الوحدة التاسعة

الهندسة التحليليّة
Analytic Geometry

مشروع الوحدة: اختيار وظيفة

١ مقدمة المشروع: هل لديك عمل ما؟ إذا لم يكن لديك عمل، فما الوظيفة التي تفضلها؟ ما المصاريف المتوقعة؟ ما المبلغ الذي ستتقاضاه؟ كيف يمكنك المقارنة بين وظيفتين أو بين دخلين؟ إن معادلات المستقيم تساعدك على الإجابة عن هذه الأسئلة كلها.

خلال عملكم على هذا المشروع، سوف ترسمون الخطوط المستقيمة وتكتبون المعادلات التي تنمذج مختلف الأعمال أو الوظائف وسوف تستخدمون هذه النماذج لتوقع الدخل.

٢ الهدف: محادثة شخص ما حول أول عمل قام به. اختيار العمل أو الوظيفة المفضلة مع تبرير الاختيار.

٣ اللوازم: أوراق رسم مليمترية وآلة حاسبة.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أوجد قيمة الأجر في الساعة لوظيفتين تفضلهما. ارسم تمثيلًا بيانيًّا بالخطوط تبيّن فيه مدخول كل وظيفة. يكون عدد الساعات بين ٠ و١٠ على المحور الأفقي وقيمة المدخول على المحور الرأسي. على افتراض أنك عملت ٨ ساعات، اشرح كيف يفسر التمثيل البياني فرق المدخول بين الوظيفتين.

على افتراض أنك تنال ٤٠٠ فلس في الساعة لقاء عملك في أحد أفران الحلويات ويحسم من أجرك ١٠٠ فلس ضريبة أسبوعية، إذا كنت تعمل س ساعة خلال ٥ أيام في الأسبوع وتدفع يوميًّا ٢٥٠ فلسًا ثمن وجبة:

أ اكتب معادلة تبيّن فيها ربحك في أسبوع واحد بعد احتساب الضريبة والمصاريف.

ب في هذه الحالة ماذا يمثّل الميل (معامل س)؟ وماذا يمثل التقاطع مع محور الصادات؟

جـ كم ساعة عمل يلزمك كي يساوي ربحك الصافي ١٤ دينارًا و ٦٥٠ فلسًا بعد احتساب الضريبة والمصاريف؟

د حاور رجلًا مسنًّا حول وظيفته. اسأله عن إيجابيات هذه الوظيفة وسلبياتها من حيث الراتب والمصاريف. اكتب معادلة تبيّن فيها دخله الأسبوعي بعد احتساب المصاريف.

٥ التقرير: ضع تقريرًا مفصلًا حول مقارنة دخل كل وظيفة وكيفية رسم التمثيلات البيانية والاستفادة منها للإجابة عن الأسئلة.

دروس الوحدة

المستوى الإحداثي	تقسيم قطعة مستقيمة	ميل الخط المستقيم	معادلة الخط المستقيم	البعد بين نقطة ومستقيم	معادلة الدائرة
٩-١	٩-٢	٩-٣ (أ)	٩-٣(ب)	٩-٤	٩-٥

الوحدة التاسعة

اين انت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كيف تضع النقاط على المستوى الإحداثي.
- تعلمت كيفية تطبيق نظرية فيثاغورث.
- تعلمت كيف توجد القيم المطلقة والجذور التربيعية.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف توجد المسافة بين نقطتين.
- سوف توجد طول قطعة مستقيمة.
- سوف تحدد إحداثيات نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة.
- سوف تحدد إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل ومن الخارج.
- سوف تقوم بحساب ميل خط مستقيم.
- سوف تقوم برسم خط مستقيم عندما تعرف نقطة منه وتعرف ميله.
- سوف تتعرف العلاقة بين ميل المستقيم وظل الزاوية.
- سوف تكتب معادلة المستقيمات المتوازية أو المتعامدة.
- سوف تتعرف صورة معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل ونقطة أو نقطتين.
- سوف تتعرف البعد بين نقطة ومستقيم.
- سوف تتعرف الدائرة ومعادلتها.
- سوف تتعرف الصورة العامة لمعادلة الدائرة وتوظيفها.
- سوف توجد مركز الدائرة وطول نصف قطرها.
- سوف تكتب معادلة المماس لدائرة.
- سوف تتعرف العلاقة بين دائرتين في المستوى.

أضف إلى معلوماتك

ديكارت والهندسة التحليليَّة

(١٥٩٦ - ١٦٥٠م)

رينيه ديكارت **Descartes** الرياضي والفيلسوف الفرنسي، هو الذي ربط بين العدد والنقطة وهذا ما أنتجَ لنا الهندسة التحليلية، حيث ابتكر النظام الإحداثي المكوَّن من محورين متعامدين متقاطعين (محور السينات ومحور الصادات)، والذي بواسطته يمكن التعبير عن كل نقطة في المستوى بعددين حقيقيين (س، ص). وباستخدام النظام الإحداثي، استطاع ديكارت أن يثبت صحة كل خواصّ الهندسة الإقليديَّة، معبرًا عن المستقيمات والمنحنيات بمعادلات جبرية باعتبارها مسارات لنقطة عامة تتحرك بشروط تحكم العلاقة بين(س، ص).

رينيه ديكارت

المصطلحات الأساسية

طول القطعة المستقيمة - المسافة بين نقطتين - البعد بين نقطة ومستقيم - نقطة المنتصف - ميل المستقيم - ظل الزاوية - ميلا مستقيمين متوازيين - ميلا مستقيمين متعامدين - معادلة الخط المستقيم - الدائرة - معادلة الدائرة - مركز الدائرة - نصف قطر الدائرة - مماس الدائرة.

٩ـ١

المستوى الإحداثي
Coordinate Plane

سوف تتعلم
- إيجاد المسافة بين نقطتين
- إيجاد إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة

دعنا نفكر ونتناقش

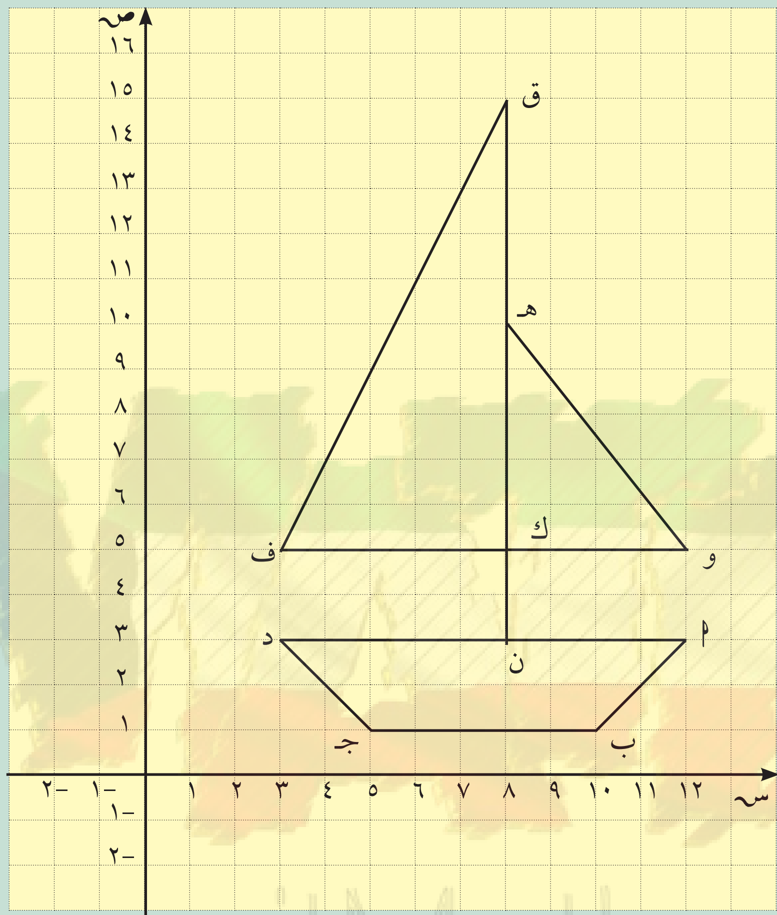
في حصة النشاط الفني قام راشد بتصميم مركب شراعي كما في الشكل.

١ اكتب إحداثيات النقاط المبينة في الرسم.

٢ أوجد طول كل من $\overline{\text{أ د}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$.

٣ قارن الفرق بين الإحداثيات السينية لكل من أ، د من جهة وب، جـ من جهة.

ماذا تلاحظ؟



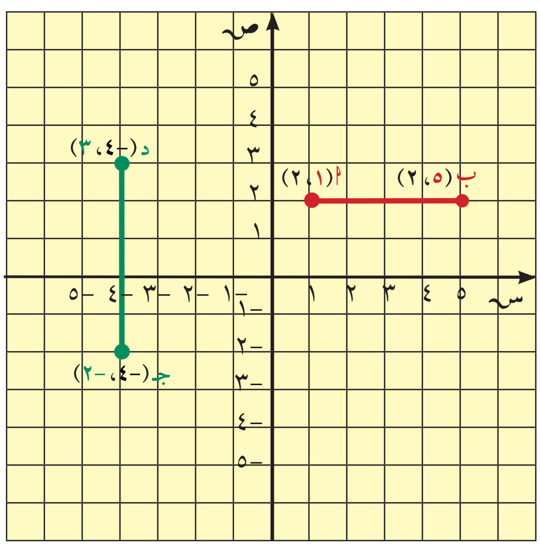
المسافة بين نقطتين
Distance Between Two Points

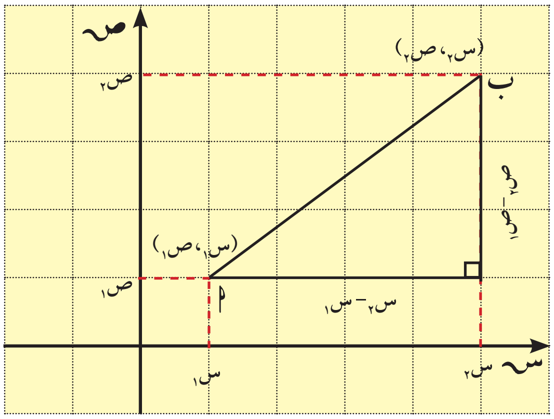
في المخطط إلى اليسار، $\overline{\text{أ ب}}$ موازية للمحور السيني (قطعة أفقية). يمكنك إيجاد طولها بطرح الإحداثي السيني للنقطة أ من الإحداثي السيني للنقطة ب.

طول $\overline{\text{أ ب}}$ = |٥ − ١| = ٤ وحدة طول.

وبالطريقة نفسها، يمكنك إيجاد طول $\overline{\text{جـ د}}$ قطعة موازية للمحور الصادي (قطعة رأسية) وذلك بطرح الإحداثي الصادي للنقطة جـ من الإحداثي الصادي للنقطة د.

طول $\overline{\text{جـ د}}$ = |٣ − (−٢)| = ٥ وحدة طول.





أي نقطتين أ(س$_١$، ص$_١$)، ب(س$_٢$، ص$_٢$) ليستا على مستقيم أفقي أو مستقيم رأسي، يمكن تمثيلهما بيانيًّا وصنع مثلث قائم الزاوية (كما هو مبين في الشكل المقابل).

نستخدم نظرية فيثاغورث لإيجاد المسافة بين النقطتين أ، ب.

(أ ب)^٢ = (أ جـ)^٢ + (ب جـ)^٢ **نظرية فيثاغورث**

(أ ب)^٢ = (س$_٢$ − س$_١$)^٢ + (ص$_٢$ − ص$_١$)^٢ **التعويض**

أ ب = $\sqrt{\text{(س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$ **الجذر التربيعي الأساسي**

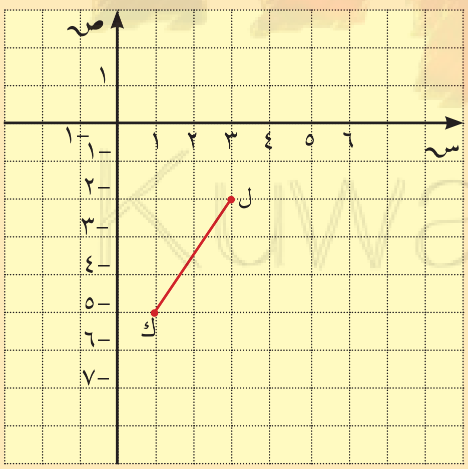
قانون:

المسافة بين أي نقطتين أ(س$_١$، ص$_١$)، ب(س$_٢$، ص$_٢$) تساوي $\sqrt{\text{(س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$

يعطي القانون المسافة الدقيقة بين نقطتين بينما تعطي الآلة الحاسبة إجابة تقريبية، إلّا إذا كانت القيمة تحت علامة الجذر مربعًا كاملًا.

مثال (١)

أوجد المسافة بين ك(١، −٥)، ل(٣، −٢).



