الوحدة السابعة

الأعداد المركبة

Complex Numbers

مشروع الوحدة: استخدام الرادار في مراقبة حركة الطائرات

1 **مقدمة المشروع:** يرسل الرادار موجات عالية التردد ويتلقى انعكاسها، ما يسمح بتحديد موقع الطائرة وبعدها عن المطار. وكل هذا يتم باستخدام الإحداثيات القطبية.

2 **الهدف:** إيجاد البعد بين طائرتين باستخدام الإحداثيات القطبية عند رصدهما بواسطة الرادار.

3 **اللوازم:** أوراق رسم بياني – آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 **أسئلة حول التطبيق:**

رصد رادار أحد المطارات طائرتين على الارتفاع نفسه، وكانت إحداثياتهما القطبية $(8\text{ km}, 60^{\circ})$, $(14\text{ km}, 150^{\circ})$.

a ضع رسمًا بيانيًّا ينمذج موقع الطائرتين معتبرًا أن المطار هو نقطة الأصل.

b أوجد العددين المركبين z_1 , z_2 بالصورة المثلثية اللذين يمثلان موقعي الطائرتين.

c احسب القيمة المطلقة للعدد المركب $|z_1 - z_2|$، ثم استنتج البعد بين الطائرتين.

5 **التقرير:** اكتب تقريرًا يبيّن بوضوح خطوات الحل وكيف استفدت من دروس هذه الوحدة للإجابة عن الأسئلة. دعّم تقريرك بملصق أو بعرض على جهاز الإسقاط.

دروس الوحدة

الأعداد المركبة	الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب	حل معادلات
7–1	7–2	7–3

الوحدة السابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كتابة معادلات خطية وحلها.
- تعلمت حل معادلات تربيعية.
- تعلمت رسم دوال تربيعية بيانيًّا.
- تعلمت استخدام بيان الدوال التربيعية لحل مسائل معادلات تربيعية.

ماذا سوف تتعلم؟

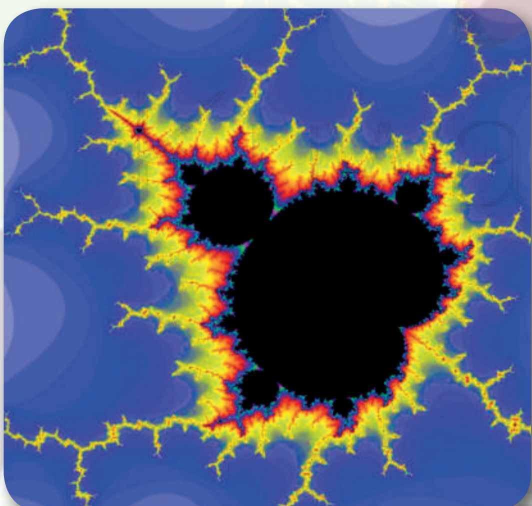
- الوحدة التخيلية i.
- الصورة الجبرية للعدد المركب.
- مجموعة الأعداد المركبة.
- الصورة المثلثية للعدد المركب.
- جمع الأعداد المركبة وطرحها وضربها وقسمتها.
- إيجاد الجذر التربيعي لعدد مركب.
- حل معادلات من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية تتضمن أعدادًا مركبة.

المصطلحات الأساسية

الوحدة التخيلية – الأعداد المركبة – الصورة الجبرية – العدد التخيلي – مرافق العدد المركب – الإحداثيات القطبية – مقياس العدد المركب – سعة العدد المركب – الصورة المثلثية.

أضف إلى معلوماتك

طوّر عالم الرياضيات بنوا مندلبرو Benoit Mandelbrot (1924 – 2010) مفهوم الكسريات Fractals، مما سمح بنمذجة أشكال طبيعية مثل القرنبيط والرئة والمنحدر الصخري، واستخدم متتاليات تتضمن أعدادًا مركبة لرسم بيانات مجموعات بواسطة الحاسوب.



7-1

الأعداد المركبة

Complex Numbers

دعنا نفكر ونتناقش

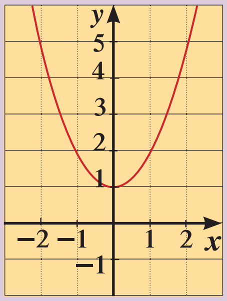
المعادلات التربيعية التي مميزها عددًا سالبًا ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مثل $x^2 + 1 = 0$ أو $-3x^2 + x - 1 = 0$

يبيّن الشكل المقابل أن الدالة $f(x) = x^2 + 1$ ليس لها أصفارًا حقيقية وبالتالي، فالمعادلة التربيعية $x^2 + 1 = 0$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$.

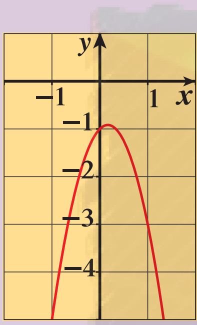
لحل هذه المعادلات اقترح الرياضيون في القرن السابع عشر توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية وذلك بتطوير مفهوم الجذر التربيعي ليتضمن الأعداد الحقيقية السالبة وصولًا إلى مجموعة الأعداد المركبة.

عند حل المعادلة $x^2 + 1 = 0$ أو $x^2 = -1$ علينا إيجاد عدد مربعه يساوي (-1).

استخدم $\sqrt{-1}$ للدلالة عن هذا العدد غير الحقيقي، ثم استخدم الرمز (i) بدلًا من $\sqrt{-1}$.



$f(x) = x^2 + 1$



$f(x) = -3x^2 + x - 1$

الأعداد المركبة Complex Numbers

الوحدة التخيلية Imaginary Unit

هي العدد الذي مربعه (-1) ويرمز إليه بالرمز i

$$i = \sqrt{-1} \quad , \quad i^2 = -1$$

الأعداد التخيلية:

- لأي عدد حقيقي موجب m ،

$$\sqrt{-m} = \sqrt{m}\, i$$

- تسمى الأعداد التي على الصورة bi حيث $b \in \mathbb{R}^*$ أعدادًا تخيلية.

مجموعة الجذور التربيعية الموجبة والسالبة للأعداد الحقيقية السالبة تكوّن مجموعة الأعداد التخيلية.

