الوحدة العاشرة

الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء)

Space Geometry

مشروع الوحدة: المجسمات

1 **مقدمة المشروع:** ما أنواع الأشكال ثلاثية الأبعاد التي تشاهدها كل يوم؟ بينما تسير داخل أحد المحلات التجارية الكبرى ترى العديد من العلب والعبوات... معروضة على الرفوف. يمكنك وصف العديد من الأشكال في الفضاء على أنها أهرامات أو أسطوانات أو مخاريط أو مناشير. يأخذ المصنعون بالاعتبار العديد من العوامل قبل اعتماد الشكل الملائم للمنتج.

2 **الهدف:** تصميم مجسمات متعددة السطوح وصنعها وفق شروط معينة.

3 **اللوازم:** ورق مقوى (كرتون)، شريط لاصق، مقص، مسطرة.

4 **أسئلة حول التطبيق:**

a على ورقة مقواة، ارسم نسختين من الشبكة المقابلة. كل الأشكال هي مضلعات خماسية منتظمة متطابقة. اطو كل شبكة وفق الخطوط المنقطة. ألصق الأضلاع المتلاصقة بالشريط اللاصق. ثم طبق الشبكتين على بعضهما بعضًا وألصقهما.

ما الشكل الذي حصلت عليه؟

b خذ علبة على شكل شبه مكعب أو أسطوانة. أوجد مساحتها الكلية. قصّها حول أحد حروفها وسطحها.

ما مساحة الورق المقوى غير المستخدم الذي قصصته من العلبة؟

ما نسبة مساحة الورق المقوى غير المستخدم (المهدور) إلى مساحة السطح؟

c انسخ الجدول التالي وأكمله لأربعة أشباه مكعبات حجم كل منها $216\ cm^3$.

الطول (cm)	العرض (cm)	الارتفاع (cm)	الحجم (cm^3)	المساحة الكلية (cm^2)	الحجم : المساحة الكلية
6	6	■	216	■	■ : ■
■	■	■	216	■	■ : ■

أي نسبة تختارها لتحصل على أقل تكلفة ممكنة؟

d خذ بعض علب رقائق الذرة للأطفال. ما النسبة بين الحجم والمساحة الكلية؟ كيف تفسر ذلك؟

5 **التقرير:** اكتب تقريرًا مفصلًا يبيّن خطوات العمل الذي قمت به ويجيب عن الأسئلة المطروحة.

أرفق التقرير بملصق يبيّن الجدول في الفقرة c واعرض المجسم الذي حصلت عليه في الفقرة a .

دروس الوحدة

المستقيمات والمستويات في الفضاء	المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء	تعامد مستقيم مع مستو	الزاوية الزوجية	المستويات المتعامدة
10–1	10–2	10–3	10–4	10–5

الوحدة العاشرة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت الأشكال الهندسية المستوية.
- تعلمت إيجاد مساحة بعض الأشكال المستوية مثل المثلثات وبعض المضلعات الرباعية والمضلعات المنتظمة.
- تعلمت العلاقة بين محيطات الأشكال المتشابهة والعلاقة بين مساحاتها.

ماذا سوف تتعلم؟

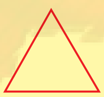
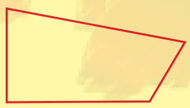
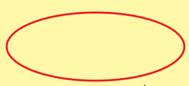
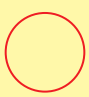
- ميزات الأشكال ثلاثية الأبعاد.
- المسلمات الرياضية للنقطة والمستقيم والمستوي.
- أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء.
- إيجاد قياس مختلف أنواع الزوايا.

المصطلحات الأساسية

هندسة الفضاء – ثلاثية الأبعاد – المسلمات – مستقيمان متخالفان – المستقيم العمودي – المستقيم المائل – زاوية زوجية – حافة الزاوية الزوجية – وجه الزاوية الزوجية – الزاوية المستوية – مستويات متعامدة

أضف إلى معلوماتك

إن دراسة الأشكال ثلاثية الأبعاد تسمى «الهندسة الفراغية أو هندسة الفضاء». للأشكال ثنائية الأبعاد ما يماثلها في الفراغ ثلاثي الأبعاد.

أشكال ثنائية الأبعاد	أشكال ثلاثية الأبعاد
مضلعات  مثلث Triangle  رباعي Quadrilateral	**لها أسطح مستوية**  هرم Pyramid  منشور Prism
منحنيات  قطع ناقص Ellipse  دائرة Circle	**لها أسطح منحنية**  كرة Sphere  مخروط Cone  أسطوانة Cylinder

10-1

المستقيمات والمستويات في الفضاء

Lines and Planes in Space

سوف تتعلم

- المسلمات الرياضية للنقطة والمستقيم والمستوي.
- المستقيمات والمستويات في الفضاء.

المفردات والمصطلحات:

- هندسة الفضاء
Space Geometry
- ثلاثية الأبعاد
Three-Dimensional
- مسلمة Postulate
- نقطة Point
- مستقيم Straight Line
- مستوي Plane
- مستقيمان متخالفان
Two Skew Lines
- مستقيمان متقاطعان
Two Intersecting Lines
- مستقيمان متوازيان
Two Parallel Lines

معلومة:

سوف نستخدم الحروف الكبيرة مثل A, B, C للدلالة على النقاط والحروف الصغيرة مثل l, m, h للدلالة على المستقيمات.
ونكتب المستقيم l أو $\overleftrightarrow{l}$.

معلومة:

وحيد تعني واحد وواحد فقط.

دعنا نفكر ونتناقش

الصورة المقابلة هي لأحد مجمعات دولة الكويت. حدّد في الصورة:

a نقطة، مستقيم، مستوي.

b مستقيمان متوازيان، مستقيمان متقاطعان، مستقيمان متخالفان.

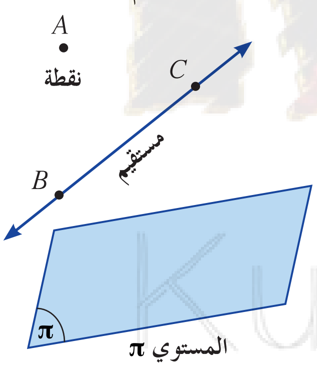
c زاوية (حدّد نوعها إن أمكن).

d سطح غير مستو.

النقطة والمستقيم والمستوي في الفضاء

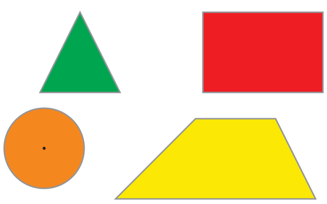
Point, Straight Line and Plane in Space

استخدمت في دراستك السابقة بعض المسميات الأولية مثل النقطة، المستقيم، المستوي وذلك لتعريف بعض المفاهيم أو وصف أشياء معينة.

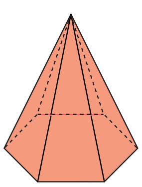


وعلمت أن المستوي هو سطح يمتد إلى ما لا نهاية في جميع الاتجاهات مثل سطح الطاولة أو سطح السبورة وغيرها.

يمثل المستوي هندسيًّا بشكل رباعي أو أي منحنى مغلق (غالبًا ما يكون متوازي أضلاع) ويرمز له بالرمز π أو بثلاث نقاط على هذا المستوي ليست على استقامة واحدة A, B, C مثلًا ويرمز إليه بالرمز (ABC). يضم المستوي مجموعة غير منتهية من النقاط. الأشكال المستوية مثل المثلث، المستطيل، شبه المنحرف، الدائرة وغيرها هي أشكال **ذات بعدين**.



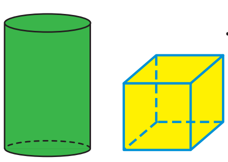
كذلك سبق لك دراسة بعض المجسمات مثل المكعب، المنشور، الهرم، الأسطوانة، المخروط، الكرة وغيرها وهذه المجسمات تشغل حيزًا من الفراغ وتوصف بأنها أشكال هندسية ذات **ثلاثة أبعاد** (ثلاثية الأبعاد).



لذلك تسمى أشكال الفراغ الثلاثي.

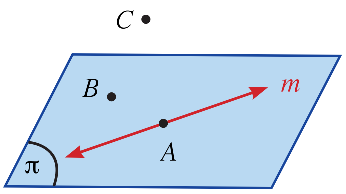
تهتم الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء) بدراسة:

- الأشكال الهندسية ثلاثية الأبعاد.
- تقاطع المستقيمات، تقاطع المستويات وتقاطع المستقيمات والمستويات.
- الحجوم.
- مساحات الأسطح.



وذلك وفق قوانين ونظريات مثبتة.

وكما أن المستقيم مجموعة غير منتهية من النقاط، والمستوي مجموعة غير منتهية من النقاط فالفضاء أيضًا مجموعة غير منتهية من النقاط ويرمز له بالرمز (S) وتكون الخطوط والمستقيمات والمستويات والسطوح والأجسام مجموعات جزئية من الفضاء (S).



في الشكل المجاور، النقطتان A, B تنتميان إلى المستوي π

ونكتب: $B \in \pi$ ،$A \in \pi$ بينما C نقطة خارج المستوي أي أن $C \notin \pi$

كذلك $A \in \overleftrightarrow{m}\ ,\ B \notin \overleftrightarrow{m}$

(المستقيم m) موجود داخل المستوي π أي أنه محتوى في المستوي π

ونكتب: $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$

ونقول أيضًا إن المستوي π يحوي $\overleftrightarrow{m}$

مسلمات (موضوعات) الفضاء Space Postulates

يرتكز بناء علم الهندسة على مجموعة من النظريات الهندسية التي يتم إثباتها انطلاقًا من التسليم بصحة عبارات رياضية أولية نقبلها دون برهان تسمى «المسلمات» أو «الموضوعات» ومنها:

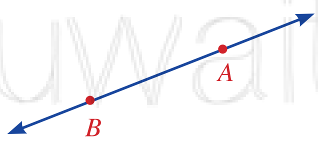
a

(i) أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد (واحد فقط).

(ii) كل مستقيم يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين.

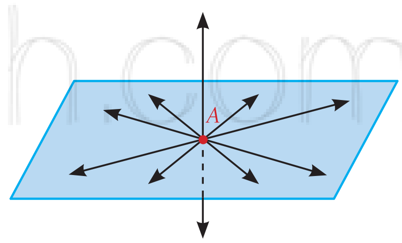
(iii) من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بالنقطة ويوازي المستقيم المعلوم.

أي نقطة يمر بها عدد لا نهائي من المستقيمات في المستوي أو في الفضاء. ولكن أي نقطتين مختلفتين يمر بهما مستقيم وحيد لذلك يعيّن المستقيم بنقطتين مختلفتين.



نقطتان مختلفتان

مستقيم واحد فقط

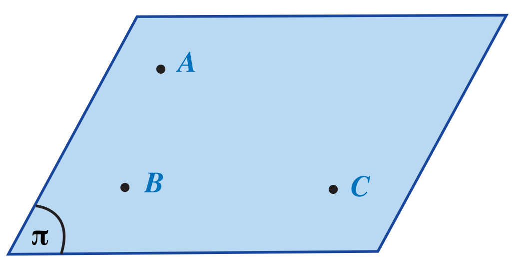


نقطة واحدة

عدد لا نهائي من المستقيمات

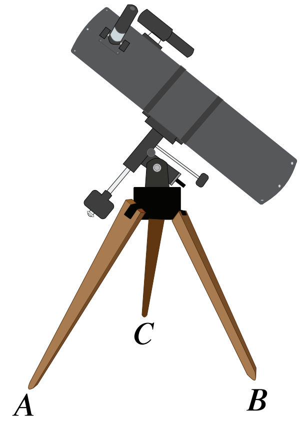
b

(i) في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.



A, B, C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

(ii) أي ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يحويها مستوٍ وحيد.

