الوحدة الأولى

الجبر - الأعداد والعمليات عليها
Algebra - Numbers and Operations

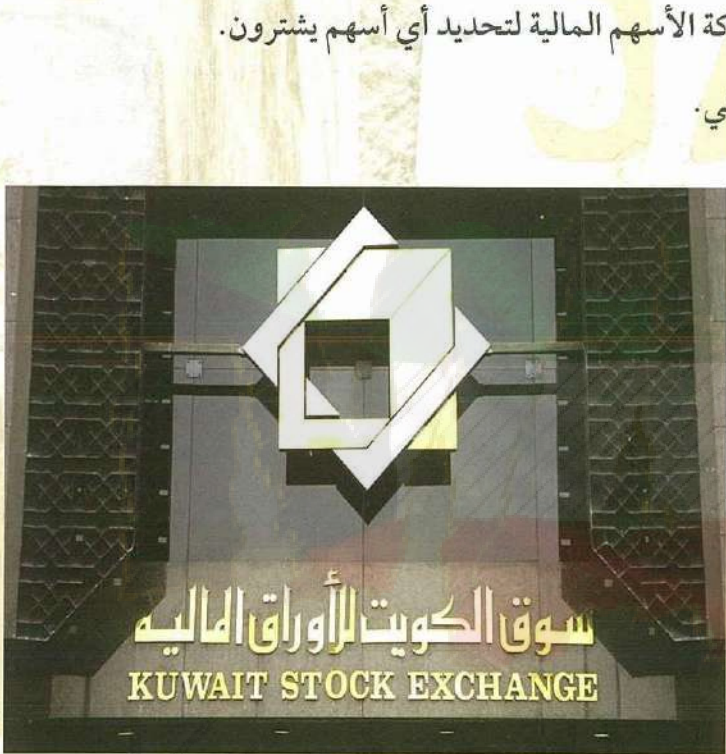
مشروع الوحدة: شراء الأسهم

١ مقدمة المشروع: أثناء العمل على هذا المشروع سوف تجمع بيانات عن إحدى الشركات. وتستخدم الصيغ لتحليل البيانات. ثم عليك أن تقرر كيفية تنظيم النتائج وعرضها باستخدام الرسوم البيانية وجداول البرمجة.

٢ الهدف: فهم كيف يدرس المحللون الاقتصاديون حركة الأسهم المالية لتحديد أي أسهم يشترون.

٣ اللوازم: آلة حاسبة - صحيفة محلية - أوراق رسم بياني.

٤ أسئلة حول التطبيق:



أ اختر شركة للبحث. اجمع المعلومات حول المنتجات التي تبيعها الشركة أو الاستشارات التي تقدمها، وتاريخ الشركة والممارسات الإدارية.

ب اطلع على صفحة الأوراق المالية في الصحيفة. اختر أحد الأسهم المتداولة في الأسواق المالية.

ما كان سعر الإغلاق لهذا السهم؟

ما كان أعلى سعر لهذا السهم خلال العام الماضي؟

أنشئ جدولًا يعرض أعلى سعر وأدنى سعر للسهم الواحد لعدة أيام.

جـ افترض أن لديك ٥٠٠٠ دينار استثمرتها في الأسهم المالية التي اخترتها. يشمل سعر الشراء ثمن السهم زائد ٩,٩٥ دنانير كرسوم في ختام هذا المشروع، بعت الأسهم الخاصة بك. هل حققت ربحًا أم تكبدت خسارة؟ اشرح.

٥ التقرير: ضعْ تقريرًا مفصلًا تبين فيه كيف استفدت من خواص نظام الأعداد الحقيقية لتنفيذ المشروع وللإجابة عن الأسئلة.

دروس الوحدة

خواص نظام الأعداد الحقيقية	تقدير الجذر التربيعي	حل المتباينات	القيمة المطلقة
١-١	١-٢	١-٣	١-٤
دالة القيمة المطلقة	حل نظام معادلتين خطيتين	حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد	
١-٥	١-٦	١-٧	

الوحدة الأولى

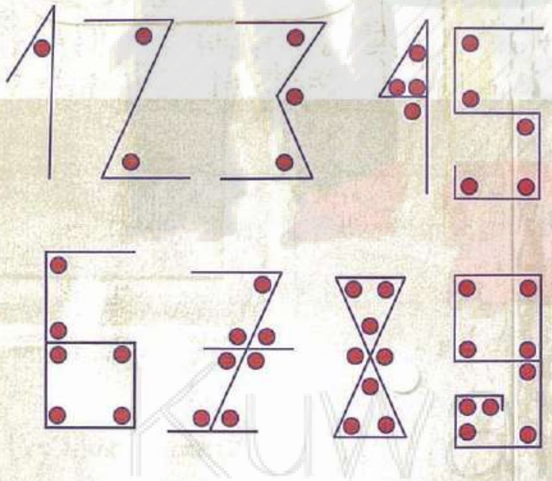
أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية.
- قارنت الأعداد الحقيقية ورتبتها.
- تعرفت القيمة المطلقة.
- استخدمت الأسس للتعبير عن الأعداد الكبيرة والصغيرة.
- تعرفت الجذور التربيعية.
- مثلت الفترات على خط الأعداد.

أضف إلى معلوماتك

يعتمد الغرب الأرقام 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، في كتابة الأعداد وهي تدعى «الأرقام العربية».

يرتبط كل رقم منها بعدد من الزوايا. يبيّن الرسم أدناه هذه العلاقة.



ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تتعرف خاصية الكثافة والترتيب والفترات.
- سوف تحل متباينات مستخدمًا الجمع والطرح والضرب والقسمة.
- سوف تحل معادلات ومتباينات تتضمن قيمًا مطلقة.
- سوف ترسم بيانيًّا دوال القيمة المطلقة.
- سوف تحل أنظمة معادلات خطية.
- سوف تحل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد.
- سوف تتعرف حل متباينات تربيعيّة بيانيًّا.

المصطلحات الأساسية

الأعداد النسبية - الأعداد غير النسبية - الخاصية الإبدالية - الخاصية التجميعية - الخاصية التوزيعية - المحايد - المعكوس - الفترات - المتباينات - القيمة المطلقة - الانسحاب - الحذف - التعويض - المميز.

١ – ١

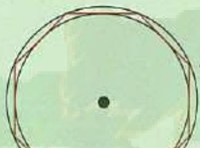
خواص نظام الأعداد الحقيقية
Real Numbers System Properties

دعنا نفكر ونتناقش

شغل العدد π (النسبة بين طول الدائرة وطول قطرها) الباحثين في الرياضيات لآلاف السنين.

اعتمد أرخميدس على الدائرة المحوطة (الداخلية) والدائرة المحيطة (الخارجية) بمضلع منتظم من ٩٦ ضلعًا للوصول إلى $\frac{٢٢}{٧} > \pi > \frac{٢٢٣}{٧١}$

وتسمى متباينة أرخميدس.



واستخدم الصينيون الكسر $\frac{٣٥٥}{١١٣}$ كقيمة تقريبية لِـ π.

في بداية القرن الثامن عشر اعتمد الرمز اليوناني π.

استخدم آلتك الحاسبة:

١ أوجد ٣ قيم تقريبية لِـ π مستخدمًا متباينة أرخميدس.

٢ π هو عدد غير نسبي. تنحصر قيمته بين ٣,١٤ ، ٣,١٥ .

إعطاء مثال لإحدى القيم: مثلًا: π ≃ ٣,١٤١٥٩٢٦ .

هل يمكن تحديد عدد القيم التقريبية لِـ π ؟

يعد أرخميدس (القرن السادس قبل الميلاد) من أعظم علماء الرياضيات وأبو الهندسة، ومن أشهر اكتشافاته طرق حساب المساحات والأحجام.

حدّد قيمة π بدقة عالية $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

سوف تتعلم

- خاصية الكثافة
- الترتيب
- الفترات

١ – الأعداد الحقيقية Real Numbers

تعلم أن الأعداد النسبية (ن) يمكن كتابتها في صورة أعداد عشرية أو (كسور عشرية) منتهية مثل ٣,٢٥ ، ٠,٤٨٧ أو بصورة أعداد عشرية دورية (أو كسور عشرية دورية) مثل $١٦,\overline{١٦}$ ، $٢,\overline{٣}$ ، ... ، ٠) وهناك مجموعة أخرى من الأعداد تسمى أعدادًا غير نسبية لا يمكن كتابتها على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ، ب ∈ ص، ب ≠ ٠ مثل $\sqrt{٥}$، $\sqrt{٢}$، $\frac{١}{\sqrt{٧}}$، ...

وكما الأعداد العشرية التي أرقامها العشرية لا تنتهي ولا تتكرر دوريًّا مثل

π ≃ ٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥٩... فالأرقام العشرية في π لا تنتهي ولا تتكرر دوريًّا.

والأعداد غير النسبية ($\overline{ن}$) من الممكن أن تتضمن كسورًا عشرية ذات نمط في كتابة أرقامها مثل ... ٠,٣٠٣٣٠٣٣٣ ،

اتحاد مجموعتي الأعداد النسبية وغير النسبية يشكل مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية أي أن ن ∪ $\overline{ن}$ = ح.

القراءة في الرياضيات:

$\sqrt{٢}$ هو الجذر التربيعي الموجب للعدد ٢.

– $\sqrt{٢}$ هو الجذر التربيعي السالب للعدد ٢.

يوضّح المخطط التالي العلاقات بين مجموعات الأعداد.

الأعداد الحقيقية

الأعداد النسبية	الأعداد غير النسبية
أمثلة: $\frac{١}{٣}$ ، ١٤ , ٠ ، $-٢\frac{١}{٣}$	أمثلة:
الأعداد الصحيحة ....، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ...	$\sqrt{٣}$
الأعداد الطبيعية (الكلية): ٠، ١، ٢، ٣، ...	π
	$\sqrt[٣]{٥}$
	١,٣٤٣٣٤...

تمثّل مجموعة الأعداد الحقيقية بخط الأعداد.

كل عدد حقيقي يمثل بنقطة على هذا الخط وكل نقطة على هذا الخط تمثل عددًا حقيقيًّا.

مثال (١)

حدد أيًا من الأعداد التالية عددًا نسبيًّا وأيها عددًا غير نسبي.

أ $-\frac{١٨}{٥}$ ب $\sqrt{٤١}$

ج ٠,٣٣٣... د ١,٠١٠٠١٠٠٠١...

الحل:

أ $-\frac{١٨}{٥}$ هو عدد نسبي.

ب $\sqrt{٤١}$ هو عدد غير نسبي.

ج ٠,٣٣٣... = $٠,\overline{٣}$ = $\frac{١}{٣}$ هو عدد نسبي.

د ١,٠١٠٠١٠٠٠١... هو عدد غير نسبي.

حاول أن تحل

١ حدد أيًا من الأعداد التالية عددًا نسبيًّا وأيها عددًا غير نسبي: $\frac{\sqrt{٤}}{٣}$ ، $١,\overline{٤}$ ، ٥π.

٢ – خواص عمليتي الجمع والضرب على الأعداد الحقيقية

Properties of Addition and Multiplication of Real Numbers

لكل ٩، ب، جـ $\in$ ح فإن:

الخاصية	الجمع	الضرب
الإبدالية	٩ + ب = ب + ٩	٩ × ب = ب × ٩
التجميعية	(٩ + ب) + جـ = ٩ + (ب + جـ)	(٩ × ب) × جـ = ٩ × (ب × جـ)
المحايد	٩ + ٠ = ٠ + ٩ = ٩	٩ × ١ = ١ × ٩ = ٩
المعكوس (النظير)	٩ + (–٩) = (–٩) + ٩ = ٠	٩ × $\frac{١}{٩}$ = $\frac{١}{٩}$ × ٩ = ١ (٩ $\neq$ ٠)
التوزيعية	٩ × (ب + جـ) = ٩ × ب + ٩ × جـ (ب + جـ) × ٩ = ب × ٩ + جـ × ٩	

٣ – ترتيب الأعداد الحقيقية

Order of Real Numbers

مجموعة الأعداد الحقيقية هي **مجموعة مرتبة**، هذا يعني أننا نستطيع مقارنة أي عددين حقيقيين باستخدام رموز علاقات الترتيب (> أو < أو =). والقول إن عددًا ما هو «أكبر من» أو «أصغر من» أو «يساوي» العدد الآخر.

الترتيب وخواصه

Properties of Order

ترتيب الأعداد الحقيقية

ليكن ٩، ب عددين حقيقيين

الكتابة بالرموز	التعريف	القراءة
٩ > ب	٩ – ب عدد موجب	٩ أكبر من ب
٩ < ب	٩ – ب عدد سالب	٩ أصغر من ب
٩ $\geq$ ب	٩ – ب عدد موجب أو صفر	٩ أكبر من أو يساوي ب
٩ $\leq$ ب	٩ – ب عدد سالب أو صفر	٩ أصغر من أو يساوي ب

حقيقة هامة:

لأي عددين حقيقيين ٩، ب. تعبير واحد فقط مما يلي هو صحيح:

٩ > ب

٩ = ب

٩ < ب

لتكن ﺃ، ب، جـ أعداد حقيقية.

الخاصية	القاعدة	ملاحظة
التعدي	إذا كان ﺃ ≥ ب، ب ≥ جـ فإن ﺃ ≥ جـ	
الجمع	إذا كان ﺃ ≥ ب، فإن ﺃ + جـ ≥ ب + جـ	
الطرح	إذا كان ﺃ ≥ ب، فإن ﺃ − جـ ≥ ب − جـ	
الضرب	إذا كان ﺃ ≥ ب، جـ > ٠، فإن ﺃجـ ≥ ب جـ	
	إذا كان ﺃ ≥ ب، جـ < ٠، فإن ﺃجـ ≤ ب جـ	لاحظ أن علاقة الترتيب تنعكس عندما يكون العدد جـ سالبًا.
القسمة	إذا كان ﺃ ≥ ب، جـ > ٠، فإن $\frac{ﺃ}{جـ} \geq \frac{ب}{جـ}$	
	إذا كان ﺃ ≥ ب، جـ < ٠، فإن $\frac{ﺃ}{جـ} \leq \frac{ب}{جـ}$	لاحظ أن علاقة الترتيب تنعكس عندما يكون العدد جـ سالبًا.

٤ - خاصية الكثافة Density Property

يتسع وعاء لعدد محدد من الحجارة (تبقى فراغات كبيرة). كما أنّه يتسع لعدد أكبر من الحصى الصغيرة (تقل الفراغات) ويمكن ملؤه كذلك بعدد أكبر بكثير من الرمل (تصبح الفراغات نادرة).

وماذا إذا مُلئ الوعاء بأجسام أصغر حجمًا من الرمل؟

كلما صغر حجم الأجسام المستخدمة لملء الوعاء زادت الكثافة.

يمكن تشبيه سعة الوعاء بطول فترة على خط الأعداد.

معلومة مفيدة:
تعتمد كثافة الجسم على شدة تراص جزيئات المادة فيه.

يوجد بين أي نقطتين مختلفتين على خط الأعداد عدد لا نهائي من النقاط، وبالتالي بين أي عددين حقيقيين مختلفين يوجد عدد لانهائي من الأعداد الحقيقية.

مثال (٢)

أعط خمسة أعداد حقيقية بين ٣,١٤ ، ٣,١٥.

الحل: تعلم أن ٣,١٤ = ٣,١٤٠ ، ٣,١٥ = ٣,١٥٠

∴ الأعداد الحقيقية مثل: ٣,١٤١ ، ٣,١٤٢ ، ٣,١٤٥٦ ، ٣,١٤٤٤٨ ، π.

حاول أن تحل

٢ أعط ستة أعداد حقيقية بين ١,٤١٤، ١,٤١٥.