سوف تتعلم

- الوحدة التخيلية.
- الصورة الجبرية للعدد المركب.
- مرافق العدد المركب.
- العمليات على الأعداد المركبة.

المفردات والمصطلحات:

- الوحدة التخيلية The Imaginary Unit
- العدد المركب The Complex Number
- جزء حقيقي Real Part
- جزء تخيلي Imaginary Part
- الصورة الجبرية The Algebraic Form
- مرافق العدد Conjugate Number
- العمليات على الأعداد المركبة The Operations on the Complex Numbers
- قوى العدد المركب Powers of a Complex Number

معلومة رياضية:

يستخدم أيضًا الحرف الأبجدي ت للتعبير عن الوحدة التخيلية i.

مثال (1)

بسِّط كلًّا مما يلي مستخدمًا الوحدة التخيلية i :

ⓐ $\sqrt{-4}$ ⓑ $\sqrt{-8}$

الحل:

استخدم $\sqrt{-m} = \sqrt{m}\,i$

ⓐ $\sqrt{-4} = 2i$

بسِّط $\sqrt{8}$

ⓑ $\sqrt{-8} = \sqrt{8}\,i$

$= 2\sqrt{2}\,i$

حاول أن تحل

1 بسِّط كل عدد مما يلي مستخدمًا الوحدة التخيلية i:

ⓐ $\sqrt{-2}$ ⓑ $-\sqrt{-12}$ ⓒ $\sqrt{-36}$

تعريف: العدد المركب **Complex Number**

العدد المركب هو عدد على الصورة $a + bi$ حيث a , b عددان حقيقيان، i الوحدة التخيلية.

يمكن كتابة أي عدد مركب على الصورة $z = a + bi$

الصورة $a + bi$ تسمى **الصورة الجبرية** للعدد المركب.

ويسمى a **الجزء الحقيقي Real Part**

ويسمى b **الجزء التخيلي Imaginary Part**

ويرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$.

$z = a + bi$

الجزء الحقيقي ← a ، الجزء التخيلي ← b

في العدد المركب $z = a + bi$:

إذا كان $b = 0$، فإن $z = a$ يسمى **عددًا حقيقيًّا**.

إذا كان $b \neq 0$, $a = 0$، فإن $z = bi$ يسمى **عددًا تخيليًّا**.

ملاحظة:
يجب التمييز بين الجزء التخيلي b والعدد التخيلي bi

نشاط (1)

أكمل الجدول التالي:

العدد المركب	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
$2 + 3i$	2	3
	4	-5
$i - 1$		
7		
	0	-1

مثال (2)

اكتب كلًّا من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

a) $\sqrt{-9}+6$ b) $\dfrac{1+\sqrt{-25}}{4}$ c) $1-\sqrt{-20}$

الحل:

a) $\sqrt{-9}+6 = 3i+6$

$= 6+3i$

$\sqrt{-9} = \sqrt{9}\,i = 3i$

الصورة الجبرية $a+bi$

b) $\dfrac{1+\sqrt{-25}}{4} = \dfrac{1+5i}{4}$

$= \dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}i$

$\sqrt{-25} = \sqrt{25}\,i = 5i$

الصورة الجبرية

c) $1-\sqrt{-20} = 1-\sqrt{20}\,i$

$= 1-2\sqrt{5}\,i$

$\sqrt{-20} = \sqrt{20}\,i$

$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

حاول أن تحل

2 اكتب كلًّا من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

a) $\sqrt{-18}+7$ b) $\dfrac{10-\sqrt{-100}}{5}$ c) $\dfrac{\sqrt{-9}+5}{7}$

- كل عدد حقيقي هو أيضًا عدد مركب: $a = a+0i$.
- مجموعة الأعداد الحقيقية ومجموعة الأعداد التخيلية هما مجموعتان جزئيتان من مجموعة الأعداد المركبة.

يبيّن المخطط أدناه مجموعات الأعداد التي هي مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد المركبة إضافة إلى أمثلة على كل مجموعة.

Complex Numbers الأعداد المركبة

$3+2i\ ,\ 1-5i\ ,\ \sqrt{2}\,i+4\ ,\ 2.7+5.1i$

الأعداد التخيلية Imaginary Numbers

$2i$

$-\sqrt{3}\,i$

$7.3i$

$-\dfrac{3}{5}i$

Real Numbers الأعداد الحقيقية

الأعداد غير النسبية Irrational Numbers

$-\sqrt{2}\ ,\ \pi\ ,\ e\ ,\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

Rational Numbers الأعداد النسبية

$\dfrac{4}{7}\ ,\ 0.\overline{3}\ ,\ \dfrac{8}{5}$

Integers الأعداد الصحيحة

$-1\ ,\ -2\ ,\ -3$

Whole Numbers الأعداد الكلية

$0\ ,\ 1\ ,\ 3\ ,\ 7$

تساوي عددين مركبين
Equal Complex Numbers

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان.

ليكن: $z_1 = a_1 + b_1 i \ , \ z_2 = a_2 + b_2 i$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ , \ b_1 = b_2$$

مثال (3)

أوجد قيم كل من $x , y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

a $12 + 3i = 4x - 9yi$ b $x^2 - y^2 i = 9 - 25i$ c $2x + yi = 1$

الحل:

a $12 + 3i = 4x - 9yi$

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ , \ b_1 = b_2$

بسّط

$\therefore \ 12 = 4x \Rightarrow x = 3 \ ,$

$3 = -9y \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$

b $x^2 - y^2 i = 9 - 25i$

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ , \ b_1 = b_2$

بسّط

$\therefore \ x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \ , \ x = -3 \ ,$

$-y^2 = -25 \Rightarrow y = 5 \ , \ y = -5$

c $2x + yi = 1$

$1 = 1 + 0i$

$\therefore \ 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$y = 0$

حاول أن تحل

3 أوجد قيم كل من $x , y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

a $x + 5i = 7 - 3yi$ b $(x + 3) + y^2 i = 5 - yi$ c $3i = 2x - 5yi$

• إذا ساوى عدد مركب الصفر فإن جزءه الحقيقي يساوي الصفر وجزءه التخيلي يساوي الصفر أيضًا، والعكس صحيح.

$$x + yi = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \ , \ y = 0)$$

التمثيل البياني لعدد مركب
Representation of a Complex Number

يمكن وضع العدد المركب $z = a + bi$ على صورة الزوج المرتب (a, b).