الحل: المسافة = $\sqrt{\text{(س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$

= $\sqrt{(٣ - ١)^٢ + (-٢ - (-٥))^٢}$

= $\sqrt{(٢)^٢ + (٣)^٢}$

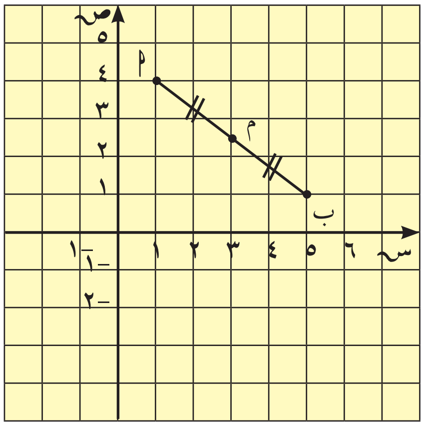
= $\sqrt{١٣}$ = ٣,٦ وحدة طول

المسافة بين ك، ل تساوي حوالي ٣,٦ وحدات طول.

حاول أن تحل

١ أوجد المسافة بين م(−٢، ١)، ن(−٧، ٤). قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

نقطة المنتصف Midpoint



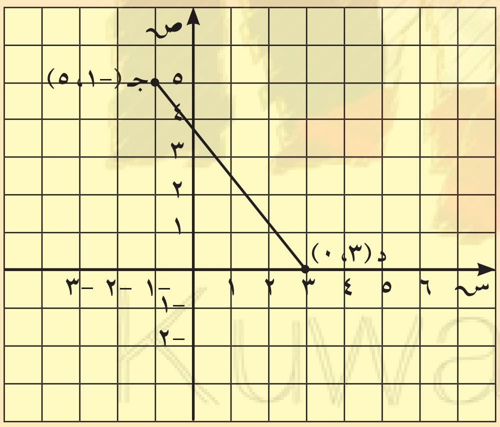
$\overline{\text{أب}}$ نقطتان في المستوى. م نقطة منتصف $\overline{\text{أب}}$.

النقطة م تقسم القطعة $\overline{\text{أب}}$ إلى قطعتين متطابقتين $\overline{\text{أم}}$، $\overline{\text{م ب}}$.

قانون:

إذا كانت أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢)، فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي م(س، ص) حيث س $= \frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2}$ ، ص $= \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2}$.

مثال (٢)



في الشكل المقابل أوجد نقطة منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ حيث جـ (−١، ٥)، د (٣، ٠).

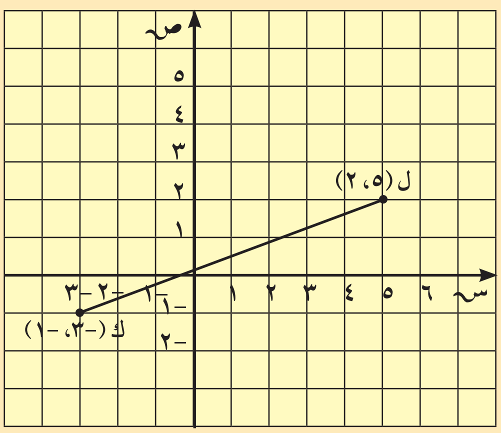
الحل: $\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2}\right) = \left(\frac{-1 + 3}{2} ، \frac{5 + 0}{2}\right)$

$= \left(\frac{2}{2} ، \frac{5}{2}\right)$

$= (1 ، 2{,}5)$

نقطة منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ هي (١ ، ٢,٥).

حاول أن تحل



٢ في الشكل المقابل، أوجد نقطة منتصف $\overline{\text{ك ل}}$ حيث ك (−٣، −١)، ل (٥، ٢).

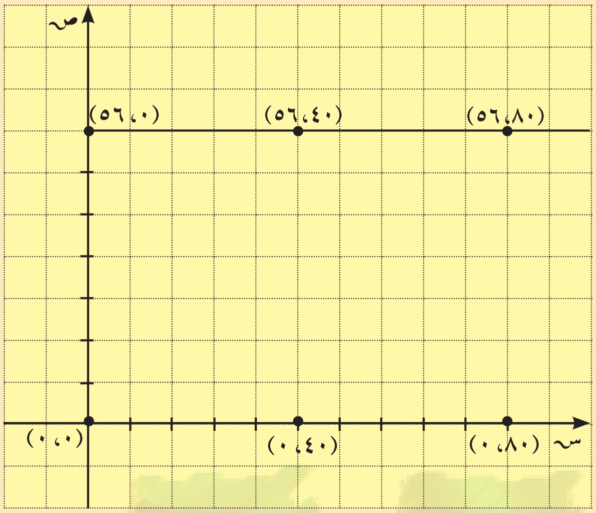
مثال (٣)

إثرائي

أرادت إحدى الشركات بناء مدينة ملاهي في العاصمة. فوضعت التصميم المقابل على أن يكون لها ٦ مداخل رئيسية. وترغب إدارة الشركة في تركيب نافورتين للماء على أن تكون كل نافورة موجودة على مسافة واحدة من أربعة مداخل في مدينة الملاهي:

أ حدد أنسب موقع لتركيب هاتين النافورتين؟

ب ما المسافة بينهما؟

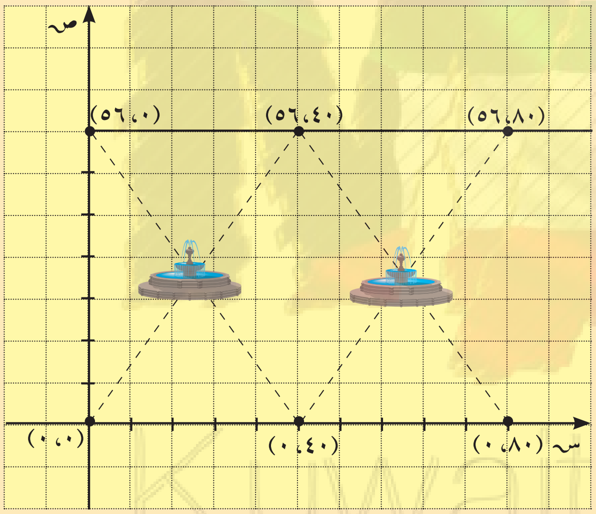


الحل:

أ النافورة الأولى لجهة اليسار يجب أن تكون على نقطة تقاطع القطرين للمستطيل الذي رؤوسه (٠، ٠)؛ (٤٠، ٠)؛ (٤٠، ٥٦)؛ (٠، ٥٦).

نقطة تقاطع القطرين هي منتصف كل قطر لذا يكون موقع تركيب هذه النافورة عند النقطة $\left(\frac{٤٠ + ٠}{٢} ، \frac{٥٦ + ٠}{٢} \right)$

أي عند النقطة (٢٠، ٢٨). النافورة الثانية لجهة اليمين يجب أن تكون عند نقطة تقاطع القطرين للمستطيل الذي رؤوسه (٤٠، ٠)؛ (٨٠، ٠)؛ (٨٠، ٥٦)؛ (٤٠، ٥٦).



نقطة تقاطع القطرين هي منتصف كل قطر. لذا يكون موقع تركيب النافورة الثانية عند النقطة $\left(\frac{٨٠ + ٤٠}{٢} ، \frac{٥٦ + ٠}{٢} \right)$

أي عند النقطة (٦٠، ٢٨).

ب المسافة بين النافورتين

نستخدم القاعدة: $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

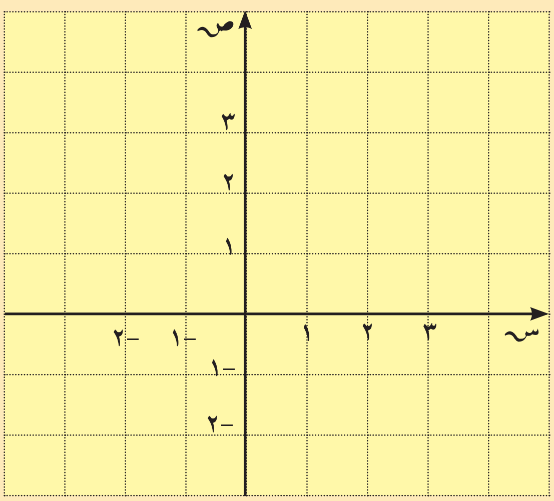
$= \sqrt{(٦٠ - ٢٠)^٢ + (٢٨ - ٢٨)^٢} = \sqrt{(٤٠)^٢} = ٤٠$

أي أن المسافة سوف تكون ٤٠ وحدة طول.

حاول أن تحل

٣ تقع المدرسة في الموقع ٢ شرق، ١ جنوب ويقع منزل خالد ٣ شرق، ٣ شمال. عيّن على المستوى الإحداثي موقع المدرسة وموقع منزل خالد، ثم أوجد المسافة من منزل خالد إلى المدرسة.

ملاحظة: الموقع ٣ شرق، ٢ شمال يعني (+٣، ٢).



كل وحدة طول على المحاور تساوي ٢ كيلومتر

تقسيم قطعة مستقيمة
Dividing Line Segment

سوف تتعلم

- تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل بنسبة معلومة.
- تقسيم قطعة مستقيمة من الخارج بنسبة معلومة.

فلنعمل معًا

قطعة خشبية طولها ٩٠ سم، يريد نجار تقسيمها إلى قطعتين مختلفتي الطول. يزيد طول القطعة الكبرى عن طول الصغرى ما يساوي نصف طول القطعة الصغرى.

أوجد طول كلّ من القطعتين.

الحل:

لنفترض أن لدينا القطعة الصغرى فنقسمها إلى قسمين متطابقين، فيكون طول القطعة الكبرى ثلاثة أمثال أحد القسمين، وبالتالي هذا يعني أننا نقسم القطعة الخشبية إلى ٥ أقسام متطابقة. ونقسم طول الخشبة ٩٠ سم إلى ٥ أقسام فنحصل على ١٨ سم.

لاحظ أننا قسمنا القطعة الخشبية بنسبة ٢ : ٣

فيكون طول القطعة الصغرى = ٢ × ١٨ = ٣٦ سم

وطول القطعة الكبرى: ٣ × ١٨ = ٥٤ سم

١ - التقسيم من الداخل Internal Division

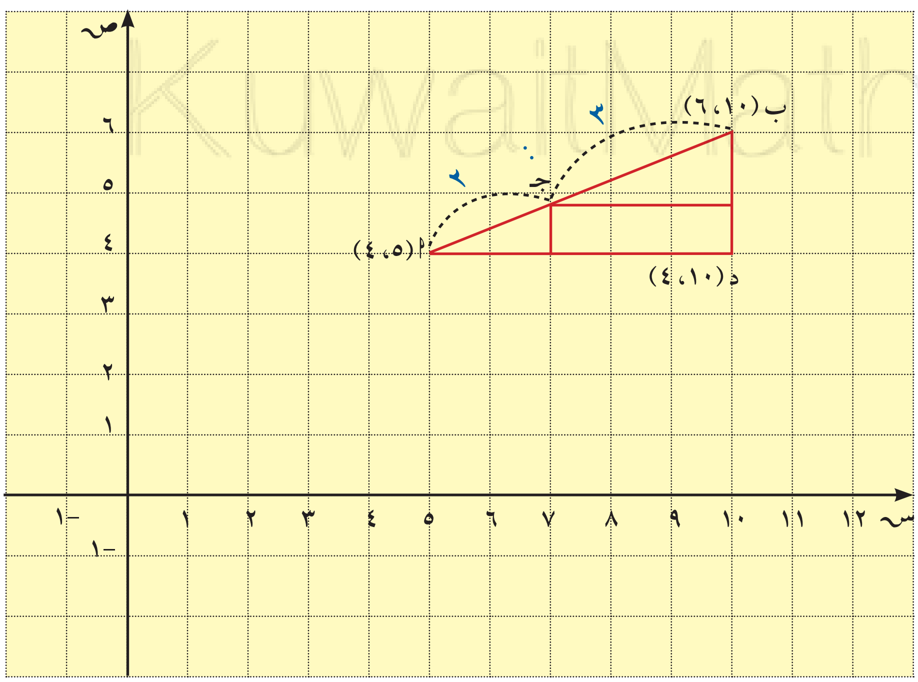
مثال تمهيدي

لتكن $\overline{\text{أب}}$ قطعة مستقيمة بحيث أ (٥، ٤)، ب (١٠، ٦) والمطلوب تقسيم $\overline{\text{أب}}$ بنسبة ٢:٣ من الداخل من جهة أ.

أوجد إحداثيات نقطة التقسيم.

الحل:

لتكن جـ (س، ص) هي نقطة التقسيم المطلوبة.



نرسم المثلث أ د ب قائم الزاوية في د.

نلاحظ الآتي: إحداثيات د هي (١٠، ٤)

ب د = ٢ وبتقسيمها بنسبة ٢ : ٣ من جهة د

يكون طولا الجزءين هما $\frac{٢}{٥}$ × ٢ = ٠,٨ ، $\frac{٣}{٥}$ × ٢ = ١,٢ على الترتيب،

وتكون نقطة تقسيم $\overline{\text{ب د}}$ هي (١٠، ٤,٨).

أ د = ٥ وبتقسيمها بنسبة ٢ : ٣ من جهة أ

يكون طولا الجزءين هما $\frac{٢}{٥}$ × ٥ = ٢ ، $\frac{٣}{٥}$ × ٥ = ٣ على الترتيب

وتكون نقطة تقسيم $\overline{\text{أ د}}$ هي (٧، ٤).

وبذلك تكون جـ (٧ ، ٤,٨).