٥ - الفترات Intervals

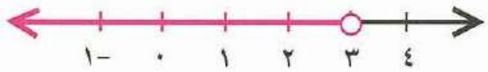
الفترة مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

لاحظ أن ليس كل مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية تمثل فترة. لماذا؟

يمكن استخدام المتباينات للتعبير عن الفترات في مجموعة الأعداد الحقيقية، وكذلك يمكن تمثيل الفترات على خط الأعداد.

مثلًا: يعبّر عن الفترة: (−∞، ٣) بالمتباينة، س < ٣.

وهي مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من ٣، وتمثّل بيانيًا كما يلي:



سوف نميز بين نوعين من الفترات: **الفترات المحدودة والفترات غير المحدودة**.

أولًا: الفترات المحدودة

الجدول التالي يوضح أنواع الفترات المحدودة: لتكن أ، ب أعدادًا حقيقية.

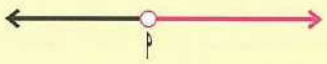
رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[أ، ب]	مغلقة	أ ≤ س ≤ ب	أ ب
(أ، ب)	مفتوحة	أ < س < ب	أ ب
[أ، ب)	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	أ ≤ س < ب	أ ب
(أ، ب]	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	أ < س ≤ ب	أ ب
الأعداد أ، ب هما نقطتا الحدود لكل فترة حيث أ الحد الأدنى للفترة، ب الحد الأعلى للفترة.			

تذكر:

المتباينة أ ≤ س ≤ ب
تكافئ س ≥ أ و س ≤ ب

ثانيا: الفترات غير المحدودة

الجدول التالي يوضح بعض الفترات غير المحدودة: ليكن أ، ب ∈ ح.

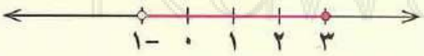
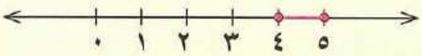
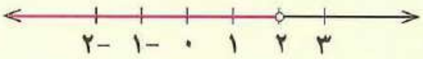
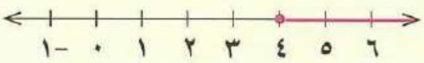
رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[أ، ∞)	نصف مغلقة وغير محدودة من الأعلى	س ≥ أ	
(أ، ∞)	مفتوحة وغير محدودة من الأعلى	س > أ	
(-∞، ب]	نصف مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	س ≤ ب	
(-∞، ب)	مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	س < ب	

مثال (٣)

اكتب نوع الفترة ورمز المتباينة والتمثيل البياني لكل من الفترات التالية:

أ (-١، ٣] ب [٤، ٥] جـ (-∞، ٢) د [٤، ∞)

الحل:

نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
أ فترة نصف مفتوحة (أو نصف مغلقة)	-١ < س ≤ ٣	
ب فترة مغلقة	٤ ≤ س ≤ ٥	
جـ فترة مفتوحة وغير محدودة من أسفل	س < ٢	
د فترة نصف مغلقة وغير محدودة من أعلى	س ≥ ٤	

حاول أن تحل

٣ اكتب نوع الفترة ورمز المتباينة والتمثيل البياني لكل من الفترات التالية:

أ (-٢، ١) ب (-∞، ٣]

٤ مثل كلًا مما يلي على خط الأعداد:

أ [٢، ∞) ∪ (-∞، -٣) ب [-١، ∞) ∪ (-∞، -٥]

١ – ٢

تقدير الجذر التربيعي
Estimating Square Root

سوف تتعلم

- تقدير الجذر التربيعي
- استخدام الجذر التربيعي في حل المسائل

دعنا نفكر ونتناقش

لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب.

٣ × ٣ = ٩	الجذران التربيعيان للعدد ٩	٣ الجذر الموجب
(-٣) × (-٣) = ٩		-٣ الجذر السالب

٣ هو **الجذر الأساسي**.

العدد ٧,٢٩ هو موجب إذًا له جذران تربيعيان. لكن نجد صعوبة في إيجاد هذين الجذرين.

يعتمد الرمز $\sqrt{\ }$ للإشارة إلى الجذر التربيعي الموجب فنكتب $\sqrt{٧,٢٩}$.

باستخدام الآلة الحاسبة نحصل على: $\sqrt{٧,٢٩} = ٢,٧$. كذلك $-\sqrt{٧,٢٩} = -٢,٧$.

الجذر التربيعي Square Root

العدد $أ$ هو جذر تربيعي للعدد ب عندما $أ^٢$ = ب

خصائص الجذور التربيعية Properties of Square Roots

خاصية الضرب: لأي عددين حقيقيّين غير سالبين أ، ب: $\sqrt{أب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$

خاصية القسمة: لأي عددين حقيقيّين موجبين أ، ب: $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$

مثال (١)

بسِّط كل تعبير.

أ) $\sqrt{٤٩} = ٧$ جذر تربيعي موجب.

ب) $-\sqrt{١٤٤} = -١٢$ جذر تربيعي سالب.

جـ) $\pm\sqrt{\frac{٩}{٢٥}} = \frac{\pm\sqrt{٩}}{\sqrt{٢٥}} = \pm\frac{٣}{٥}$ الجذران التربيعيان هما $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{-٣}{٥}$.

د) $\sqrt{٠} = ٠$ للصفر جذر تربيعي واحد هو صفر.

هـ) $\sqrt{-٣٦}$ غير معرّف في ح.

(في مجموعة الأعداد الحقيقية الجذر التربيعي لعدد سالب غير معرّف).

حاول أن تحل

١ بسِّط كل تعبير.

أ) $\sqrt{٨١}$ ب) $-\sqrt{١٦٩}$ جـ) $\pm\sqrt{٢٥}$ د) $\sqrt{\frac{٩}{٢٥}}$

بعض الجذور التربيعية هي أعداد نسبية، وبعضها الآخر أعداد غير نسبية.

فمثلًا من الجذور النسبية: $\sqrt{١٢١} = ١١$، $-\sqrt{١,٢١} = -١,١$، $\pm\sqrt{\frac{٨١}{١٠٠}} = \pm\frac{٩}{١٠}$

من الجذور غير النسبية: $\sqrt{٥} \simeq ٢,٢٣٦$، $\sqrt{\frac{٣}{٧}} \simeq ٠,٦٥٤٧$

مثال (٢)

حدّد ما إذا كان كل عدد مما يلي عددًا نسبيًّا أو غير نسبي.

أ) $\sqrt{٦٤} = ٨$ عدد نسبي

ب) باستخدام الآلة الحاسبة $-\sqrt{٤,٩} \simeq -٢,٢١٣٥٩٤٣...$ عدد غير نسبي

ج) باستخدام الآلة الحاسبة $\sqrt{\frac{١}{٧}} \simeq ٠,٣٧٧٩٦٤٤٧٣$ عدد غير نسبي

مصطلح رياضي:

في الصيغة العشرية:
العدد النسبي هو عدد منته أو متكرر (دوري).
العدد غير النسبي هو عدد غير منته دون تكرار.

حاول أن تحل

٢ حدّد ما إن كان كل عدد مما يلي عددًا نسبيًّا أو غير نسبي.

أ) $\sqrt{١٣}$

ب) $-\sqrt{٦٢٥}$

ج) $-\sqrt{١٠٠٠}$

د) $\sqrt{\frac{٢}{١٥}}$

١ - تقدير الجذور التربيعية Estimating Square Roots

مربعات الأعداد الطبيعية تسمى مربعات كاملة Perfect Squares.

العدد الطبيعي	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
المربع الكامل	١	٤	٩	١٦	٢٥	٣٦	٤٩	٦٤	٨١	١٠٠	١٢١	١٤٤

يمكن استخدام المربعات الكاملة لتقدير قيمة بعض الجذور التربيعية دون استخدام الآلة الحاسبة.

مثال (٣)

معلومة رياضية:

لأي أعداد موجبة وجذورها التربيعية الموجبة الترتيب نفسه.

حدّد بين أي عددين طبيعيين (كليين) متتاليين يوجد $\sqrt{١٥,٤١}$، ثم قدّر قيمته.

الحل:

$٩ < ١٥,٤١ < ١٦$ ١٥,٤١ هو بين المربعين الكاملين المتتاليين ٩، ١٦.

$\sqrt{٩} < \sqrt{١٥,٤١} < \sqrt{١٦}$ باستخراج الجذر التربيعي لكل عدد

$٣ < \sqrt{١٥,٤١} < ٤$ تبسيط

إذًا $\sqrt{١٥,٤١}$ هو بين ٣، ٤. وحيث إن العدد ١٥,٤١ أقرب إلى ١٦ فإن $\sqrt{١٥,٤١}$ يكون قريبًا من ٤ وهو يساوي تقريبًا ٣,٨ أو ٣,٩.

حاول أن تحل

٣ حدّد بين أي عددين صحيحين متتاليين يوجد العدد $-\sqrt{٣٠,٨}$، ثم قدّر قيمته.

يمكن إيجاد قيمة تقريبية للجذور التربيعية باستخدام الآلة الحاسبة.

مثال (٤)

حدّد بين أي عددين كليين متتاليين يقع $\sqrt{٢٨,٦٣}$، ثم أوجد قيمته لأقرب جزء من عشرة مستخدمًا الآلة الحاسبة.

الحل:

$٢٥ < ٢٨,٦٣ < ٣٦$ ٢٨,٦٣ هو بين المربعين الكاملين المتتاليين ٢٥، ٣٦.

$\sqrt{٢٥} < \sqrt{٢٨,٦٣} < \sqrt{٣٦}$ باستخراج الجذر التربيعي لكل عدد

$٥ < \sqrt{٢٨,٦٣} < ٦$ تبسيط

إذًا $\sqrt{٢٨,٦٣}$ هو بين ٥، ٦.

باستخدام الآلة الحاسبة: √ 28.63 = 5.350 700 889

أي أن $\sqrt{٢٨,٦٣}$ يساوي تقريبًا ٥,٤.

حاول أن تحل

٤ حدّد بين أي عددين كليين متتاليين يقع $\sqrt{١٣,٧}$، ثم أوجد قيمته لأقرب جزء من عشرة مستخدمًا الآلة الحاسبة.

مثال (٥)

أوجد طول وتر مثلث طولا ضلعي زاويته القائمة هما ٥ سم، ٧ سم.

الحل:

$٥^٢ + ٧^٢ = ٢٥ + ٤٩ = ٧٤$ نظرية فيثاغورث

٧٤ يقع بين المربعين الكاملين المتتاليين ٦٤، ٨١.

∴ طول وتر المثلث هو بين ٨، ٩ سم.

باستخدام الآلة الحاسبة $\sqrt{٥^٢ + ٧^٢} \simeq ٨,٦٠٢٣$

طول وتر المثلث $\simeq ٨,٦$ سم.

تذكر:
في المثلث قائم الزاوية، مربع طول الوتر = مجموع مربعي طولي ضلعي الزاوية القائمة.

حاول أن تحل

٥ أوجد طول وتر مثلث قائم الزاوية، طولا ضلعي زاويته القائمة هما ٩ سم، ١٣ سم.

مثال (٦) تطبيقات حياتية

يسقط جسم من ارتفاع ٩ أمتار. تبين المعادلة ع = ٤,٩ن^٢ العلاقة بين الارتفاع ع بالأمتار والزمن ن بالثواني المستغرق للوصول إلى سطح الأرض. ما الزمن اللازم ليصل إلى الأرض؟

الحل:

ع = ٤,٩ن^٢

$ن^٢ = \frac{٩}{٤,٩}$

$ن = \sqrt{\frac{٩}{٤,٩}}$ أو $ن = -\sqrt{\frac{٩}{٤,٩}}$ مرفوضة

ن $\simeq$ ١,٣٥٥ ثانية باستخدام الآلة الحاسبة

أي يلزم حوالى ثانية ونصف ليصل الجسم إلى الأرض.

حاول أن تحل

٦ من مثال (٦)، ما الزمن اللازم لوصول جسم إلى الأرض إذا سقط عن ارتفاع ١٤ مترًا؟

١ ـ ٣

حل المتباينات
Solving Inequalities

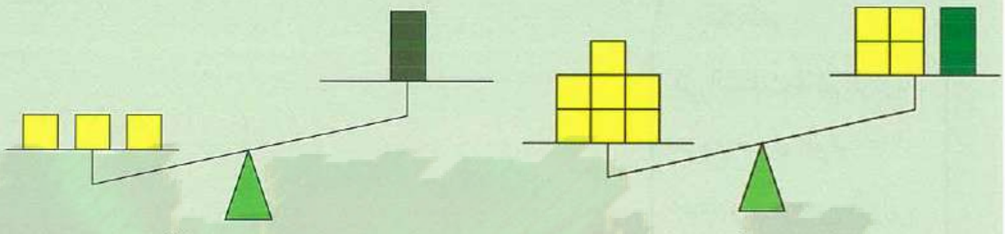
سوف تتعلم

- حل المتباينات باستخدام الخواص
- نمذجة متباينات من الدرجة الأولى
- حل متباينات ذات متغير واحد في أحد الطرفين أو كليهما

دعنا نفكر ونتناقش

المتباينات المتكافئة هي متباينات لها مجموعة الحل نفسها.

استخدم الميزان لتبين أن المتباينتين س + ٤ < ٧ ، س < ٣ متباينتان متكافئتان.



س + ٤ < ٧ س < ٣

مصطلحات مساعدة:

تعني كلمة "لانهائي" أن عدد الحلول غير محدد ولا يمكن حصره.

حل المتباينات Solving Inequalities

أنت تحلّ متباينة تتضمّن جمعًا أو طرحًا باستخدام العمليّات العكسيّة، لكي تضع المتغيّر في طرف واحد. أحيانًا يكون لمتباينة عدد لانهائيّ من الحلول ممّا يستحيل معه التحقّق منها جميعًا. بدلًا من ذلك، تحقّق من صحّة حساباتك واتّجاه علاقة الترتيب.

استخدام خاصية المعكوس الجمعي في حل المتباينات

مثال (١)

أوجد مجموعة حل المتباينة س − ٧ < −٢ ومثل الحلول بيانيًّا على خط الأعداد، ثم تحقق من صحة الحل.

الحل: س − ٧ < −٢

س − ٧ + ٧ < −٢ + ٧ ضع المتغير في طرف واحد، وذلك بإضافة المعكوس الجمعي للعدد (−٧) إلى الطرفين

س < ٥ بسِّط

مجموعة الحل: (−∞، ٥)

تحقق:

الخطوة ١ : تحقق مما إذا كانت س = ٥ حلًّا للمعادلة المرتبطة.

س − ٧ = −٢ اكتب المعادلة المرتبطة

٥ − ٧ ≟ −٢ عوض بـ ٥ عن س

−٢ = −٢ ✓

الخطوة ٢: تحقق من صحة علاقة الترتيب بالتعويض في المتباينة.

س - ٧ < -٢

٤ - ٧ < -٢ عوض بعدد أصغر من ٥ عن س

-٣ < -٢ ✓

كل من الخطوتين ١، ٢ تتحقق، لذلك س < ٥ هو حل المتباينةِ س - ٧ < -٢

تذكر:

الدائرة المفتوحة على تمثيل بياني، تعني أن العدد ليس متضمَّنًا في الحل.

الدائرة المغلقة على تمثيل بياني، تعني أن العدد متضمَّن في الحل.

حاول أن تحل

١ أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد لكل مما يلي:

أ ص - ٤ ≤ ١ ب ١٢ ≤ س - ٥

مثال (٢)

الأمتعة (الحقائب): تشترط إحدى شركات الطيران ألّا يزيد وزن الأمتعة عن ٤٥ كيلوجرامًا للراكب. إذا كان وزن إحدى حقيبتيك ١٧ كيلوجرامًا، فما الوزن الممكن للحقيبة الثانية؟

الحل:

الألفاظ وزن الحقيبة الأولى زائد وزن الحقيبة الثانية لا يزيد عن ٤٥ كجم

ليكن ز = وزن الحقيبة الثانية

المتباينة ١٧ + ز ≤ ٤٥

-١٧ + ١٧ + ز ≤ -١٧ + ٤٥ ← ضع المتغير في طرف واحد وذلك بإضافة المعكوس الجمعي (-١٧)

ز ≤ ٢٨ ← بسط

يمكن أن يصل وزن حقيبتك الثانية إلى ٢٨ كجم.