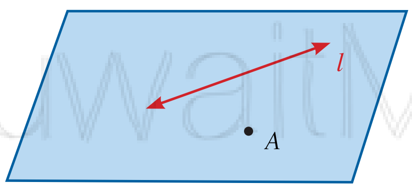


الحامل الثلاثي مستقر على المستوي الذي
يحوي الأطراف الثلاثة: A, B, C

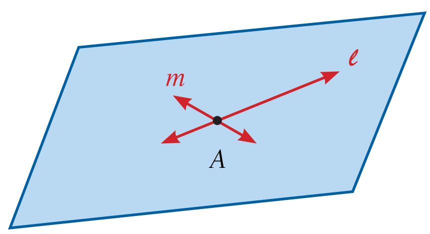
حالات تعيين المستوي في الفضاء

- أي ثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة تعيّن مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويًا واحدًا فقط.

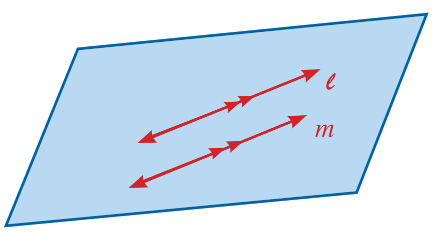
ثلاث نقاط غير مستقيمة



مستقيم ونقطة خارجة عنه

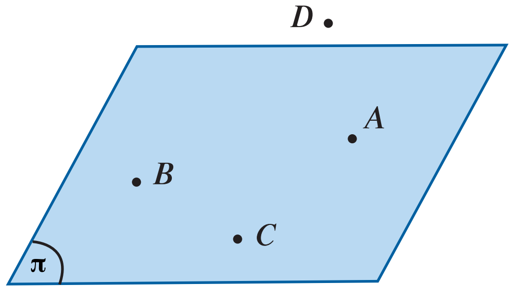


مستقيمان متقاطعان



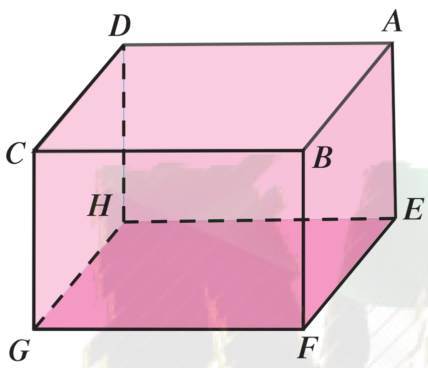
مستقيمان متوازيان

c يحوي الفضاء على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية.



النقاط A, B, C, D لا تقع في مستوٍ واحد

تدريب (1)



في الشكل المقابل شبه مكعب. أكمل:

a المستوي $ABCD$ يتعين بالمستقيمين المتوازيين .... ، ....

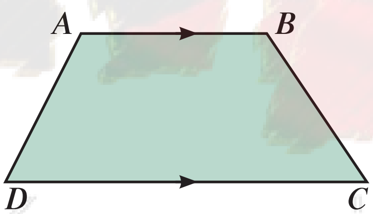
b المستوي HFG يتعين بالمستقيمين المتقاطعين .... ، ....

c المستوي $DBFH$ يتعين بالمستقيمين .... ، .... المتوازيين.

d المستوي $AEHD$ يتعين بالمستقيم .... والنقطة ....

e المستوي ABC، هو نفس المستوي .... أو ....

مثال (1)



أثبت أن أضلاع أي شبه منحرف تقع جميعها في مستوٍ واحد.

الحل:

المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ تقع جميعها في مستوٍ واحد.

البرهان:

$\because \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{DC}$ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن π

$\because$ النقطتين A , D تنتميان إلى المستوي π

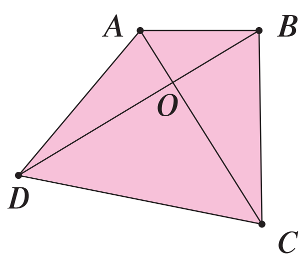
$\therefore \overline{AD} \subset \pi$

$\because$ النقطتين B , C تنتميان إلى المستوي π

$\therefore \overline{BC} \subset \pi$

$\therefore$ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ تقع في مستوٍ واحد.

حاول أن تحل



1 في الشكل المقابل $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ يتقاطعان في O

أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد.

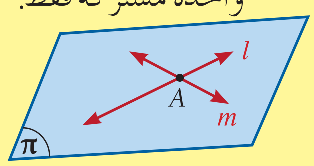
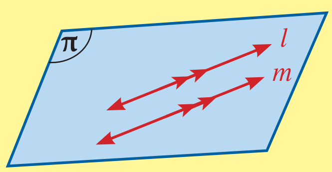
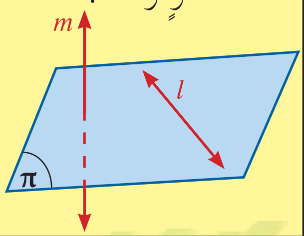
أوضاع المستقيمات في الفضاء Positions of Lines in Space

l, m مستقيمان مختلفان في الفضاء.

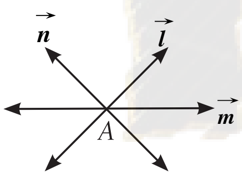
في الهندسة المستوية يكون مستقيمان متوازيين أو متقاطعين.

أما في الهندسة الثلاثية الأبعاد فهناك **ثلاثة أوضاع: متقاطعان أو متوازيان أو متخالفان.**

يقال لمستقيمين مختلفين في الفضاء أنهما:

a متقاطعان	b متوازيان	c متخالفان
إذا وقعا في مستوٍ واحد وكان بينهما نقطة واحدة مشتركة فقط. 	إذا وقعا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين. 	إذا كان لا يحويهما مستوٍ واحد. 
$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \{A\}$ **مستقيمان متقاطعان**	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi \ , \ \overleftrightarrow{m} \subset \pi \ ,$ $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi \Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ **مستقيمان متوازيان**	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi \ , \ m \not\subset \pi$ $\Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$ **مستقيمان متخالفان**

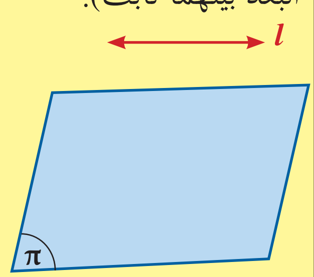
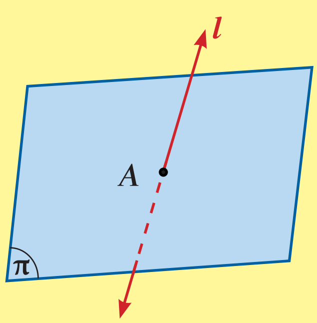
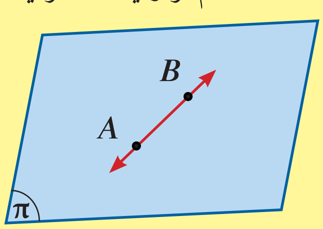
ملاحظات:



- تتقاطع عدة مستقيمات مختلفة إذا وجدت نقطة وحيدة مشتركة بينها أي أن:
  $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} \cap ... \cap \overleftrightarrow{n} = \{A\}$
- مستقيمات الفضاء لا يمكن أن تقع جميعها في مستوٍ واحد.
- كل مستقيم يوازي نفسه.

أوضاع مستقيم ومستوٍ في الفضاء Positions of a Line and a Plane in Space

إن معرفة عدد النقاط المشتركة بين مستقيم ومستوٍ في الفضاء تسمح بمعرفة أوضاعهما وهي:

a صفر نقطة مشتركة:	b نقطة مشتركة واحدة:	c نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل
المستقيم موازٍ للمستوي (في هذه الحالة يكون البعد بينهما ثابت). 	المستقيم يقطع المستوي. 	المستقيم يقع بكامله (بتمامه) في المستوي (المستقيم يوازي المستوي). 
$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \pi$	$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \{A\}$	$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ $\therefore \ \overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$

معلومة:
القسم غير المرئي من المستقيم $\overleftrightarrow{m}$ يمثل بخط متقطع.

معلومة:
الضلع في شبه المكعب يسمى «حرف».
كل سطح في شبه المكعب يسمى «وجه».

معلومة:
سنعتبر الحرف الأول في رمز أي هرم هو رأس الهرم. مثلًا الهرم: ABCD رأسه هو A..

تدريب (2)

في الصورة المقابلة، أشر إلى:

a مستقيمين متخالفين.

b مستقيم موازٍ لمستوٍ.

c مستقيم يقطع مستوٍ.

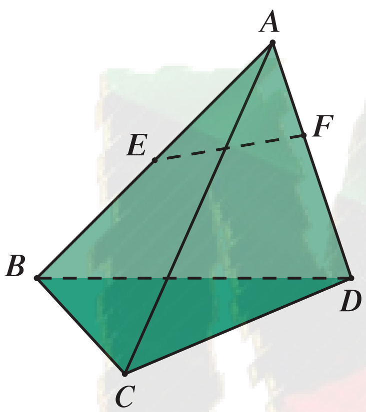
d مستقيم يقع في مستوٍ.

مثال (2)

إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

النقطة E تنتمي إلى $\overline{AB}$، النقطة F تنتمي إلى $\overline{AD}$.

$\overleftrightarrow{EF}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{BD}$.



أثبت أن: a $\overleftrightarrow{EF} \subseteq (ABD)$

b $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (ACD)

المعطيات: $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

النقطة E تنتمي إلى $\overline{AB}$ والنقطة F تنتمي إلى $\overline{AD}$ بحيث $\overleftrightarrow{EF}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{BD}$.

a المطلوب: إثبات أن $\overleftrightarrow{EF} \subseteq (ABD)$

البرهان:

$\because\ E \in \overline{AB}\ , \overline{AB} \subseteq (ABD)$

$\therefore\ E \in (ABD)$

$\because\ F \in \overline{AD}\ ,\ \ \overline{AD} \subseteq (ABD)$

$\therefore\ F \in (ABD)$

النقطتان $E\ , F$ تنتميان إلى (ABD)

$\therefore\ \overleftrightarrow{EF} \subseteq (ABD)$

b المطلوب: إثبات أن $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (ACD)

البرهان:

$\because\ F \in \overline{AD}\ ,\ \ \overline{AD} \subseteq (ACD)$

$\therefore\ F \in (ACD) \qquad (1)$

$E \notin (ACD) \qquad (2)$

$\because$ E, F نقطتان مختلفتان

$\therefore$ تحددان مستقيم وحيد $\overleftrightarrow{EF}$ (3)

من (1)، (2)، (3) ينتج أن:

$\overleftrightarrow{EF}$ يشترك مع (ACD) في نقطة واحدة، أي يقطعه.

حاول أن تحل

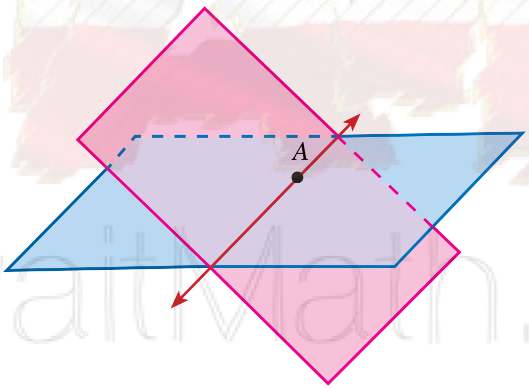
2 في مثال (2)، أثبت أن $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (BCD).

أوضاع مستويين في الفضاء Positions of Two Planes in Space

يمكن أن يمر عدد لا نهائي من المستويات في مستقيم واحد.
فكّر في باب مفتوح في أوضاع مختلفة.
تمثّل كل وضعية من واجهة الباب مستويًا يمر عبر خط وهمي تحدده مصاريع الباب.

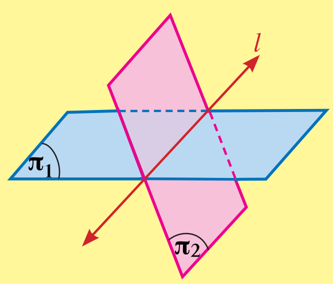
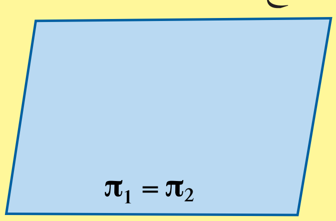
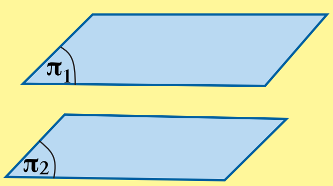
إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فإنه يوجد على الأقل نقطة أخرى مشتركة بين هذين المستويين.

إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستقيم.



إذا اشترك مستويان في ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يكون المستويان منطبقين.

يمكن حصر أوضاع مستويين في الفضاء بثلاث حالات:

a **المستويان متقاطعان في مستقيم.** 	b **المستويان منطبقان** (يشتركان في جميع النقاط). 	c **المستويان متوازيان** (لا توجد نقاط مشتركة بينهما). 
$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \Longrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$	$\pi_1 = \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 \mathbin{//} \pi_2$	$\pi_1 \cap \pi_2 = \phi \Longrightarrow \pi_1 \mathbin{//} \pi_2$

مثال (3)

l, m, n ثلاثة مستقيمات لا تقع في مستوٍ واحد تتقاطع مثنى مثنى.

أثبت أن المستقيمات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة.

الحل:

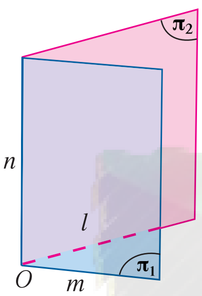
المعطيات:

l, m, n ثلاثة مستقيمات لا تقع في مستوٍ واحد بحيث إن:

$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} \neq \phi \;,\; \overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{n} \neq \phi \;,\; \overleftrightarrow{m} \cap \overleftrightarrow{n} \neq \phi$

المطلوب:

إثبات أن المستقيمات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة فقط.



البرهان:

$\because$ المستقيمان m , n متقاطعان

$\therefore$ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن π_1

$\because$ المستقيمان l , n متقاطعان

$\therefore$ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن π_2

ولتكن O نقطة تقاطع المستقيمين l, m

$O \in \overleftrightarrow{m} \quad \therefore \quad O \in \pi_1 \qquad (1)$

$O \in \overleftrightarrow{l} \quad \therefore \quad O \in \pi_2 \qquad (2)$

من $(1) , (2)$ $\quad O \in \pi_1 \cap \pi_2$

$\because \; \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n}$

$\therefore \; O \in \overleftrightarrow{n}$

$\therefore$ O نقطة مشتركة بين المستقيمات الثلاثة وبالتالي تتقاطع المستقيمات l , m , n في نقطة واحدة.

حاول أن تحل

3 $\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m} , \overleftrightarrow{n}$ ثلاثة مستقيمات مختلفة تتقاطع في A.

المستقيم t يقطع المستقيمات الثلاثة في B, C, D على الترتيب.

أثبت أن المستقيمات l , m , n , t تقع في مستوٍ واحد.

معلومة:

تقاطع عدة مستقيمات مثنى مثنى تعني أن كل مستقيمين يتقاطعان في نقطة.

معلومة:

يرسم الجزء غير المرئي من الشكل بخط متقطع.

10–2

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space

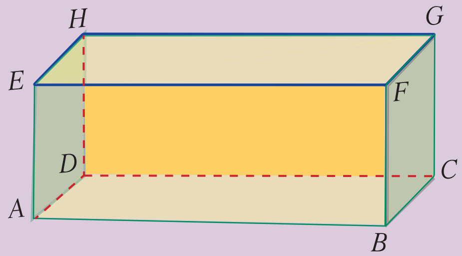
سوف تتعلم

- المستقيمات في الفضاء.
- المستويات في الفضاء.
- مواقع المستقيمات والمستويات في الفضاء.

المفردات والمصطلحات:

- تقاطع المستويات Intersecting Planes
- مستويان متقاطعان Two Intersecting Planes
- مستويان متوازيان Two Parallel Planes
- حرف Edge
- وجه Face

دعنا نفكر ونتناقش



في شبه المكعب المقابل.

1 اذكر:

a زوجين من الأحرف المتوازية.

b زوجين من الأحرف المتقاطعة.

c حرفًا يوازي $\overline{HG}$.

2 هل يمكن أن يقطع $\overleftrightarrow{EF}$ المستوي $ABCD$؟ اشرح.

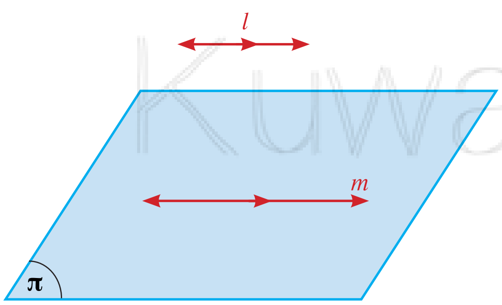
3 إذا كانت النقطة O منتصف $\overline{BF}$. هل يمكن أن يقطع $\overleftrightarrow{AO}$ المستوي $EFGH$؟ اشرح.

4 a كيف يتقاطع المستويان AOD و $BCGF$؟

b حدد في أي نقطة يقطع المستوي AOD الحرف $\overleftrightarrow{CD}$؟

نظرية (1)

إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيمًا في المستوي، فإنه يوازي المستوي.



المعطيات:

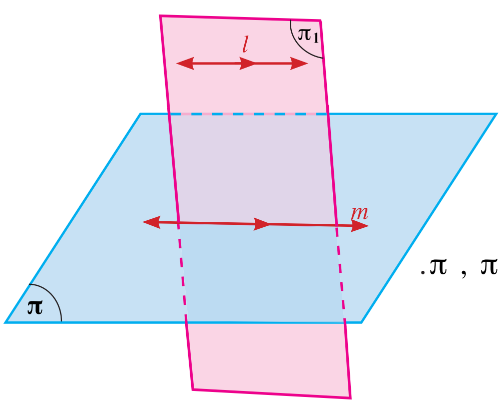
$\overleftrightarrow{l}$ خارج المستوي π.

$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$

المطلوب:

إثبات أن $\overleftrightarrow{l} \parallel \pi$.

البرهان:



$\because \ \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{m}$ يعينان مستويًا وحيدًا π_1

$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{m}$

لنفرض أن: $\overleftrightarrow{l}$ لا يوازي π.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{l}$ يقطع π في نقطة تنتمي إلى خط تقاطع π_1 , π.

أي أنها نقطة تنتمي إلى $\overleftrightarrow{m}$

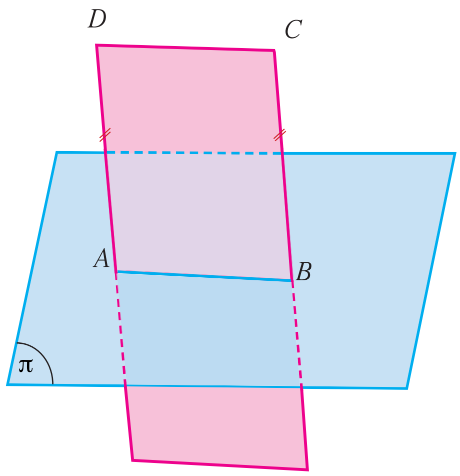
وهذا يخالف الفرض لأن $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{l}$ لا يمكن أن يقطع المستوي π، وبالتالي $\overleftrightarrow{l} \parallel \pi$.

مثال (1)

في الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ ، $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ، $AD = BC$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$



الحل:

المعطيات: $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ ، $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ، $AD = BC$

المطلوب: إثبات أن: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$

البرهان:

$\because \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AD}$ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن $(ABCD)$ فيه

$\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, $AD = BC$

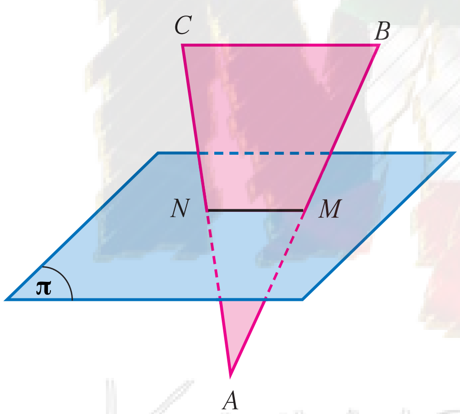
$\therefore$ $ABCD$ متوازي أضلاع

ومنه $\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$ (نظرية)

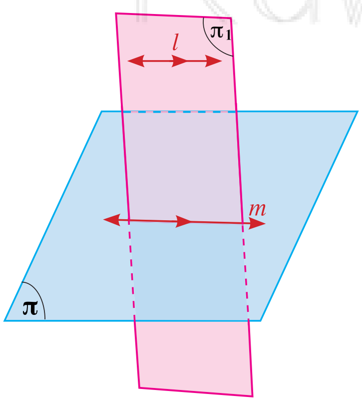
حاول أن تحل



1 في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$ ،

M ، N تنتميان إلى المستوى π .

أثبت أن $\overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$.

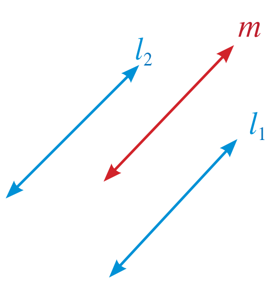


نظرية (2)

إذا وازى مستقيم مستويًا، فكل مستوٍ مار بالمستقيم ويقطع المستوي، يقطعه في مستقيم موازٍ للمستقيم المعلوم.

$\because \overleftrightarrow{l} \parallel \pi$, $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_1$, $\pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{m}$

$\therefore \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l}$



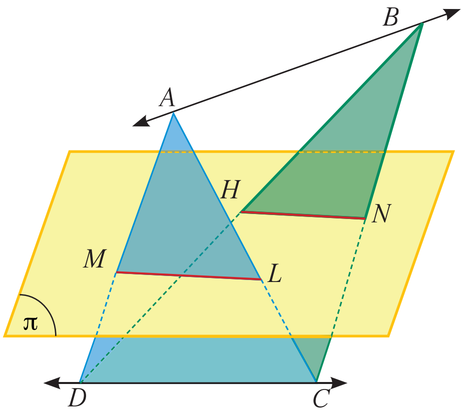
نظرية (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.

$\because \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$

مثال (2)



في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متخالفان، $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$.

$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L.

$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N.

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{NH}$

الحل:

المعطيات: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$

$\overleftrightarrow{AD} \cap \pi = \{M\}$

$\overleftrightarrow{AC} \cap \pi = \{L\}$

$\overleftrightarrow{BD} \cap \pi = \{H\}$

$\overleftrightarrow{BC} \cap \pi = \{N\}$

المطلوب: إثبات $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{NH}$

البرهان:

$\because \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{A\}$ (معطى)

$\therefore$ المستقيمان يعينان مستويًا وحيدًا وهو (ADC)

$\because \overleftrightarrow{AD} \cap \pi = \{M\}\ ,\ \overleftrightarrow{AC} \cap \pi = \{L\}$ (معطى)

$\therefore (ADC) \cap \pi = \overleftrightarrow{ML}$ (1)

$\because \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$ (2) (معطى)

$\overleftrightarrow{CD} \subset (ACD)$ (3)

من (1), (2), (3) نجد أن:

$\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (4) نظرية

$\because \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{BD} = \{B\}$ (معطى)

$\therefore$ المستقيمان يعينان مستويًا وحيدًا وهو (BCD)

$\because \overleftrightarrow{BD} \cap \pi = \{H\}\ ,\ \overleftrightarrow{BC} \cap \pi = \{N\}$ (معطى)

$\because (BCD) \cap \pi = \overleftrightarrow{HN}$ (5)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$ (6)

$\overleftrightarrow{CD} \subset (BCD)$ (7)

من (5), (6), (7) نجد أن:

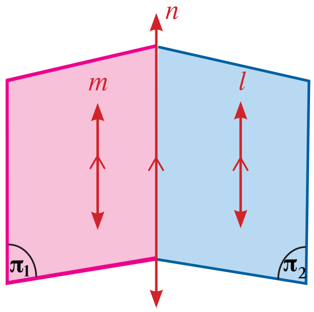
$\overleftrightarrow{HN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (8) نظرية

من (4), (8) نستنتج أن:

$\overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{HN}$ نظرية

حاول أن تحل

2 في المثال (2)، إذا كان $\pi \parallel \overleftrightarrow{AB}$ فأثبت أن $LMHN$ متوازي أضلاع.



