠}{٥} = \frac{٣٢}{٢}$ ، $\frac{٢}{٥} = \frac{٣٢}{٨٠}$ ، ...

مثال (٣) تطبيقات حياتية

الفيزياء: الوزن الذي تحتاج إليه لإحداث توازن في أرجوحة على شكل رافعة يتغيّر عكسيًا مع المسافة بين الوزن ونقطة الارتكاز. جاسم وزنه ٥١٠ نيوتن ويجلس على بعد ٢,٥ م من نقطة الارتكاز. أين يجلس وائل الذي وزنه ٧٥٠ نيوتن ليحدث التوازن؟

معلومة فيزيائية: قانون الرافعة

ناتج ضرب القوة في المسافة العمودية بين نقطة تأثير القوة ونقطة الارتكاز (ذراع القوة) يساوي حاصل ضرب المقاومة في ذراع المقاومة.

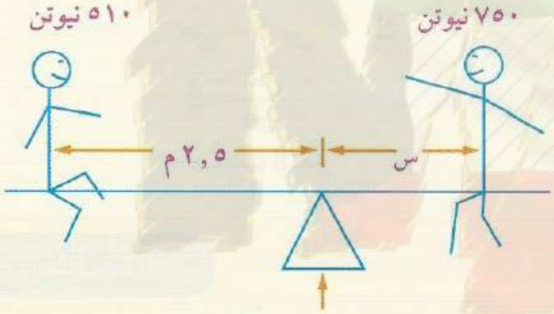
الحل: قانون الرافعة : القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

من توازن الرافعة: الوزن$_{١}$ × المسافة$_{١}$ = الوزن$_{٢}$ × المسافة$_{٢}$

$$٥١٠ \times ٢,٥ = ٧٥٠ \times س$$

$$س = \frac{٥١٠ \times ٢,٥}{٧٥٠} = ١,٧$$

أي أن وائل يجلس على مسافة ١,٧ م بعيدًا عن نقطة الارتكاز.



حاول أن تحل

٣ (أ) في تغيّر عكسي ص $\alpha \frac{١}{س}$ إذا كانت ص = ٢,٠ عندما س = ٧٥. أوجد س عندما ص = ٣.

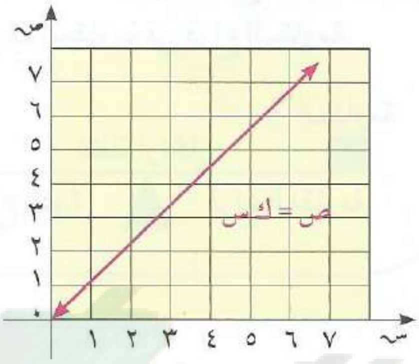
(ب) ما وزن جسم يوضع على مسافة ٣ م من نقطة ارتكاز رافعة، ليحدث توازنًا مع جسم وزنه ٤٠ نيوتن على بعد ٦ م من نقطة الارتكاز؟

(جـ) رحلة تستغرق ٣ ساعات عندما تسير السيارة بسرعة ٧٥ كم/ ساعة. كم تستغرق الرحلة إذا سارت السيارة بسرعة ٩٠ كم/ ساعة.

مقارنة بين التغير الطردي والتغير العكسي

يوضح الشكلان البيانيان التاليان الفرق بين التغيّر الطردي والتغيّر العكسي.

تغيّر طردي



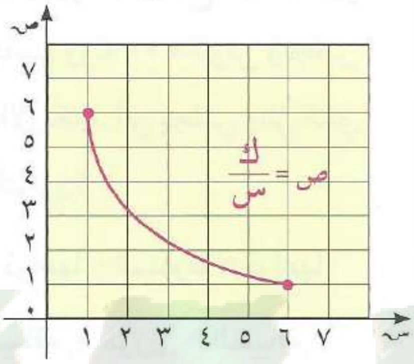
$\text{ص} \propto \text{س}$

$\text{ص} = \text{ك س}$ ك > ٠

$\text{ك} = \dfrac{\text{ص}}{\text{س}}$

= ثابت التغيّر

تغيّر عكسي



$\text{ص} \propto \dfrac{١}{\text{س}}$

$\text{ص} = \dfrac{\text{ك}}{\text{س}}$: ك > ٠

ك = س ص

= ثابت التغيّر

مثال (٤)