حاول أن تحل

٢ تتسع القاعة الرئيسة في إحدى المدارس لـ ٣٠٠ مقعد. في عرض لإحدى المسرحيات كان عدد الحضور من الفصل العاشر ٨٩ طالبًا، فكم عدد الطلاب الذين يمكن حضورهم من بقية فصول المدرسة؟

استخدام خاصية المعكوس الضربي في حل المتباينات.

عندما تضرب طرفي متباينة في عدد سالب أو تقسم طرفي متباينة على عدد سالب، اعكس علاقة الترتيب.

مثال (٣)

أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{س}{-٢} < ١$، ومثل الحلول بيانيًا على خط الأعداد.

معلومة مفيدة:

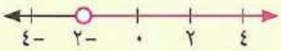
إذا كان $أ < ب$، $جـ > ٠$، فإن
$أجـ < ب جـ$، $\frac{أ}{جـ} < \frac{ب}{جـ}$.
إذا كان $أ < ب$، $جـ < ٠$، فإن
$أجـ > ب جـ$، $\frac{أ}{جـ} > \frac{ب}{جـ}$.

الحل: $\frac{س}{-٢} < ١$

$-٢ \times \left(\frac{س}{-٢}\right) > ١ \times (-٢)$ اضرب كلًّا من الطرفين في المعكوس الضربي (-٢) واعكس علاقة الترتيب

$س > -٢$ بسط

مثل بيانيًّا

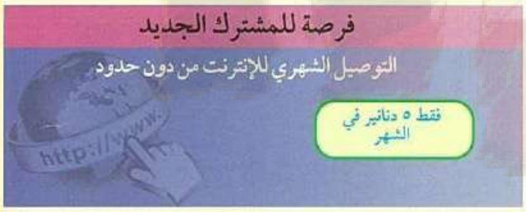


مجموعة الحل = $(-٢، \infty)$

حاول أن تحل

٣ أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{ب}{٤} \leq ١$، ومثل الحلول بيانيًا على خط الأعداد.

مثال (٤)



عمل تجاري: تعلن شركة لتوصيل خدمات الإنترنت عن الفرصة التالية الموضحة. هدف الشركة هو تحقيق مبلغ إضافي على الأقل ٤٥٠٠ دينار شهريًا. كم مشتركًا جديدًا يلزم أن تجتذبهم الشركة؟

الحل:

الألفاظ: عدد المشتركين الجدد مضروبًا بـ ٥ دنانير يكون على الأقل ٤٥٠٠ دينار.

ليكن ن = عدد المشتركين الجدد

المتباينة $ن \times ٥ \geq ٤٥٠٠$

$٥ن \geq ٤٥٠٠$

$\frac{٥ن}{٥} \geq \frac{٤٥٠٠}{٥}$ اقسم طرفي المتباينة على ٥

$ن \geq ٩٠٠$ بسط

يلزم أن تجتذب ٩٠٠ مشترك جديد على الأقل.

التحقق من معقولية الإجابة: الإجابة معقولة لأن ٥ × ٩٠٠ هو ٤٥٠٠، وأي عدد أكبر من ٩٠٠ مضروبًا بـ ٥ ينتج عددًا أكبر من ٤٥٠٠.

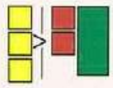
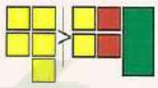
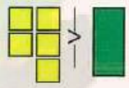
حاول أن تحل

٤ الحد الأقصى لحمولة مصعد في فندق ١٠٠٠ كجم. افرض أن متوسط وزن النزيل ٨٠ كجم، فكم نزيلًا يمكن للمصعد أن يحملهم بأمان؟

حل متباينات متعددة الخطوات:

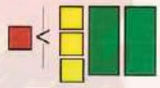
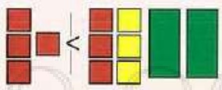
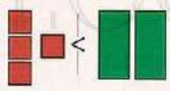
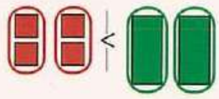
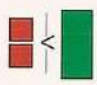
يتطلب حل المتباينات أحيانًا استخدام أكثر من خطوة. وسنستخدم بلاطات الجبر في نمذجة متباينات من الدرجة الأولى حتى نفهم حلها. اعتبر أن ▮ تمثل المجهول س، البلاطة الحمراء ■ تمثل −١، البلاطة الصفراء □ تمثل +١

أ حل المتباينة س − ٢ < ٣.

س − ٢ < ٣		نمذجة المتباينة باستخدام البلاطات
س − ٢ + ٢ < ٣ + ٢		إضافة +٢ إلى طرفي المتباينة
س < ٥		التبسيط بحذف أزواج البلاطات الصفرية

كل بلاطة خضراء أصغر من ٥ بلاطات صفراء، إذًا س < ٥.

ب حل المتباينة ٢س + ٣ > −١.

٢س + ٣ > −١		نمذجة المتباينة باستخدام البلاطات
٢س + ٣ − ٣ > −١ − ٣		إضافة −٣ إلى طرفي المتباينة
٢س > −٤		التبسيط بحذف أزواج البلاطات الصفرية
$\frac{\text{٢س}}{\text{٢}} > \frac{-\text{٤}}{\text{٢}}$		قسم كل طرف إلى مجموعتين متساويتين
س > −٢		

كل بلاطة خضراء أكبر من بلاطتين حمراوين. إذًا س > −٢

مثال (٥)

أوجد مجموعة حل المتباينة: ٢(م + ٢) − ٣م ≤ ١ ومثّل مجموعة الحل على خط الأعداد.

الحل:

٢(م + ٢) − ٣م ≤ ١	
٢م + ٤ − ٣م ≤ ١	خاصيّة التوزيع
٢م − ٣م + ٤ ≤ ١	خاصيّة الإبدال
−م + ٤ ≤ ١	تبسيط
−م + ٤ − ٤ ≤ ١ − ٤	طرح ٤ من طرفي المتباينة
−م ≤ −٣	
م ≥ ٣	تنعكس علاقة الترتيب

مجموعة الحل = (−∞، ٣].

حاول أن تحل

٥ أوجد مجموعة حل المتباينة ثم مثّل الحل على خط الأعداد: أ ٣(س + ٤) + ٥ س ≥ ٢.

ب −٣ ≥ ١ − ٢س < ٣

مثال (٦) تطبيقات حياتية

يشتري أحد المخازن أكثر من ٣٠ عبوة شامبو في الشهر. يدفع ٣ دنانير ثمن العبوة الواحدة، ٢٥ دينارًا كلفة تسليم البضاعة. عرضت شركة منافسة على صاحب المخزن عبوات بسعر ٤ دنانير للواحدة، ٥ دنانير فقط كلفة تسليم البضاعة، مدعية أن أسعارها هي الأرخص. هل هذا صحيح؟

الحل:

ليكن س عدد العبوات التي يشتريها المخزن في الشهر.

تبلغ كلفة الشراء: ٣س + ٢٥

تبلغ كلفة الشراء من الشركة المنافسة: ٤س + ٥

للتحقق، نحل المتباينة ٤س + ٥ < ٣س + ٢٥.

٤س + ٥ − ٣س < ٣س + ٢٥ − ٣س	طرح ٣س من طرفي المتباينة
س + ٥ < ٢٥	تبسيط
س + ٥ − ٥ < ٢٥ − ٥	طرح ٥ من طرفي المتباينة
س < ٢٠	

أي أن الشركة المنافسة تكون أفضل عندما يكون عدد العبوات أقل من ٢٠ عبوة بينما يشتري المخزن أكثر من ٣٠ عبوة في الشهر.

∴ ما تعرضه الشركة المنافسة ليس أفضل عرض، لذا على صاحب المخزن أن يُبقي تعامله مع الشركة الأولى.

حاول أن تحل

٦ في مثال (٦)، هل يصبح عرض الشركة المنافسة أفضل إذا لم تقبض أموالًا كلفة تسليم البضاعة؟

مثال (٧)

أوجد مجموعة حل المتباينة ٦س – ١٥ > ٤س + ١ ومثّل الحلّ على خط الأعداد.

الحل:

٦س – ١٥ > ٤س + ١

٦س – ١٥ – ٤س > ٤س + ١ – ٤س   طرح ٤س من طرفي المتباينة

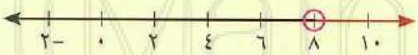
٢س – ١٥ > ١   تبسيط

٢س – ١٥ + ١٥ > ١ + ١٥   إضافة ١٥ إلى طرفي المتباينة

٢س > ١٦   تبسيط

س > ٨

مجموعة الحل = (٨، ∞).



انتبه:

في حالة حل المتباينات مثل:

٢س > ٢س – ١

٢س –٢س > – ١

٠ × س > – ١

مجموعة حلها ح.

حاول أن تحل

٧ أوجد مجموعة حل المتباينات التالية، ومثلها على خط الأعداد إن أمكن.

أ ٢(٢س – ٨) > ٤س + ٢

ب ٣س + ٧ > ٣(س – ٣)

٨ هل المتباينتان ٢س > ٢س – ١ ، ٢س < ٢س – ١ لهما مجموعة الحل نفسها؟ فسّر إجابتك.

١ – ٤

القيمة المطلقة
Absolute Value

سوف تتعلم

- حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة
- حل متباينات تتضمن قيمة مطلقة

دعنا نفكر ونتناقش

عرفت سابقًا أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي **بُعد هذا العدد عن الصفر على خط الأعداد.** ولمّا كان البعد عددًا غير سالب، فالقيمة المطلقة لعدد حقيقي سالب هي معكوسه الجمعي. الرمز المستخدم للقيمة المطلقة للعدد س هو |س|.

تعريف:

لكل عدد حقيقي س يكون:

$$|س| = \begin{cases} س & \text{إذا كان } س > ٠ \\ ٠ & \text{إذا كان } س = ٠ \\ -س & \text{إذا كان } س < ٠ \end{cases}$$

معلومة:

(−س) ليس بالضرورة عددًا سالبًا. (−س) هو المعكوس الجمعي للعدد س.

نلاحظ أن العدد إذا كان موجبًا أو صفرًا فإن قيمته المطلقة تساويه، أما إذا كان العدد سالبًا فإن قيمته المطلقة تساوي معكوسه الجمعي.

بعض خواص القيمة المطلقة للأعداد الحقيقية

ليكن أ، ب ∈ ح

١ $|أ| \geq ٠$

٢ $|-أ| = |أ|$

٣ $|أ \times ب| = |أ| \times |ب|$

٤ $\left|\frac{أ}{ب}\right| = \frac{|أ|}{|ب|}$، حيث ب ≠ ٠

٥ $|أ| \geq أ$

٦ $|أ - ب| = |ب - أ|$

مثال (١)

أعد تعريف |س − ٤| دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

الحل:

$$|س - ٤| = \begin{cases} س - ٤ & \text{حيث } س - ٤ > ٠ \\ ٠ & \text{حيث } س - ٤ = ٠ \\ -(س - ٤) & \text{حيث } س - ٤ < ٠ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} س - ٤ : & س \geq ٤ \\ ٤ - س : & س < ٤ \end{cases}$$

حاول أن تحل

١ أعد تعريف كلّ مما يلي دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

أ $|س + ٣|$

ب $|٤ - ٢س|$

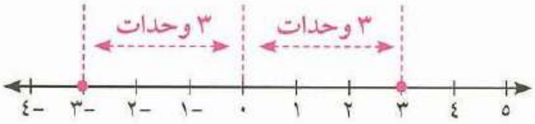
حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة

يمكن استخدام خط أعداد لحل معادلات تتضمن قيمة مطلقة.

يبيّن التمثيل البياني المقابل حلول المعادلة $|س| = ٣$.

حيث المسافة بين س، صفر تساوي ٣ وحدات

إذًا الحل: $س = ٣$ أو $س = -٣$



نتيجة

١ إذا كان $أ$ عددًا حقيقيًّا موجبًا فإن حل المعادلة $|س| = أ$ هو: $س = أ$ أو $س = -أ$ وتكون مجموعة الحل $\{-أ ، أ\}$.

٢ إذا كان $أ$ عددًا حقيقيًّا سالبًا فإن المعادلة $|س| = أ$ مجموعة حلها $\varnothing$

٣ إذا كان $أ = ٠$ فإن $|س| = أ$ مجموعة حلها $\{٠\}$.

معلومة مفيدة:

المجموعة الخالية نعبر عنها بأحد الرمزين $\{\ \}$ أو $\varnothing$

مثال (٢)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $|٢ص - ٣| = ٧$، ثم تحقق من صحة الحل.

الحل: $|٢ص - ٣| = ٧$

$٢ص - ٣ = ٧$ أو $٢ص - ٣ = -٧$ — قيمة ٢ص − ٣ يمكن أن تكون ٧ أو −٧.

$٢ص = ١٠$ | $٢ص = -٤$ — إضافة +٣ إلى طرفي المعادلة.

$ص = ٥$ | $ص = -٢$ — قسمة كل طرف على ٢.

مجموعة الحل $= \{-٢ ، ٥\}$

تحقق: عندما $ص = ٥$

$|٢ص - ٣| = ٧$

$|٢(٥) - ٣| \stackrel{?}{=} ٧$

$|٧| = ٧$ ✓

وعندما $ص = -٢$

$|٢ص - ٣| = ٧$

$|٢(-٢) - ٣| \stackrel{?}{=} ٧$

$|-٧| = ٧$ ✓

حاول أن تحل

٢ أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلتين، ثم تحقق من صحة الحل.

أ $|٥س + ٣| = ٨$

ب $|٢س - ١| = ٠$

عند حل مسائل متعددة الخطوات، ابدأ بوضع التعبير الذي يتضمن القيمة المطلقة في طرف واحد.

مثال (٣)

أوجد مجموعة حل المعادلة: |٢س + ١| + ٣ = ٠

الحل: |٢س + ١| + ٣ = ٠

|٢س + ١| = −٣

وحيث إن −٣ < ٠ (عدد سالب)

∴ مجموعة الحل = ∅

حاول أن تحل

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة: ٥ + |−٢س + ٤| = ٠

مثال (٤)

أوجد مجموعة حل المعادلة ٤|٢س + ٣| − ٥ = ١١

الحل: ٤|٢س + ٣| − ٥ = ١١

٤|٢س + ٣| = ١٦ إضافة ٥ إلى طرفي المعادلة

|٢س + ٣| = ٤ قسمة كل طرف على ٤

٢س + ٣ = ٤ أو ٢س + ٣ = −٤

٢س = ١ | ٢س = −٧ إضافة −٣ إلى طرفي المعادلة

س = $\frac{١}{٢}$ | س = $\frac{-٧}{٢}$ قسمة كل طرف على ٢

مجموعة الحل = $\left\{\frac{١}{٢}، \frac{-٧}{٢}\right\}$

حاول أن تحل

٤ أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلتين:

أ ٣|٢س + ٤| −٦ = ٠

ب |٥س − ٤| + ٣ = ٠

عند حل المعادلة $|س| = |ص|$ نستخدم طريقة المساواة، نضع $س = ص$ أو $س = -ص$. ونحل المعادلات أو نستخدم طريقة تربيع الطرفين ثم نحل المعادلة الناتجة ونتحقق من القيم بالتعويض عن المجهول لتحديد مجموعة الحل.

مثال (٥)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $|٢م - ٣| = |م + ١|$

الحل:

أولًا: طريقة المساواة

لاحظ أن للمقدارين القيمة المطلقة نفسها إذًا هما متساويان، أو كل منهما هو المعكوس الجمعي للآخر.