الإحداثي السيني هو الجزء الحقيقي والإحداثي الصادي هو الجزء التخيلي.

وتعرف **بالصورة الديكارتية** للعدد المركب.

$$z = a + bi \longleftrightarrow M(a\,,b)$$

الصورة الجبرية — الصورة الديكارتية

كل نقطة في المستوى الإحداثي تمثل عددًا مركبًا، وكل عدد مركب يناظر (تمثله) نقطة في المستوى الإحداثي.

في هذه الحالة يسمى المستوى الإحداثي **المستوى المركب (مستوى أرجاند)**، ويسمى محور السينات **بالمحور الحقيقي**، ويسمى محور الصادات **بالمحور التخيلي**.

مثال (4)

مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

a $z_1 = 3+2i$ — b $z_2 = -1$ — c $z_3 = -i-2$ — d $z_4 = i$

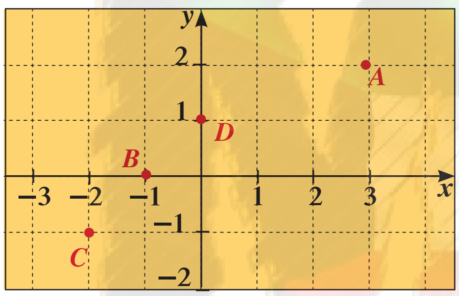
الحل:

a $z_1 = 3+2i$ تمثله النقطة $A(3\,,2)$.

b $z_2 = -1$ تمثله النقطة $B(-1\,,0)$.

c $z_3 = -i-2 = -2-i$ تمثله النقطة $C(-2\,,-1)$.

d $z_4 = i$ تمثله النقطة $D(0\,,1)$.



حاول أن تحل

4 مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

a $z_1 = 4-i$ — b $z_2 = -3i$ — c $z_3 = -4-3i$ — d $z_4 = 2$

مثال (5)

اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط: $M(3\,,2)$, $L(2\,,-1)$, $J(0\,,-5)$.

الحل:

النقطة $J(0\,,-5)$ تمثل العدد المركب $z_1 = 0-5i = -5i$.

النقطة $L(2\,,-1)$ تمثل العدد المركب $z_2 = 2-i$.

النقطة $M(3\,,2)$ تمثل العدد المركب $z_3 = 3+2i$.

حاول أن تحل

5 اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط $N(-4\,,1)$, $H(1\,,-2)$, $K(7\,,0)$.

أولًا: جمع وطرح الأعداد المركبة Adding and Subtracting Complex Numbers

لجمع عددين مركبين نجمع جزءيهما الحقيقيين معًا ونجمع جزأيهما التخيليين معًا.

كذلك لطرح عددين مركبين نطرح الجزءين الحقيقيين ونطرح الجزءين التخيليين كالتالي:

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i \ , \ z_2 = a_2 + b_2 i$ عددين مركبين فإن:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

خواص عملية الجمع على الأعداد الحقيقية تستمر مع عملية الجمع على الأعداد المركبة كما يلي:

الخاصية	$\forall \ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
التجميعية	$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

مثال (6)

إذا كان: $z_3 = 2i \quad , \quad z_2 = 4 - 7i \quad , \quad z_1 = 2 + 3i$ فأوجد:

a $z_1 + z_2$ **b** $z_1 - z_2$ **c** $z_3 + z_2 + z_1$

الحل:

a
$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 - 7i)$$
$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
$$= (2 + 4) + (3 - 7)i$$
بسِّط
$$= 6 - 4i$$

b
$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (4 - 7i)$$
$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
$$= (2 - 4) + (3 - (-7))i$$
بسِّط
$$= -2 + 10i$$

c
الخاصية التجميعية
$$z_3 + z_2 + z_1 = z_3 + (z_2 + z_1)$$
الخاصية الإبدالية
$$= z_3 + (z_1 + z_2)$$
$$= 2i + 6 - 4i$$
$$= 6 - 2i$$

حاول أن تحل

6 إذا كان $z_3 = -0.3i \quad , \quad z_2 = 3.4 - 1.2i \quad , \quad z_1 = -2 + 5i$ فأوجد:

a $z_1 + z_2$ **b** $z_2 - z_1$ **c** $z_3 - z_2 - z_1$

ملاحظات:

- الصفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة $(0 = 0 + 0i)$.
- المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $-z = -a - bi$

مثلًا: إذا كان $z = 2 + 5i$ فإن $-z = -2 - 5i$

- إذا كان مجموع عددين مركبين يساوي صفرًا فإن كلًّا منهما معكوس جمعي للآخر والعكس صحيح.

أي أن: $z_1 + z_2 = 0 \Longleftrightarrow z_1 = -z_2$

- لإيجاد ناتج طرح: $z_1 - z_2$ يمكن إضافة المعكوس الجمعي لِـ z_2 إلى z_1 أي $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

ثانيًا: ضرب الأعداد المركبة Multiplying Complex Numbers

ويمكن استخدام قاعدة الضرب التالية:

إذا كان $z_1 \, , \, z_2 \in \mathbb{C} \, , \, c \in \mathbb{R}$

حيث $z_1 = a_1 + b_1 i \, , \, z_2 = a_2 + b_2 i$ فإن:

1. $c\, z_1 = ca_1 + c\, b_1 i$
2. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

البرهان:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 (-1) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \end{aligned}$$

خواص عملية الضرب على مجموعة الأعداد المركبة:

الخاصية	$\forall \; z_1 , z_2 , z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$
التجميعية	$z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3$
التوزيعية	$z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$ $z_1 \times (z_2 - z_3) = z_1 \times z_2 - z_1 \times z_3$

العدد 1 هو العنصر المحايد لعملية ضرب الأعداد المركبة $(1 = 1 + 0i)$

لضرب عددين مركبين يمكن:

استخدام الخواص أعلاه وحقيقة $i^2 = -1$ والخطوات نفسها التي تستخدم في عملية ضرب كثيرات الحدود.