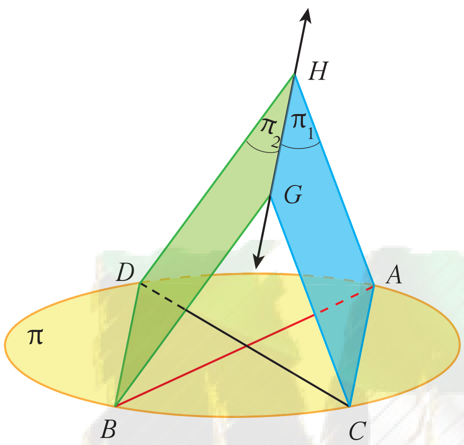
نتيجة (1)

إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان،

فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين.

$$(\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l} \;,\; \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1 \;,\; \overleftrightarrow{l} \subset \pi_2 \;,\; \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n}) \Rightarrow (\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{n})$$

مثال (3)



في الشكل المقابل: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة π.

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

أثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$.

الحل:

المعطيات: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في الدائرة

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

المطلوب: إثبات أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

البرهان:

$\because$ $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ قطران في الدائرة

$\therefore$ ينصف كل منهما الآخر ومتطابقان

$\therefore$ الشكل $ACBD$ مستطيل

$\therefore \overline{AC} \parallel \overline{DB}$ (1)

$\because \overline{AC} \subset \pi_1 \;,\; \overline{DB} \subset \pi_2 \;,\; \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$ (2)

من (1), (2)

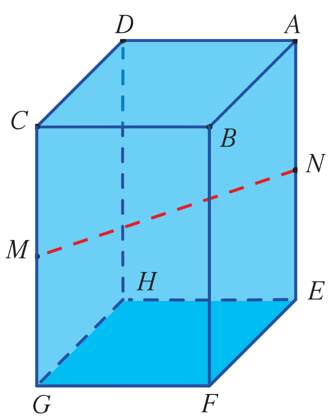
$\therefore \overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DB}$

$\because \overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC} \;,\; \overleftrightarrow{AC} \subset \pi$

$\therefore \overleftrightarrow{GH} \parallel \pi$

أي أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

حاول أن تحل



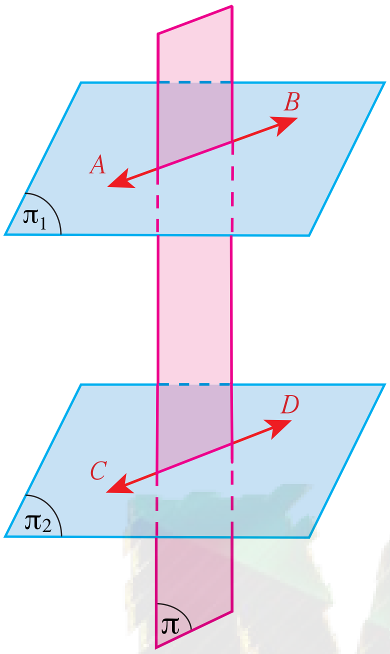
3 $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$.

أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overleftrightarrow{MN}$.

نظرية (4)

إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.



المعطيات:
$\pi_1 \,/\!/\, \pi_2$

$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB}$

$\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}$

المطلوب:

إثبات أن: $\overleftrightarrow{AB} \,/\!/\, \overleftrightarrow{CD}$

البرهان: فرضًا $\because\ \pi_1 \,/\!/\, \pi_2$

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1 \ ,\ \overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$

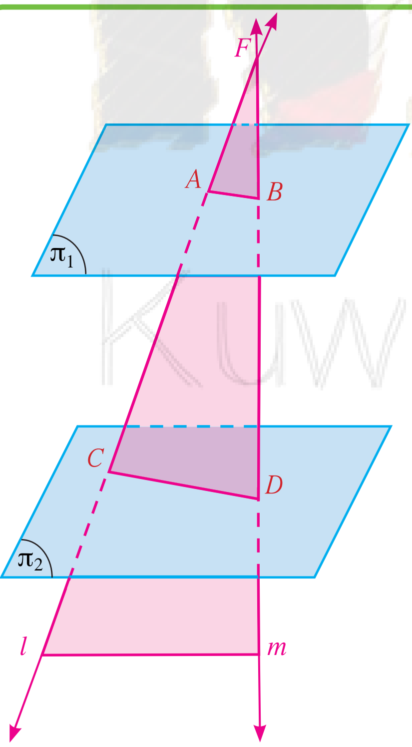
$\therefore \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \phi$

أي أن $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ هما متوازيان أو متخالفان **(1)**

ولكن $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ يحويهما مستوٍ واحد هو π **(2)**

$\therefore$ من (2) ,(1) نستنتج أن: $\overleftrightarrow{AB} \,/\!/\, \overleftrightarrow{CD}$

مثال (4)



في الشكل المقابل: π_1 , π_2 مستويين متوازيين.

$\overleftrightarrow{m} , \overleftrightarrow{l}$ مستقيمان متقاطعان في F ويقطعان كلًّا من π_1 في A, B، π_2 في C, D

إذا كان $BD = 4\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$, $CD = 9\text{ cm}$, $FB = 5\text{ cm}$

فأوجد محيط المثلث FAB

الحل:

المعطيات:

$\pi_1 \,/\!/\, \pi_2$

$\overleftrightarrow{m} , \overleftrightarrow{l}$ متقاطعان في F ويقطعان π_1 في A, B، π_2 في C, D

$BD = 4\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$, $CD = 9\text{ cm}$, $FB = 5\text{ cm}$

المطلوب:

إيجاد محيط المثلث FAB.

البرهان:

$\because$ $\overleftrightarrow{m} , \overleftrightarrow{l}$ مستقيمان متقاطعان في F

$\therefore$ $\overleftrightarrow{m} , \overleftrightarrow{l}$ يعينان مستوٍ واحد π

$\because$ π_2 , π_1 متوازيان.

$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB}$, $\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}$

(نظرية 4) $\therefore\ \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

في المستوي π ، $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore$ المثلثان FAB, FCD متشابهان

نكتب التناسب: $\dfrac{FB}{FD} = \dfrac{FA}{FC} = \dfrac{AB}{CD}$

بالتعويض: $\dfrac{5}{5+4} = \dfrac{FA}{FA+6} = \dfrac{AB}{9}$

$\dfrac{5}{5+4} = \dfrac{FA}{FA+6}$

تعطي: $9FA = 5(FA+6)$

$4FA = 30 \implies FA = 7.5\text{ cm}$

كذلك $\dfrac{5}{5+4} = \dfrac{AB}{9}$

تعطي: $9AB = 45 \implies AB = 5\text{ cm}$

محيط المثلث FAB يساوي:

$FA + FB + AB = 7.5\text{ cm} + 5\text{ cm} + 5\text{ cm}$

$= 17.5\text{ cm}$

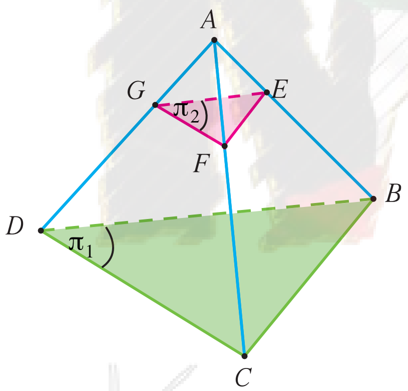
حاول أن تحل

4 في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي.

المستويان π_1 ، π_2 متوازيان.

إذا كان $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{1}{3}$ ، $FG = 6\text{ cm}$

فأوجد DC



10–3

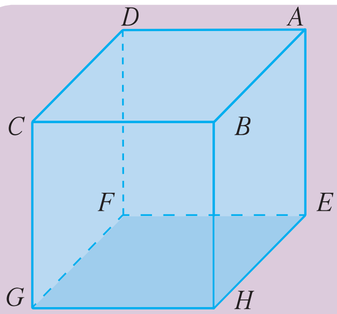
تعامد مستقيم مع مستوٍ
Perpendicular Line With a Plane

سوف تتعلم
- إيجاد قياس الزاوية بين مستقيمين متخالفين.
- تعامد مستقيم مع مستوٍ.

• المفردات والمصطلحات:
- مستقيم عمودي Perpendicular Line
- مستقيمين متخالفين Two Skew Lines

دعنا نفكر ونتناقش

في المكعب المقابل:



a هل $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BH}$ متعامدين؟

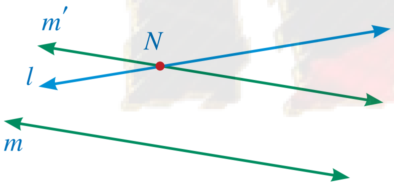
b هل $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BG}$ متعامدين؟

c هل $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{GE}$ متعامدين؟

d سمّ زوجين من المستقيمات المتعامدة.

الزاوية بين مستقيمين متخالفين Angle Between Two Skew Lines

الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيمٍ قاطعٍ له وموازٍ للآخر.



$\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{l}$ مستقيمان متخالفان في الفضاء.

نأخذ النقطة N على أحد المستقيمين وليكن $\overleftrightarrow{l}$

نرسم $\overleftrightarrow{m'}$ بحيث $\overleftrightarrow{m'}$ يوازي $\overleftrightarrow{m}$ ويمر بالنقطة N

الزاوية بين المستقيمين l , m' هي إحدى الزوايا الناتجة عن تقاطع $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{m'}$

$\hat{N}$ = **الزاوية الحادة** بين المستقيمين l , m

ملاحظة: لا تتأثر الزاوية بتغير موقع النقطة N

معلومة:
المستقيم الذي يقطع مستوٍ ولا يكون عموديًّا عليه، يكون مائلًا على هذا المستوي.

تدريب

في المكعب المرسوم في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش»، أوجد قياس الزاوية بين:

a $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CG}$

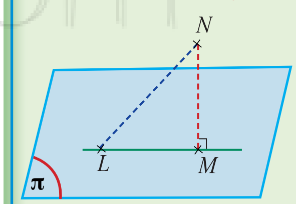
b $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{GE}$

c $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{GF}$

d $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{BG}$

e $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{GE}$

معلومة:



$\overline{NM}$ هو البعد بين النقطة N والمستوي π.

هذا البعد هو أقصر مسافة بين N وأي نقطة في المستوي.

$NM < NL , \forall L \in \pi$

تعريف

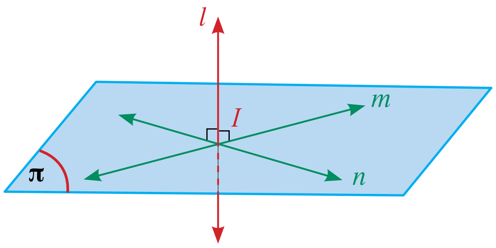
يكون المستقيم l عموديًّا على المستوي π إذا كان $\overleftrightarrow{l}$ عموديًّا على جميع المستقيمات الواقعة في π ويرمز لذلك بـ : $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$

نقول أيضًا إن π عمودي على $\overleftrightarrow{l}$

ونرمز لذلك بـ: $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$

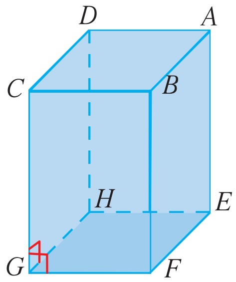
والعكس صحيح ،

فإذا كان $\pi \perp \overleftrightarrow{l}$ فإن l عموديًّا على كل المستقيمات في المستوي π



نظرية (5)

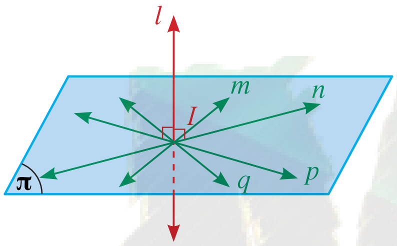
المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًّا على مستويهما.



$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{GF} \cap \overleftrightarrow{GH} = \{G\} \\ \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GF} \;,\; \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GH}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CG} \perp (EFGH)$$

نتيجة (2)

جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواة في مستوٍ واحد عموديًّا على المستقيم المعلوم.