$٢م - ٣ = م + ١$

$٢م - م = ١ + ٣$

$م = ٤$

أو

$٢م - ٣ = -م - ١$

$٢م + م = -١ + ٣$

$٣م = ٢$

$م = \frac{٢}{٣}$

مجموع الحل = $\left\{٤ ، \frac{٢}{٣}\right\}$

ثانيًا: طريقة تربيع الطرفين

$\left(|٢م - ٣|\right)^٢ = \left(|م + ١|\right)^٢$

$(٢م - ٣)^٢ = (م + ١)^٢$ $\qquad |م|^٢ = م^٢$

$٤م^٢ - ١٢م + ٩ = م^٢ + ٢م + ١$

$٣م^٢ - ١٤م + ٨ = ٠$

$(م - ٤)(٣م - ٢) = ٠$

$م = ٤$ أو $م = \frac{٢}{٣}$

تحقق: $|٢م - ٣| = |م + ١|$

عندما $م = ٤$

$|٢ \times ٤ - ٣| \stackrel{?}{=} |٤ + ١|$

$|٥| = |٥|$ ✓

عندما $م = \frac{٢}{٣}$

$|٢ \times \frac{٢}{٣} - ٣| \stackrel{?}{=} |\frac{٢}{٣} + ١|$

$|-\frac{٥}{٣}| = |\frac{٥}{٣}|$ ✓ الحلّان مقبولان

مجموعة الحل = $\left\{\frac{٢}{٣} ، ٤\right\}$

أضف إلى معلوماتك:

$|س^٢| = |س|^٢ = س^٢$

معلومة رياضية:

إذا كان $|س| = |ص|$ فإن

- $س = ص$ أو $س = -ص$.
- $\left(|س|\right)^٢ = \left(|ص|\right)^٢$

حاول أن تحل

٥ أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين التاليتين:

أ $|ص - ٥| = |٢ص + ٣|$ ب $|س - ٥| = |س - ٧|$

استخدم طريقة المساواة ثم طريقة التربيع.

يمكننا كذلك حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة في أحد طرفيها على النحو التالي:

مثال (٦)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $|٢س + ٣| = ٣س - ٢$

أضف إلى معلوماتك:

$\sqrt{س^{٢}} = |س|$

$(\sqrt{س})^{٢} = س$ (حيث $س \geq ٠$)

الحل: $|٢س + ٣| = ٣س - ٢$

نعلم أن الطرف الأيمن للمعادلة غير سالب نتيجة وجود القيمة المطلقة، إذًا يجب أن يكون الطرف الأيسر للمعادلة غير سالب. لذلك نضيف الشرط:

$٣س - ٢ \geq ٠$ أي $س \geq \frac{٢}{٣}$ (تقبل كل قيم س أكبر من أو تساوي $\frac{٢}{٣}$)

(أي أن مجموعة التعويض هي $\left[\frac{٢}{٣} ، \infty\right)$)

$٢س + ٣ = ٣س - ٢$

$٢س - ٣س = -٢ - ٣$

$-س = -٥$

$س = ٥$

$\because ٥ \in \left[\frac{٢}{٣} ، \infty\right)$

$\therefore$ الحل $س = ٥$ مقبول

أو

$٢س + ٣ = -٣س + ٢$

$٢س + ٣س = ٢ - ٣$

$٥س = -١$

$س = \frac{-١}{٥}$

$\because -\frac{١}{٥} \notin \left[\frac{٢}{٣} ، \infty\right)$

$\therefore$ الحل $س = -\frac{١}{٥}$ مرفوض

معلومة مفيدة:

مجموعة الحل هي مجموعة جزئية من مجموعة التعويض

مجموعة الحل $= \{٥\}$

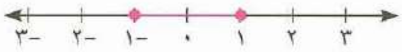
حاول أن تحل

٦ أوجد مجموعة حل المعادلة: $|٤س - ١| = س + ٢$.

حل متباينات تتضمن قيمة مطلقة

يمكن أيضًا حل متباينات تتضمن قيمًا مطلقة باستخدام خط الأعداد.

يبيّن التمثيل البياني الأول حلول المتباينة |س| ≤ ١.



يبيّن التمثيل البياني الثاني حلول المتباينة |س| ≥ ١.

تذكر:

- |س| ≤ ١ تعني أن بعد س عن الصفر هو أصغر من أو يساوي ١ على خط الأعداد.
- |س| ≥ ١ تعني أن بعد س عن الصفر هو أكبر من أو يساوي ١ على خط الأعداد.

تعميم

ليكن أ عددًا حقيقيًا موجبًا.

١ |س| ≤ أ تكافئ -أ ≤ س ≤ أ

٢ |س| ≥ أ تكافئ س ≥ أ أو س ≤ -أ

مثال (٧)

أوجد مجموعة حل المتباينة ٤|٢س + ١| + ٤ ≤ ١٢، ومثّل مجموعة الحل على خط الأعداد.

الحل: ٤|٢س + ١| + ٤ ≤ ١٢

٤|٢س + ١| ≤ ٨ — إضافة (-٤) إلى طرفي المتباينة

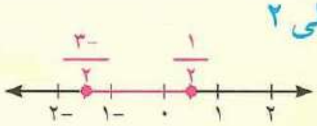
|٢س + ١| ≤ ٢ — قسمة كل طرف على ٤

-٢ ≤ ٢س + ١ ≤ ٢ — كتابة المتباينة المكافئة

-٣ ≤ ٢س ≤ ١ — إضافة (-١)

$\frac{-٣}{٢}$ ≤ س ≤ $\frac{١}{٢}$ — القسمة على ٢

مجموعة الحل = [$-\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$]



حاول أن تحل

٧ أوجد مجموعة حل المتباينة |$\frac{١}{٢}$ س - $\frac{٤}{٥}$| < ٠,٦ ومثّل مجموعة الحل على خط أعداد.

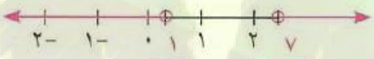
مثال (٨)

أوجد مجموعة حل المتباينة: ٢|٣م − ٤| − ١ > ٥، ومثّل الحل على خط الأعداد.

الحل: ٢|٣م − ٤| − ١ > ٥

٢|٣م − ٤| > ٦	إضافة ١ إلى طرفي المتباينة
|٣م − ٤| > ٣	قسمة كل طرف على ٢
٣م − ٤ > ٣ أو ٣م − ٤ < −٣	كتابة المتباينة المكافئة
٣م > ٧ ، ٣م < ١	بسّط
م > $\frac{٧}{٣}$ ، م < $\frac{١}{٣}$	قسمة كل طرف على ٣

مجموعة الحل = $\left(\frac{٧}{٣} ، \infty\right) \cup \left(-\infty ، \frac{١}{٣}\right)$



حاول أن تحل

٨ أوجد مجموعة حل المتباينة: $\left|\frac{٣}{٤} - س\right| \leq \frac{٧}{٨}$ ومثّل الحل على خط الأعداد.

مثال (٩) تطبيقات حياتية (إثرائي)

رياضة: يبلغ طول قطر دائرة مرمى كرة السلة ٤٥ سم مع هامش خطأ لا يزيد على ١ سم.

أ اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تعبر عن قطر دائرة مرمى تحقق هذا الشرط.

ب أوجد قيم طول القطر المقبولة ومثّلها على خط أعداد.

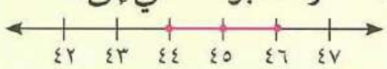
الحل:

ليكن س طول قطر دائرة مرمى كرة سلة، وحيث إن س لا يزيد أو ينقص عن ٤٥ سم بأكثر من ١ سم، فإن قيم س تحقق |س − ٤٥| ≤ ١.

−١ ≤ س − ٤٥ ≤ ١

٤٤ ≤ س ≤ ٤٦

مجموعة الحل = [٤٤ ، ٤٦] أي أن قيم طول القطر المقبولة تنتمي إلى [٤٤ ، ٤٦]



حاول أن تحل

٩ درجة حموضة عصير الطماطم هي ٤ مع هامش سماح ٠,٢ . اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تعبر عن درجات الحموضة المقبولة. وحلها ثم بيّن الحل على خط أعداد.

مثال (١٠) **تطبيقات حياتية**

يبلغ وزن عبوة رقائق الذرة ٤٥٠ جرامًا. يختار مراقب الجودة بعض العبوات للتحقق من زنتها.
تلغى كل علبة يزيد الفرق بين وزنها ووزن عبوة الذرة عن ٥ جم.
اكتب متباينة تبيّن أوزان العبوات غير المقبولة ومثّل الحل على خط الأعداد.

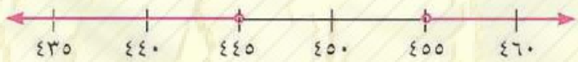
الحل:

لتكن س وزن العبوة. العبوات غير المقبولة هي التي يزيد وزنها أو يقل عن الوزن المبين بأكثر من ٥ جم.

أي $|\text{س} - ٤٥٠| > ٥$

$\text{س} - ٤٥٠ > ٥$ أو $\text{س} - ٤٥٠ < -٥$

$\text{س} > ٤٥٥$ أو $\text{س} < ٤٤٥$



حاول أن تحل

١٠ يعرض أحد المحلات المثلجات في عبوات تزن ٧٥٠ جرامًا. عند التحقق من الوزن تقبل العبوات التي يقل الفرق بين وزنها ووزن العبوة المعتمد عن ٤٠ جرامًا.
اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تبيّن أوزان العبوات المقبولة ومثّل الحل على خط الأعداد.

١ – ٥

دالة القيمة المطلقة
Absolute Value Function

سوف تتعلم
- الرسم البياني لدالة القيمة المطلقة
- استخدام هندسة التحويلات في رسم بعض دوال القيمة المطلقة

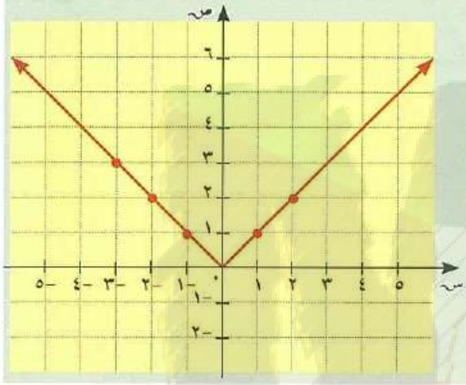
دعنا نفكر ونتناقش

المعادلات على الشكل ص = |أس + ب| + جـ تمثل دوال قيمة مطلقة بمتغيرين.

يمثل الرأس أكبر قيمة أو أصغر قيمة للدالة والتمثيل البياني لهذه الدوال يكون على شكل زاوية.

لرسم الدالة ص = |س| بيانيًا يمكن استخدام جدول قيم.

س	٢	١	٠	-١	-٢	-٣
ص = |س|	٢	١	٠	١	٢	٣



يمكن أيضًا كتابة ص = |س| دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

ص = { س : س > ٠
 ٠ : س = ٠
 -س : س < ٠

تعميم

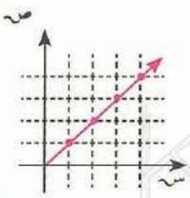
رأس منحنى الدالة ص = |أس + ب| + جـ هو النقطة $\left(-\frac{ب}{أ}\text{ ، }جـ\right)$

ملاحظة: رأس منحنى الدالة ص = |أس + ب| هو النقطة $\left(-\frac{ب}{أ}\text{ ، }٠\right)$

معلومة رياضية:

الرسم البياني للدالة

ص = س : س ≥ ٠ هو:



مثال (١)

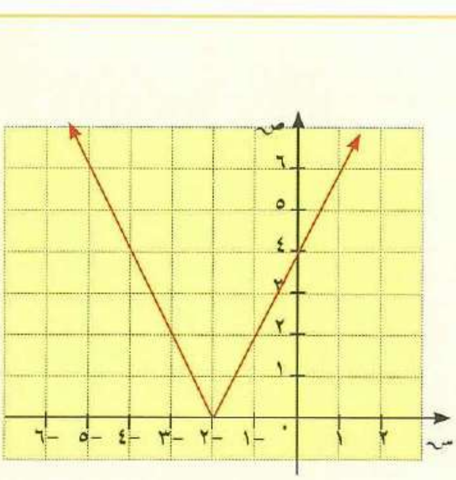
ارسم بيانيًا الدالة: ص = |٢س + ٤|.

الحل: رأس منحنى الدالة هو $\left(-\frac{ب}{أ}\text{ ، }٠\right)$

$\frac{-ب}{أ} = \frac{-٤}{٢} = -٢$ أي أن رأس المنحنى (-٢، ٠).

نضع جدول قيم للأزواج المرتبة (س، ص) يتضمن رأس المنحنى.

س	٠	-١	-٢	-٣	-٤
ص	٤	٢	٠	٢	٤



حاول أن تحل

١ ارسم بيانيًا الدلة: ص = -|٢س + ٣|.

مثال (٢)

ارسم بيانيًّا الدالة ص = |س − ٣| + ٢ بعد كتابتها دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

الحل:

نعيد الكتابة دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

ص = |س − ٣| + ٢

$$\text{ص} = \begin{cases} \text{س} - ٣ + ٢ & : \text{س} - ٣ \geq ٠ \\ -(\text{س} - ٣) + ٢ & : \text{س} - ٣ < ٠ \end{cases}$$

$$\text{ص} = \begin{cases} \text{س} - ١ & : \text{س} \geq ٣ \\ -\text{س} + ٥ & : \text{س} < ٣ \end{cases}$$

رأس منحنى الدالة $\left(\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}، \text{جـ}\right)$ = (٣، ٢)

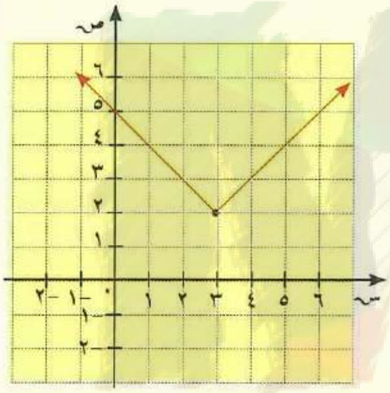
نرسم بيانيًّا كلًّا من:

ص = س − ١ حيث س ≥ ٣،

س	٣	٤	٥
ص	٢	٣	٤

ص = −س + ٥ حيث س < ٣.

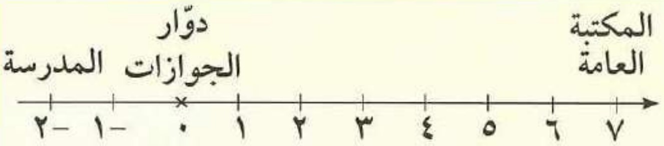
س	٣	٢	١
ص	٢	٣	٤



حاول أن تحل

٢ ارسم بيانيًّا الدالة: ص = $\left|\frac{١}{٢}\text{س} + ١\right| - ٣$ بعد كتابتها دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

مثال (٣)



يقع منزل إبراهيم بين مدرسته والمكتبة العامة كما في الشكل، وتوجد هذه المواقع الثلاثة على خط مستقيم يمر بدوّار الجوازات.

تبعد المدرسة عن الدوّار ٢ كم وتبعد المكتبة العامة عنه ٧ كم في الاتجاه المعاكس. كم يبعد منزل إبراهيم عن الدوّار إذا كان البعد بين المنزل والمكتبة العامة مثلي البعد بين المنزل والمدرسة؟

الحل:

ليكن س موقع المنزل على الخط المستقيم.

∴ |س − (−٢)| البعد بين المنزل والمدرسة، |٧ − س| البعد بين المنزل والمكتبة.