أي من بيانات الجدولين (أ)، (ب) يمثل تغيّرًا طرديًا؟ وأيهما يمثل تغيّرًا عكسيًا؟ اكتب المعادلة التي تمثّل التغيّر في الحالتين:

أ

س	٥	١٠	٢٥
ص	٢٠	١٠	٤

ب

س	٢	٤	١٠
ص	٥	١٠	٢٥

الحل:

أ نلاحظ أن $\dfrac{\text{ص}}{\text{س}}$ ليست ثابتة.

نبحث س ص نجد أن

س ص = ٥ × ٢٠ = ١٠ × ١٠

= ٢٥ × ٤ = ١٠٠ = ثابت

إذًا التغيّر هنا تغيّر عكسي معادلته س ص = ١٠٠

ب نبحث عن النسب $\dfrac{\text{ص}}{\text{س}}$ في جميع الحالات نجد أن:

$\dfrac{\text{ص}}{\text{س}} = \dfrac{٥}{٢} = \dfrac{١٠}{٤} = \dfrac{٢٥}{١٠}$

وهي نسبة ثابتة = ٢,٥

إذًا التغيّر هنا طرديّ معادلته ص = ٢,٥س

حاول أن تحل

٤ بيّن نوع التغيّر المناسب للموقف في كل من الحالات التالية، ثم اكتب رمز المعادلة التي تمثله:

(١) المبلغ الذي يأخذه كل شخص عند توزيع مبلغ ١٠٠ دينار على عدة أشخاص بالتساوي.

(٢) تكلفة شراء عدد من الأقلام علمًا أن ثمن القلم ٢٠ فلسًا.

(٣) أنت تمشي ٥ كم كل يوم. سرعتك في المشي والزمن يتغيّران من يوم إلى يوم.

أ س ص = ٥

ب ص = $\frac{١٠٠}{س}$

جـ ص = ٢٠ س

د ص = ٥ س

مثال (٥) تطبيقات حياتية

توفي رجل وترك لزوجته وأبنائه مبلغ ٣ ٤٥٠ ٠٠٠ دينار. (والداه متوفيان).

أوجد نصيب كل فرد إذا تألفت عائلته من:

أ ٥ أولاد و٤ بنات   ب ٤ أولاد و٣ بنات   جـ ولد واحد وابنتين

ماذا تلاحظ؟

سورة النساء

﴿ يُوصِيكُمُ ٱللَّهُ فِيٓ أَوۡلَٰدِكُمۡۖ لِلذَّكَرِ مِثۡلُ حَظِّ ٱلۡأُنثَيَيۡنِۚ فَإِن كُنَّ نِسَآءٗ فَوۡقَ ٱثۡنَتَيۡنِ فَلَهُنَّ ثُلُثَا مَا تَرَكَۖ وَإِن كَانَتۡ وَٰحِدَةٗ فَلَهَا ٱلنِّصۡفُۚ وَلِأَبَوَيۡهِ لِكُلِّ وَٰحِدٖ مِّنۡهُمَا ٱلسُّدُسُ مِمَّا تَرَكَ إِن كَانَ لَهُۥ وَلَدٞۚ فَإِن لَّمۡ يَكُن لَّهُۥ وَلَدٞ وَوَرِثَهُۥٓ أَبَوَاهُ فَلِأُمِّهِ ٱلثُّلُثُۚ فَإِن كَانَ لَهُۥٓ إِخۡوَةٞ فَلِأُمِّهِ ٱلسُّدُسُۚ مِنۢ بَعۡدِ وَصِيَّةٖ يُوصِي بِهَآ أَوۡ دَيۡنٍۗ ءَابَآؤُكُمۡ وَأَبۡنَآؤُكُمۡ لَا تَدۡرُونَ أَيُّهُمۡ أَقۡرَبُ لَكُمۡ نَفۡعٗاۚ فَرِيضَةٗ مِّنَ ٱللَّهِۗ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ عَلِيمًا حَكِيمٗا ١١ ﴾