مثال (7)

أوجد الناتج:

a $(5i)(-4i)$

b $3(7+5i)$

c $(2+3i)(-3+5i)$

d $4i\left(1-\frac{1}{2}i\right)\left(1+\frac{1}{2}i\right)$

الحل:

a $(5i)(-4i) = -20i^2$ — خاصية ضرب كثيرات الحدود

$= -20(-1)$ — عوّض عن i^2 بـ -1

$= 20$ — بسّط

b $3(7+5i) = 3\times 7 + 3\times 5i$ — الخاصية التوزيعية

$= 21 + 15i$ — بسّط

c $(2+3i)(-3+5i) = -6 + 10i - 9i + 15i^2$ — خاصية ضرب كثيرات الحدود

$= -6 + i + 15(-1)$ — عوّض عن i^2 بـ -1

$= -21 + i$ — بسّط

d $4i\left(\left(1-\frac{1}{2}i\right)\left(1+\frac{1}{2}i\right)\right) = 4i\left((1)^2 - \left(\frac{1}{2}i\right)^2\right)$ — المتطابقة $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$= 4i\left(1 - \frac{1}{4}(-1)\right)$ — عوّض عن i^2 بـ -1

$= 4i\left(\frac{5}{4}\right)$ — بسّط

$= 5i$

حاول أن تحل

7 أوجد الناتج:

a $(6-5i)(4-3i)$

b $(9+4i)(4-9i)$

c $(12i)(7i)(i+1)$

مثال (8)

إذا كان $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 5-i$ فأوجد:

a $-3z_2$

b $z_1 \cdot z_2$

الحل:

a $-3z_2 = -3(5-i)$

$= -3(5) - 3(-i)$

$= -15 + 3i$

b $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

$$= ((2)(5) - (3)(-1)) + ((2)(-1) + (5)(3))i$$

$$= (10 + 3) + (-2 + 15)i$$

$$= 13 + 13i$$

حاول أن تحل

8 إذا كان $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 4i$ فأوجد:

a $\frac{1}{2} z_1$

b $z_1 \cdot z_2$

قوى العدد المركب — Powers of a Complex Number

نستطيع حساب قوى (i) كما يلي:

$i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot (i) = -1 \times i = -i$,

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \times (-1) = 1$

بصورة عامة:

إذا كان p عدد كلي فإن:

$i^{4p} = 1$, $i^{4p+1} = i$, $i^{4p+2} = -1$, $i^{4p+3} = -i$

لاحظ أنه عند رفع (i) لعدد كلي فإن الناتج يكون أحد عناصر المجموعة $\{-1 , 1 , i , -i\}$

فمثلًا:

$i^{29} = i^{4\times7+1} = i$, $i^{15} = i^{4\times3+3} = -i$, $i^{2013} = i^{4\times503+1} = i$

- لإيجاد قوى عدد مركب نستخدم خطوات ضرب كثيرات الحدود نفسها.

مثال (9)

إذا كان $z_1 = i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

فأوجد:

a z_1^{21}

b z_2^{6}

c z_3^{2}

d z_3^{3}

الحل:

a $z_1^{21} = i^{21} = i^{4\times5+1} = i$

b $z_2^6 = (-2i)^6 = (-2)^6 \times i^6$

$= 64 \times i^{4+2} = 64 \times i^2 = 64 \times (-1) = -64$

c $z_3^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$

$= \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2$ $\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4}$ $\quad$ بسِّط $(i^2 = -1)$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d $z_3^3 = z_3^2 \cdot z_3$

$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ $\quad$ عوّض عن z_3^2 بـ : $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$= -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{3}{4}i^2$

$= -\frac{1}{4} + 0 + \frac{3}{4}(-1)$

$= -1$

حاول أن تحل

9 أوجد:

a $5(i)^{73}$ $\quad$ b $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3$ $\quad$ c $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4$

ثالثًا: قسمة الأعداد المركبة — Dividing Complex Numbers

مرافق العدد المركب — Complex Conjugate

ناتج ضرب العددين المركبين $a - bi$, $a + bi$ غير الصفريين هو عدد حقيقي موجب:

$$(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

للاستفادة من هذه العلاقة الخاصة نعرض ما يلي:

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $\overline{z} = \overline{a+bi} = a - bi$

فمثلًا: مرافق العدد $2 + 3i$ هو $2 - 3i$

والعدد $\overline{-7i + 2}$ هو $2 + 7i$

ملاحظة: لإيجاد المرافق $(\overline{z})$ يجب أن يكون z على الصورة الجبرية $z = a + bi$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$.

معلومة:
إذا كان $z = a$ عدد حقيقي
فإن $\overline{z} = z = a$

خواص مرافق العدد المركب:

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i \quad , \quad z_2 = a_2 + b_2 i$

فإن:

- $z_1 + \overline{z_1} = 2a_1$
- $z_1 - \overline{z_1} = 2bi$
- $z_1 \cdot \overline{z_1} = a_1^2 + b_1^2$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$

مثال (10)

إذا كان $z_2 = 5 - 2i \quad , \quad z_1 = 3 + 4i$ فأوجد:

a) $z_1 + \overline{z_1}$ b) $z_1 - \overline{z_1}$ c) $\overline{(\overline{z_1})}$

d) $\overline{z_1 + z_2}$ e) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ f) $\overline{z_1 \cdot z_2}$

الحل:

نوجد كل من: $\overline{z_2} = 5 + 2i \quad , \quad \overline{z_1} = 3 - 4i$

a) $z_1 + \overline{z_1} = 3 + 4i + 3 - 4i = 6$

b) $z_1 - \overline{z_1} = 3 + 4i - (3 - 4i) = 8i$

c) $\overline{(\overline{z_1})} = \overline{(\overline{3 + 4i})} = \overline{3 - 4i} = 3 + 4i$

d) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(3 + 4i) + (5 - 2i)} = \overline{3 + 4i + 5 - 2i}$

$= \overline{8 + 2i} = 8 - 2i$

e) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{3 + 4i} \cdot \overline{5 - 2i}$

$= (3 - 4i)(5 + 2i)$

$= 15 + 6i - 20i + 8$

$= 23 - 14i$

f) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(3 + 4i)(5 - 2i)}$

$= \overline{15 - 6i + 20i + 8}$

$= \overline{23 + 14i}$

$= 23 - 14i$

حاول أن تحل

10 إذا كان $z_2 = 3 + 5i \quad , \quad z_1 = 2 - 7i$ فأوجد:

a) $\overline{z_1} + \overline{z_2}$ b) $\overline{z_1 - z_2}$ d) $\overline{z_1 \cdot z_2}$ e) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

تدريب: استخدم خواص المرافق أعلاه في حل المثال (10) السابق.