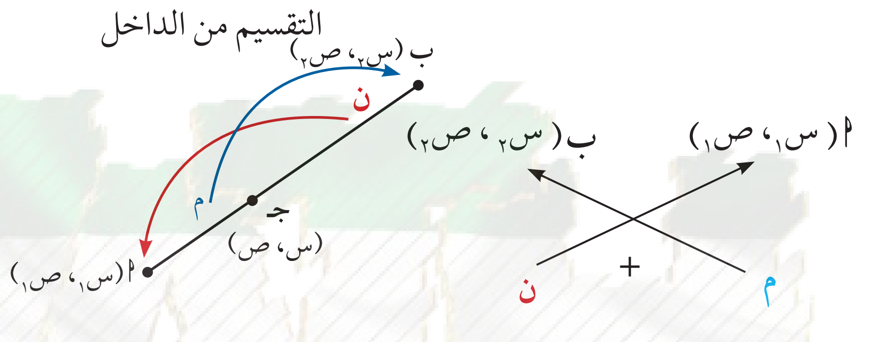
وبصفة عامة:

إذا كانت $\overline{\text{أب}}$ قطعة مستقيمة بحيث أ (س$_١$، ص$_١$)،

ب (س$_٢$، ص$_٢$) ويراد تقسيمها من جهة أ بنسبة م: ن من الداخل وكانت نقطة التقسيم جـ (س، ص) فإن:

$$\text{س} = \frac{\text{م س}_٢ + \text{ن س}_١}{\text{م} + \text{ن}}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{م ص}_٢ + \text{ن ص}_١}{\text{م} + \text{ن}}$$



$$\text{جـ} \left(\frac{\text{م س}_٢ + \text{ن س}_١}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{م ص}_٢ + \text{ن ص}_١}{\text{م} + \text{ن}} \right)$$

ويمكن إيجاد نقطة التقسيم جـ (س، ص) للمثال التمهيدي كالتالي:

$$\text{س} = \frac{٢ \times ١٠ + ٣ \times ٥}{٢ + ٣} = \frac{٣٥}{٥} = ٧$$

$$\text{ص} = \frac{٢ \times ٦ + ٣ \times ٤}{٢ + ٣} = \frac{٢٤}{٥} = ٤,٨$$

أ ب

(٥، ٤) (١٠، ٦)

بنسبة ٢ + ٣

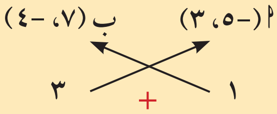
نقطة التقسيم جـ (س، ص)

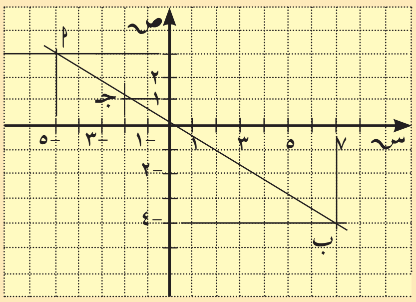
$$= \left(\frac{٢ \times ١٠ + ٣ \times ٥}{٢ + ٣} ، \frac{٢ \times ٦ + ٣ \times ٤}{٢ + ٣} \right)$$

$$= (٧ ، ٤,٨)$$

مثال (١)

إذا كان أ (−٥، ٣)، ب (٧، −٤). فأوجد نقطة تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من جهة أ بنسبة ١:٣ من الداخل.





الحل: نقطة التقسيم (س، ص) = $\left(\frac{\text{م س}_٢ + \text{ن س}_١}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{م ص}_٢ + \text{ن ص}_١}{\text{م} + \text{ن}}\right)$

س = $\frac{١ \times ٧ + ٣ \times (-٥)}{١ + ٣} = \frac{-٨}{٤} = -٢$ ، ص = $\frac{١ \times (-٤) + ٣ \times ٣}{١ + ٣} = \frac{٥}{٤} =$ ١,٢٥

نقطة التقسيم هي: جـ (−٢ ، ١,٢٥).

حاول أن تحل

١ إذا كان أ (٣، −٤)، ب (−٢، ٣). فأوجد جـ بحيث ٢ أ جـ = جـ ب ، جـ $\in \overline{\text{أب}}$.

[إرشاد: أ جـ : جـ ب = ١ : ٢]

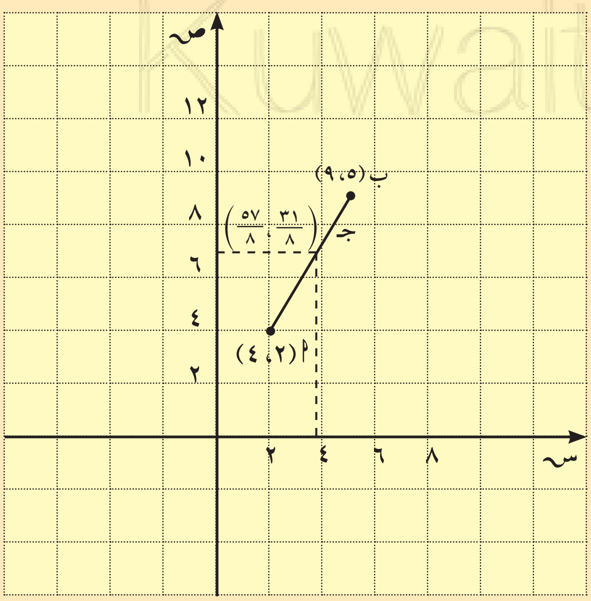
ملاحظة: الرسم ليس جزءًا من الحل ولكنه يساعد على التحقق من معقولية الإجابة.

مثال (٢)

إذا كان أ (٢، ٤)، ب (٥، ٩)،

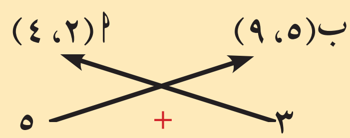
ويراد تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة ب في نقطة جـ بنسبة ٣:٥.

أوجد إحداثيات النقطة جـ.



الحل:

المطلوب إيجاد قيم س، ص إحداثيات النقطة جـ حيث $\frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ أ}} = \frac{٣}{٥}$ من الداخل. باستخدام قاعدة التقسيم من الداخل من جهة ب نكتب:



س = $\frac{٣ \times ٢ + ٥ \times ٥}{٣ + ٥} = \frac{٣١}{٨}$ ؛ ص = $\frac{٣ \times ٤ + ٥ \times ٩}{٣ + ٥} = \frac{٥٧}{٨}$

فتكون جـ $\left(\frac{٣١}{٨} ، \frac{٥٧}{٨}\right)$

حاول أن تحل

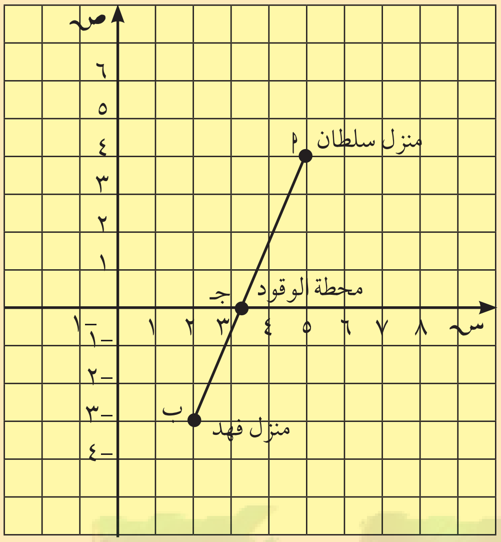
٢ لتكن أ (٢، −٣)، ب (−٤، ٧). أوجد إحداثيات النقطة جـ على $\overline{\text{أب}}$ بحيث: ٧ جـ ب = ٢ جـ أ .

مثال (٣) تطبيقات حياتية

يقع منزل سلطان عند النقطة ﺃ (٥، ٤) بينما يقع منزل صديقه فهد عند النقطة ب (٢، −٣).

أوجد نسبة البعد بين كلا المنزلين ومحطة الوقود إذا تمثلت بالنقطة ﺟ $\left(\frac{٢٣}{٧} ، ٠\right)$.

علمًا بأن النقاط ﺃ، ﺟ، ب على استقامة واحدة.



الحل:

نفرض أن نسبة التقسيم م : ن جهة منزل سلطان

لإيجاد نسبة البعد ، نستخدم القانون العام لتقسيم قطعة من الداخل.

$$ﺟ \left(\frac{م\, س_٢ + ن\, س_١}{م + ن} ، \frac{م\, ص_٢ + ن\, ص_١}{م + ن} \right)$$

$$\left(\frac{٢٣}{٧} ، ٠ \right) = \left(\frac{٢ \times م + ٥ \times ن}{م + ن} ، \frac{م \times (-٣) + ن \times ٤}{م + ن} \right)$$

$$\therefore \frac{٢م + ٥ن}{م + ن} = \frac{٢٣}{٧}$$

$$١٤م + ٣٥ن = ٢٣م + ٢٣ن$$

$$\therefore ٩م = ١٢ن$$

$$\frac{م}{ن} = \frac{٤}{٣}$$

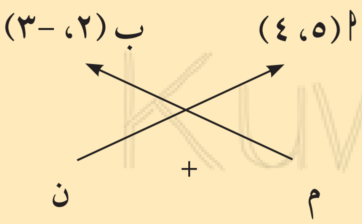
طريقة أخرى للحل:

$$\frac{-٣م + ٤ن}{م + ن} = ٠$$

$$-٣م + ٤ن = ٠$$

$$٣م = ٤ن$$

$$\frac{م}{ن} = \frac{٤}{٣}$$



لاحظ أنه يمكنك الاكتفاء بإيجاد النسبة من أحد الحلين

بذلك، تكون نسبة البعد من كلا المنزلين إلى محطة الوقود هي ٤ : ٣ من جهة منزل سلطان.

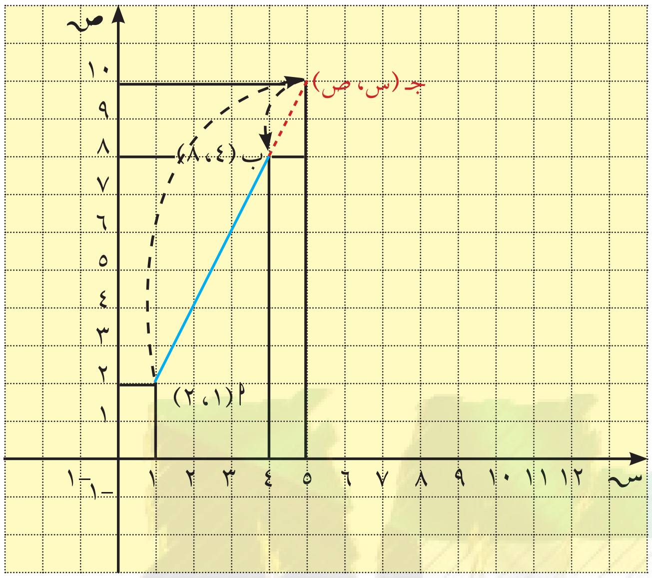
ملاحظة: نسبة البعد بين كلا المنزلين ومحطة الوقود هي ٣ : ٤ من جهة منزل فهد.

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، يقع منزل صالح على المستقيم المار بمنزلي سلطان وفهد وهو يقسم $\overline{ﺃب}$ من الداخل من جهة ﺃ بنسبة ٤:٥. أوجد إحداثيات منزل صالح.

٢ – التقسيم من الخارج External Division

مثال تمهيدي



لتكن أ (١، ٢) ، ب (٤، ٨)،

ويراد تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج من جهة ب في نقطة جـ بنسبة ٤:١ .

أوجد إحداثيات جـ.

الحل:

لتكن جـ (س، ص) حيث جـ $\in \overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، جـ $\notin \overline{\text{أب}}$

جـ ب: أ جـ = ١:٤

وهذا يعني أن أب : ب جـ = ٣: ١

أي أن ب (٤، ٨) تقسم $\overline{\text{أجـ}}$ بنسبة ٣ : ١ من الداخل من جهة أ.

بتطبيق قاعدة التقسيم من الداخل نجد أن:

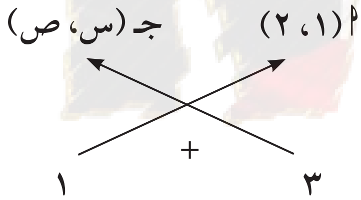
$$٤ = \frac{٣ \times \text{س} + ١ \times ١}{٣ + ١} = \frac{٣\text{س} + ١}{٤}$$

ومن ذلك نجد أن: ٣ س + ١ = ١٦ ومنها س = ٥،

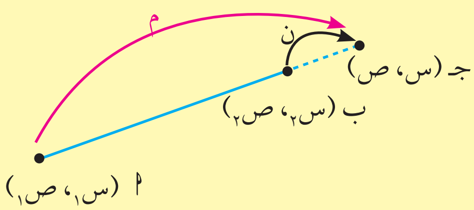
$$٨ = \frac{٣\ \text{ص} + ١ \times ٢}{٣ + ١} = \frac{٣\text{ص} + ٢}{٤}$$

ومن ذلك نجد أن: ٣ ص + ٢ = ٣٢ ومنها ص = ١٠،

أي أن جـ (٥، ١٠) وهي نقطة التقسيم من الخارج.