∴ |٧ − س| = ٢|س + ٢|

|س − ٧| = |٢س + ٤| خواص القيمة المطلقة

س − ٧ = ٢س + ٤ أو س − ٧ = −٢س − ٤

٢س − س = −٧ − ٤ | س + ٢س = ٧ − ٤

س = −١١ مرفوضة، لماذا؟ | ٣س = ٣

س = ١

يبعد منزل إبراهيم ١ كم عن الدوّار لجهة المكتبة العامة.

حاول أن تحل

٣ في مثال (٣)، ناقش حل المسألة إذا كانت المكتبة العامة تبعد ٤ كم عن الدوّار.

رسم بيان دوال المطلق باستخدام بعض التحويلات الهندسية

Graph of Absolute Value Functions Using some Geometric Transformations

سوف نستخدم الإزاحة (الانسحاب) أفقيًا أو رأسيًا أو الاثنين معًا في رسم بعض دوال القيمة المطلقة.

مثال (٤)

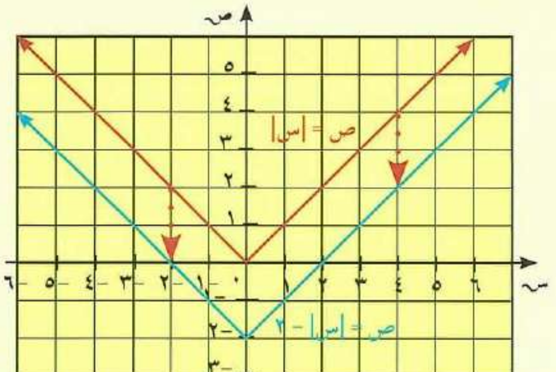
ارسم بيان كل من الدالتين: ص = |س|، ص = |س| − ٢.

صف كيف يرتبط الرسم البياني للدالة ص = |س| −٢ بالرسم البياني للدالة ص = |س|.

الحل:

اصنع جدول قيم، ثم ارسم بيانيًا.

س	ص = |س|	ص = |س| − ٢
−٤	٤	٢
−٢	٢	٠
٠	٠	−٢
٢	٢	٠
٤	٤	٢



لكل قيمة للمتغير س، تكون قيمة ص = |س| −٢ أصغر بـ ٢ من قيمة ص = |س|.

الرسم البياني لِـ ص = |س| −٢ هو صورة للرسم البياني لِـ ص = |س| بعد إزاحته وحدتين إلى أسفل.

حاول أن تحل

٤ لكل زوج من الدوال، قارن بين الرسمين البيانيين. صف كيف يتم الانتقال من الرسم البياني الأول إلى الثاني.

أ ص = |س|، ص = |س| − ٤

ب ص = −|س|، ص = −|س| + ٣

دالة المرجع هي دالة نستخدم بيانها للحصول على بيان دوال أخرى بإجراء بعض التحويلات الهندسية.

بعض دوال المرجع هي: ص = ٲس حيث ٲ ≠ ٠ ، ص = س^{٢} ، ص = |س|، ص = −|س|، ...

الرسم البياني للدالة ص = س + ك (ك عدد حقيقي موجب) ينتج من انسحاب الرسم البياني للدالة ص = س إلى الأعلى ك وحدة.

كذلك ينتج الرسم البياني للدالة ص = س − ك من انسحاب الرسم البياني للدالة ص = س إلى الأسفل ك وحدة.

التمثيل البياني للدالة ص = |س| ± ك ينتج من انسحاب التمثيل البياني للدالة ص = |س| إلى الأعلى (أو إلى الأسفل) ك وحدة.

وبالمثل التمثيل البياني للدالة ص = − |س| ± ك ينتج من انسحاب التمثيل البياني للدالة ص = − |س| (إلى الأعلى أو إلى الأسفل ك وحدة).

مثال (٥)

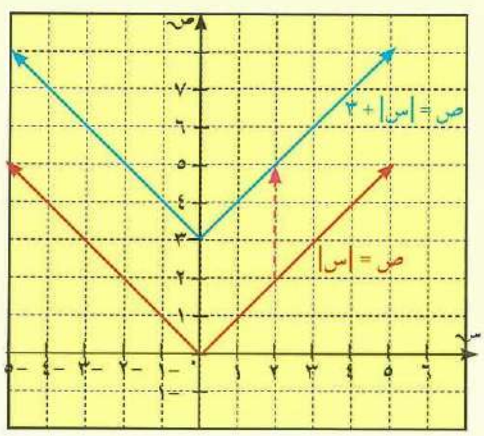
لكل من الدالتين، حدّد دالة المرجع وارسم بيانها، ثم ارسم كل من الدالتين بيانيًا مستخدمًا الانسحاب بعد تحديد مسافة الانسحاب واتجاهه.

أ ص = |س| + ٣

الحل:

أ دالة المرجع هي ص = |س|، ك = ٣

أزح الرسم البياني للدالة ص = |س| ٣ وحدات إلى الأعلى.

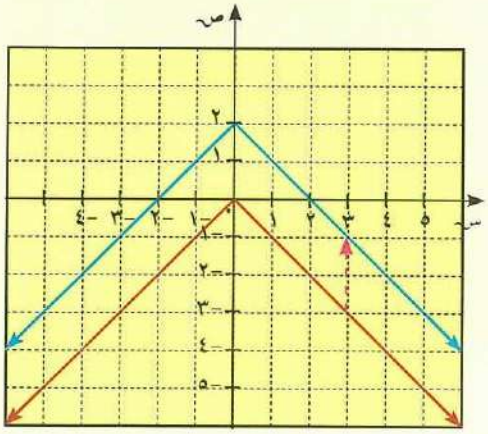


ب ص = −|س| + ٢

الحل:

ب دالة المرجع هي ص = −|س|، ك = ٢

أزح الرسم البياني للدالة ص = −|س| وحدتين إلى الأعلى.



حاول أن تحل

٥ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة ص = |س| + ٥.

ملاحظة: يمكنك عمل جدول للقيم وتحديد بعض النقاط للتحقق من صحة الرسم.

يتشارك الانسحاب الأفقي مع الانسحاب الرأسي ببعض الخصائص.

الرسم البياني للدالة ص = |س + ل| (حيث ل عدد حقيقي موجب) هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = |س|، ل وحدة إلى جهة اليسار. كذلك الرسم البياني للدالة ص = |س − ل| هو انسحاب لدالة المرجع ص = |س| ، ل وحدة إلى جهة اليمين.

مثال (٦)

لكل من الدالتين، حدّد قيمة مسافة الانسحاب ل ثم ارسم بيانيًّا كل دالة مستخدمًا الإزاحة، معتبرًا دالة المرجع ص = |س|

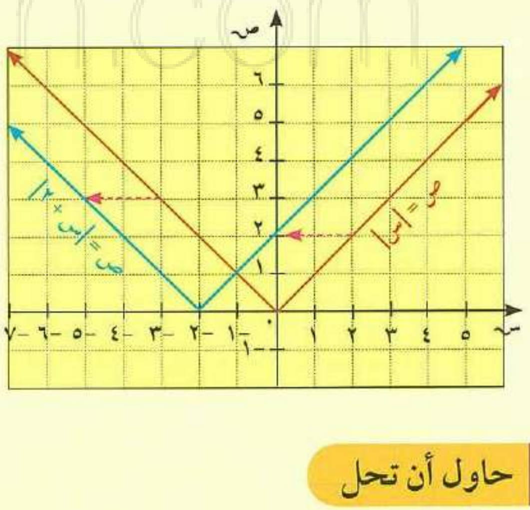
أ ص = |س + ٢|

الحل:

دالة المرجع هي ص = |س|، ل = ٢

الإشارة (+) تعني الإزاحة إلى اليسار.

أزح رسم ص = |س| وحدتين إلى اليسار.



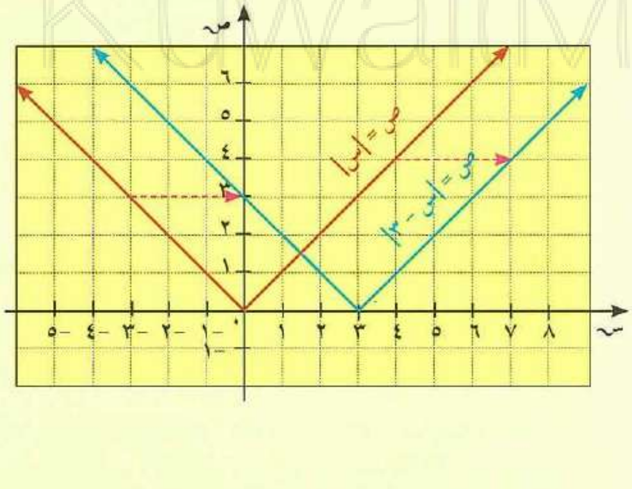
ب ص = |س − ٣|

الحل:

دالة المرجع هي ص = |س|، ل = ٣

الإشارة (−) تعني الإزاحة إلى اليمين.

أزح رسم ص = |س| ثلاث وحدات إلى اليمين.



حاول أن تحل

٦ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة ص = |س + $\frac{٥}{٢}$|.

الرسم البيانيّ للدالة: ص = − |س + ل| حيث ل ∈ ح+ هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = −|س|، ل وحدة إلى جهة اليسار.
كذلك الرسم البياني للدالة ص = − |س − ل| هو انسحاب لدالة المرجع ص = − |س|، ل وحدة إلى جهة اليمين.

مثال (٧)

لكلّ من الدالتين، حدد قيمة مسافة الانسحاب ل، ثم ارسم بيانيًّا كل دالة مستخدمًا الإزاحة، معتبرًا دالة المرجع ص = − |س|

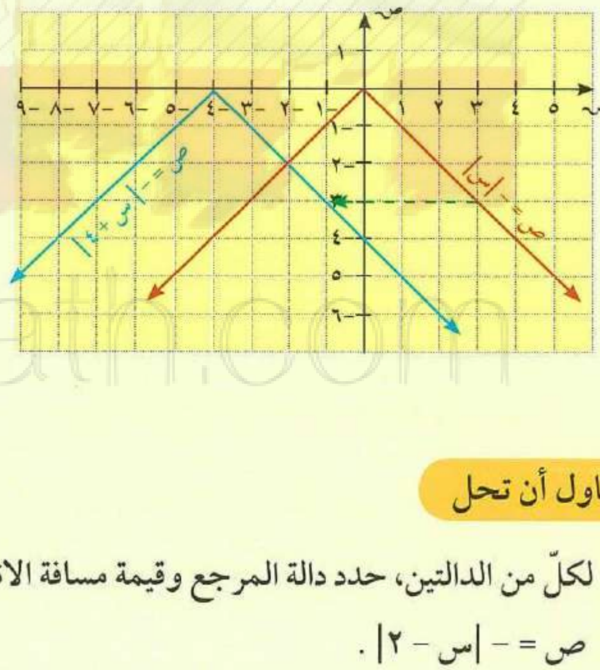
أ ص = − |س + ٤|

الحل:

دالة المرجع ص = − |س|، ل = ٤

(+٤) تعني الانسحاب أربعة وحدات إلى جهة اليسار.

ضع الرأس (−٤، ٠) ثم ارسم بيانيًّا الدالة.



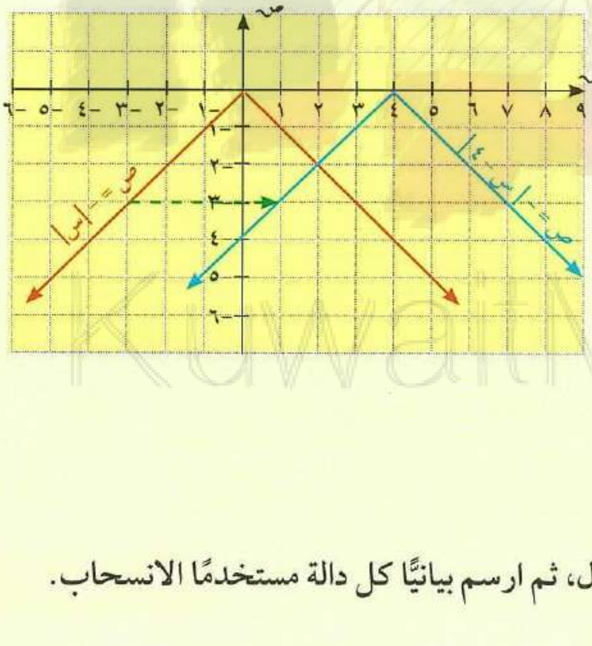
ب ص = −|س − ٤|.

الحل:

دالة المرجع: ص = −|س|، ل = ٤

(−٤) تعني الانسحاب أربعة وحدات إلى جهة اليمين.

ضع الرأس (٤، ٠) ثم ارسم بيانيًّا الدالة.



حاول أن تحل

٧ لكلّ من الدالتين، حدد دالة المرجع وقيمة مسافة الانسحاب ل، ثم ارسم بيانيًّا كل دالة مستخدمًا الانسحاب.

أ ص = − |س − ٢|.

ب ص = −|س + ٣|.

تعرفت كيفية استخدام الانسحاب الأفقي أو الرأسي لدوال المرجع للحصول على رسم بياني لبعض دوال القيمة المطلقة. يمكن أيضًا استخدام الانسحابين الأفقي والرأسي معًا للحصول على بعض الرسوم البيانيّة للدوال: ص = |س + ل| + ك

مثال (٨)

ارسم بيانيًا كلًّا من الدالتين:

أ ص = |س − ٢| + ١

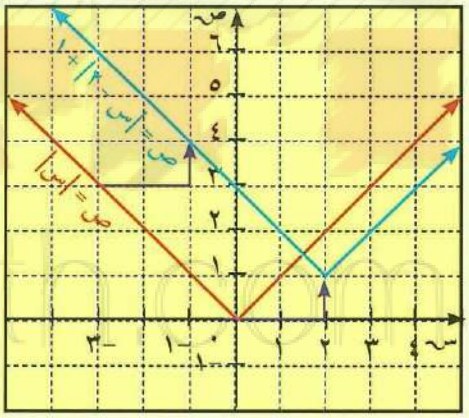
الحل:

دالة المرجع ص = |س|، ل = ٢، ك = ١

(−٢) تعني الانسحاب وحدتين إلى جهة اليمين.

(+١) تعني الانسحاب وحدة واحدة إلى الأعلى.

ضع الرأس (٢، ١) ثم ارسم بيانيًّا الدالة.



ب ص = −|س + ٣| − ٢

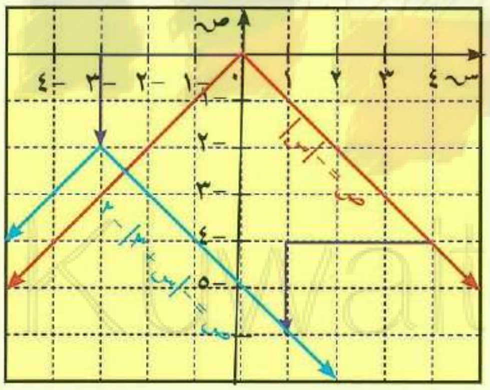
الحل:

دالة المرجع هي ص = −|س|، ل = ٣، ك = ٢

(+٣) تعني الانسحاب ٣ وحدات إلى جهة اليسار.

(−٢) تعني الانسحاب وحدتين إلى أسفل.

ضع الرأس (−٣، −٢) ثم ارسم بيانيًّا الدالة.



حاول أن تحل

٨ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة:

أ ص = |س + ٤| + ٣

ب ص = −|س − ٥| − ٣

يمكنك رسم بيان الدالتين في مثال (٨) بتحديد رأس منحنى الدالة، وتحديد بعض النقاط.

١ ـ ٦

حل نظام معادلتين خطيتين
Solving a System of Two Linear Equations

سوف تتعلم

- حل نظام معادلتين خطيتين بيانيًّا
- حل نظام معادلتين خطيتين جبريًّا باستخدام طريقة الحذف
- حل نظام معادلتين خطيتين جبريًّا باستخدام طريقة التعويض

معلومة رياضية:

نستخدم الأقواس الكبيرة { قبل كتابة نظام المعادلات.