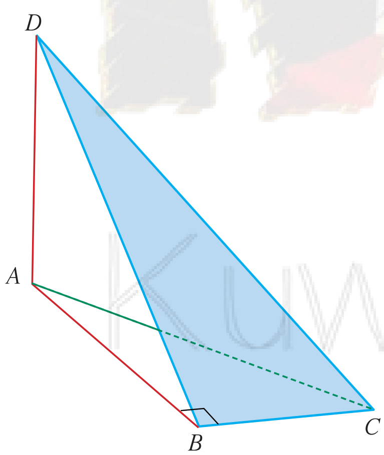


مثال (1)

في الشكل المقابل، المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$.

أثبت أن المثلث DBC قائم في $\widehat{B}$



الحل:

المعطيات:

المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$

المطلوب:

إثبات أن المثلث DBC قائم في $\widehat{B}$

البرهان:

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC) \;,\; \overleftrightarrow{BC} \subset (ABC)$ (معطى)

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$ (1) (تعريف)

∵ المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB}\quad (2)$

$\because$ المستقيمان $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AD}$ متقاطعان

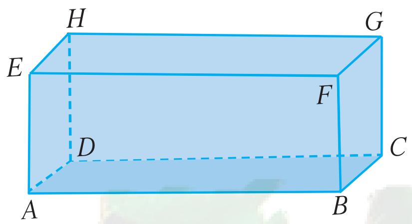
$\therefore$ يعينان المستوي (ABD) (3)

من $(1), (2), (3)$ $\quad \therefore\ \overleftrightarrow{BC} \perp (ABD)$

$\because\ \overleftrightarrow{BD} \subset (ABD)$

(تعريف) $\quad \therefore\ \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{BD}$

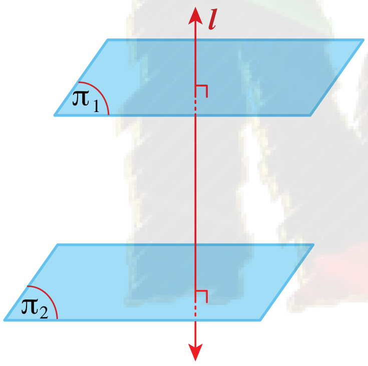
$\therefore$ المثلث BCD قائم في $\widehat{B}$.



حاول أن تحل

1 في شبه المكعب المقابل،

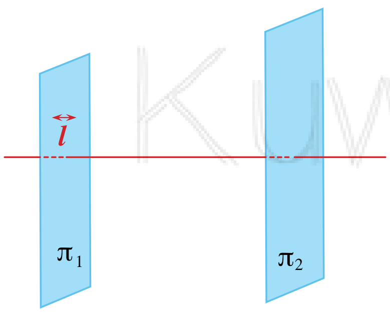
أثبت أن المثلث BEH قائم في $\widehat{E}$.



نظرية (6)

إذا كان مستقيم عموديًّا على كلٍّ من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين.

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1\ ,\ \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2 \implies \pi_1 \parallel \pi_2$$



نظرية (7)

إذا كان مستقيم عموديًّا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديًّا على المستوي الآخر.

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1\ ,\ \pi_1 \parallel \pi_2 \implies \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2$$

مثال (2)

في الشكل المقابل:

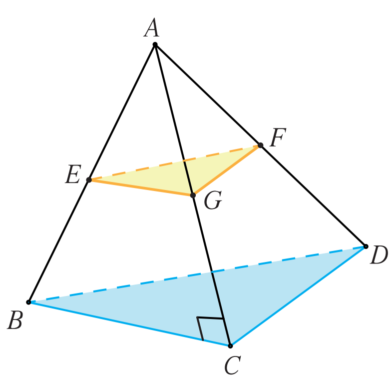
A نقطة خارج المستوى BCD،

والنقاط E, G, F منتصفات $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ على الترتيب.

إذا كان $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

وكان $AD = 13\text{ cm}$، $AC = 12\text{ cm}$، $CD = 5\text{ cm}$

فأثبت أن: $(EGF) \parallel (BCD)$.



الحل:

المعطيات:

E منتصف $\overline{AB}$ ، G منتصف $\overline{AC}$ ، F منتصف $\overline{AD}$

$AD = 13\text{ cm}\ ,\ AC = 12\text{ cm}\ ,\ CD = 5\text{ cm}$

المطلوب:

إثبات أن: $(EGF) \mathbin{/\!/} (BCD)$

البرهان:

في $\Delta\, ACD$:

$(AC)^2+(CD)^2 = (12)^2+(5)^2 = 169 \quad (1)$

$(AD)^2 = (13)^2 = 169 \quad (2)$

من $(1), (2)$ نجد أن $\Delta\, ACD$ قائم الزاوية في C.

$\therefore\ \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CD}$

ولكن $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CB}$ (معطى)

وحيث إن $\overleftrightarrow{CB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ متقاطعان

$\therefore\ \overleftrightarrow{AC} \perp (BCD)$ (نظرية 5)

في $\Delta\, ABC$

$\because$ E منتصف $\overline{AB}$ ، G منتصف $\overline{AC}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{EG} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{CB}$

ولكن $m(B\widehat{C}A) = 90^\circ$

$\therefore\ m(A\widehat{G}E) = 90^\circ \Rightarrow \overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{EG}$

وبالمثل $\overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{GF}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{AG} \perp (EGF)$

أي أن: $\overleftrightarrow{AC} \perp (EGF) \quad (4)$

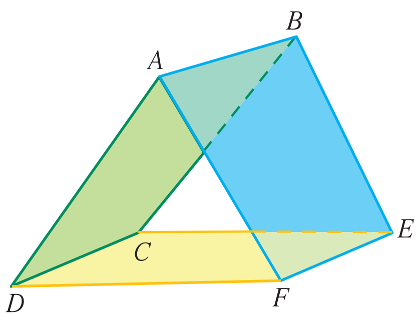
من $(3), (4)$ ينتج أن: $\therefore\ (EGF) \mathbin{/\!/} (BCD)$ نظرية (6)

حاول أن تحل

2 في الشكل المقابل:

$ABEF, ABCD$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD) \mathbin{/\!/} (BEC)$



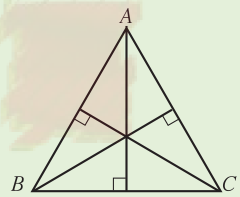
تذكر:

- إذا كان مجموع مربعي طولي ضلعين في مثلث يساوي مربع الضلع الثالث فإن هذا المثلث يكون قائم الزاوية.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث.

معلومة:

مركز المربع هو نقطة تقاطع قطرية.

مركز المثلث المتطابق الأضلاع هي نقطة تلاقي محاور أضلاعه.



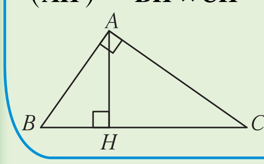
تذكر:

إذا كان ΔABC قائم الزاوية A و H المسقط العمودي لِـ A على $\overleftrightarrow{BC}$ فإن:

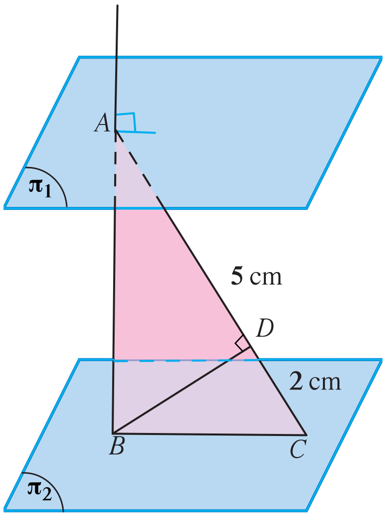
$(AB)^2 = BH \times BC$

$(AC)^2 = CH \times CB$

$(AH)^2 = BH \times CH$



مثال (3)



في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$, $A \in \pi_1$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$, $\pi_1 \parallel \pi_2$

رسم: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوى ABC

إذا كان: $DC = 2\text{ cm}$, $AD = 5\text{ cm}$

أوجد: BD

الحل:

المعطيات:

$\pi_1 \parallel \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$, $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

$AD = 5\text{ cm}$, $DC = 2\text{ cm}$

المطلوب:

إيجاد BD

البرهان:

$\because \pi_1 \parallel \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$ (نظرية 7)

$\therefore$ $\overline{AB}$ عمودي على كل مستقيم في π_2

$\because \overline{BC} \subset \pi_2$

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{BC}$

في المثلث ABC القائم الزاوية في B

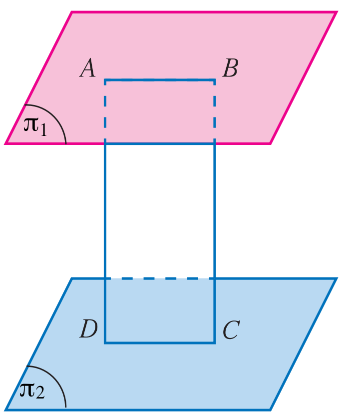
$\because \overline{BD} \perp \overline{AC}$

$\therefore (BD)^2 = AD \times DC$

$= 5 \times 2 = 10$

$BD = \sqrt{10}\text{ cm}$

حاول أن تحل



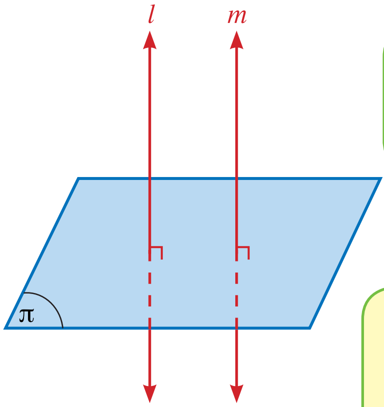
3 في الشكل المقابل: $\pi_1 \parallel \pi_2$

A, B نقطتان في π_1،

C, D نقطتان في π_2 حيث: A, B, C, D في مستوى واحد

$\overline{AD} \perp \pi_2$, $\overline{BC} \perp \pi_2$

أثبت أن $ABCD$ مستطيل.



نظرية (8)

المستقيمان العموديان على مستوٍ متوازيان.

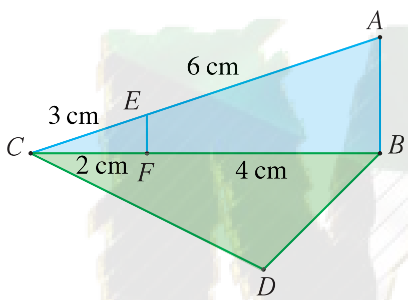
$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi \ , \ \overleftrightarrow{m} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$$

نظرية (9)

إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديًا على مستوٍ كان المستقيم الآخر عموديًا على المستوي أيضًا.

$$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m} \ , \ \overleftrightarrow{l} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$

مثال (4)



في الشكل المقابل إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$

وكان $FB = 4\text{ cm}$, $CF = 2\text{ cm}$, $EA = 6\text{ cm}$, $CE = 3\text{ cm}$

أثبت أن: $\overline{EF} \perp \overline{DB}$

الحل:

المعطيات: $\overline{AB} \perp (BCD)$

$CE = 3\text{ cm}$, $EA = 6\text{ cm}$, $CF = 2\text{ cm}$, $FB = 4\text{ cm}$

المطلوب:

إثبات أن $\overline{EF} \perp \overline{BD}$

البرهان: $\because$ $\overline{AB}$, $\overline{CA}$ متقاطعان $\therefore$ يعينان مستوٍ وحيد (ABC)

في المثلث CAB:

$$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CF}{FB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \ \overline{EF} \parallel \overline{AB}$ نظرية طاليس

$\because \ \overline{AB} \perp (CBD)$

$\therefore \ \overline{EF} \perp (CBD)$ (1) نظرية

$\overline{DB} \subset (CBD)$ (2)

من (1), (2) نستنتج أن:

$\overline{EF} \perp \overline{DB}$ تعريف

حاول أن تحل

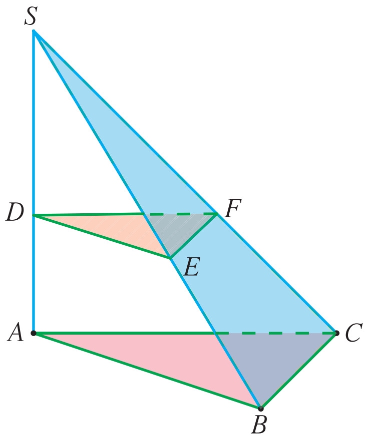
4 في الشكل المقابل:

المستويان (DEF), (ABC) متوازيان

$\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$

إذا كان: $AC = 6\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$, $DA = 2\text{ cm}$, $SD = 3\text{ cm}$, $SE = 5\text{ cm}$

فأوجد محيط المثلث DEF



10-4

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

سوف تتعلم
- إيجاد قياس الزاوية بين مستويين (الزاوية الزوجية).