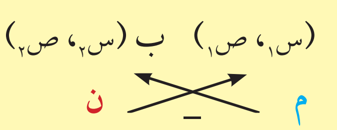
وبصفة عامة:



إذا كانت أ (س١، ص١) ، ب (س٢، ص٢) فإن النقطة جـ (س، ص) التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج بنسبة ن: م من جهة ب تكون إحداثياتها:

$$\text{س} = \frac{\text{م س}_٢ - \text{ن س}_١}{\text{م} - \text{ن}}$$

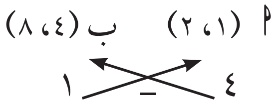
$$\text{ص} = \frac{\text{م ص}_٢ - \text{ن ص}_١}{\text{م} - \text{ن}}$$



ملاحظة: يمكن إيجاد نقطة التقسيم السابقة كالتالي:

$$\text{س} = \frac{\text{ن س}_١ - \text{م س}_٢}{\text{ن} - \text{م}} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\text{ن ص}_١ - \text{م ص}_٢}{\text{ن} - \text{م}}$$

بتطبيق قاعدة التقسيم من الخارج على المثال التمهيدي من جهة ب.



جـ (س، ص)

$$س = \frac{٤ \times ٤ - ١ \times ١}{٤ - ١} = \frac{١٦ - ١}{٣} = ٥$$

$$ص = \frac{٤ \times ٨ - ١ \times ٢}{٤ - ١} = \frac{٣٢ - ٢}{٣} = ١٠$$

جـ (٥، ١٠) وهو ما حصلنا عليه نفسه في الحل السابق .

تدريب

أوجد نقطة تقسيم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ١ : ٤ من جهة أ.

حيث أ (١، ٢) ، ب (٤، ٨).

مثال (٤)

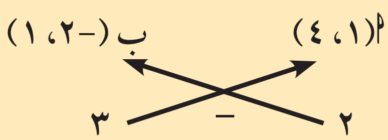
إذا كان أ (١، ٤) ، ب (−٢، ١)، ويراد تقسيم $\overline{أب}$ من الخارج جهة أ في نقطة جـ بنسبة ٢:٣.

أوجد إحداثيات النقطة جـ.

الحل:

المطلوب إيجاد قيم س، ص إحداثيات النقطة جـ من الخارج حيث $\frac{جـ أ}{جـ ب} = \frac{٢}{٣}$.

باستخدام قاعدة التقسيم من الخارج لجهة أ نكتب:



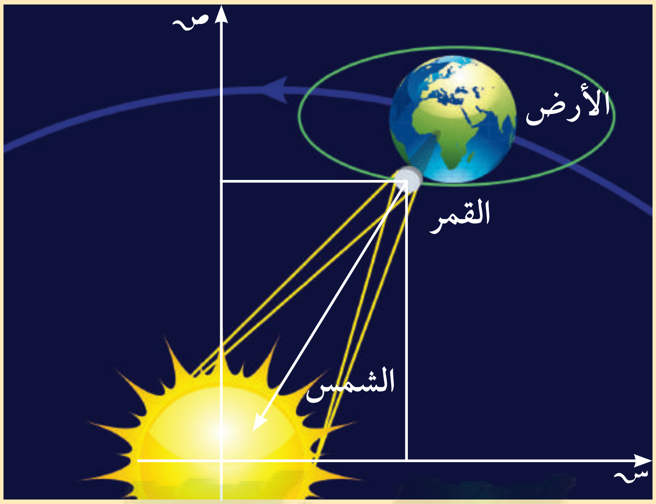
$$س = \frac{٢ \times (-٢) - ٣ \times ١}{٢ - ٣} = \frac{-٧}{-١} = ٧ \text{؛ } ص = \frac{٢ \times ١ - ٣ \times ٤}{٢ - ٣} = \frac{-١٠}{-١} = ١٠$$

فتكون جـ (٧، ١٠)

حاول أن تحل

٤ لتكن أ (−٢، ٢) ، ب (٣، ١). أوجد إحداثيات النقطة جـ التي تقسم $\overline{أب}$ من الخارج من جهة ب بنسبة ٣ :٨ .

مثال (٥) **إثرائي**

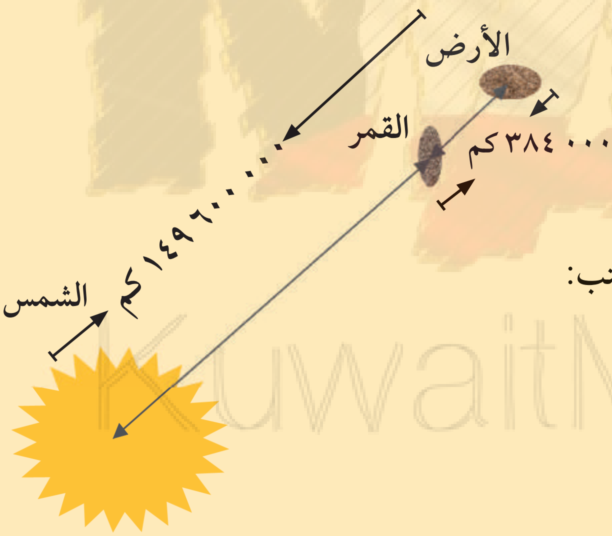


أثناء الكسوف تكون الأرض والشمس والقمر على استقامة واحدة كما تبين الصورة المقابلة. المسافة بين الأرض والشمس ٠٠٠ ٦٠٠ ١٤٩ كم تقريبًا والمسافة بين الأرض والقمر ٠٠٠ ٣٨٤ كم تقريبًا.

أ أوجد نسبة التقسيم من الخارج جهة القمر على القطعة المستقيمة الواصلة بين القمر والشمس حيث توجد الأرض.

ب لنأخذ مستوى إحداثي مركزه نقطة الأصل وهي الشمس.
إذا كان القمر في هذه الحالة له الإحداثيات (٦، ١٠)، فما هي إحداثيات الأرض؟

الحل:



أ المسافة بين الأرض والقمر = ٠٠٠ ٣٨٤ كم

المسافة بين الأرض والشمس = ٠٠٠ ٦٠٠ ١٤٩ كم

$$\text{النسبة} = \frac{٣٨٤\ ٠٠٠}{١٤٩\ ٦٠٠\ ٠٠٠} = \frac{١٢}{٤\ ٦٧٥}$$

ب التقسيم من الخارج بالنسبة إلى الأرض والقمر والشمس نكتب:

القمر (٦، ١٠) الشمس (٠، ٠)

١٢ − ٤٦٧٥

$$س = \frac{١٢ \times ٠ - ٦ \times ٤٦٧٥}{١٢ - ٤٦٧٥}$$

$$س \simeq ٦,٠١٥$$

$$ص = \frac{١٢ \times ٠ - ١٠ \times ٤٦٧٥}{١٢ - ٤٦٧٥}$$

$$ص \simeq ١٠,٠٢٦$$

أي أن إحداثيات الأرض هي تقريبًا: (٦,٠١٥، ١٠,٠٢٦)

حاول أن تحل

٥ أ في المثال (٥)، أوجد نسبة التقسيم: $\frac{\text{مسافة بين الشمس والقمر}}{\text{مسافة بين الشمس والأرض}}$.

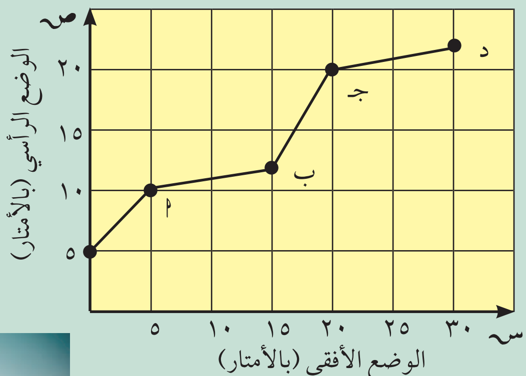
ب إذا افترضنا أن إحداثيات الأرض هي (٧، ١١). فما هي إحداثيات القمر؟

٩ـ٣ (أ)

ميل الخط المستقيم
Slope of a Straight Line

دعنا نفكر ونتناقش

يمثل المخطط مسار أحد مصاعد التزلج.



١ ما التغير الرأسي من أ إلى ب؟
من ب إلى جـ؟ من جـ إلى د؟

٢ ما التغير الأفقي من أ إلى ب؟
من ب إلى جـ؟ من جـ إلى د؟

٣ ما نسبة التغير الرأسي إلى التغير الأفقي لكل قطعة؟

٤ أي مرحلة هي الأكثر ارتفاعًا؟ فسّر.

سوف تتعلم

- معدل التغير
- إيجاد الميل
- العلاقة بين ميل المستقيم وظل الزاوية

معدل التغير Rate of Change

في المخطط أعلاه، $\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$ لهما معدلا تغيّر مختلفان. يسمح **معدل التغير** بمتابعة العلاقة بين كميتين تتغيران باستمرار. يكون ما يلي صحيحًا إذا ارتبطت إحدى الكميتين بالأخرى فإن:

$$\text{معدل التغير} = \frac{\text{التغير في المتغير التابع ص}}{\text{التغير في المتغير المستقل س}}$$

معلومة رياضية:
المعدل هو مقارنة بين كميتين بوحدات قياس مختلفة.

مثال (١)

باستخدام البيانات في الجدول أدناه أوجد معدل التغير. هل معدل التغير لكل يومين متتاليين هو نفسه؟

الحل:

$$\text{معدل التغير} = \frac{\text{التغير في الكلفة}}{\text{التغير في عدد الأيام}}$$

ترتبط الكلفة بعدد الأيام

$$\frac{٧,٥ - ٦}{٢ - ١} = \frac{١,٥}{١} \qquad \frac{٩ - ٧,٥}{٣ - ٢} = \frac{١,٥}{١}$$

$$\frac{١٠,٥ - ٩}{٤ - ٣} = \frac{١,٥}{١} \qquad \frac{١٢ - ١٠,٥}{٥ - ٤} = \frac{١,٥}{١}$$

عدد الأيام	كلفة تأجير الحاسوب
١	٦ دنانير
٢	٧,٥ دنانير
٣	٩ دنانير
٤	١٠,٥ دنانير
٥	١٢ دينارًا

معدل التغير لكل يومين متتاليين هو $\frac{١,٥}{١}$

وبالتالي، معدل التغير هو نفسه في كل بيانات الجدول .

∴ كلفة تأجير الحاسوب تزداد ٥ ,١ دينار لكل يوم بعد اليوم الأوّل.

تذكر:

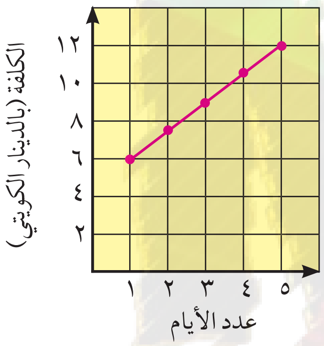
معدل التغير يمكن أن يكون موجبًا أو سالبًا أو صفرًا.

حاول أن تحل

١ أ أوجد معدل التغير مستخدمًا اليوم الخامس واليوم الثاني.

ب تفكير ناقد: هل إيجاد معدل التغير لزوج واحد من الأيام المتتالية يعني أن معدل التغير هو نفسه في كل بيانات الجدول؟ فسّر إجابتك.

استخدام الرسم البياني لإيجاد معدل التغير



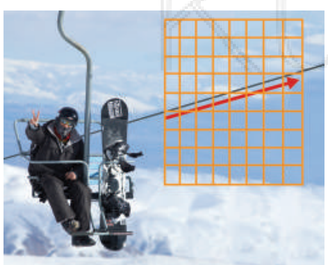
يبيّن الرسم البياني أن الأزواج المرتبة (عدد الأيام، الكلفة) في المثال (١) موجودة على خط مستقيم.

∴ بيانات الجدول هي خطيّة.

∴ يمكن استخدام الرسم البياني لإيجاد معدل التغير.

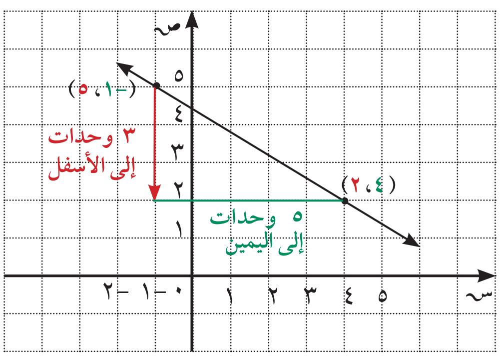
يتم تعيين المتغير المستقل على المحور الأفقي ويتم تعيين المتغير التابع على المحور **الرأسي**.

إيجاد الميل Finding The Slope



درست في ما سبق أن ميل المستقيم يمكن إيجاده باستخدام العلاقة.

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$



فمثلًا ميل المستقيم الموضح بالشكل المقابل

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

$$= \frac{٢ - ٥}{٤ - (-١)}$$

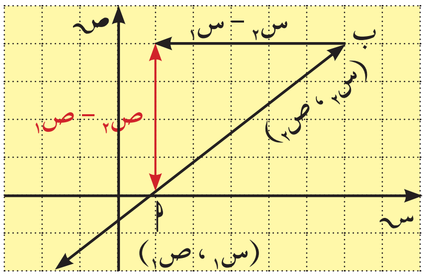
$$= \frac{-٣}{٥}$$

ميل الخط المستقيم يساوي $\frac{-٣}{٥}$.