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z = a + bi$ يرمز له بالرمز z^{-1}:

ويكون: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi}$

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

مثال (11)

أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a $z_1 = 3 - 5i$ b $z_2 = 2i - 1$ c $z_3 = -7i$

الحل:

اضرب البسط والمقام في مرافق z_1

a $$z_1^{-1} = \frac{1}{3-5i} \times \frac{3+5i}{3+5i} = \frac{3}{9+25} + \frac{5}{9+25}i = \frac{3}{34} + \frac{5}{34}i$$

اكتب المقام في الصورة الجبرية

b $$z_2^{-1} = \frac{1}{2i-1} = \frac{1}{-1+2i} = \frac{1}{-1+2i} \times \frac{-1-2i}{-1-2i} = \frac{-1}{1+4} - \frac{2}{1+4}i = \frac{-1}{5} - \frac{2}{5}i$$

c $$z_3^{-1} = \frac{1}{-7i} = \frac{1}{-7i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-7 \times (-1)} = \frac{i}{7} = \frac{1}{7}i$$

حاول أن تحل

11 أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a $z_1 = -3i - 7$ b $z_2 = 5 + 11i$ c $z_3 = 6i$

ملاحظة: يمكنك التحقق من أن: $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2}$

لقسمة عدد مركب z_1 على عدد مركب آخر غير صفري z_2، نكتبهما على شكل كسر على الصورة $\frac{z_1}{z_2}$، نبسط الكسر بضرب كلّ من البسط والمقام في مرافق المقام.

مثال (12)

أوجد ناتج قسمة $5-6i$ على $2+3i$

الحل:

$$\frac{5-6i}{2+3i}=\frac{5-6i}{2+3i}\times\frac{2-3i}{2-3i}$$
$$=\frac{10-15i-12i+18i^2}{(2)^2+(3)^2}$$
$$=\frac{10-18}{13}-\frac{15+12}{13}i$$
$$=\frac{-8}{13}-\frac{27}{13}i$$

حاول أن تحل

12 أوجد ناتج قسمة $3-2i$ على $1+2i$

مثال (13)

اكتب كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية للعدد المركب:

a $\frac{2}{3-i}$ b $\overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)}$

الحل:

a ضرب البسط والمقام في مرافق المقام
$$\frac{2}{3-i}=\frac{2}{3-i}\times\frac{3+i}{3+i}$$
$$=\frac{6+2i}{3^2+1^2}$$
بسّط
$$=\frac{6}{10}+\frac{2}{10}i$$
$$=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$$

b ضرب البسط والمقام في مرافق المقام
$$\frac{5+i}{2-3i}=\frac{5+i}{2-3i}\times\frac{2+3i}{2+3i}$$
خاصية ضرب كثيرات الحدود
$$=\frac{10+15i+2i+3i^2}{2^2+3^2}$$
بسّط
$$=\frac{7+17i}{13}=\frac{7}{13}+\frac{17}{13}i$$
$$\therefore\ \overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)}=\overline{\left(\frac{7+17i}{13}\right)}=\frac{7}{13}-\frac{17}{13}i$$

حاول أن تحل

13 اكتب كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $\frac{3+i}{2+5i}$ b $\frac{2-i}{2+i}$ c $\frac{\overline{5+i}}{2-3i}$

ملاحظة: مرافق ناتج قسمة عدد مركب على عدد مركب آخر غير صفري يساوي ناتج قسمة مرافق العدد المركب الأول على مرافق العدد المركب الثاني. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

7-2

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

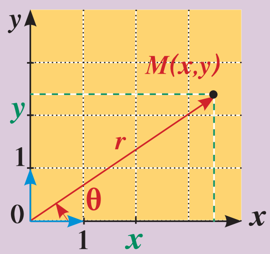
سوف تتعلم

- الإحداثيات القطبية.
- تمثيل الأعداد المركبة بيانيًا.
- الصورة المثلثية للعدد المركب.
- التحويل بين الصورة الجبرية والصورة المثلثية.

المفردات والمصطلحات:

- إحداثيات قطبية Polar Coordinates
- الصورة المثلثية The Trigonometric Form
- مقياس العدد المركب Norme of the Complex Number
- سعة العدد المركب Magnitude of the Complex Number
- تحويل Transformation

دعنا نفكر ونتناقش



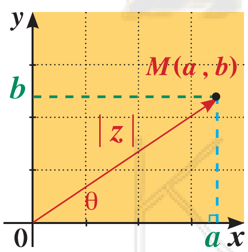
لنأخذ نقطة $M(x, y)$ في المستوى الإحداثي

حيث M ليست نقطة الأصل O

يمكن تحديد موقع النقطة بقياس الزاوية الموجهة في الوضع القياسي $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ وبالمسافة r بين النقطتين O، M

1. أوجد x, y بمعلومية θ، r
2. استخدم نظرية فيثاغورث للتعبير عن r بدلالة x, y
3. هل يمكن دائمًا تحديد قياس θ؟
4. أوجد قيمة r وقياس θ لكل من النقاط $M_1(-3,0)$، $M_2(0,1)$، $M_3(\sqrt{2},\sqrt{2})$

القيمة المطلقة لعدد مركب Absolute Value of a Complex Number



القيمة المطلقة للعدد المركب هي المسافة بين النقطة التي تمثل هذا العدد ونقطة الأصل في المستوى الإحداثي المركب والتي يمكنك إيجادها باستخدام نظرية فيثاغورث.

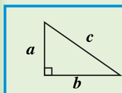
بصفة عامة إذا كان $z = a + bi$

فإن: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

معلومة:

يمكن استخدام التعبير Modulus للدلالة على القيمة المطلقة للعدد المركب.