المفردات والمصطلحات:
- زاوية Angle
- زاوية زوجية Dihedral Angle
- قياس الزاوية Measure of an Angle

دعنا نفكر ونتناقش

هل سبق لك أن تساءلت:

a كيف بنى الأقدمون منازلهم؟ وكيف أمكنهم بناء جدران متعامدة؟

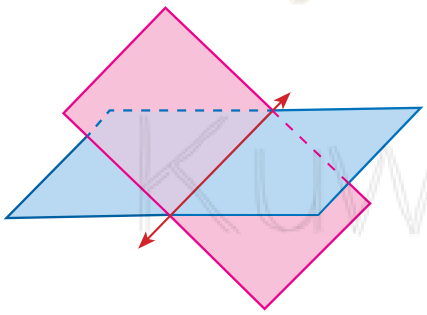
b كيف يمكن قياس الزاوية التي يصنعها أحد أوجه هرم كبير مع مستوى الأرض؟

c كيف يراقب الأخصائيون ميل برج بيزا؟
وكيف يمكنهم قياس الزاوية التي يصنعها البرج مع مستوى الأرض؟

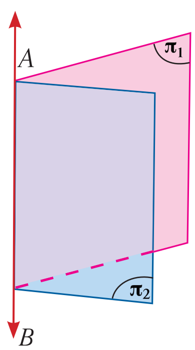
كل هذه الأسئلة تأخذنا لدراسة قياسات الزوايا في الفضاء.

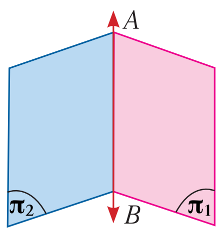
الزاوية بين مستويين (الزاوية الزوجية) The Dihedral Angle

تعلمت أنه إذا تقاطع مستويان مختلفان في الفضاء فإنهما يتقاطعان في مستقيم وينتج من هذا التقاطع أربع زوايا تسمى كل منها **زاوية زوجية**.



يقسم المستقيم المشترك كل مستوى إلى نصفين ويسمى المستقيم المشترك **حافة الزاوية الزوجية** أو **الفاصل المشترك**.
ويسمى كل من نصفي المستويين وجه الزاوية الزوجية.
يبيّن الشكلان أدناه زاويتين زوجيتين حافة كل منهما $\overleftrightarrow{AB}$



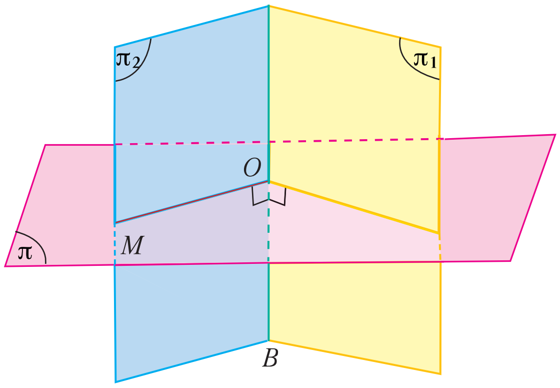


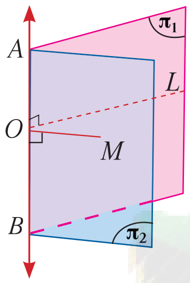
نقرأ الزاوية الزوجية بحافتها فنقول الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$، أو في حال وجود أكثر من زاوية زوجية: $(\pi_1 , \overleftrightarrow{AB} , \pi_2)$

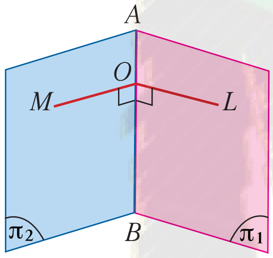
تعريف: الزاوية المستوية لزاوية زوجية

هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستوٍ عمودي على حافتها.

ويكون قياس الزاوية الزوجية هو قياس إحدى زواياها المستوية ودائمًا نأخذ قياس **الزاوية الحادة**.







لإيجاد قياس الزاوية الزوجية نتبع التالي:

- نحدّد حافة الزاوية الزوجية ولتكن $\overleftrightarrow{AB}$
- نأخذ نقطة O على حافة الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$
- نرسم من O شعاعًا $\overrightarrow{OL}$ عموديًّا على $\overleftrightarrow{AB}$

  يكون واقعًا بتمامه في المستوي π_1
- نرسم من O شعاعًا $\overrightarrow{OM}$ عموديًّا على $\overleftrightarrow{AB}$

  يكون واقعًا بتمامه في المستوي π_2

فتكون الزاوية LOM تسمى **الزاوية المستوية** للزاوية الزوجية.

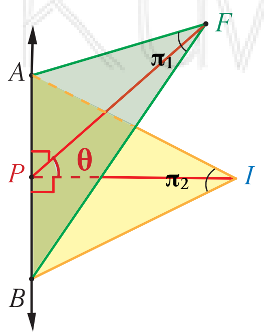
قياس الزاوية الزوجية يرمز له بالرمز $m(L\widehat{O}M)$

ونحصل على الزاوية المستوية بقطع الزاوية الزوجية بمستوٍ عمودي على حافتها.

تدريب (1)

في كل من الأشكال التالية عيّن الزاوية المستوية للزاوية الزوجيّة بين المستويين π_1, π_2.

1



$\overline{FP} \perp \overline{AB}$, $\overline{IP} \perp \overline{AB}$

حافة الزاوية الزوجية ....

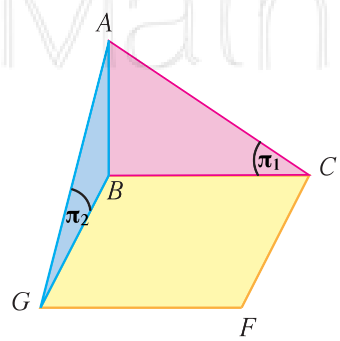
...... $\subset \pi_1$, ... $\perp \overline{AB}$

وكذلك .... $\subset \pi_2$, ... $\perp \overline{AB}$

$\therefore$ .... هي الزاوية المستوية

للزاوية الزوجية بين π_1, π_2

2



$\overline{AB} \perp (CBGF)$

حافة الزاوية الزوجية ....

$\overline{BC} \subset \pi_1$, ... $\perp \overline{AB}$

وكذلك .... $\subset \pi_2$, ... $\perp \overline{AB}$

$\therefore$ .... هي الزاوية المستوية

للزاوية الزوجية بين π_1, π_2

ملاحظة:

لا يتغير قياس الزاوية الزوجية بتغيّر موقع O على $\overleftrightarrow{AB}$

معلومة:

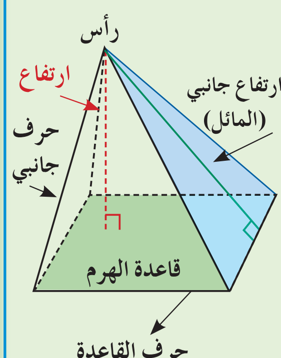
الهرم The Pyramid

هو متعدد سطوح أحد أوجهه مضلع (القاعدة) على شكل (مثلث، مستطيل، مربع، ...)، وبقية الأوجه مثلثات تلتقي في نقطة واحدة هي رأس الهرم.

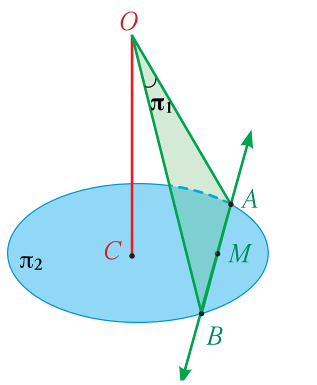
يمكن تسمية الهرم بحسب شكل قاعدته.

ارتفاع الهرم هو طول القطعة العمودية من رأس الهرم حتى القاعدة.

الارتفاع الجانبي (المائل) هو ارتفاع أحد الأوجه الجانبية.



3



M منتصف $\overline{AB}$، $\overline{OC} \perp \pi_2$

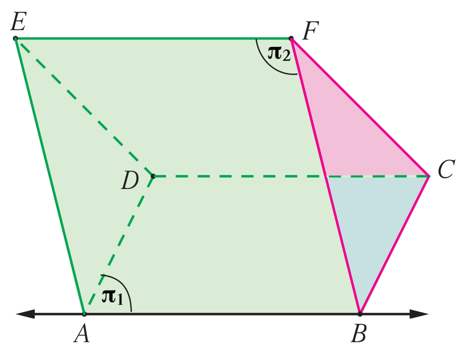
....

....

....

....

4



$ABCD$ مستطيل، $\overleftrightarrow{FC} \perp (ABCD)$

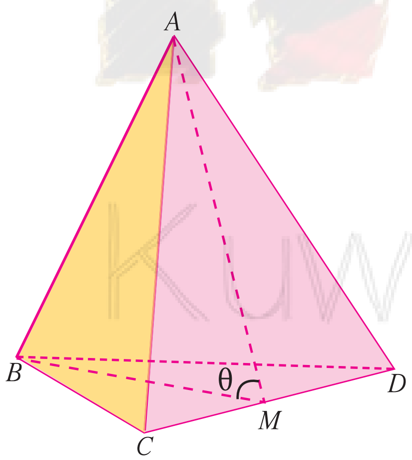
....

....

....

....

مثال (1)



يبيّن الشكل المقابل هرمًا ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع طول حرفه 8 cm

M منتصف $\overline{DC}$

a حدد الزاوية المستوية بين المستويين ADC , BDC

b أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

المعطيات: $ABCD$ هرم أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع.

طول الحرف = 8 cm، M منتصف $\overline{DC}$.

a المطلوب: تحديد الزاوية المستوية بين المستويين: BDC , ADC

البرهان:

نحدّد الزاوية المستوية بين المستويين: ADC , BDC

$\overleftrightarrow{DC}$ حافة الزاوية الزوجية (1)

المثلث ADC متطابق الأضلاع.

$\because$ M منتصف $\overline{CD}$ من خواص Δ متطابق الأضلاع

$\therefore$ $\overline{AM} \perp \overleftrightarrow{DC}$ حيث $\overline{AM} \subset (ADC)$ (2)

$\therefore$ $\overline{BM} \perp \overleftrightarrow{DC}$ حيث $\overline{BM} \subset (BDC)$ (3)

وبالمثل نجد أن: $A\hat{M}B$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

b المطلوب

إيجاد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

البرهان:

$\because$ المثلث AMD قائم الزاوية في M.

متطابقة فيثاغورث

$$(AM)^2 = (AD)^2 - (DM)^2$$
$$(AM)^2 = 8^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2$$
$$(AM)^2 = 64 - 16 = 48$$
$$AM = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}$$

في المستوى AMB:

$$BM = AM = 4\sqrt{3}\ \text{cm}$$

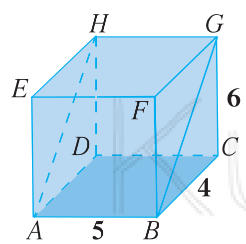
لإيجاد قياس الزاوية المستوية AMB نستخدم قانون جيب التمام في المثلث ABM.

$$(AB)^2 = (AM)^2 + (MB)^2 - 2 \cdot AM \cdot MB \cdot \cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{(AM)^2 + (MB)^2 - (AB)^2}{2AM \cdot MB}$$
$$\cos\theta = \frac{48 + 48 - 64}{2 \times 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{3}} = \frac{32}{96} = \frac{1}{3}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.5287^\circ$$

أي $70^\circ 31' 43.61''$

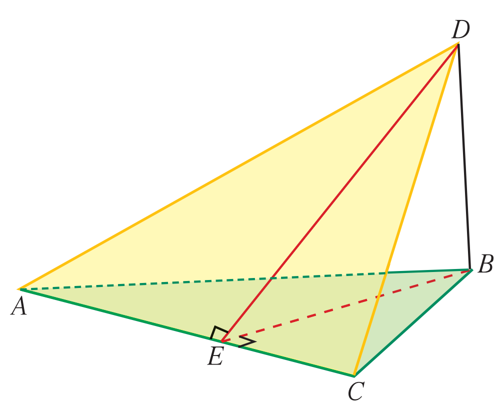
$\therefore$ قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية حوالي $70^\circ 31' 44''$

حاول أن تحل



1 في شبه المكعب المقابل، أثبت أن الزاوية GBC هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين $(ABCD)$, $(ABGH)$، ثم أوجد قياسها.