معلومة مفيدة (تكنولوجيا)

لإدخال البيانات في الآلة الحاسبة، نعتمد الصيغة:

١ MODE EQN $a_n x + b_n y = c_n$

أو

٢ MODE MODE EQN 2 Unknowns

يظهر على الشاشة

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} ١ \\ ٢ \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right] \end{array}$$

ملاحظة: ١ معظم الآلات الحاسبة تعتمد الصيغة
أس + ب ص = جـ ، $ax + by = c$

٢ تختلف صيغة إدخال البيانات من آلة حاسبة إلى أخرى لذلك ينصح بمراجعة الدليل المرفق بكل آلة حاسبة.

استكشاف: تحليل الرسوم البيانية

١ أ $\begin{cases} ص = ٢س + ٣ \\ ص = -س + ١ \end{cases}$ ب $\begin{cases} ص = ٢س + ١ \\ ص = ٢س \end{cases}$ جـ $\begin{cases} ص = ٢س + ٢ \\ ٤س - ٢ص + ٤ = ٠ \end{cases}$

٢ لكل زوج من المعادلات أجب عن السؤال التالي:

هل للرسوم البيانية نقاط مشتركة؟ ما عددها؟

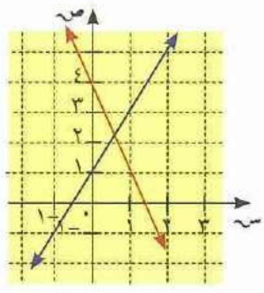
نظام معادلات هو مجموعة من معادلتين أو أكثر تستخدم المتغيرات نفسها. إذا كان الرسم البياني لكل معادلة في نظام من معادلتين هو خط مستقيم، فإن النظام يدعى نظامًا خطيًّا.

فمثلًا $\begin{cases} ٢س + ٣ص = ٤ \\ -س + ٢ص = ٣ \end{cases}$ هو نظام خطي

حل نظام معادلات هو إيجاد قيم المتغيرات التي تحقق كل معادلات النظام.

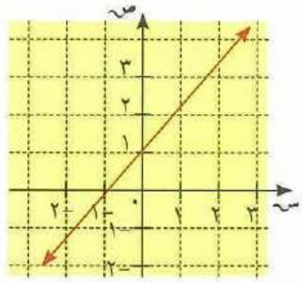
يمكن حل نظام معادلتين خطيتين هندسيًّا بتمثيل معادلاتهما بيانيًّا.

يمكن لنظام معادلتين خطيتين أن يكون له حل واحد أو لا حل، أو عدد لانهائي من الحلول.



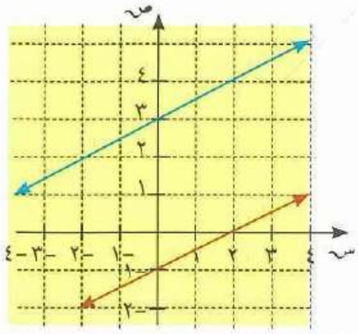
المستقيمان متقاطعان

للنظام حل واحد



المستقيمان منطبقان

للنظام عدد لانهائي من الحلول



المستقيمان متوازيان غير منطبقين

لا حل للنظام

مثال (١)

أوجد مجموعة حل النظام $\left\{ \begin{array}{l} ٢س - ٣ص = ١ \\ ٣س + ٤ص = ١٠ \end{array} \right.$ بيانيًّا وتحقق من الحل.

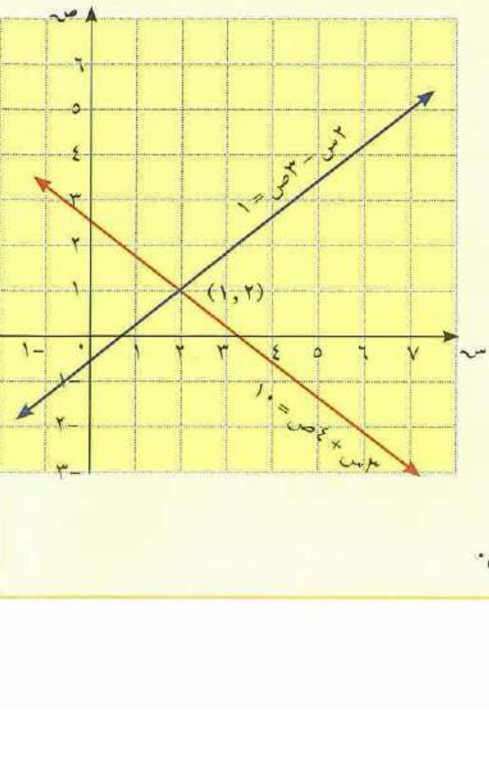
الحل:

ارسم بيانيًّا المستقيم الذي يمثل كل معادلة.

٢س − ٣ص = ١			
س	٠	١	٢
ص	$\frac{-١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	١

٣س + ٤ص = ١٠			
س	٠	١	٢
ص	$٢\frac{١}{٢}$	$١\frac{٣}{٤}$	١

نقطة تقاطع المستقيمين (٢، ١)



تحقق: تحقق ما إن كان الزوج المرتب (٢، ١) يحقق كلتا المعادلتين.

٢س − ٣ص = ١

٢(٢) − ٣(١) $\stackrel{?}{=}$ ١

٤ − ٣ $\stackrel{?}{=}$ ١

١ = ١ ✓

٣س + ٤ص = ١٠

٣(٢) + ٤(١) $\stackrel{?}{=}$ ١٠

٦ + ٤ $\stackrel{?}{=}$ ١٠

١٠ = ١٠ ✓

∴ مجموعة حل النظام = {(٢، ١)}

حاول أن تحل

١ أوجد مجموعة حل النظام $\left\{ \begin{array}{l} ٢س + ص = ٥ \\ -س + ص = -١ \end{array} \right.$ بيانيًّا وتحقق من الحل.

يمكن حل نظام معادلتين خطيتين جبريًا **بطريقة الحذف**. نستخدم خاصية الجمع والضرب في المعادلات.

مثال (٢)

استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام $\begin{cases} ٢س - ص = ١٣ \\ ٣س + ص = ٧ \end{cases}$

الحل:

$\begin{cases} ٢س - ص = ١٣ \\ ٣س + ص = ٧ \end{cases}$ ① معامل ص في المعادلة الثانية هو المعكوس الجمعي ② لمعامل ص في المعادلة الأولى لذلك نجمع المعادلتين

٥س = ٢٠

س = ٤

٣س + ص = ٧ اختر إحدى المعادلتين

٣(٤) + ص = ٧ عوّض عن س بـ ٤ في المعادلة ②

١٢ + ص = ٧ بسِّط

ص = -٥

مجموعة الحل = {(٤، -٥)}.

حاول أن تحل

② استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام $\begin{cases} ٢س + ٣ص = ١١ \\ -٢س + ٤ص = ١٠ \end{cases}$

يمكن أن تحوّل صيغ معادلتي النظام بحيث يصبح معاملا ص (أو س) كل منهما المعكوس الجمعي للآخر باستخدام خاصيّة الضرب في المعادلات.

مثال (٣)

استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام $\begin{cases} ٢س + ٣ص = ٣ \\ ٣س - ٥ص = ١٤ \end{cases}$

الحل: ٢س + ٣ص = ٣ ①

٣س - ٥ص = ١٤ ②

٢س + ٣ص = ٣ ... اضرب المعادلة ① في ٥ ⟵ ١٠س + ١٥ص = ١٥

٣س - ٥ص = ١٤ ... اضرب المعادلة ② في ٣ ⟵ ٩س - ١٥ص = ٤٢

اجمع

١٩س = ٥٧

س = ٣

٢س + ٣ص = ٣		اختر إحدى المعادلتين
٢(٣) + ٣ص = ٣		عوّض عن س بـ ٣ في المعادلة ١
٦ + ٣ص = ٣		
٣ص = −٣		
ص = −١		

مجموعة الحل = {(٣، −١)}

حاول أن تحل

٣ استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام
$$\begin{cases} ٢س + ٣ص = ١٢ \\ ٥س - ص = ١٣ \end{cases}$$

يمكن أيضًا حل نظام معادلتين جبريًا **بطريقة التعويض.**

حدّد قيمة أحد المتغيرين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين، وعوّض عنه بقيمته في المعادلة الثانية.

مثال (٤)

استخدم طريقة التعويض لحل النظام
$$\begin{cases} ٣م - ل = ١ \\ ٣م - ٢ل = ٥ \end{cases}$$

الحل: في المعادلة الأولى (تم اختيارها لأنها أسهل)، حدّد قيمة ل بدلالة م.

٣م − ل = ١

ل = ٣م − ١

في المعادلة الثانية عوّض عن ل بقيمتها:

٣م − ٢(٣م − ١) = ٥

٣م − ٦م + ٢ = ٥ بسّط

−٣م = ٣

م = −١

عوّض عن م بـ (−١) في ل = ٣م − ١

ل = ٣(−١) − ١

ل = −٤

حل النظام هو: م = −١، ل = −٤

حاول أن تحل

٤ حل النظام
$$\begin{cases} ت = ٢ر + ٣ \\ ٥ر - ٤ت = ٦ \end{cases}$$
مستخدمًا طريقة التعويض.

مثال (٥) **تطبيقات حياتية**

دفع محمد ٢,٨٠٠ دينار ثمن ٦ أكواب شاي وقطعتي حلوى، ودفع سالم في المكان نفسه ٥,٢٠٠ دنانير ثمن كوبين من الشاي و٦ قطع حلوى. ما سعر كوب الشاي وما سعر قطعة الحلوى؟

الحل:

ليكن ش سعر كوب الشاي، حـ سعر قطعة الحلوى

محمد	٦ أكواب شاي ٦ × ش	و +	قطعتا حلوى ٢ × حـ	دفع =	٢,٨٠٠ دينار = ٢,٨٠٠
سالم	كوبان من الشاي ٢ × ش	و +	٦ قطع حلوى ٦ × حـ	دفع =	٥,٢٠٠ دنانير = ٥,٢٠٠

لمعرفة الأسعار نحل النظام:
{ ٦ش + ٢حـ = ٢,٨٠٠
{ ٢ش + ٦حـ = ٥,٢٠٠

باستخدام أي من الطرائق التي سبق عرضها نحصل على: ش = ٠,٢٠٠ ، حـ = ٠,٨٠٠ .

أي أن سعر كوب الشاي = ٠,٢٠٠ دينار، وسعر قطعة الحلوى = ٠,٨٠٠ دينار.

حاول أن تحل

٥ وزعت ٦ كجم من المربى في ١٤ عبوة، بعض العبوات يحتوي على ٥٠٠ جم وبعضها الآخر على ٣٧٥ جم.
ما عدد العبوات من كل نوع؟

١ – ٧
حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد
Solving Quadratic Equations in One Variable

سوف تتعلم

- قانون حل المعادلات من الدرجة الثانية
- استخدام المميز Δ
- المقارنة بين المعادلة والشكل البياني للدالة من الدرجة الثانية باستخدام Δ
- مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة
- إيجاد معادلة من الدرجة الثانية إذا علم جذراها

دعنا نفكر ونتناقش

سبق أن قمت بحلّ بعض معادلات الدرجة الثانية بالتحليل، كما في المثال التالي:

حلّ المعادلة: س^2 − ٧س + ١٠ = ٠

الحل:

س^2 − ٧س + ١٠ = ٠

(س − ٢)(س − ٥) = ٠

$\therefore$ س − ٢ = ٠ أو س − ٥ = ٠

أي س = ٢ أو س = ٥

إذًا حلّ المعادلة هو س = ٢ أو س = ٥

لكن بعض المعادلات يصعب (أو لا يمكن) حلها بالتحليل.

لذلك نبحث عن طريقة أخرى هي بإكمال المربع، كما في المثال التالي:

حلّ المعادلة: س^2 + ٦س − ٥ = ٠

الحل: نأخذ المربع الكامل: (س + ص)^2 = س^2 + ٢س ص + ص^2

وبالمقارنة مع المعادلة ٢س ص = ٦س

نحصل على ص = ٣، ص^2 = ٩

وعليه، لحل المعادلة نضيف للطرفين ص^2 = ٩ لنحصل على مربع كامل.

س^2 + ٦س = ٥

س^2 + ٦س + ٩ = ٥ + ٩ بإكمال المربع للمقدار س^2 + ٦س

(س + ٣)^2 = ١٤

س + ٣ = $\pm\sqrt{١٤}$

س = −٣ + $\sqrt{١٤}$ أو س = −٣ − $\sqrt{١٤}$

إن طريقة إكمال المربع تصلح لحل أي معادلة من الدرجة الثانية.

١ – حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بإكمال المربع:
Solving Quadratic Equation by Completing the Square

إرشاد:

لإكمال المربع نضيف إلى الطرفين $(\frac{١}{٢}$ معامل س$)^2$

مثال (١)

أوجد مجموعة حلّ المعادلة: س^2 + ١٠س = −١٦ بإكمال المربع.

الحل:

نكمل س^2 + ١٠س لتصبح مربعًا كاملًا،

بإضافة ٢٥ إلى طرفي المعادلة نجد أن:

$س^٢ + ١٠س + ٢٥ = -١٦ + ٢٥$

$(س + ٥)^٢ = ٢٥ - ١٦$

$(س + ٥)^٢ = ٩$

$س + ٥ = \pm ٣$

$س = -٥ \pm ٣$ أي $س = -٢$ أو $س = -٨$ مجموعة الحل: $\{-٢، -٨\}$.

حاول أن تحل

١ حلّ المعادلة: $س^٢ - ٨س = -١٥$ بإكمال المربع.

٢- استخدام القانون لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد

Solving Quadratic Equations by Using the Quadratic Formula

تستخدم طريقة إكمال المربع لاستنتاج قانون عام لحل أي معادلة من الدرجة الثانية على الصورة: $ا س^٢ + ب س + جـ = ٠$، وذلك بأخذ مثال عددي: حلّ المعادلة: $٢س^٢ + ٦س + ١ = ٠$

المثال العددي:

$٢س^٢ + ٦س + ١ = ٠$

$س^٢ + \frac{٦}{٢}س + \frac{١}{٢} = ٠$ بالقسمة على ٢. لماذا؟

$س^٢ + ٣س = -\frac{١}{٢}$

$س^٢ + ٢\left(\frac{٣}{٢}\right)س + \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ = \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ - \frac{١}{٢}$

$\left(س + \frac{٣}{٢}\right)^٢ = \frac{٩}{٤} - \frac{١}{٢}$

$\left(س + \frac{٣}{٢}\right)^٢ = \frac{٧}{٤}$

$س + \frac{٣}{٢} = \pm\sqrt{\frac{٧}{٤}}$

$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٧}}{٢}$

الصورة العامة:

$ا س^٢ + ب س + جـ = ٠$

$س^٢ + \frac{ب}{ا}س + \frac{جـ}{ا} = ٠$ بالقسمة على ا حيث $ا \neq ٠$

$س^٢ + \frac{ب}{ا}س = -\frac{جـ}{ا}$

$س^٢ + ٢\left(\frac{ب}{٢ا}\right)س + \left(\frac{ب}{٢ا}\right)^٢ = \left(\frac{ب}{٢ا}\right)^٢ - \frac{جـ}{ا}$

$\left(س + \frac{ب}{٢ا}\right)^٢ = \frac{ب^٢}{(٢ا)^٢} - \frac{جـ}{ا}$

$\left(س + \frac{ب}{٢ا}\right)^٢ = \frac{ب^٢ - ٤اجـ}{٤ا^٢}$

$س + \frac{ب}{٢ا} = \pm\sqrt{\frac{ب^٢ - ٤اجـ}{٤ا^٢}}$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤اجـ}}{٢ا}$

من ذلك نستنتج أن:

القانون العام لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد:

حلّ المعادلة: $ا س^٢ + ب س + جـ = ٠$، حيث $ا \neq ٠$ هو: $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤اجـ}}{٢ا}$

٣- حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد باستخدام القانون:

Solving Quadratic Equation in one Variable Using Formula

مثال (٢)

حلّ المعادلة: $س^٢ + ١٠س = -١٦$ باستخدام القانون.

ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام التحليل.

الحل:

$س^٢ + ١٠س + ١٦ = ٠$ بوضع المعادلة على الصورة العامة

بمقارنة ذلك بالصورة العامة

$أس^٢ + ب س + جـ = ٠$

$أ = ١$، $ب = ١٠$، $جـ = ١٦$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} \quad (١)$$

$ب^٢ - ٤أجـ = (١٠)^٢ - ٤ \times ١ \times ١٦ = ٣٦$

$\sqrt{ب^٢ - ٤أجـ} = ٦$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{-١٠ \pm ٦}{٢ \times ١}$$ بالتعويض في القانون

$س = \frac{-١٠ + ٦}{٢}$ أو $س = \frac{-١٠ - ٦}{٢}$

$س = \frac{-٤}{٢}$ أو $س = \frac{-١٦}{٢}$

$س = -٢$ أو $س = -٨$

وهو ما حصلنا عليه في المثال (١) باستخدام إكمال المربع.

وإذا استخدمنا التحليل نصل إلى النتيجة نفسها (حاول ذلك بنفسك).

حاول أن تحل

٢ باستخدام القانون، أوجد مجموعة حل المعادلة:

أ $س^٢ - ٦س + ٥ = ٠$

ب $س(س - ٢) = ٧$

مثال (٣)

حلّ المعادلة: $٢س^٢ + ٤س - ٧ = ٠$

الحل: $أ = ٢$ ، $ب = ٤$ ، $جـ = -٧$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$$ حيث $\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ} = ٤^{٢} - ٤(٢)(-٧) = ١٦ + ٥٦ = ٧٢$

$$\text{س} = \frac{-٤ \pm \sqrt{٧٢}}{٤} = \frac{-٤ \pm ٦\sqrt{٢}}{٤} = \frac{-٢ \pm ٣\sqrt{٢}}{٢}$$

$$\text{س} = \frac{-٢ + ٣\sqrt{٢}}{٢} \simeq ١,١٢١٣ \quad \text{أو} \quad \text{س} = \frac{-٢ - ٣\sqrt{٢}}{٢} \simeq -٣,١٢١٣$$

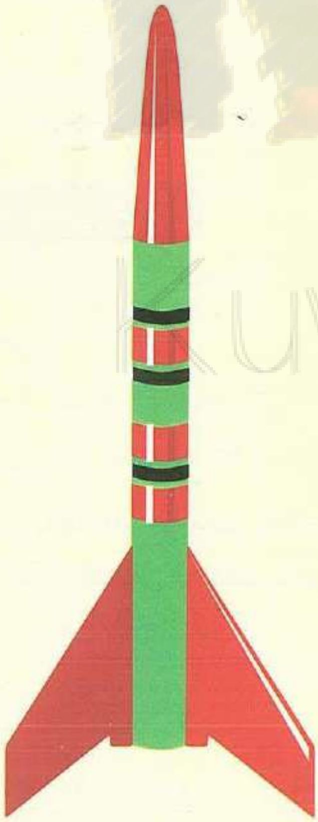
حاول أن تحل

٣ أوجد مجموعة حلّ المعادلة: $٤\text{س}^{٢} = ١٣\text{س} - ٩$

مثال (٤) **تطبيقات حياتية**

حركة الصواريخ: قامت جمعية للعلوم بصنع نموذج صاروخ، وتم إطلاقه رأسيًا من سطح الأرض بسرعة ٣٠ مترًا/ ثانية. بعد كم ثانية يصل الصاروخ إلى ارتفاع ٤٠ مترًا؟ علمًا بأن العلاقة بين الارتفاع (ف) بالمتر، والزمن (ن) بالثانية، وسرعة الإطلاق (س) بالمتر/ ثانية، والارتفاع (ف.) الذي أطلق منه بالمتر تعطى بالعلاقة:

$\text{ف} = -٥\text{ن}^{٢} + \text{س ن} + \text{ف}_{٠}$ (١)



الحل: بالتعويض في (١) عن ف، س،

حيث $\text{ف}_{٠} = ٠$ (لأنه أطلق من سطح الأرض) نجد أن:

$-٥\text{ن}^{٢} + ٣٠\text{ن} = ٤٠$ (٢)

$-٥\text{ن}^{٢} + ٣٠\text{ن} - ٤٠ = ٠$

$\text{أ} = -٥،\ \text{ب} = ٣٠،\ \text{جـ} = -٤٠$

$$\text{ن} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$$ حيث $\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ} = (٣٠)^{٢} - ٤(-٥)(-٤٠)$

$= ٩٠٠ - ٨٠٠ = ١٠٠$

$\sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}} = ١٠$

$$\text{ن} = \frac{-٣٠ \pm ١٠}{٢(-٥)}$$

$$\text{ن} = \frac{-٣٠ + ١٠}{-١٠} = ٢ \quad \text{أو} \quad \text{ن} = \frac{-٣٠ - ١٠}{-١٠} = ٤$$

يكون الصاروخ على ارتفاع ٤٠ مترًا من نقطة إطلاقه بعد ثانيتين (٢ ثانية) عند صعوده وبعد ٤ ثوانٍ من الانطلاق عند نزوله.

حاول أن تحل

٤ قذفت رصاصة عموديًا إلى أعلى بسرعة ٤٠ مترًا/ ثانية. أوجد الزمن (ن ثانية) الذي تستغرقه الرصاصة كي تصل إلى ارتفاع ٨٠ مترًا علمًا أن العلاقة بين الزمن (ن) والارتفاع (ف) والسرعة (ع) هي:

ف = −٥ن^{٢} + ع ن، ع = السرعة بالمتر/ ث.

٤- استخدام المميز Δ: Using the Discriminant

من القانون العام لحل المعادلة: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ حيث أ ≠ ٠

تكون الصورة العامة لجذري المعادلة كالتالي:

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} + \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}} \quad \text{أو س} = \frac{-\text{ب} - \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$$

يسمى Δ = ب^{٢} − ٤أجـ **المميز**، وقد يكون الناتج عددًا موجبًا أو صفرًا أو عددًا سالبًا لأنه يميّز لنا **نوع جذري** المعادلة من حيث كونهما: **عددين حقيقيين مختلفين، إذا كان المميز موجبًا**

أو عددين حقيقيين متساويين، إذا كان المميز يساوي صفرًا

أو عددين غير حقيقيين، إذا كان المميز سالبًا.

ويتضح ذلك من الأمثلة التالية:

مثال (٥)

حدد نوع جذري المعادلة: س^{٢} + ٢س − ٣ = ٠ وتحقق من نوع الجذرين جبريًا باستخدام القانون وبيانيًا.

الحل:

أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = −٣

المميز: Δ = ب^{٢} − ٤أجـ = (٢)^{٢} − ٤(١)(−٣) = ٤ + ١٢ = ١٦

وحيث إنه عدد موجب، إذًا الجذران هما عددان حقيقيان مختلفان.

• يمكن التحقق من ذلك بحل المعادلة جبريًا:

س^{٢} + ٢س − ٣ = ٠

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}}$$

$$\text{س} = \frac{-٢ \pm \sqrt{١٦}}{٢} = \frac{-٢ \pm ٤}{٢}$$

س = +١ أو س = −٣

ومن الواضح أن الجذرين عددان حقيقيان مختلفان.

معلومة مفيدة:

عند رسم بيان

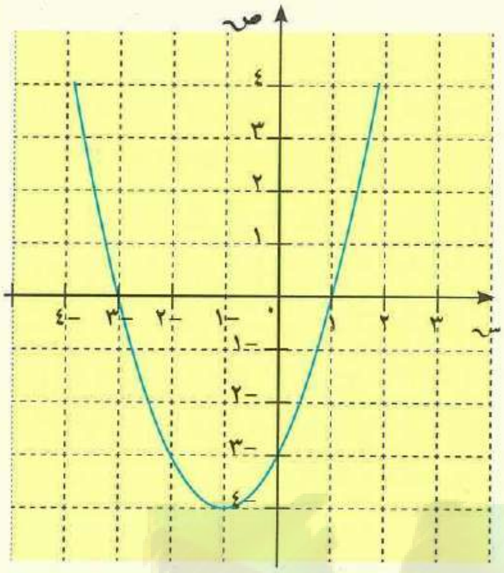
ص = أس^{٢} + ب س + جـ

حيث أ ≠ ٠، يكون رأس المنحنى

عند س = $\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}$

التحقق بيانيًا:

س	‐٣	‐٢	‐١	٠	١	٢
ص	٠	‐٣	‐٤	‐٣	٠	٥



يبيّن الرسم البياني نقطتي تقاطع مع محور السينات. مربع كامل

تكتب المعادلة س^{٢} + ٢س ‐ ٣ = ٠ على الصورة (س + ١)^{٢} ‐ ٤ = ٠

∴ بيان الدالة ص = س^{٢} + ٢س ‐ ٣ هو انسحاب لدالة المرجع ص = س^{٢} وحدة واحدة جهة اليسار، ٤ وحدات إلى الأسفل.

حاول أن تحل

٥ حدد نوع جذري المعادلة: ٢س^{٢} ‐ ٥س + ٢ = ٠، تحقق من الحل جبريًا وبيانيًا.

مثال (٦)

أوجد نوع جذري المعادلة: ٤س^{٢} + ٤س + ١ = ٠. وتحقق من نوع الجذرين جبريًا باستخدام القانون وبيانيًا.

الحل: أ = ٤، ب = ٤، جـ = ١

المميز: Δ = ب^{٢} ‐ ٤أجـ = (٤)^{٢} ‐ ٤ × ٤ × ١ = ١٦ ‐ ١٦ = ٠

وحيث إن المميز يساوي صفرًا، فالجذران حقيقيان ومتساويان

وللتحقق من ذلك جبريًا:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-٤ \pm ٠}{٢ \times ٤}$$

$$س = \frac{-٤ + ٠}{٨} = -\frac{١}{٢}$$

أو $س = \frac{-٤ - ٠}{٨} = -\frac{١}{٢}$

أي أن الجذرين متساويان وكل منهما يساوي $-\frac{١}{٢}$

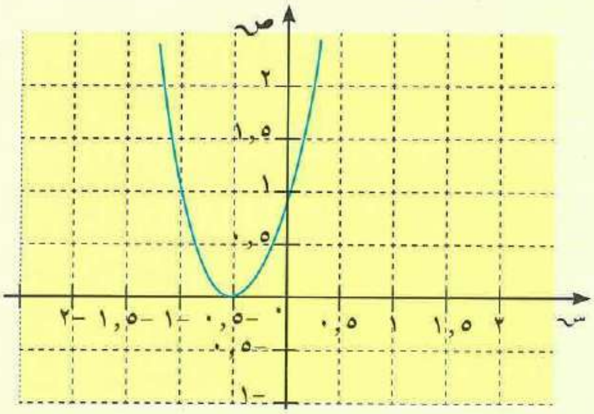
التحقق بيانيًا:

س	١	٠	‐٠,٥	‐١	‐٢
ص	٩	١	٠	١	٩

يبيّن الرسم البياني نقطة تقاطع واحدة مع محور السينات.

معلومة مفيدة:

لحل معادلة تربيعية باستخدام الحاسبة نضغط على MODE ، EQN ثم QUAD أو $ax^2 + bx + c = 0$. يظهر على الشاشة [a b c] نعوّض بقيم أ، ب، جـ متبوعة كل مرة بالضغط على = فيظهر الجذران تباعًا.



حاول أن تحل

٦ حدد نوع جذري المعادلة: س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٠، تحقق من الحل بيانيًا.

مثال (٧)

حدد نوع جذري المعادلة: س^{٢} + ٢س + ٥ = ٠، وتحقق من الحل بيانيًا.

الحل:

أ = ١، ب = ٢، جـ = ٥

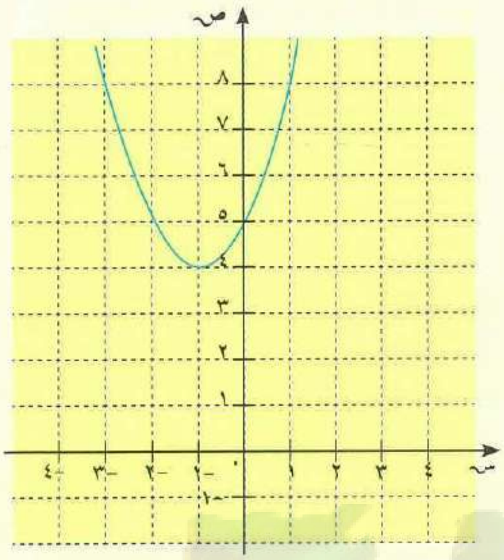
المميز: Δ = ب^{٢} − ٤أجـ = (٢)^{٢} − ٤(١)(٥)

= ٤ − ٢٠ = −١٦ وهذا عدد سالب

إذًا الجذران تخيليان (أي غير حقيقيين) لأن $\sqrt{-١٦}$ ليس عددًا حقيقيًا.

التحقق بيانيًا:

س	١	٠	−١	−٢	−٣
ص	٨	٥	٤	٥	٨

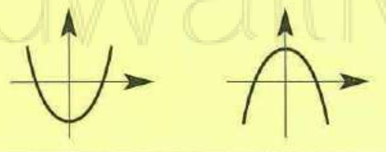
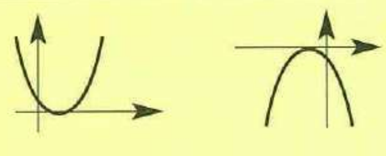
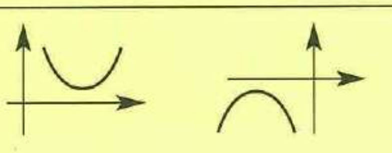


يبيّن الرسم البياني أنه لا يوجد نقاط تقاطع مع محور السينات.

حاول أن تحل

٧ حدد نوع جذري المعادلة: س^{٢} − ٥س + ٧ = ٠، وتحقق من الحل بيانيًا.

تعميم

المميز	نوع جذري المعادلة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، أ ≠ ٠	التمثيل البياني للدالة ص = أس^{٢} + ب س + جـ حيث أ ≠ ٠
ب^{٢} − ٤أجـ > ٠ (عدد موجب)	الجذران حقيقيان (مختلفان)	
ب^{٢} − ٤أجـ = ٠	الجذران حقيقيان متساويان	
ب^{٢} − ٤أجـ < ٠ (عدد سالب)	جذران غير حقيقيين	

اكتب أمثلة من عندك عن معادلات من الدرجة الثانية توضح الأنواع الثلاثة للمعادلات (من حيث جذرا المعادلة) المبيّنة في الجدول المجاور.

١ إذا كانت إشارة معامل س^{٢} موجبة يكون المنحنى بالشكل ∪.

٢ إذا كانت إشارة معامل س^{٢} سالبة يكون المنحنى بالشكل ∩.

٥- مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة التربيعية:

Sum and Product of Roots of a Quadratic Equation

تنبيه:
المعادلة التربيعية هي معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد.