كذلك يمكن استخدام نقطتين على خط مستقيم لإيجاد ميله.

في الرسم البياني إلى اليسار،

لإيجاد ميل $\overleftrightarrow{أب}$ ،حيث أ (س$_1$ ، ص$_1$)، ب (س$_2$ ، ص$_2$) نستخدم الصيغة التالية:



$$\text{الميل} = \frac{\text{التغيير الرأسي}}{\text{التغيير الأفقي}} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} \text{ ، } س_2 - س_1 \neq 0$$

يجب مراعاة الترتيب المعتمد في كتابة إحداثيات النقطتين عند إيجاد الميل. فمثلًا، إذا بدأنا بالإحداثي الصادي للنقطة ب في البسط فيجب البدء بالإحداثي السيني للنقطة ب في المقام.

مثال (٢)

أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ(−٢، ١) ، ب(٥، ٧).

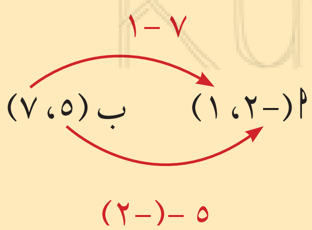
الحل:

$$\text{الميل} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

$$= \frac{٧ - ١}{٥ - (-٢)} \quad \text{عوّض}$$

$$= \frac{٦}{٧} \quad \text{بسّط}$$

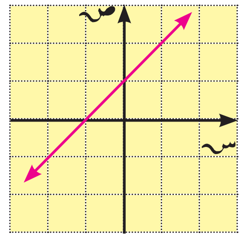
ميل الخط المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يساوي $\frac{٦}{٧}$.



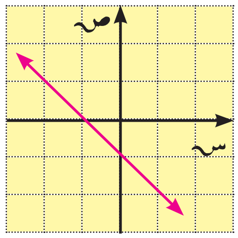
حاول أن تحل

٢ أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بكل زوج من النقاط.

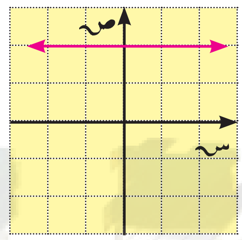
أ جـ(٢، ٥) ، د(٤، ٧) ب ق(−١، ٤) ، ك(٣، −٢) جـ م (٤، ٣) ، ن(−٧، ٣)



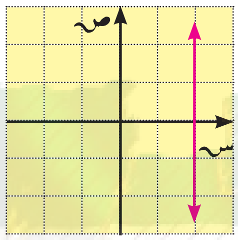
ميل المستقيم **موجب**



ميل المستقيم **سالب**



ميل المستقيم الأفقي
يساوي **صفرًا**



المستقيم الرأسي
ليس له **ميل**

مثال (٣)

نأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: ﺃ(١، −١) ، ب(٢، ٢) ، جـ(−١، −٧). أثبت أن النقاط ﺃ، ب، جـ على استقامة واحدة.

الحل:

$$م_{١} = \text{ميل } \overleftrightarrow{ﺃب} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{٢ - (-١)}{٢ - ١} = ٣$$

$$م_{٢} = \text{ميل } \overleftrightarrow{ﺃجـ} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{-٧ - (-١)}{-١ - ١} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$$

أي أن $م_{١} = م_{٢} = ٣$

∴ $\overleftrightarrow{ﺃب} \parallel \overleftrightarrow{ﺃجـ}$ ولكنهما يشتركان في النقطة ﺃ.

∴ تكون النقاط ﺃ، ب، جـ على استقامة واحدة.

حاول أن تحل

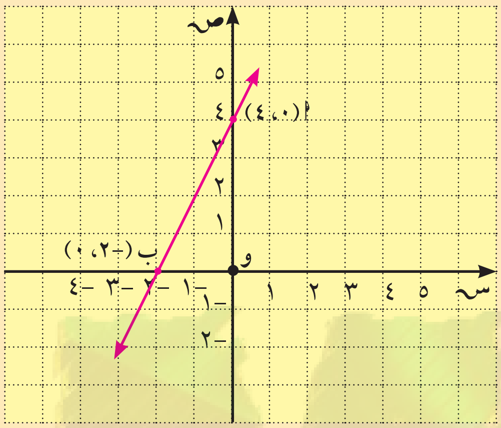
٣ أثبت أن النقاط ﺃ(٢، −١) ، ب(−١، ٥) ، جـ(٣، −٣) على استقامة واحدة.

تذكر أن العلاقة بين ظل الزاوية θ التي يصنعها مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وميل هذا المستقيم م

هي: م = ظا θ.

مثال (٤)

أوجد ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ حيث أ(٠، ٤)، ب(−٢، ٠) وقارنه بظل الزاوية $\hat{\text{ب}}$ في المثلث قائم الزاوية ب و أ.



الحل:

$$\text{الميل} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

$$= \frac{4 - 0}{0 - (-2)}$$ عوّض

$$= \frac{4}{2}$$ بسّط

$$= 2$$

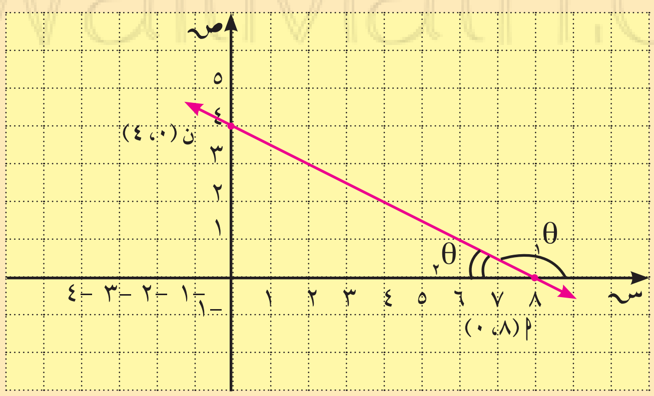
في المثلث أوب: أو = ٤ ، وب = ٢

$$\text{ظا ب} = \frac{\text{أو}}{\text{ب و}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\therefore \text{ظا ب} = \text{ميل } \overleftrightarrow{\text{أب}} = 2$$

حاول أن تحل

٤ أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أن}}$ وقارنه بظل الزاوية الحادة التي قياسها θ_2 وظل الزاوية المنفرجة التي قياسها θ_1.



٩-٣ (ب)

معادلة الخط المستقيم
Equation of a Straight Line

سوف تتعلم

- كتابة معادلة الخط المستقيم
- الصورة العامة لمعادلة المستقيم
- إيجاد معدل التغيير

دعنا نفكر ونتناقش

تُمثّل المعادلة: ص = م س + ن بيانيًّا بخط مستقيم.

إذا كانت م = ٠ فإن معادلة المستقيم تصبح ص = ن وهي تمثل مستقيمًا موازيًا للمحور السيني (مستقيم أفقي).

إذا كانت ن = ٠ فإن المستقيم يمر بنقطة الأصل ومعادلته ص = م س.

ملاحظة:

١ لكتابة معادلة خط مستقيم ليس رأسيًّا نحن بحاجة إلى معرفة:

- الميل (م).
- نقطة من نقاط المستقيم ولتكن (س$_1$، ص$_1$).

تكون معادلة المستقيم: ص − ص$_1$ = م(س − س$_1$).

٢ معادلة المستقيم الرأسي هي س = أ (وهذا المستقيم ليس له ميل)

مثال (١)

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{٣}{٢}$ و يمر بالنقطة (٤، −١).

الحل:

ص − (−١) = $\frac{٣}{٢}$ (س − ٤) بالتعويض

ص + ١ = $\frac{٣}{٢}$ س − ٦

ص = $\frac{٣}{٢}$ س − ٧ بالتبسيط

∴ المعادلة: ص = $\frac{٣}{٢}$ س − ٧.

حاول أن تحل

١ اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{-٢}{٣}$ ويمر بالنقطة (−٦، ٥).

تذكر:

معادلة محور السينات هي: ص = ٠
معادلة محور الصادات هي: س = ٠
وبالتالي إحداثيات نقاط محور السينات (س، ٠) وإحداثيات نقاط محور الصادات (٠، ص).

معلومة رياضية:

معدل درجة الحرارة بالفهرنهايت يرتبط بمعدل الدرجة المئوية (سيليزية) بالعلاقة:
ف° = $\frac{٩}{٥}$ م° + ٣٢ ويمكن كتابتها:
ص = $\frac{٩}{٥}$ س + ٣٢ وهي معادلة خط مستقيم ميله = $\frac{٩}{٥}$
أو ص = ١,٨ س + ٣٢.

مثال (٢)

اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ(١، ٣) ، ب(-٢، ٠).

الحل:

نوجد الميل

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٠}{١ - (-٢)}$$

$$م = \frac{٣}{٣} = ١$$

المعادلة: ص - ص$_١$ = م(س - س$_١$)

ص - ٣ = ١ (س - ١) بالتعويض في المعادلة

ص = س + ٣ - ١ بالتبسيط

ص = س + ٢

وبالتالي معادلة المستقيم هي: ص - س - ٢ = ٠ أو س - ص + ٢ = ٠ وهي الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

معلومة مفيدة:
الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي:
أس + ب ص + جـ = ٠
حيث أ، ب لا يساويان الصفر معًا.

حاول أن تحل

٢ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين جـ (٣، -١) ، د(٢، -٢).

لأي مستقيمين غير رأسيين ومتوازيين الميل نفسه. أما إذا كان المستقيمان متعامدين وليس أحدهما رأسيًا، فناتج ضرب ميليهما يساوي -١ . وبالتالي إذا علمنا ميل أحد المستقيمات فيمكننا إيجاد ميل المستقيمات المتوازية معه أو ميل المستقيمات المتعامدة معه، كذلك يمكننا إيجاد معادلته بمعرفة نقطة على هذا المستقيم.

مثال (٣)

إذا كان المستقيم ل: ص = ٢س + ١ ، فأوجد:

أ معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٢، -٣).

ب معادلة المستقيم ف العمودي على المستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٤، -٣).

الحل:

أ ∵ المستقيمان ل، هـ متوازيان ، ميل المستقيم هـ = ميل المستقيم ل

∴ ميل المستقيم هـ = ٢

وبالتالي، معادلة المستقيم هـ تكتب على الشكل:

ص - ص$_١$ = م(س - س$_١$)

ص - (-٣) = ٢ (س - ٢) بالتعويض في المعادلة

ص = -٣ + ٢س - ٤ بالتبسيط

ص = ٢س - ٧ وبالتالي معادلة هـ : ص - ٢س + ٧ = ٠

أو ٢س - ص - ٧ = ٠ وهي الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

ب ∵ ل ، ف مستقيمان متعامدان ∴ ميل المستقيم ل × ميل المستقيم ف = −١

٢ × ميل المستقيم ف = −١

ميل المستقيم ف = $\frac{-١}{٢}$

وبالتالي معادلة المستقيم ف:

ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)

ص − (−٣) = $\frac{-١}{٢}$ (س − ٤) بالتعويض

ص + ٣ = $\frac{-١}{٢}$ س + ٢ بالتبسيط

ص = $\frac{-١}{٢}$ س − ١

∴ معادلة المستقيم ف: ص = $\frac{-١}{٢}$ س − ١

تذكر:

إذا كان ميل المستقيم هو $\frac{أ}{ب}$

فإن ميل المستقيم المتعامد معه

هو $\frac{-ب}{أ}$ حيث أ ، ب ≠ ٠

حاول أن تحل

٣ إذا كان المستقيم ك: ٣ص + س + ٣ = ٠، فأوجد:

أ معادلة المستقيم أ الموازي للمستقيم ك والذي يمر بالنقطة (−٣، ٢).

ب معادلة المستقيم ز العمودي على المستقيم ك والذي يمر بالنقطة (١، ٤).

يمكن كتابة معادلة خطية لنمذجة البيانات في جدول لتوضيح العلاقة الخطية بين مجموعتين من البيانات فإذا كان معدل التغير بين الأزواج المتتالية من البيانات هو نفسه فيوجد علاقة خطية ويكون **معدل التغير هو الميل**.

مثال (٤)

هل يمكن إيجاد علاقة خطية بين الأزواج المتتالية في الجدول الموضح؟ إذا وجدت، فاكتب المعادلة الخطية التي يمكن أن تمثل جدول هذه البيانات.

س	ص
−١	٤
٣	٦
٥	٧
١١	١٠

الحل:

الخطوة الأولى:

أوجد معدل التغير بين كل زوجين مرتبين.

س	ص
−١	٤
٣	٦
٥	٧
١١	١٠

$\frac{٦ - ٤}{٣ + ١} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

$\frac{٧ - ٦}{٥ - ٣} = \frac{١}{٢}$

$\frac{١٠ - ٧}{١١ - ٥} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

معدل التغير = $\frac{١}{٢}$ وبالتالي م = $\frac{١}{٢}$

∴ يمكن إيجاد علاقة خطية بين الأزواج في جدول البيانات.