مثال (2)



في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{6}$ ، $AB = 10\ \text{cm}$ ، $DB = 5\ \text{cm}$

$\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{DE} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{BE} \perp \overline{AC}$

أوجد:

a BE , DE

b قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC

الحل:

المعطيات:

D نقطة خارج (ABC) $\quad m(B\widehat{A}C)=\frac{\pi}{6}$

$DB=5\text{ cm}\ ,\ AB=10\text{ cm}\ ,\ \overline{DB}\perp(ABC)$

$\overline{DE}\perp\overline{AC}\ ,\ \overline{BE}\perp\overline{AC}$

a المطلوب: إيجاد $BE\ ,\ DE$

البرهان:

فرضًا $\quad \because\ \overline{BE}\perp\overline{AC}\Rightarrow\ \therefore\ m(B\hat{E}A)=\frac{\pi}{2}$

$\because\ m(B\widehat{A}C)=\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ AEB مثلث ثلاثيني – ستيني

خاصيّة المثلث ثلاثيني – ستيني $\quad \therefore\ BE=\frac{1}{2}AB=5\text{ cm}$

فرضًا $\quad \overline{DB}\perp(ABC)\ ,\ \overline{BE}\subset(ABC)$

خاصيّة المستقيم العمودي على مستو $\quad \therefore\ \overline{DB}\perp\overline{BE}$

في المستوي DBE:

المثلث DBE قائم في $\widehat{B}$، متطابق الضلعين.

طول الوتر في المثلث القائم متطابق الضلعين $\quad \therefore\ DE=BE\times\sqrt{2}$

$=5\sqrt{2}\text{ cm}$

b المطلوب: إيجاد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $(BAC)\ ,\ (DAC)$

البرهان:

$\overleftrightarrow{AC}$ هو خط تقاطع المستويين BAC ، DAC

$\overline{BE}\perp\overline{AC}$ في المستوي BAC

$\overline{DE}\perp\overline{AC}$ في المستوي DAC

$\therefore$ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين BAC ، DAC هي $B\widehat{E}D$

$\because$ ΔDBE قائم في $\widehat{B}$ ومتطابق الضلعين.

$\therefore\ m(B\widehat{E}D)=\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $=\frac{\pi}{4}$

حاول أن تحل

2 في المثال (2)، أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC، DAC إذا كان $m(B\widehat{A}C)=45^{\circ}$.

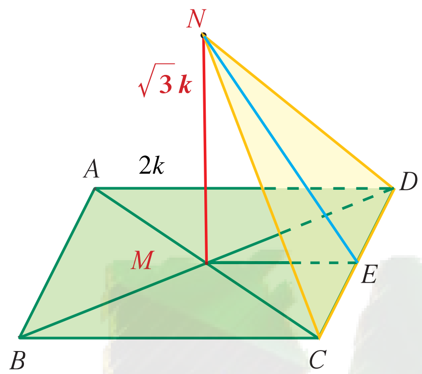
مثال (3)

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$

أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}\,k$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD , $ABCD$

الحل:



المعطيات: $ABCD$ مستطيل، $\overline{AC} \cap \overline{DB} = \{M\}$

$AD = 2k$, $MN = \sqrt{3}\,k$, $\overline{MN} \perp (ABCD)$

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NDC , $ABCD$

العمل: نرسم $\overline{ME}$ حيث E منتصف $\overline{CD}$

البرهان: $\overline{CD}$ هي الحافة المشتركة بين المستويين NCD , $ABCD$

$\because\ \overline{MN} \perp (ABCD)$, $\overline{CD} \subset (ABCD)$

$\therefore\ \overline{MN} \perp \overline{CD}$ (1)

في المثلث CDM المتطابق الضلعين (من خواص المستطيل)

$\because$ E منتصف $\overline{CD}$ (عملًا)

$\therefore\ \overline{ME} \perp \overline{CD}$ (2)

من (1), (2) نجد أن:

$\overline{CD} \perp (MNE)$, $\overline{NE} \subset (MNE)$

$\therefore\ \overline{NE} \perp \overline{CD}$

$\therefore$ $M\widehat{E}N$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$

في المثلث BCD

M منتصف $\overline{BD}$ (من خواص المستطيل)

E منتصف $\overline{CD}$ (عملًا)

$$\therefore\ ME = \frac{1}{2} AD$$

$$= \frac{1}{2} \times 2k = k$$

في المثلث MEN القائم الزاوية في M (من خواص المستقيم العمودي مع مستوى)

$$\tan(M\widehat{E}N) = \frac{MN}{ME} = \frac{\sqrt{3}\,k}{k} = \sqrt{3}$$

$$\therefore\ m(M\widehat{E}N) = 60^\circ$$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NCD هو 60°

حاول أن تحل

3 في المثال (3)، إذا كان $AB = 6\,k$، فأوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NBC

10-5

سوف تتعلم
• تعامد المستويات

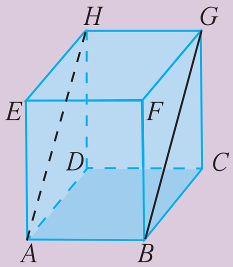
المفردات والمصطلحات:
• مستويات متعامدة
Perpendicular Planes

المستويات المتعامدة
Perpendicular Planes

دعنا نفكر ونتناقش

تعلمت كيفية تحديد الزاوية الزوجية بين مستويين وإيجاد قياسها.

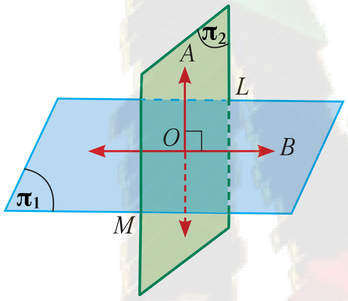
في الشكل المقابل $ABCDEFGH$ شبه مكعب.



1. حدّد تقاطع $(ABCD)$ مع $(BCGF)$
2. أوجد الزاوية الزوجية بين هذين المستويين.
3. ما قياس هذه الزاوية؟

المستويات المتعامدة Perpendicular Planes

يكون المستويان متعامدين إذا كانت الزاوية المستوية بينهما زاوية قائمة أي أن قياس الزاوية الزوجية بين المستويين 90°.



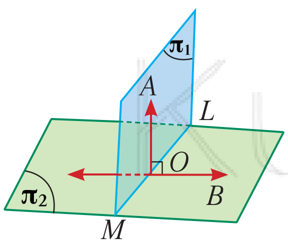
في المستوي π_1: $\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{LM}$

في المستوي π_2: $\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{LM}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{OA}$ فإن المستويين متعامدان.

نظرية (10)

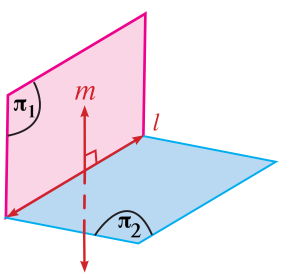
إذا كان مستقيم عموديًّا على مستوٍ، فكل مستوٍ يمر بذلك المستقيم يكون عموديًّا على المستوي.



$$\overleftrightarrow{OA} \perp \pi_2 \ , \ \overleftrightarrow{OA} \subset \pi_1 \ \Longrightarrow \pi_1 \perp \pi_2$$

نتيجة (3)

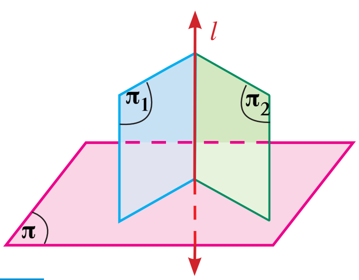
إذا تعامد مستويان ورسم في أحدهما مستقيم عمودي على خط تقاطعهما فإنه يكون عموديًّا على المستوي الآخر.



$$\pi_1 \perp \pi_2 \ , \ \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l} , \ \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1 , \overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{l} \Longrightarrow \overleftrightarrow{m} \perp \pi_2$$

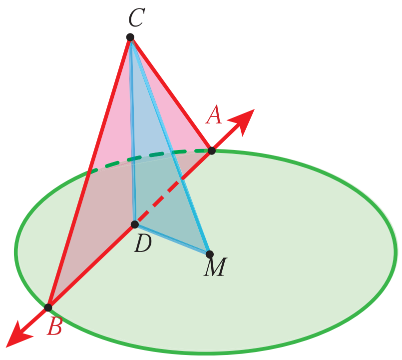
نتيجة (4)

إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودي على مستوٍ ثالث فإن خط تقاطع المستويين يكون عموديًّا على هذا المستوي الثالث.



$$\pi_1 \perp \pi \ , \ \pi_2 \perp \pi \ , \ \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l} \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \pi$$

مثال (1)



في الشكل المقابل: C نقطة خارج مستوى الدائرة التي مركزها M، D منتصف $\overline{AB}$

ABC مثلث فيه $CA = CB$. إذا كان $MC = \sqrt{50}$ cm , $DM = DC = 5$ cm

أثبت أن:

a $\overline{MC} \perp \overline{AB}$

b مستوى الدائرة $\perp (ACB)$

الحل:

المعطيات:

$\overline{AB}$ وتر في دائرة مركزها M، D منتصف $\overline{AB}$

ABC مثلث فيه $CA = CB$،

$DM = DC = 5$ cm , $MC = \sqrt{50}$ cm

a المطلوب: إثبات أن: $\overline{MC} \perp \overline{AB}$

البرهان:

في المثلث ABC متطابق الضلعين

$\because$ D منتصف $\overline{AB}$

(1) $\therefore \overline{CD} \perp \overline{AB}$

في مستوي الدائرة

$\because$ D منتصف $\overline{AB}$، M مركز الدائرة

(2) $\therefore \overline{MD} \perp \overline{AB}$

من (1), (2) نجد أن: $\overleftrightarrow{AB} \perp (CDM)$

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{MC}$

b المطلوب إثبات أن مستوى الدائرة $\perp (ACB)$

البرهان:

(1) $\because \overline{CD} \perp \overline{AB}$

$$(CM)^2 = (\sqrt{50})^2 = 50$$

$$(CD)^2 + (DM)^2 = 5^2 + 5^2 = 50$$

(2) $\therefore \overline{CD} \perp \overline{DM}$

$\therefore$ Δ CDM قائم الزاوية في D

من (1), (2) نجد أن: مستوي الدائرة $\perp \overleftrightarrow{CD}$

$\because \overline{CD} \subset (ACB)$

$\therefore$ $(ACB) \perp$ مستوي الدائرة (نظرية)

حاول أن تحل

1 في الشكل المقابل، C دائرة مركزها O، $\overline{AB}$ قطر.

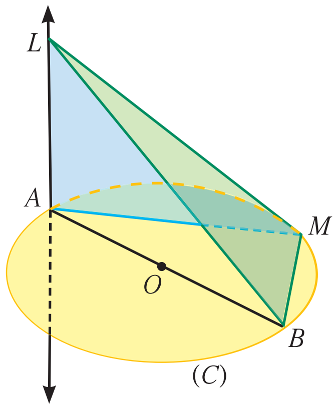
M نقطة تنتمي إلى الدائرة.

$\overleftrightarrow{LA}$ متعامد مع مستوي الدائرة.

أثبت أن:

a $\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$

b $(LBM) \perp (LAM)$



مثال (2)

A, B, C, D أربع نقاط ليست مستوية معًا.