الحل:

للزوجة الثمن أي $\frac{١}{٨}$ × ٣ ٤٥٠ ٠٠٠ = ٤٣١ ٢٥٠

يبقى لأبنائه: ٣ ٤٥٠ ٠٠٠ − ٤٣١ ٢٥٠ = ٣ ٠١٨ ٧٥٠

أ عدد الحصص = عدد الأبناء × ١ + عدد البنات × $\frac{١}{٢}$

= ٥ × ١ + ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٧

نصيب الولد = ٣ ٠١٨ ٧٥٠ ÷ ٧ = ٤٣١ ٢٥٠ دينارًا.

نصيب الابنة = $\frac{١}{٢}$ × ٤٣١ ٢٥٠ = ٢١٥ ٦٢٥ دينارًا.

ب عدد الحصص = ٤ × ١ + ٣ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١١}{٢}$

نصيب الولد = ٣ ٠١٨ ٧٥٠ ÷ $\frac{١١}{٢}$ ≃ ٥٤٨ ٨٦٣,٦ دينارًا.

نصيب الابنة = ٥٤٨ ٨٦٣,٦ ÷ ٢ ≃ ٢٧٤ ٤٣١,٨ دينارًا.

جـ عدد الحصص = ١ × ١ + ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ٢

نصيب الولد = ٣ ٠١٨ ٧٥٠ ÷ ٢ = ١ ٥٠٩ ٣٧٥ دينارًا.

نصيب الابنة= ١ ٥٠٩ ٣٧٥ ÷ ٢ = ٧٤٥ ٦٨٧,٥ دينارًا.

نلاحظ أنه كلما زاد عدد الحصص قل نصيب الفرد. أي أن نصيب كل فرد من الأبناء يتغير عكسيًّا مع عدد الحصص.

حاول أن تحل

٥ هندسة: خصصت قطعتا أرض لبناء مجمعين سكنيين لهما المساحة نفسها، كل منهما على شكل مستطيل:
أبعاد القطعة الأولى ٤٢ م × ٣٥ م، فإذا كان طول القطعة الثانية ٥٢,٥ م فاحسب عرضها.

المرشد لحل المسائل

يباع الحجر المصنوع من الإسمنت المعد سلفًا ويوزع في شاحنات تتسع كل منها لِـ ٨,٥ م^{٣}.

أبعاد حجر الأسمنت المعتمدة هي ١٥ سم، ١٨ سم، ٢٠ سم.

يريد جاسم تغطية رقعة مساحتها ٢٨٠ مترًا مربعًا ويريد معرفة عدد الشاحنات اللازم للعملية.

كيف فكر جاسم

أ كلما زاد عمق الرقعة المغطاة بالأسمنت قلت مساحتها. استنتج أن تغيّر عمق الرقعة مع تغيّر المساحة هو عكسي.

ب قام بوضع جدول يبيّن الأمتار المكعبة من الأسمنت اللازمة وفق كل عمق.

إذا كان العمق ١٥ سم: ح = ٢٨٠ × ٠,١٥ = ٤٢ م^{٣}.

يتغيّر عدد الشاحنات طرديًا مع حجم الأسمنت: ٤٢ ÷ ٨,٥ ≃ ٥ شاحنات.

العمق بالأمتار	الأمتار المكعبة	عدد الشاحنات
٠,١٥	٤٢	٥
٠,١٨	٥٠,٤	٦
٠,٢٠	٥٦	٧

استشار جاسم أحد مهندسي الإنشاءات فأفاده أن عمق ٢٠ سم غير ضروري، ولكن يجب أن لا يقل عن ١٥ سم.

قرّر جاسم اعتماد عمق ١٨ سم.

برأيك، هل اختيار جاسم موفق؟ وهل كمية حجر الاسمنت المتبقية كبيرة (تشكل هدرًا للمال؟) فسّر.