تذكر:



نظرية فيثاغورث:

$c^2 = a^2 + b^2$,

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

مثال (1)

أوجد:

(a) $|5i|$ (b) $|3 - 4i|$

الحل:

(a) $5i$ هي 5 وحدات انطلاقًا من نقطة الأصل على المحور التخيلي.

$\therefore\ |5i| = 5$

(b) $|3 - 4i|$

$= \sqrt{3^2 + (-4)^2}$ $\quad |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \sqrt{9 + 16}$ $\quad$ بسِّط

$= 5$

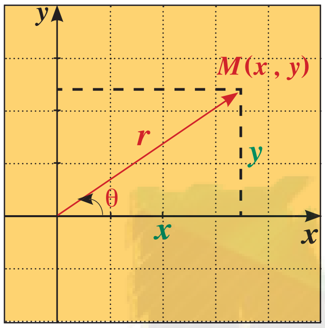
حاول أن تحل

1 أوجد:

a $|6-4i|$ **b** $|-2+5i|$

الإحداثيات القطبية Polar Coordinates

يمثّل الزوج المرتب (r,θ) الإحداثيات القطبية للنقطة M على المستوى الإحداثي المركب ونعلم أيضًا أن الزوج المرتب (x,y) يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة M في نفس المستوى الإحداثي.



يمكن التحويل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية باستخدام:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$x=r\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta$$

حيث θ هي الزاوية الموجهة في الوضع القياسي التي يمر ضلعها النهائي بالنقطة M .

مثال (2)

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

a $M\left(5,\frac{\pi}{4}\right)$ **b** $N\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{6}\right)$

الحل:

a $M\left(5,\frac{\pi}{4}\right)$

الزوج المرتب $\left(5,\frac{\pi}{4}\right)$ يمثل الإحداثيات القطبية للنقطة M حيث: $r=5\ ,\ \theta=\frac{\pi}{4}$

$$x=r\cos\theta=5\cos\frac{\pi}{4}=5\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$y=r\sin\theta=5\sin\frac{\pi}{4}=5\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore$ الزوج المرتب الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة M : $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

تذكر:

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

b $N\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$

الزوج المرتب $\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ يمثل الإحداثيات القطبية للنقطة N حيث: $r = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{5\pi}{6}$

$$y = r\sin\theta = \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{6} = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = r\cos\theta = \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{6} = \sqrt{2} \times \frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{6}}{2}$$

$\therefore$ الزوج المرتب الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة N: $\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

حاول أن تحل

2 أوجد الزوج المرتب (x, y) الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين:

a $A(5, 300^\circ)$ **b** $B\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$

للتحويل من الإحداثيات الديكارتية (x, y) إلى الإحداثيات القطبية (r, θ) نوجد قيمة r باستخدام القاعدة: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ثم نوجد قياس زاوية الإسناد α باستخدام: $\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$ بعد ذلك تحديد الربع الذي تقع فيه هذه الزاوية θ من إشارة كلٍّ من x, y ونوجدها.

مثال (3)

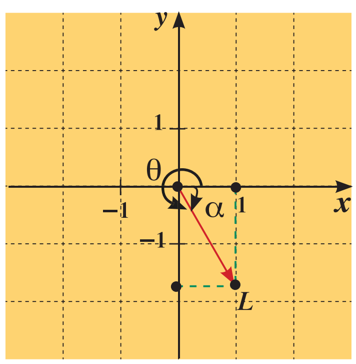
حوّل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية (r, θ) لكل مما يلي:

a $L(1, -\sqrt{3})$, $0 \le \theta < 2\pi$ **b** $M(-3, -4)$, $0^\circ \le \theta < 360^\circ$

الحل:

a $L(1, -\sqrt{3})$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$



نفرض أن α زاوية الإسناد

$$\therefore \tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

وبالتالي: $\alpha = \tan^{-1}\sqrt{3}$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$\because x > 0$, $y < 0$

تذكر:

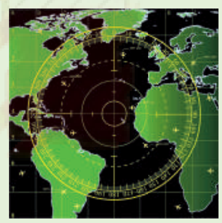
عند استخدام الآلة الحاسبة تأكد من وضعها بما يناسب قياس الزاوية:

الستيني: DEG

الدائري: RAD

الربط بالحياة:

يعتمد مراقبو الحركة الجوية في المطارات على أنظمة الرادار لتوجيه مسار الطائرات وللتأكّد من سلامة رحلاتها الجوية، أي الحفاظ على المسافة اللازمة في ما بينها، وإبقائها بعيدًا عن التضاريس الأرضية. وكل ذلك يتم بالاعتماد على شاشة الرادار التي تبيّن قياسات الزوايا، والمسافات بين الطائرات وموقع كل منها.



تذكر:

إذا كانت α زاوية الإسناد للزاوية التي قياسها θ فإن:

$$\theta = \begin{cases} \alpha & : x > 0, y > 0 \\ \pi - \alpha & : x < 0, y > 0 \\ \pi + \alpha & : x < 0, y < 0 \\ 2\pi - \alpha & : x > 0, y < 0 \end{cases}$$

تذكر:

عندما نتحدث عن الإحداثيات القطبية نعني الزوج المرتب (r, θ).

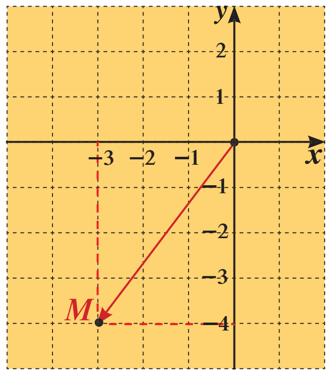
وعندما نتحدث عن الإحداثيات الديكارتية نعني الزوج المرتب (x, y).