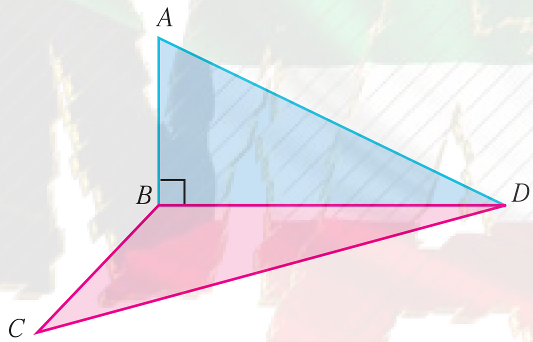
إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

وكان $(AD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2$

أثبت أن:

a $\overline{BC} \perp \overline{DC}$

b $(ABD) \perp (CBD)$



الحل:

المعطيات:

A, B, C, D أربع نقاط ليست مستوية معًا.

$\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$, $(AD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2$

المطلوب:

a إثبات أن: $\overline{BC} \perp \overline{DC}$

البرهان:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ (معطى)

$\overleftrightarrow{BD} \subset (BCD)$

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{BD}$

$\therefore$ ABD مثلث قائم الزاوية في B ومنه:

$(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2 \qquad (1)$

ولكن (معطى) $(AD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 \qquad (2)$

من $(1), (2)$ نجد أن: $(BD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2$

$\therefore$ BDC مثلث قائم الزاوية في C (عكس نظرية فيثاغورث)

$\therefore \overline{BC} \perp \overline{DC}$

b المطلوب: إثبات أن $(ABD) \perp (CBD)$

البرهان:

(معطى) $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (ABD)$

(نظرية) $\therefore \ (ABD) \perp (CBD)$

حاول أن تحل

2 في شبه المكعب $ABCDEFGH$ المقابل:

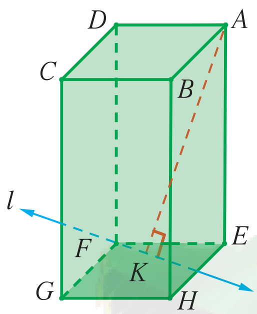
$\overleftrightarrow{l}$ مستقيم في $(EFGH)$ يمر في F.

$\overline{AK} \perp \overleftrightarrow{l}$

أثبت أن:

a $\overline{EK} \perp \overleftrightarrow{l}$

b $(FDK) \perp (AEK)$



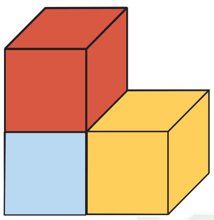
المرشد لحل المسائل

درست الأشكال ثنائية الأبعاد والمجسمات ثلاثية الأبعاد. ولكن السؤال الذي يطرح دائمًا هو: كيف نرسم على ورقة مجسمًا (شكلًا ثلاثي الأبعاد) له طول وعمق وارتفاع؟ هذا يتطلب مهارات خاصة.

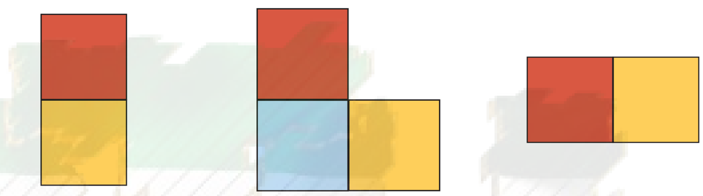
إن رسم المجسم على الورقة كما يراه المراقب من أكثر من جهة يسمح بتكوين رؤية واضحة للمجسم.

نرسم عادة المجسمات كما نشاهدها من 3 وجهات: **الأمامية، العلوية، الجانبية**. وهي تسمح بالتعرف على خصائص المجسم.

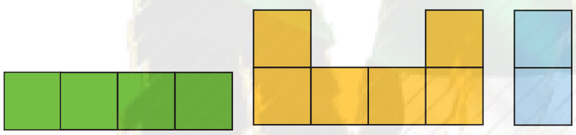
1 ارسم الشكل المقابل كما تشاهده من الأعلى، من الأمام، ثم من جهة اليمين.

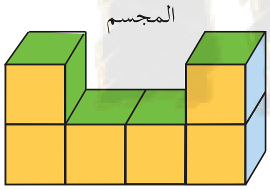


الحل:



2 تبيّن الأشكال التالية رؤية مجسم من الوجهات الثلاث.
ضع رسمًا لهذا المجسم.

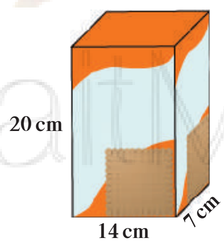




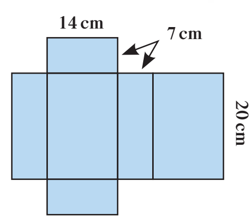
الحل:

نبدأ من الجهة الأمامية تتكون القاعدة من 4 مكعبات صفراء
وفي كل جانب يعلوه مكعب واحد.

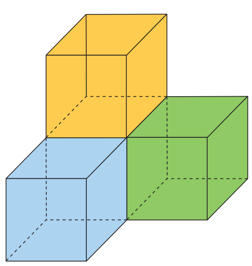
3 ارسم شبكة تمثل العلبة المقابلة.
ثم بيّن عليها الأبعاد الثلاثة.



الحل:

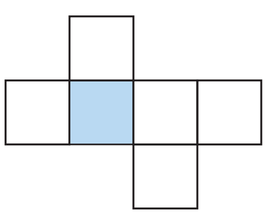


مسائل إضافية

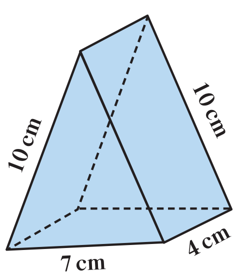


1 ارسم الشكل المقابل كما تشاهده من الأعلى، من الأمام،
ثم من جهة اليمين.

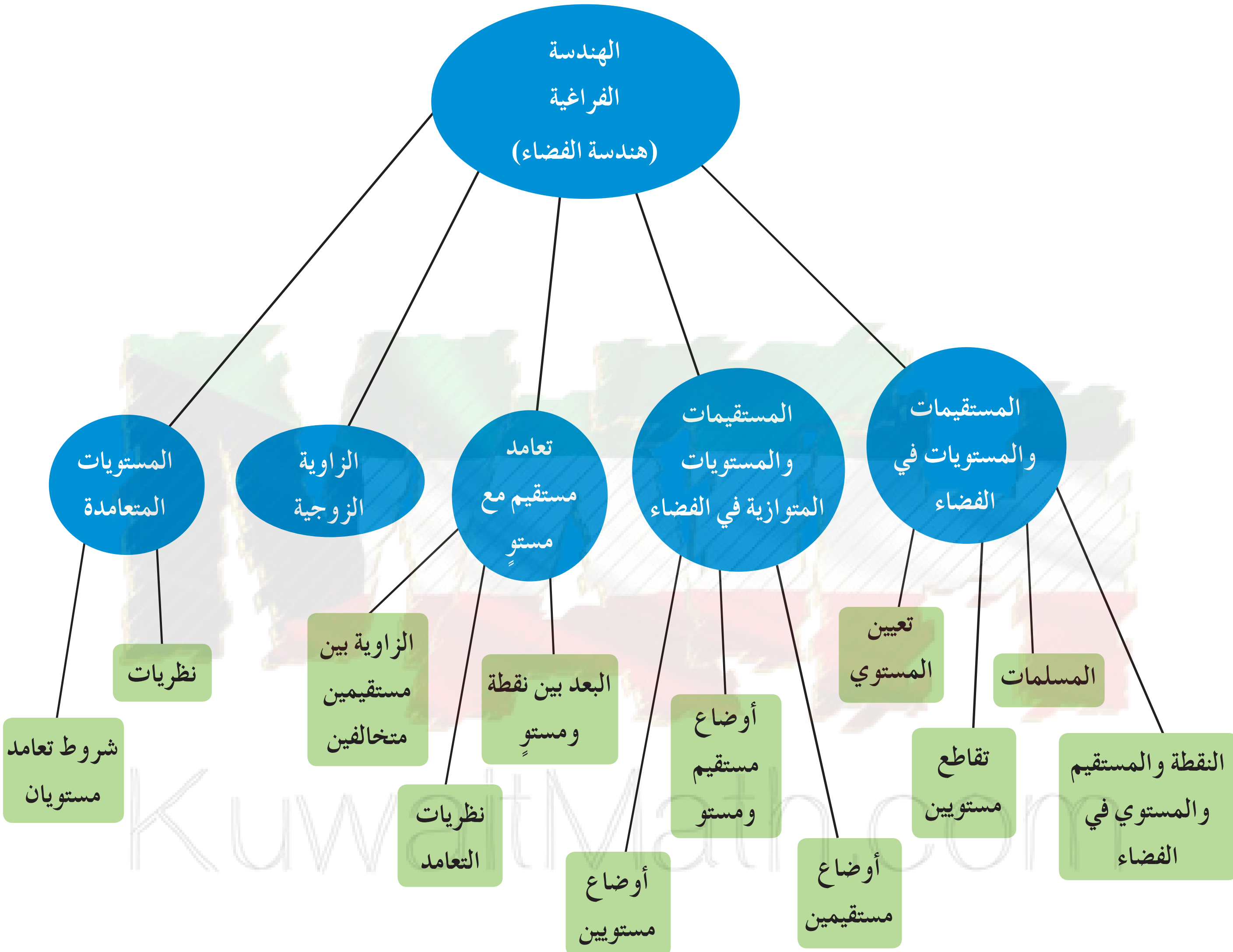
2 الشبكة نمط ثنائي الأبعاد يمكن طيّه لتكوين شكل ثلاثي الأبعاد.
تمثل الشبكة المقابلة شبكة مكعب.
اقطع الشبكة واطوها للحصول على المكعب.



3 ارسم شبكة للمجسم المقابل. ثم بيّن الأبعاد على هذه الشبكة.



مخطط تنظيمي للوحدة العاشرة



ملخص

- أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم واحد فقط.
- في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست مستقيمة.
- من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بالنقطة ويوازي المستقيم المعلوم.
- أي ثلاث نقاط مختلفة وليست مستقيمة يحويها مستوٍ وحيد.
- يحوي الفضاء على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية.
- أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعيّن مستويًّا واحدًا فقط.

- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متقاطعان يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- يكون مستقيمان في الفضاء:

(i) متقاطعين إذا كان بينهما نقطة واحدة مشتركة.

(ii) متوازيين إذا كانا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين.

(iii) متخالفين إذا كان لا يحويهما مستوٍ واحد.

- المستقيم موازٍ للمستوي إذا لم يكن بينهما نقاط مشتركة أو يقع بتمامه في المستوى.
- المستقيم يقطع المستوي إذا كان بينهما نقطة واحدة مشتركة.
- المستقيم يقع في المستوي إذا كان بينهما نقطتين مختلفتين على الأقل.
- يتقاطع مستويان في خط مستقيم.
- إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيمًا في المستوي، فإنه يوازي المستوي.
- إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.
- يكون $\overleftrightarrow{l}$ عموديًّا على المستوي π إذا كان $\overleftrightarrow{l}$ عموديًّا على جميع المستقيمات الواقعة في المستوي.
- المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًّا على مستوييهما.
- جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواة في مستوٍ واحد عموديًّا على المستقيم المعلوم.
- إذا كان مستقيم عموديًّا على كل من مستويين فإنهما يكونان متوازيين.
- إذا كان مستقيم عموديًّا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديًّا على المستوي الآخر.
- المستقيمان العموديان على مستوٍ متوازيان.
- إذا توازى مستقيمان أحدهما عمودي على مستوٍ كان المستقيم الآخر عموديًّا على المستوي أيضًا.
- الزاوية المستوية لزاوية زوجية هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستوٍ عمودي على حافتها.
- يكون مستويان متعامدين إذا كانت الزاوية الزوجية بينهما زاوية قائمة.
- إذا كان مستقيم عموديًّا على مستوٍ، فكل مستوٍ يمر بذلك المستقيم يكون عموديًّا على المستوي.