اعتبر المعادلة: $أس^٢ + ب س + جـ = ٠ ، أ \neq ٠$

جذرا المعادلة هما: $س = \frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ أو $س = \frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

مجموع جذري المعادلة: $\frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} + \frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

$$= \frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ} + (-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ})}{٢أ} = \frac{-٢ب}{٢أ} = \frac{-ب}{أ}$$

ناتج ضرب الجذرين: $\left(\frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}\right) \times \left(\frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}\right) = \frac{ب^٢ - (ب^٢ - ٤أجـ)}{٤أ^٢} = \frac{٤أجـ}{٤أ^٢} = \frac{جـ}{أ}$

أي أن:

إذا كان جذرا المعادلة: $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ هما م، ن
فإن: $م + ن = -\frac{ب}{أ}$ ، $م \times ن = \frac{جـ}{أ}$

٦- إيجاد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة:

Finding Sum and Product of Roots of a Quadratic Equation

مثال (٨)

بدون حل المعادلة، أوجد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة: $٣س^٢ + ٢س - ٣ = ٠$ إذا وجدا.

الحل: $أ = ٣$، $ب = ٢$، $جـ = -٣$

$\Delta = ب^٢ - ٤أجـ = ٤٠ > ٠$

لمّا كان المميز موجبًا إذًا يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

مجموع الجذرين: $م + ن = -\frac{ب}{أ} = -\frac{٢}{٣}$

ناتج ضرب الجذرين: $م ن = \frac{جـ}{أ} = \frac{-٣}{٣} = -١$

ويمكن التحقق من صحة النتائج بحل المعادلة.

حاول أن تحل

٨ بدون حلّ المعادلة، أوجد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة: $٤س^٢ - ٩س + ٣ = ٠$ إذا وجدا.

مثال (٩)

إذا كان مجموع جذري المعادلة: $٢س^٢ + ب س - ٥ = ٠$ يساوي ١ . فأوجد قيمة ب، ثم حلّ المعادلة.

الحل:

مجموع جذري المعادلة: $م + ن = -\frac{ب}{أ} = -\frac{ب}{٢} = ١$، $ب = -٢$

المعادلة: $٢س^٢ + ب س - ٥ = ٠$ تصبح: $٢س^٢ - ٢س - ٥ = ٠$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$$

$$\Delta = ب^٢ - ٤أجـ = ٤ - ٤(٢)(-٥) = ٤٤$$

$$س = \frac{-(-٢) \pm ٢\sqrt{١١}}{٢ \times ٢}$$

$$س = \frac{١ \pm \sqrt{١١}}{٢}$$

إذًا الجذران هما: $\frac{١ - \sqrt{١١}}{٢}$ أو $\frac{١ + \sqrt{١١}}{٢}$

فكر معي:

إذا كان أ، جـ مختلفي الإشارة في المعادلة: $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ فإن للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان.

حاول أن تحل

٩ إذا كان ناتج ضرب جذري المعادلة: $أس^٢ - ٥س + ٢ = ٠$ يساوي $\frac{٢}{٣}$. فأوجد قيمة أ، ثم حلّ المعادلة.

٧- إيجاد المعادلة التربيعية إذا علم جذراها:

Finding the Quadratic Equation Knowing its Roots

لتكن المعادلة: $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$، $أ \neq ٠$ وليكن جذراها م ، ن

$$س^٢ + \frac{ب}{أ} س + \frac{جـ}{أ} = ٠$$

وحيث إن $م + ن = -\frac{ب}{أ}$ ، $م ن = \frac{جـ}{أ}$

إذًا **المعادلة على الصورة: $س^٢ - (م + ن)س + م ن = ٠$**

هي معادلة بمعلومية مجموع الجذرين وناتج ضربهما.

طريقة أخرى:

ليكن م، ن جذري المعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد

$\therefore$ المعادلة تكون على الصورة: $(س - م)(س - ن) = ٠$

$\therefore$ $س^٢ - (م + ن) س + م ن = ٠$

مثال (١٠)

أوجد معادلة تربيعية جذراها ٣، ٥.

الحل:

بما أن الجذرين هما: ٣، ٥.

∴ المعادلة التربيعية على الصورة: س^{٢} − (مجموع الجذرين) س + (ناتج ضرب الجذرين) = ٠

أي س^{٢} − ٨س + ١٥ = ٠

أو حلّ آخر: المعادلة على الصورة: (س − ٣)(س − ٥) = ٠

أي س^{٢} − ٨س + ١٥ = ٠

حاول أن تحل

١٠ إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} − ٥س + ٦ = ٠ هما ل، م فكوّن معادلة تربيعية جذراها ٢ل، ٢م.

حالة عامة: General Case

يوجد عدد لا نهائي من المعادلات يكون جذرا كلّ منها م، ن

وكلّ منها على الصورة: ك[س^{٢} − (م + ن)س + م ن] = ٠

حيث (ك) أي عدد حقيقي ≠ صفرًا.

مثال (١١)

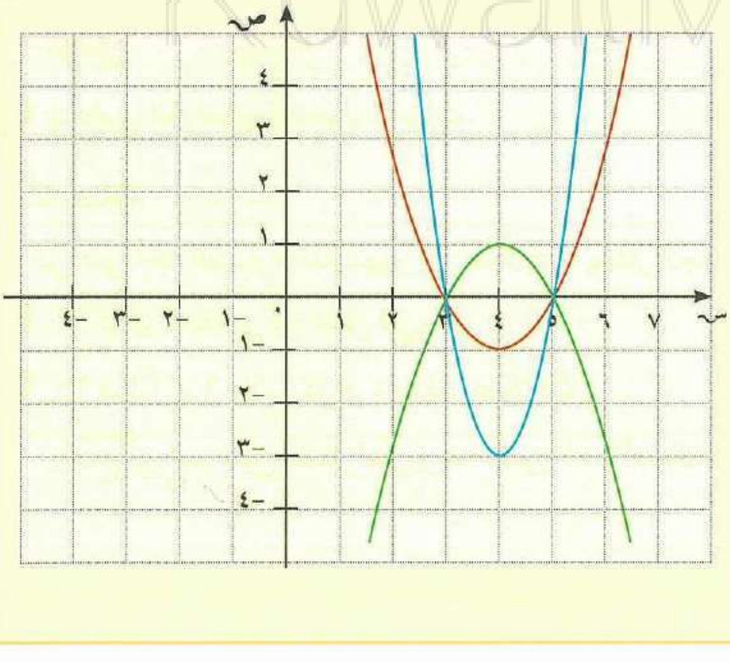
أوجد ثلاث معادلات تربيعية جذرا كل منها ٣، ٥.

الحل:

س^{٢} − ٨س + ١٥ = ٠ لماذا؟

٣(س^{٢} − ٨س + ١٥) = ٠

−(س^{٢} − ٨س + ١٥) = ٠ وهكذا (انظر الشكل المقابل).



حاول أن تحل

١١ أوجد معادلتين تربيعيتين جذرا كل منهما: −٤، −٣.

المرشد لحل المسائل

عرض مدير أحد المنتجعات الأسعار التالية خلال الموسم.

العرض أ: يدفع الشخص ٦,٥٠٠ دنانير كل مرة يدخل المنتجع.

العرض ب: يدفع الشخص ٢٨ دينارًا ثم ٣ دنانير كل مرة يدخل المنتجع.

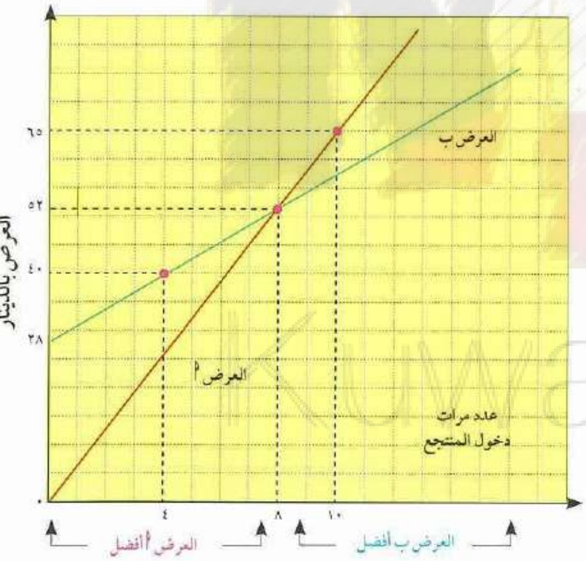
يحاول يوسف معرفة أي من العرضين أفضل.

بدأ يوسف بنمذجة العرضين.

العرض أ: ص = ٦,٥٠٠ س حيث س عدد مرات دخول المنتجع، ص مجموع ما سيدفعه.

العرض ب: ص = ٢٨ + ٣س.

فكّر يوسف: إذا حللت نظام المعادلتين $\begin{cases} \text{ص} = ٦,٥٠٠\ \text{س} \\ \text{ص} = ٢٨ + ٣\text{س} \end{cases}$ أحصل على س = ٨، ص = ٥٢ أي أن العرضين يتساويان إذ دخلت ٨ مرات إلى المنتجع.



لكن يوسف لم يكتف بهذه النتيجة لأنه يريد أن يعرف بشكل عام ودون تحديد عدد مرات الدخول أي العرضين أفضل. لذلك استخدم حاسوبه ومثل بيانيًا المعادلتين.

ما استنتجه يوسف:

١ لمن يريد الدخول أقل من ٨ مرات إلى المنتجع العرض أ هو أفضل.

٢ لمن يريد الدخول أكثر من ٨ مرات إلى المنتجع العرض ب هو أفضل.

٣ يتساوى العرضان بالدخول ٨ مرّات.

مسألة إضافية

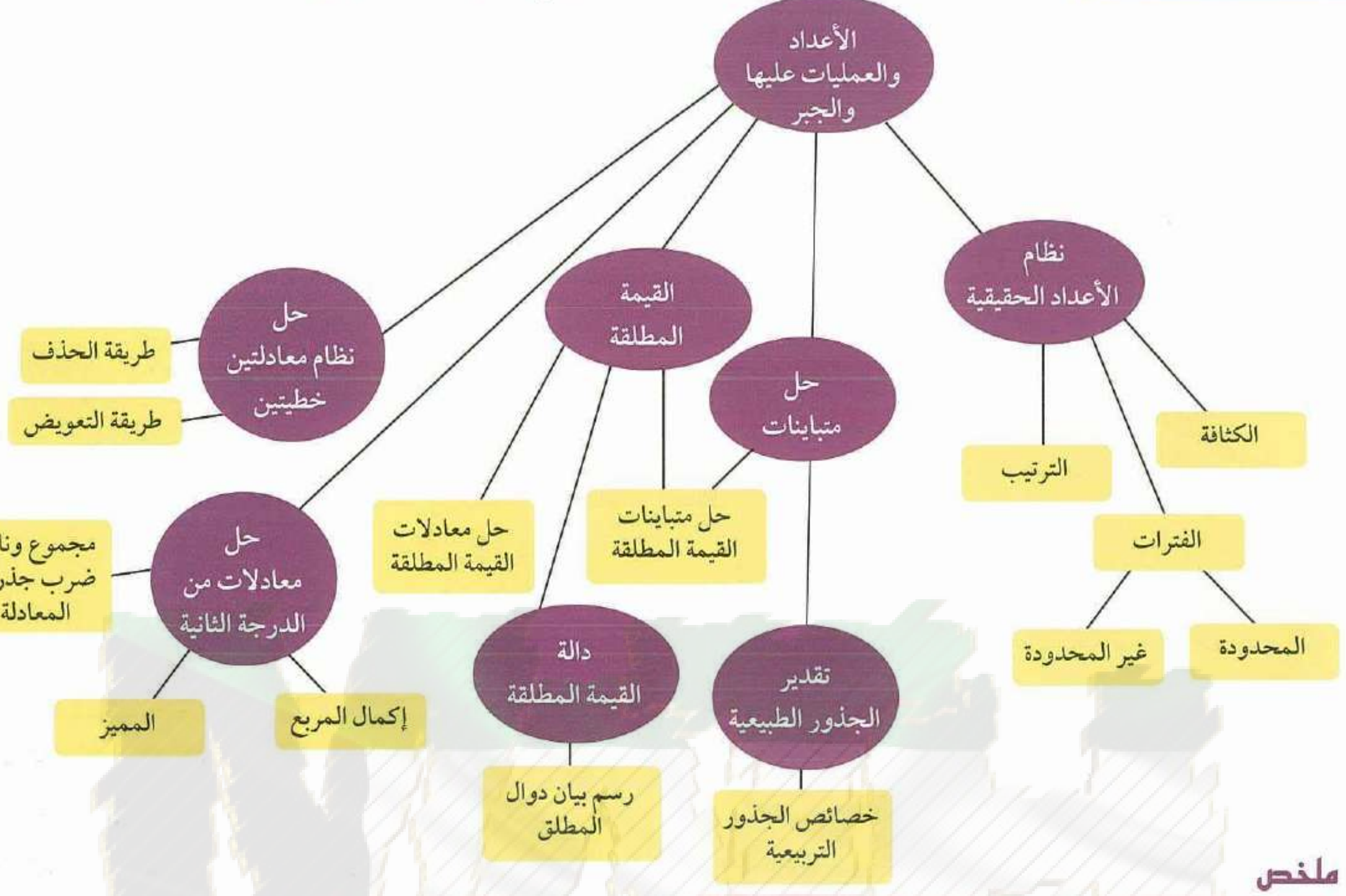
يعرض على أحد المسارح للجمهور ١٢ عملًا فنيًا. يختار الجمهور أحد العرضين:

أ ١٠ دنانير لحضور كل عمل فني.

ب ٢٠ دينارًا ثم ٦ دنانير كل مرة يحضر عملًا فنيًا.

وضّح أي العرضين أفضل لمن يريد حضور ٤، ٦ أعمال فنية.

مخطط تنظيمي للوحدة الأولى



ملخص

- يوجد بين أي عددين حقيقيين مختلفين عدد لانهائي من الأعداد الحقيقية. مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة مرتبة.
- لأي عددين حقيقيين أ، ب تعبير واحد فقط مما يلي هو صحيح: أ > ب أو أ = ب أو أ < ب.
- العدد أ هو جذر تربيعي العدد ب عندما $\text{أ}^{2} = \text{ب}$
- لأي عددين حقيقيين غير سالبين أ، ب: $\sqrt{\text{أب}} = \sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{ب}}$، $\sqrt{\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \dfrac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{ب}}}$ حيث ب $\neq$ ٠
- القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي س هي:

$$|\text{س}| = \begin{cases} \text{س إذا كان س} > ٠ \\ -\text{س إذا كان س} < ٠ \\ ٠ \text{ إذا كان س} = ٠ \end{cases}$$

- $|\text{أ}| \geq ٠$، $|-\text{أ}| = |\text{أ}|$ لأي عدد حقيقي أ.
- $|\text{أ} \times \text{ب}| = |\text{أ}| \times |\text{ب}|$، $\left|\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}\right| = \dfrac{|\text{أ}|}{|\text{ب}|}$ حيث ب $\neq$ ٠ (أ، ب عددان حقيقيان).
- الرسم البياني للدالة ص = |س + ل| حيث ل $\in$ $ح_{+}$ هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = |س|، ل وحدة إلى جهة اليسار.
- الرسم البياني للدالة ص = |س − ل| حيث ل $\in$ $ح_{+}$ هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = |س|، ل وحدة إلى جهة اليمين.
- الرسم البياني للدالة ص = |س + ل| − ك هو انسحاب أفقي ورأسي معًا لرسم الدالة ص = |س|.
- المميز: $\Delta = \text{ب}^{2} - ٤\text{أجـ}$
- حل المعادلة $\text{أس}^{2} + \text{ب س} + \text{جـ} = ٠$ هو $\text{س} = \dfrac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{2} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$
- إذا كان م، ن جذري المعادلة التربيعية، فإن $\text{م} + \text{ن} = -\dfrac{\text{ب}}{\text{أ}}$، $\text{م} \times \text{ن} = \dfrac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ وتكتب المعادلة على الصورة:
$\text{س}^{2} - (\text{م} + \text{ن})\text{ س} + \text{م} \times \text{ن} = ٠$