$\therefore$ L تنتمي إلى الربع الرابع،

$\therefore \quad \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

وبالتالي الإحداثيات القطبية هي: $L\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$

b $M(-3, -4)$



$r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{9 + 16}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$

نفرض أن α زاوية الإسناد

$\therefore \quad \tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{-4}{-3}\right| = \frac{4}{3}$

وبالتالي: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

$\because \; x < 0, \quad y < 0$

$\therefore$ M تنتمي إلى الربع الثالث

استخدم الآلة الحاسبة

$\therefore \quad \theta = 180° + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

$\theta = 233° \, 7' \, 48.37''$

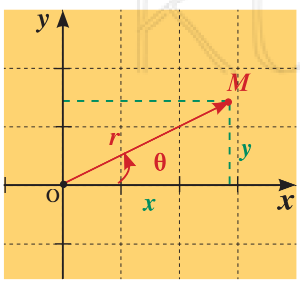
وبالتالي الإحداثيات القطبية هي $M(5, \; 233° \, 7' \; 48.37'')$

حاول أن تحل

3 أوجد الزوج المرتب (r, θ) لكل نقطة مما يلي حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$

a $D(3\sqrt{3}, 3)$ **b** $C(4, -2\sqrt{5})$

الصورة المثلثية Trigonometric Form



النقطة $M(x, y)$ تمثل العدد المركب $z = x + yi$

المسافة بين نقطة الأصل O والنقطة M هي $OM = r \; , \; r > 0$

θ هي قياس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$

> يمكن كتابة العدد المركب $z = x + yi$ على الصورة:
>
> $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ وتعرف **بالصورة المثلثية** للعدد المركب z.

معلومة:
يستخدم أحيانًا التعبير «الصورة المثلثية» بدلًا من «الصورة القطبية».

يسمى r **مقياس العدد** أو القيمة المطلقة ويرمز إليه أحيانًا بالرمز $|z|$ ويتعين بالعلاقة:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

تسمى θ **سعة** العدد المركب وتتعيّن من $\sin\theta = \frac{y}{r} \; , \; \cos\theta = \frac{x}{r}$

أو تتعين من $\tan\theta = \frac{y}{x} \; , \; x \neq 0$ وتحديد الربع.

الصورة المثلثية للعدد المركب ليست وحيدة، لأنه إذا كانت θ سعة العدد المركب $x + yi$ فإن كلًّا مما يلي سعة للعدد نفسه: $\theta + 2\pi \; , \; \theta + 4\pi, \; \dots \; , \; \theta + 2\pi k \; : \; k \in \mathbb{Z}$.

إذا كانت $\theta \in [0, 2\pi)$ أو $0° \leqslant \theta < 360°$ فتسمى السعة في هذه الحالة **بالسعة الأساسية**.

مثال (4)

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

a $z_1 = 1+\sqrt{3}\,i$ **b** $z_2 = -2-2i$ **c** $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

الحل:

a $z_1 = 1+\sqrt{3}\,i$

$x_1 = 1 , y_1 = \sqrt{3}$

$r_1 = |z_1| = \sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

نفرض أن α_1 زاوية الإسناد:

$\therefore\ \tan\alpha_1 = \left|\frac{y_1}{x_1}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{1}\right| = \sqrt{3}$

$\therefore\ \alpha_1 = \frac{\pi}{3}$

$\because\ x_1 > 0\ ,\ y_1 > 0$

$\therefore$ θ_1 تقع في الربع الأول من المستوى الإحداثي المركب.

$\therefore\ \theta_1 = \alpha_1 = \frac{\pi}{3}$

الصورة المثلثية هي: $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

b $z_2 = -2-2i$

$x_2 = -2 , y_2 = -2$

$r_2 = |z_2| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

نفرض أن α_2 زاوية الإسناد: $\tan\alpha_2 = \left|\frac{y_2}{x_2}\right| = \left|\frac{-2}{-2}\right| = 1$

$\therefore\ \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$

$\because\ x_2 < 0\ ,\ y_2 < 0$

$\therefore$ θ_2 تقع في الربع الثالث.

$\therefore\ \theta_2 = \pi+\alpha_2 = \pi+\frac{\pi}{4}$

$= \frac{5\pi}{4}$

الصورة المثلثية هي: $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

c $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ y_3 = \frac{1}{2}$

$r_3 = |z_3| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$

مراجعة سريعة:

إذا كان مقياس عدد مركب يساوي الواحد أي أن:

$|r| = 1$ فإن النقطة المناظرة تنتمي إلى دائرة الوحدة.

نفرض أن α_3 زاوية الإسناد:

$$\tan\alpha_3 = \left|\frac{y_3}{x_3}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{6}$$

$$\because \; x_3 < 0 \;,\; y_3 > 0$$

$\therefore$ θ_3 تقع في الربع الثاني.

$$\therefore \; \theta_3 = \pi - \alpha_3 = \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{5\pi}{6}$$

الصورة المثلثية هي: $z_3 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$

حاول أن تحل

4 ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

(a) $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}i$ (b) $z_2 = -1 - i$ (c) $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}i$

مثال (5)

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

(a) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(b) $z_2 = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}$

(c) $z_3 = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(d) $z_4 = \frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i\sin 390^\circ)$

الحل:

(a) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) \qquad x > 0 \;,\; y < 0$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

(b) $z_2 = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6} \qquad x > 0 \;,\; y > 0$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

تذكر:

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

تذكر:

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$

معلومة:

إذا كانت θ بالقياس السالب فإن السعة الأساسية تساوي:

$\theta + 2k\pi \;,\; k \in \mathbb{N}$

c $z_3 = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) \qquad x < 0 \ , \ y < 0$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

d $z_4 = \frac{9}{2}(\cos 30^{\circ} + i\sin 390^{\circ}) \ , \ x > 0 \ , \ y > 0$

$= \frac{9}{2}(\cos 30^{\circ} + i\sin(360^{\circ} + 30^{\circ}))$

$= \frac{9}{2}(\cos 30^{\circ} + i\sin 30^{\circ})$

تذكر:

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

تذكر:

$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$

$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

حاول أن تحل

5 ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

a $3\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

b $2\left(\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right)$

c $-\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

d $3(\cos 50^{\circ} - i\sin(-130^{\circ}))$

مثال (6)

ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

b $z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

الحل:

a $z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$z_1 = -\sqrt{3} - i$

b $z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

$z_2 = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

حاول أن تحل

6 ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b $z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

الصورة المثلثية في حالات خاصة Trigonometric Form In Special Cases

كل عدد حقيقي يمثل بنقطة على المحور الحقيقي (محور السينات). وكل عدد تخيلي يمثل بنقطة على المحور التخيلي (محور الصادات). يمثل الجدول التالي الحالات الأربع الخاصة. a, b عددان حقيقيان موجبان.