الخطوة الثانية:

استخدم صيغة الميل والنقطة لكتابة المعادلة:

$ص - ص_{١} = م\,(س - س_{١})$

$ص - ٧ = \frac{١}{٢}\,(س - ٥)$ عوض $(س_{١}،\ ص_{١})$ بـ $(٥،\ ٧)$ وم بـ $\frac{١}{٢}$.

$ص = \frac{١}{٢}\,س + \frac{٩}{٢}$

حاول أن تحل

٤ هل يمكن إيجاد علاقة خطية بين الأزواج المتتالية في جدول البيانات المرسوم؟

في حال وجود تلك العلاقة، اكتب المعادلة الخطية التي يمكن أن تمثل جدول هذه البيانات.

س	ص
−١١	−٧
−١	−٣
٤	−١
١٩	٥

مثال (٥) **إثرائي**

يبين الجدول التالي النسبة المئوية ص لتناقص الطاقة الكهربائية بدلالة س عدد ساعات عند استخدام البطارية في الحاسوب المحمول.

عدد ساعات استهلاك الطاقة الكهربائية (س)	١	٢	٣
النسبة المئوية للطاقة المتبقية (ص)	٨٠٪	٦٠٪	٤٠٪

أ اكتب معادلة خطية يمكن أن تنمذج العلاقة بين عدد الساعات والنسبة المئوية للطاقة المتبقية.

ب بعد كم ساعة تصبح الطاقة المتبقية في البطارية ٥٪؟

الحل:

أ معدل التغير $= \frac{٠{,}٦ - ٠{,}٨}{٢ - ١} = -٠{,}٢$

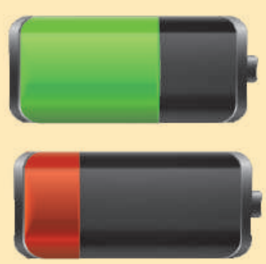
$\frac{٠{,}٤ - ٠{,}٦}{٣ - ٢} = -٠{,}٢$ فيكون معدل التغير ثابت

نستخدم المعادلة:

$ص - ص_{١} = م\,(س - س_{١})$ معادلة المستقيم

$ص - ٠{,}٦ = -٠{,}٢\,(س - ٢)$ بالتعويض

$ص = -٠{,}٢\,س + ١$ بالتبسيط



ب المعادلة: $ص = -٠{,}٢\,س + ١$

$ص = ٠{,}٠٥$ بالتعويض نكتب $٠{,}٠٥ = -٠{,}٢\,س + ١$

$٠{,}٢\,س = ١ - ٠{,}٠٥$

٢,٠س = ٠,٩٥

س = ٠,٩٥ ÷ ٠,٢ = ٤,٧٥

أي بعد مرور ٤ ساعات و٤٥ دقيقة.

حاول أن تحل

٥ في المثال (٥)، ما عدد ساعات استهلاك الطاقة كي تكون النسبة المئوية للطاقة المتبقية في البطارية تساوي ٧٠٪؟

٦ جاءت نتائج تمدد شريط زنبركي بالسنتيمتر بحسب الأوزان المعلقة عليه كما يبين الجدول التالي:

الوزن س (كيلوجرام)	٢	٤	٥	٧	١٠
التمدد ص (سنتيمتر)	٨	١١	١٢,٥	١٥,٥	٢٠

هل العلاقة بين الوزن والتمدد يمكن أن تكون خطية؟ في حال الإيجاب اكتب المعادلة الخطية.

٩–٤

البعد بين نقطة ومستقيم
Distance Between a Point and a Straight Line

سوف تتعلم

- إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم

دعنا نفكر ونتناقش

رأينا سابقًا المسافة بين النقطتين $(س_1، ص_1)$، $(س_2، ص_2)$ والقاعدة التي توجد هذه المسافة ل على الشكل التالي:

$ل = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$.

ومعادلة المستقيم هي على الصورة ص = م س + ن، حيث م هي ميل المستقيم.

في هذا الدرس سوف نوجد البعد بين نقطة ومستقيم حيث هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة على المستقيم، ولكي نجد هذا البعد

نحن بحاجة إلى كتابة معادلة المستقيم على الصورة:

أ س + ب ص + جـ = ٠، حيث أ، ب لا يساويان الصفر معًا.

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل: أ س + ب ص + جـ = ٠، فإن البعد ف بين النقطة د $(س_1، ص_1)$ والمستقيم ل تعطى بالصيغة: $ف = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$.

إذا كانت النقطة د تنتمي إلى المستقيم ل فالبعد بينهما يساوي صفرًا.

مثال (١)

أثبت أن النقطة هـ(٢، ١) لا تنتمي إلى المستقيم ل الذي معادلته: ص = ٣ س – ٤، ثمّ أوجد البعد بين المستقيم ل والنقطة هـ.

الحل:

بالتعويض عن (س، ص) بـ (٢، ١) في المعادلة: ص = ٣س – ٤

نحصل على $١ \overset{?}{=} ٣ \times ٢ - ٤$

$١ \neq ٢$ ∴ هـ لا تنتمي إلى المستقيم ل.

لإيجاد البعد بين هـ ، المستقيم ل يجب كتابة معادلة المستقيم ل على الصورة :

أ س + ب ص + جـ = ٠

∴ ل: ٣س – ص – ٤ = ٠

أ = ٣ ب = –١ جـ = –٤

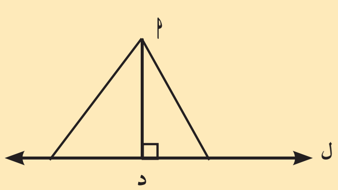
$س_1 = ٢$ $ص_1 = ١$

البعد $ف = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$

$= \frac{|٣ \times ٢ - ١ - ٤|}{\sqrt{٣^2 + (-١)^2}} = \frac{|٦ - ٥|}{\sqrt{١٠}} = \frac{١}{\sqrt{١٠}}$

ملاحظة:

بعد نقطة عن مستقيم هو طول القطعة العمودية المرسومة من النقطة على الخط المستقيم.



أ د هي أقصر مسافة بين النقطة أ والمستقيم ل.

∴ البعد يساوي $\frac{\sqrt{١٠}}{١٠}$ وحدة طول.

حاول أن تحل

١ أوجد البعد بين المستقيم ل: ص = −س + ٣ والنقطة د(٢، ٥).

مثال (٢)

أوجد البعد من النقطة د(−٤، −٣) إلى المستقيم ل: ٢ص = ٣س − ٧.

ملاحظة:
إذا كانت المسافة بين نقطة ومستقيم تساوي صفرًا تكون النقطة تنتمي للمستقيم.

الحل:

نكتب أولًا معادلة المستقيم ل على الصورة: أ س + ب ص + جـ = ٠

ل: ٣س − ٢ص − ٧ = ٠

أ = ٣ ب = −٢ جـ = −٧

$س_١$ = −٤ $ص_١$ = −٣

البعد ف = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

ف = $\frac{|٣(−٤) − ٢(−٣) − ٧|}{\sqrt{(٣)^٢ + (−٢)^٢}}$ = $\frac{|−١٣|}{\sqrt{٩ + ٤}}$ = $\frac{١٣}{\sqrt{١٣}}$ = $\sqrt{١٣}$.

أي أن البعد من النقطة د إلى المستقيم ل يساوي $\sqrt{١٣}$ وحدة طول.

حاول أن تحل

٢ أوجد البعد من النقطة ط(٣، −٤) إلى المستقيم ل: ص = −$\frac{٤}{٣}$ + $\frac{س}{٦}$.

٩–٥

معادلة الدائرة
Equation of a Circle

سوف تتعلم

- معادلة الدائرة
- الصورة العامة لمعادلة الدائرة
- إيجاد مركز الدائرة وطول نصف قطرها
- معادلة مماس الدائرة
- العلاقة بين دائرتين في المستوي

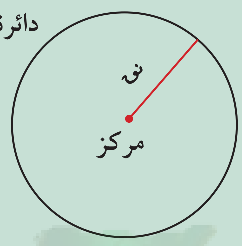
دعنا نفكر ونتناقش

إذا كان لديك قطعة من الحبل طولها ٦ أمتار، وأردت أن ترسم دائرة في فناء المدرسة، فما الذي تفعله؟ فكر مع زملائك.

هذا سيقودنا إلى تعريف الدائرة

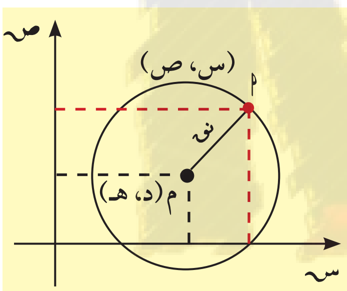
الدائرة هي مجموعة النقاط في المستوي التي تكون على بعد ثابت من نقطة معلومة، والنقطة المعلومة تسمى **مركز الدائرة**.

والبعد الثابت هو طول نصف قطر الدائرة ويرمز له بالرمز **نق**.



الصورة القياسية لمعادلة الدائرة:

لأي دائرة مركزها م(د، هـ) وطول نصف قطرها نق فإن المسافة بين مركز الدائرة وأي نقطة أ(س، ص) على الدائرة يمكن إيجادها باستخدام قانون المسافة بين نقطتين.



$$\text{المسافة} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$$

$$\text{نق} = \sqrt{(\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2}$$

$$\text{نق}^2 = (\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2$$

وعلى ذلك، تكون معادلة الدائرة التي مركزها (د، هـ) وطول نصف قطرها نق على الصورة:

$$(\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2 = \text{نق}^2$$

وتسمّى هذه الصورة القياسية لمعادلة الدائرة بمعلومية المركز م(د، هـ) وطول نصف القطر نق.

مثال (١)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، –٢) وطول نصف قطرها ٧ وحدات.

الحل:

معادلة الدائرة على الصورة القياسية: $(\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2 = \text{نق}^2$ ، حيث (د، هـ) مركزها

$(\text{س} - ٣)^2 + [\text{ص} - (-٢)]^2 = ٤٩$ بالتعويض عن (د، هـ) بـ (٣، –٢)

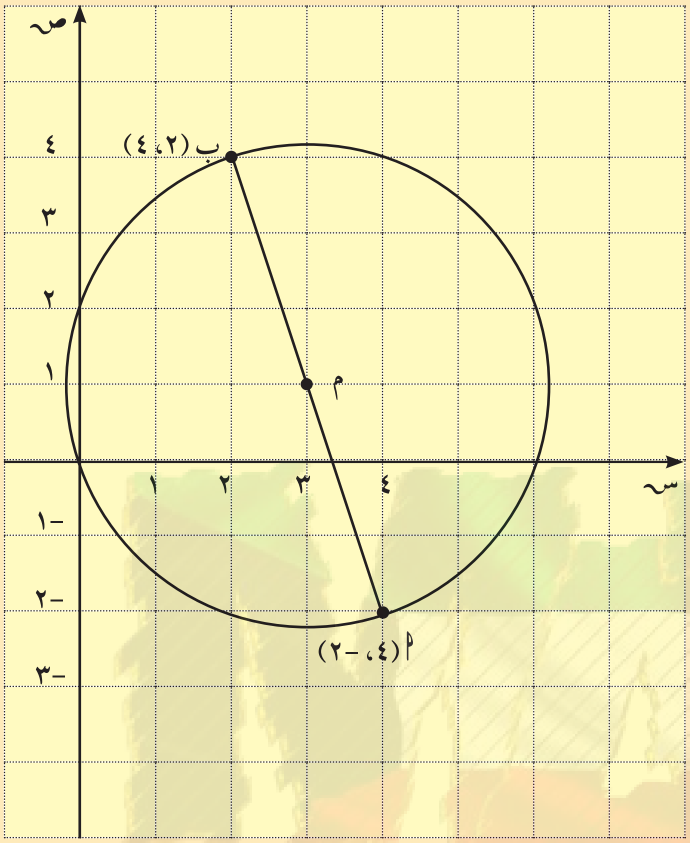
$(\text{س} - ٣)^2 + (\text{ص} + ٢)^2 = ٤٩$

حاول أن تحل

١ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٥، –٣) وطول نصف قطرها ٥ وحدات.

مثال (٢)

أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{\text{أب}}$ حيث أ(٤، -٢)، ب(٢، ٤).



الحل:

نوجد أولًا إحداثيات مركز الدائرة والتي هي منتصف $\overline{\text{أب}}$

$\text{م}\left(\frac{٤ + ٢}{٢} ، \frac{-٢ + ٤}{٢}\right)$ أي

م(٣، ١)

نوجد طول نصف قطر الدائرة $\frac{\text{أب}}{٢}$،

$\text{نق} = \frac{١}{٢}\sqrt{(٤ - ٢)^{٢} + (-٢ - ٤)^{٢}} = \frac{١}{٢}\sqrt{٤٠}$

$\text{نق} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول

معادلة الدائرة:

$(\text{س} - ٣)^{٢} + (\text{ص} - ١)^{٢} = ١٠$

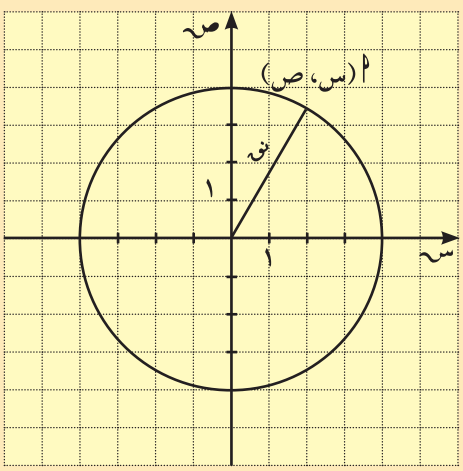
حاول أن تحل

٢ أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{\text{أب}}$ حيث أ(-٣، ٦)، ب(١، -٢).

إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، فإن معادلتها على الصورة: $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{نق}^{٢}$

مثال (٣)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٤ وحدات.



الحل:

إذا فرضنا نقطة مثل أ(س، ص) على الدائرة، فإن م أ = نق = ٤ وحدات،

معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل: $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{نق}^{٢}$

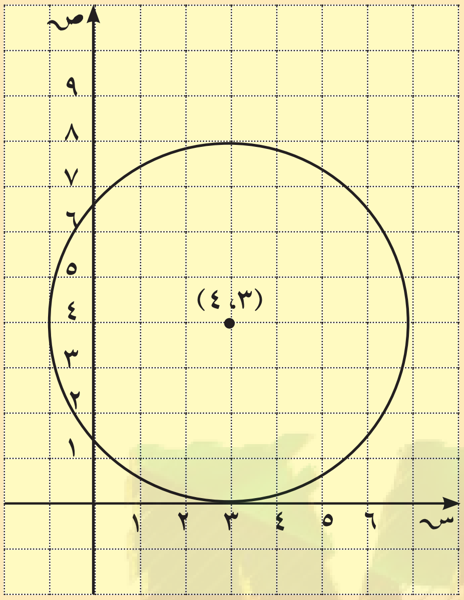
$\therefore \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١٦$ معادلة الدائرة المطلوبة.

حاول أن تحل

٣ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦ سم.

مثال (٤) تطبيقات حياتية

في حديقة ، زرعت مجموعة من الأزهار على شكل دائرة مركزها م(٣، ٤)، بحيث إن كل زهرة تبعد ٤ وحدات عن المركز. اكتب معادلة الدائرة التي تنمو عليها مجموعة الأزهار.



الحل:

معادلة الدائرة على الصورة القياسية: $(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢}$

$(س - ٣)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ١٦$

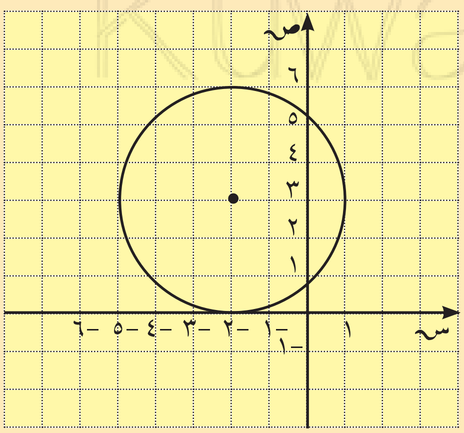
حاول أن تحل

٤ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، ٤) وتمس محور الصادات.

مثال (٥)

أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها: $(س + ٢)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٩$، ثم ارسم الدائرة.

الحل:



بمقارنة معادلة الدائرة المعطاة بالصورة القياسية لمعادلة الدائرة:

$(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢}$

نجد أن: $-د = ٢ \Longleftarrow د = -٢$

$-هـ = -٣ \Longleftarrow هـ = ٣$

$نق^{٢} = ٩ \Longleftarrow نق = ٣$

مركز الدائرة (-٢، ٣) وطول نصف قطر الدائرة = ٣ وحدات.

حاول أن تحل

٥ أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

أ $س^{٢} + ص^{٢} = ٤٩$.

ب $(س - ٤)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٣٦$.

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

معادلة الدائرة التي مركزها م (د، هـ) وطول نصف قطرها نق تكتب على الصورة التالية: $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

وبالفك نحصل على الصورة التالية: $س^٢ + ص^٢ - ٢د س - ٢ هـ ص + د^٢ + هـ^٢ - نق^٢ = ٠$

بوضع ل = −٢ د ؛ ك = −٢ هـ ؛ ب = $د^٢ + هـ^٢ - نق^٢$ تصبح صورة المعادلة:

$س^٢ + ص^٢ + ل س + ك ص + ب = ٠$ ، حيث ل، ك، ب ثوابت

وتسمى الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها $\left(\frac{-ل}{٢}، \frac{-ك}{٢}\right)$

طول نصف قطرها نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ٤ب}$. حيث $ل^٢ + ك^٢ - ٤ب > ٠$

الصورة العامة: $س^٢ + ص^٢ + ل س + ك ص + ب = ٠$ هي معادلة دائرة ونلاحظ التالي:

١ إنها معادلة من الدرجة الثانية في س، ص.

٢ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$.

٣ لا يوجد الحد الذي يتضمن س ص.

معلومة مفيدة:

ب = $د^٢ + هـ^٢ - نق^٢$

∴ $نق^٢ = د^٢ + هـ^٢ - ب$

$نق^٢ = \left(\frac{-ل}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{-ك}{٢}\right)^٢ - ب$

$= \frac{ل^٢}{٤} + \frac{ك^٢}{٤} - ب$

$نق^٢ = \frac{١}{٤}(ل^٢ + ك^٢ - ٤ب)$

∴ $نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ٤ب}$

مثال (٦)

عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: $٣س^٢ + ٣ص^٢ - ٦س + ٩ص - ١٢ = ٠$

الحل:

$س^٢ + ص^٢ - ٢س + ٣ص - ٤ = ٠$ بالقسمة على ٣

وهي معادلة دائرة على الصورة العامة

∴ ل = −٢، ك = ٣، ب = −٤

المركز = $\left(\frac{-ل}{٢}، \frac{-ك}{٢}\right) = \left(١، -\frac{٣}{٢}\right)$

$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ٤ب}$

$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{٤ + ٩ - ٤ \times (-٤)}$

$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{٢٩}$

الدائرة مركزها $\left(1 ، -\frac{3}{2}\right)$ وطول نصف قطرها $نق = \frac{1}{2}\sqrt{29}$ وحدة طول.

حاول أن تحل

٦ عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: $2س^2 + 2ص^2 - 12س - 4ص - 30 = 0$

ملاحظة

عندما يكون لدينا معادلة على الصورة العامة التالية: $س^2 + ص^2 + ل س + ك ص + ب = 0$

يمكننا معرفة ما تمثله بيانيًّا هذه المعادلة بمجرد مقارنة

$ل^2 + ك^2 - 4ب$ مع الصفر.

١ عندما $ل^2 + ك^2 - 4ب < 0$ فإن المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

٢ عندما $ل^2 + ك^2 - 4ب = 0$ فإن المعادلة تمثل نقطة.

٣ عندما $ل^2 + ك^2 - 4ب > 0$ فإن المعادلة تمثل دائرة.

مثال (٧)

هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسّر.

أ $س^2 + ص^2 - 3س + 5ص - \frac{15}{4} = 0$

ب $س^2 + ص^2 + 4س - 7ص + 20 = 0$

جـ $س^2 + ص^2 - 6س + 8ص + 25 = 0$

الحل:

أ المعادلة: $س^2 + ص^2 - 3س + 5ص - \frac{15}{4} = 0$

معامل $س^2$ = معامل $ص^2 = 1$

$ل = -3$، $ك = 5$، $ب = \frac{-15}{4}$

$ل^2 + ك^2 - 4ب = 9 + 25 - 4\left(\frac{-15}{4}\right) = 9 + 25 + 15 = 49 > 0$

$49 > 0$ ∴ المعادلة تمثل معادلة دائرة.

ب المعادلة: $س^2 + ص^2 + 4س - 7ص + 20 = 0$

معامل $س^2$ = معامل $ص^2 = 1$

$ل = 4$، $ك = -7$، $ب = 20$

$ل^2 + ك^2 - 4ب = 16 + 49 - 4 \times 20 = -15 < 0$

∴ المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

ج المعادلة س^{٢} + ص^{٢} − ٦س + ٨ص + ٢٥ = ٠

معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

ل = −٦، ك = ٨، ب = ٢٥

ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ٣٦ + ٦٤ − ٤ × ٢٥ = ٠

∴ المعادلة تمثل نقطة.

حاول أن تحل

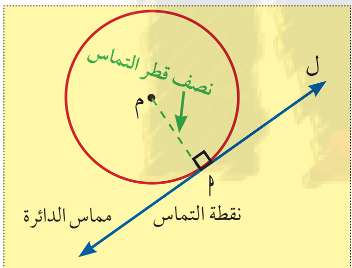
٧ هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسّر.

أ س^{٢} + ص^{٢} − ٤س + ٧ص + ١٧ = ٠

ب س^{٢} + ص^{٢} + ٥س − ٦ص − ٤ = ٠

ج س^{٢} + ص^{٢} − ٢س − ٢ص + ٢ = ٠

معادلة مماس لدائرة Tangent to a Circle

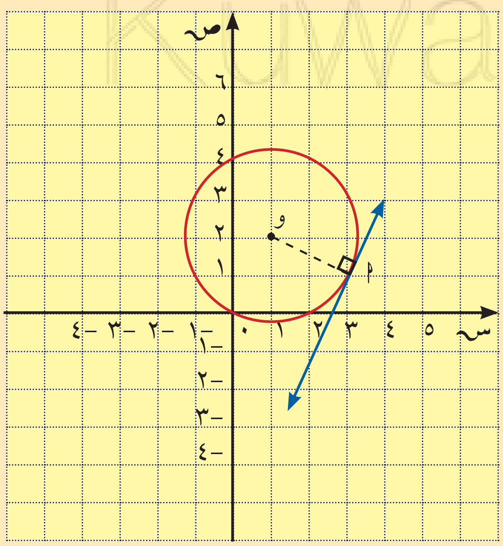


سبق وتبين لنا أن نصف قطر الدائرة عمودي على مماس الدائرة عند نقطة التماس.
باستخدام هذه الخاصية، نستطيع إيجاد معادلة مماس الدائرة.

مثال (٨)

أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها:

(س − ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٥ عند نقطة التماس أ(٣، ١).



الحل:

النقطة أ(٣، ١) تنتمي إلى الدائرة.

إحداثيات مركز الدائرة و(١، ٢).

ميل $\overline{وأ}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{١ - ٢}{٣ - ١}$ = −$\frac{١}{٢}$

∵ نصف قطر التماس $\overline{وأ}$ عمودي على مماس الدائرة

∴ ميل$_{المماس}$ × ميل $\overline{وأ}$ = −١

م$_{المماس}$ × (−$\frac{١}{٢}$) = −١

م$_{المماس}$ = ٢

معادلة المماس $\overline{\text{وأ}}$ الذي ميله ٢ ويمر بالنقطة (٣، ١) هي:

ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)

ص − ١ = ٢ (س − ٣)

ص − ١ = ٢س − ٦

∴ معادلة المماس ص = ٢س − ٥

حاول أن تحل

٨ أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها (س − ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٢٥ عند النقطة أ(٦، ٤).

مثال (٩)

أثبت أن النقطة أ (٦، −٤) تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و، معادلتها: س^{٢} + ص^{٢} − ٤س + ٢ص − ٢٠ = ٠، ثم أوجد معادلة المماس لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

الحل:

س^{٢} + ص^{٢} − ٤س + ٢ص − ٢٠ = ٠

المعادلة على شكل الصورة العامة لمعادلة الدائرة حيث ل = −٤، ك = ٢ ، ب = −٢٠

بالتعويض عن النقطة (٦، −٤)

(٦)^{٢} + (−٤)^{٢} − ٤(٦) + ٢(−٤) − ٢٠

= ٣٦ + ١٦ − ٢٤ − ٨ − ٢٠ = ٠ ✓

∴ النقطة أ(٦، −٤) تنتمي إلى الدائرة.

مركز الدائرة و (٢، −١)، طول نصف قطرها: نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - ٤\text{ب}}$

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{١٠٠}$ = ٥

ميل نصف قطر التماس $\overline{\text{وأ}}$ = م = $\frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = \frac{-٤ - (-١)}{٦ - ٢} = \frac{-٣}{٤}$

نعرف أن نصف قطر التماس $\overline{وأ}$ هو عمودي على المماس عند النقطة أ

ليكن م' ميل المماس: م × م' = −١

أي $\frac{-٣}{٤}$ × م' = −١ ومنه م' = $\frac{٤}{٣}$

نأخذ المعادلة: ص − ص$_{١}$ = م' (س − س$_{١}$)

ص − (−٤) = $\frac{٤}{٣}$ (س − ٦)

ص = $\frac{٤}{٣}$ س − ١٢

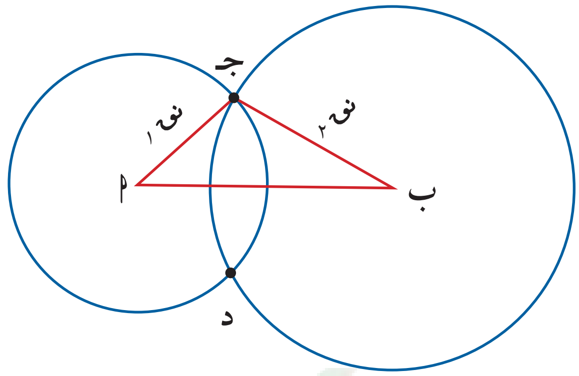
∴ معادلة المماس ص = $\frac{٤}{٣}$ س − ١٢

حاول أن تحل

٩ أثبت أن النقطة أ (١ ، ١) تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و ، معادلتها: س^{٢} + ص^{٢} + ٦س + ٨ص − ١٦ = ٠، ثم أوجد معادلة المماس لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

العلاقة بين دائرتين في المستوي

Intersection of Two Circles



في الشكل، الدائرتان (ا ، نق_1) ، (ب ، نق_2) تتقاطعان في جـ ، د.
لدراسة العلاقة بين دائرتين، نستخدم متباينة المثلث.
إن مقارنة البعد بين مركزي الدائرتين وطولي نصفي قطري الدائرتين يحدد موقع الدائرتين كما هو مبيّن في الجدول التالي:

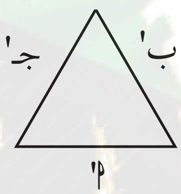
معلومة:

عندما نكتب: الدائرة (ا، نق) فهذا يعني أن ا مركز الدائرة ونق نصف قطرها.