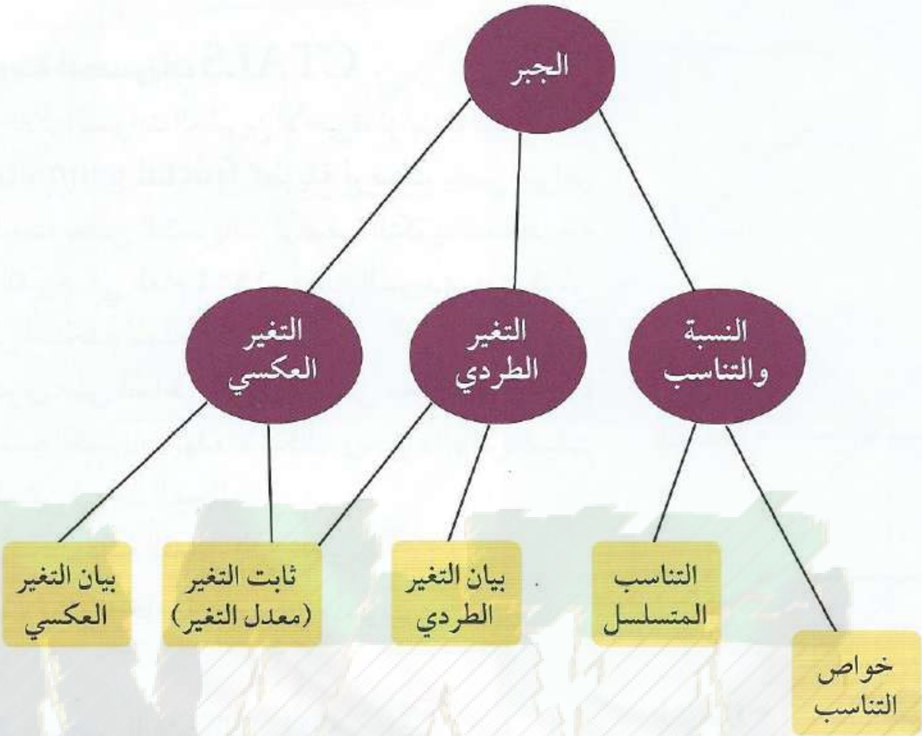
مسألة إضافية

في أحد المهرجانات الرياضيّة، تقذف آلة كهربائية كراتًا إلى البعيد. تتغير المسافة التي تقطعها الكرة عكسيًّا مع وزنها.

أ يريد عبدالله قذف الكرة مسافة تزيد على ١٥٠ مترًا بأقل وزن ممكن للكرة. وضع في الآلة كرة تزن ٢٠٠ جم فقذفتها الآلة مسافة ١٢٠ م.

ب ما الوزن المناسب لكي تقطع الكرة مسافة تزيد على ١٥٠ مترًا؟

مخطط تنظيمي للوحدة الثالثة



ملخص

- النسبة هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه ويمكن تمثيلها بكسر .
- مقياس الرسم هو النسبة بين الطول على الخريطة والمسافة الحقيقية.
- التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.
- إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ فإنه يقال إن الأعداد أ، ب، جـ في تناسب متسلسل والعكس صحيح.
- بيان التغير الطردي هو دالة خطية تكتب بالصورة: ص = ك س حيث ك $\neq$ ٠ ، ك: ثابت التغير .
- في التغير الطردي: النسبة $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ثابتة لكل زوج مرتب (س $\neq$ ٠).
- إذا تغيرت كمية ص مع تغير كمية أخرى س بحيث كان حاصل ضرب الكميتين ثابتًا، فإن هذا التغير يسمى تغيرًا عكسيًا.
- في التغير العكسي: $\text{س}_1 \times \text{ص}_1 = \text{س}_2 \times \text{ص}_2$ أو $\frac{\text{س}_1}{\text{س}_2} = \frac{\text{ص}_2}{\text{ص}_1}$.
- حاصل الضرب هو ثابت التغير أي س × ص = ك (ثابت).