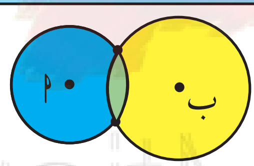
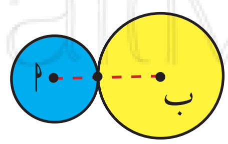
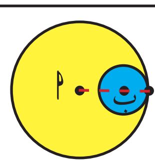
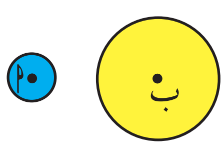
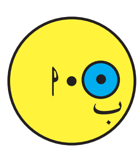
معلومة رياضية:

متباينة المثلث

في كل مثلث، طول أي ضلع أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين وأكبر من الفرق بين طوليهما.



$|\text{ب}' - \text{جـ}'| < \text{ا}' < \text{ب}' + \text{جـ}'$

العلاقة بين اب وطولي نصفي القطرين	العلاقة بين الدائرتين	الشكل	ملاحظة
$|\text{نق}_1 - \text{نق}_2| < \text{اب} < \text{نق}_1 + \text{نق}_2$	الدائرتان تتقاطعان في نقطتين مختلفتين		البعد بين المركزين أصغر من مجموع طولي نصفي القطرين وأكبر من الفرق بينهما.
$\text{اب} = \text{نق}_1 + \text{نق}_2$	الدائرتان متماستان خارجيًّا		– البعد بين المركزين يساوي مجموع طولي نصفي القطرين – مركزا الدائرتين ونقطة التماس هي على استقامة واحدة.
$\text{اب} = |\text{نق}_1 - \text{نق}_2|$	الدائرتان متماستان داخليًّا		– البعد بين المركزين يساوي الفرق بين طولي نصف القطرين. – مركزا الدائرتين ونقطة التماس هي على استقامة واحدة.
$\text{اب} > \text{نق}_1 + \text{نق}_2$	الدائرتان لا تتقاطعان (متباعدتان)		– البعد بين المركزين أكبر من مجموع طولي نصف قطري الدائرتين.
$\text{اب} < |\text{نق}_1 - \text{نق}_2|$	الدائرتان لا تتقاطعان (متداخلتان)		– البعد بين المركزين أصغر من الفرق بين طولي نصفي القطرين.

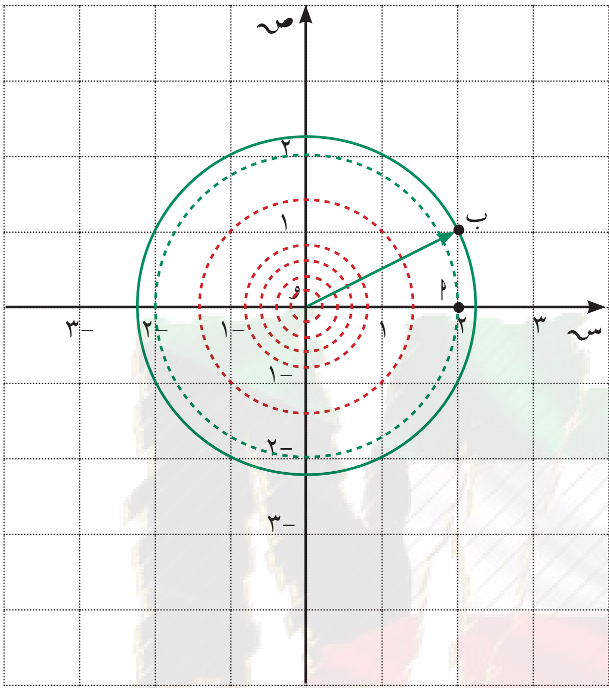
المرشد لحل المسائل

وجد جاسم هذه المسألة:

أدى قذف حصاة في بركة مياه إلى تشكل موجات دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٦ سم/ ثانية.

بعد كم ثانية تصل هذه الموجات إلى مركب صغير كان على مسافة ٢ متر شرقًا ومترًا واحدًا شمالًا من مركز الموجة الأولى.

أوجد معادلة الدائرة التي تصل إلى المركب.



كيف فكر جاسم لحل المسألة؟

سوف أضع مخططًا للمسألة:

ليكن و مركز الموجة ، النقطة أ تبعد ٢ متر شرق المركز ، النقطة ب تبعد مترًا واحدًا إلى شمال النقطة أ.

لكي أحصل على الزمن:

أجد المسافة وب من مركز الموجة الأولى إلى المركب.

أقسم المسافة على السرعة (٦ سم/ ثانية).

أستخدم قاعدة الدائرة لأجد معادلتها.

التطبيق:

سأستخدم نظرية فيثاغورث على المثلث وأب القائم في أ ، (وب)^{٢} = (وأ)^{٢} + (أب)^{٢}

(وب)^{٢} = ٢^{٢} + ١^{٢}

(وب)^{٢} = ٥

وب = $\sqrt{٥}$ م

سأستخدم قاعدة الزمن = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

الزمن = $\frac{\sqrt{٥}\text{ م}}{\text{٦ سم/ ثانية}}$ = $\frac{\sqrt{٥} \times \text{١٠٠ سم}}{\text{٦سم/ ثانية}}$

الزمن ≈ ٣٧ ثانية.

معادلة الدائرة التي مركزها و(٠، ٠) ونصف قطرها $\sqrt{٥}$ هي:

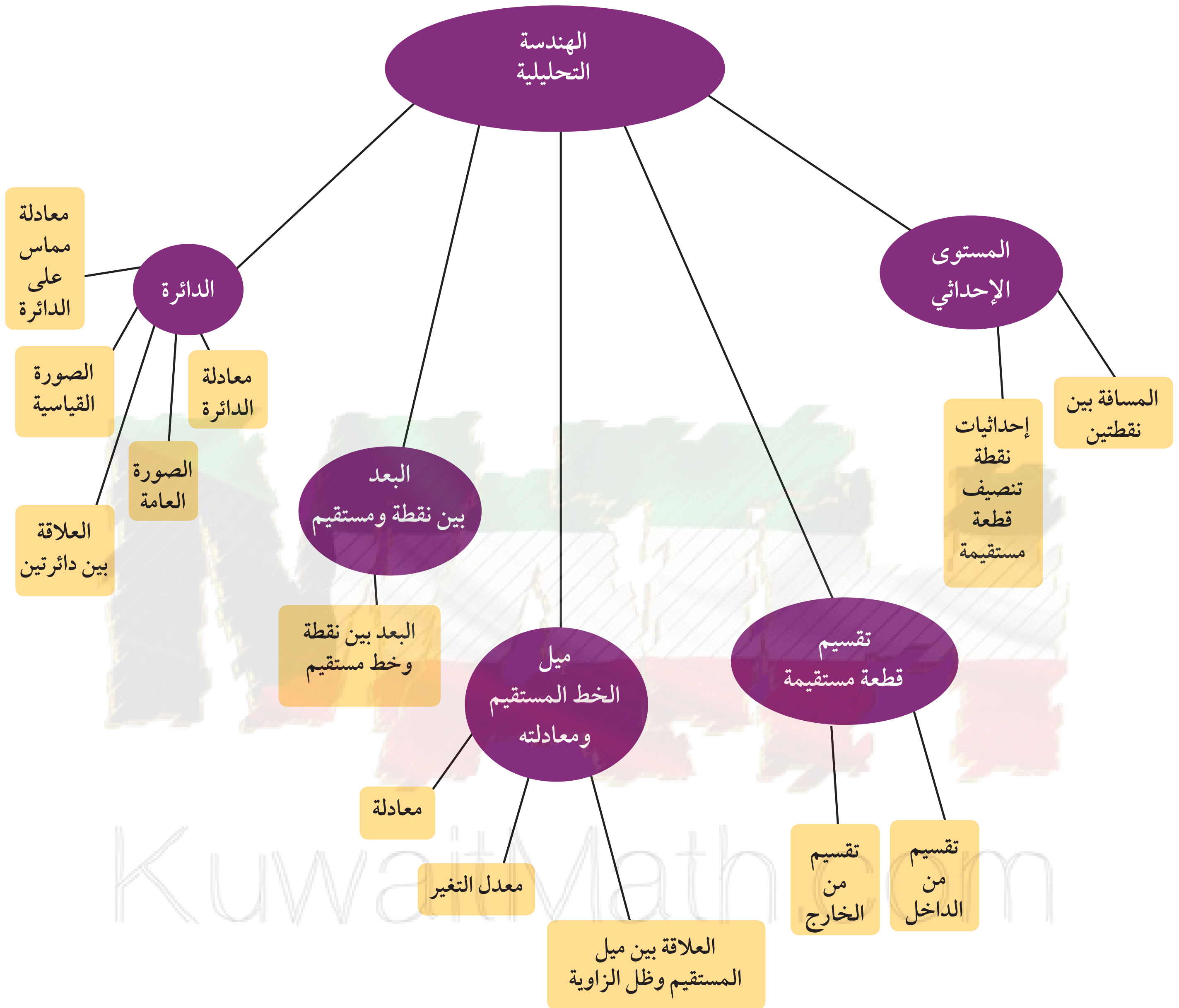
س^{٢} + ص^{٢} = ٥

مسألة إضافية

حوض زهور دائري الشكل، تنمذج دائرته بالمعادلة: (س − ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٩ (طول نصف القطر بالأمتار).

إذا أحطنا الحوض بالرمل بسماكة منتظمة ٥٠ سم، فأوجد طول نصف قطر الشكل الجديد ومعادلته.

مخطط تنظيمي للوحدة التاسعة



ملخص

- المسافة بين نقطتين أ، ب على محور السينات تساوي القيمة المطلقة للفرق بين إحداثيات النقطتين.

- المسافة المائلة بين نقطتين أ$(س_١ ، ص_١)$، ب$(س_٢ ، ص_٢)$: أب $= \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$.

- إذا كانت $\overline{أب}$ قطعة مستقيمة بحيث أ$(س_١ ، ص_١)$، ب$(س_٢ ، ص_٢)$ فإن نقطة منتصف $\overline{أب}$ هي

$$جـ \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right).$$

- تقسيم $\overline{أب}$ من الداخل من جهة أ بنسبة م : ن ، جـ (س، ص) نقطة التقسيم حيث:

$$س = \frac{م\,س_٢ + ن\,س_١}{م + ن} ، ص = \frac{م\,ص_٢ + ن\,ص_١}{م + ن}.$$

- تقسيم $\overline{أب}$ من الخارج من جهة أ بنسبة م : ن ، جـ (س، ص) نقطة التقسيم حيث:

$$س = \frac{م\,س_٢ - ن\,س_١}{م - ن} ، ص = \frac{م\,ص_٢ - ن\,ص_١}{م - ن}.$$

- ميل الخط المستقيم $= \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$.

- ميل $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ$(س_١ ، ص_١)$، ب$(س_٢ ، ص_٢)$:

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$ شرط أن: $س_١ \neq س_٢$.

- ميل المستقيم م يساوي ظل الزاوية θ التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات: م = ظاθ.

- إذا كان $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{جـ د}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{أب}$ يساوي ميل $\overleftrightarrow{جـ د}$ وبالعكس.

- إذا كانا $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ متعامدين فإن ناتج ضرب ميليهما يساوي -١ وبالعكس.

- معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل (م) والجزء المقطوع من محور الصادات ص = م س + ن .

- طول العمود النازل من النقطة م $(س_١ ، ص_١)$ على المستقيم (ل) ومعادلته أس + ب ص + جـ = ٠ هو:

$$ف = \frac{|أ\,س_١ + ب\,ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}.$$

- معادلة الدائرة التي مركزها م (د، هـ) وطول نصف قطرها نق: $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$.

- الصورة العامة لمعادلة الدائرة: س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = ٠ حيث ل، ك، ب ثوابت

وحيث إن مركز الدائرة $\left(-\frac{ل}{٢} ، -\frac{ك}{٢}\right)$ ، نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب}$ حيث ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب > ٠

- لدراسة العلاقة بين دائرتين متقاطعتين نستخدم متباينة المثلث.

- لإيجاد ميل المماس عند نقطة على دائرة نستخدم العلاقة: ميل المماس × ميل نق = −١.