ملاحظة:
إذا كان $z = 0$، فإن:
$x = 0 \ , y = 0 \ , r = 0$
θ غير معيّنة.

العدد	المقياس	سعة (بالراديان) (rad)
a	a	0
$-a$	$\lvert -a \rvert = a$	π
bi	b	$\frac{\pi}{2}$
$-bi$	$\lvert -b \rvert = b$	$\frac{3\pi}{2}$

مثال (7)

ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

a $z_1 = 3$ b $z_2 = -5$ c $z_3 = i$ d $z_4 = -3i$

الحل:

a $r_1 = |z_1| = |3| = 3$ ، السعة الأساسية $= 0$ $\Longrightarrow z_1 = 3(\cos 0 + i \sin 0)$

b $r_2 = |z_2| = |-5| = 5$ ، السعة الأساسية $= \pi$ $\Longrightarrow z_2 = 5(\cos \pi + i \sin \pi)$

c $r_3 = |z_3| = |i| = 1$ ، السعة الأساسية $= \frac{\pi}{2}$ $\Longrightarrow z_3 = 1\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$

d $r_4 = |z_4| = |-3i| = 3$ ، السعة الأساسية $= \frac{3\pi}{2}$ $\Longrightarrow z_4 = 3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$

حاول أن تحل

7 ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

a $z_1 = 2i$ b $z_2 = 5$ c $z_3 = \frac{-3}{4}$ d $z_4 = -\frac{5}{2} i$

7–3

سوف تتعلم

- حل معادلات من الدرجة الأولى في $\mathbb{C}$.
- إيجاد الجذرين التربيعيين لعدد مركب.
- حل معادلات تربيعية مع $\Delta < 0$.

المفردات والمصطلحات:

- جذر تربيعي لعدد مركب Square Root of a Complex Number
- معادلة تربيعية Quadratic Equation

حل معادلات

Solving Equations

عمل تعاوني

1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كلًّا من المعادلتين التاليتين:

a $x^2 = -4$

b $x^2 = k$، حيث k عدد حقيقي سالب.

2 لتكن المعادلة: $x^2 - 2x + 5 = 0$

a أثبت أنه لا يوجد حلول حقيقية للمعادلة.

b استخدم طريقة إكمال المربع وأثبت أنّ: $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$.

c حل المعادلة في $\mathbb{C}$.

3 استخدم الطريقة في 2 لحل المعادلة: $z^2 + 4z + 13 = 0$ في $\mathbb{C}$.

أولًا: حل معادلات من الدرجة الأولى في $\mathbb{C}$

Solving First Degree Equations in $\mathbb{C}$

تحل معادلات الدرجة الأولى في مجموعة الأعداد المركبة بالطريقة نفسها التي تستخدم لحل معادلات الدرجة الأولى في مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $3z + 1 - i = 7 + 3i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

الحل:

$3z + 1 - i = 7 + 3i$

افصل المتغير z — $3z = 7 + 3i - 1 + i$

بسّط — $3z = 6 + 4i$

$z = \dfrac{6+4i}{3}$

$z = 2 + \dfrac{4}{3}i$

مجموعة الحل = $\left\{2 + \dfrac{4}{3}i\right\}$

حاول أن تحل

1 أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i = 3 + 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

مثال (2)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i\overline{z} = 5 - 2i$ في $\mathbb{C}$.

الحل:

لتكن $z = x + yi$ حيث x, y عددان حقيقيان.

$2z + i\overline{z} = 5 - 2i$

عوّض عن z بـ $x + yi$ — $2(x + yi) + i(\overline{x + yi}) = 5 - 2i$

مرافق $x + yi$ هو $x - yi$ — $2(x + yi) + i(x - yi) = 5 - 2i$

$2x + 2yi + xi - y(i)^2 = 5 - 2i$

$i^2 = -1$ — $2x + 2yi + xi + y = 5 - 2i$

تجميع الأعداد الحقيقية معًا والأعداد التخيلية معًا — $2x + y + (x + 2y)i = 5 - 2i$

خاصية تساوي عددين مركبين — $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$

بحل المعادلتين نحصل على:

$\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$

مجموعة الحل: $= \{4 - 3i\}$.

حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + i = 2\overline{z} + 1$ في $\mathbb{C}$.

تذكر:
يمكن حل نظام معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين باستخدام طريقة الحذف أو التعويض أو باستخدام الآلة الحاسبة.

ثانيًا: حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد في $\mathbb{C}$

Solving Quadratic Equations With One Variable in $\mathbb{C}$

تذكر:
إن العمليات على الأعداد المركبة مثل العمليات على الأعداد الحقيقية مع اعتبار $i^2 = -1$.

مثال (3)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $4x^2 + 100 = 0$ حيث $x \in \mathbb{C}$.

الحل:

$4x^2 + 100 = 0$

$4x^2 = -100$

$x^2 = -25$

$x = \pm\sqrt{-25}$

$\sqrt{-a^2} = ai$ — $x = \pm 5i$

مجموعة الحل $= \{5i, -5i\}$.

حاول أن تحل

3 أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي حيث $x \in \mathbb{C}$:

a $3x^2 + 48 = 0$ **b** $-5x^2 - 150 = 0$ **c** $8x^2 + 2 = 0$

مثال (4)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في $\mathbb{C}$.

الحل:

نحسب أولًا المميز Δ.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (16)^2 - 4(4)(25)$$

$$= -144$$

$$= (-1) \times (12)^2$$

$$= 12^2 \times i^2 \qquad i^2 = -1$$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 - 12i}{2 \times 4} = -2 - \frac{3}{2}i$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 + 12i}{2 \times 4} = -2 + \frac{3}{2}i$$

مجموعة الحل = $\left\{-2 - \frac{3}{2}i,\ -2 + \frac{3}{2}i\right\}$.

حاول أن تحل

4 أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$ في $\mathbb{C}$.

مثال (5)

لتكن المعادلة: $z^2 + z + 1 = 0$

a بدون حل المعادلة : أثبت أن العدد المركب $z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة.

b أوجد الجذر الثاني.

الحل:

a بالتعويض في الطرف الأيسر

$$z_1^2 + z_1 + 1$$

بالتعويض

$$= \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right) + 1$$

خاصية ضرب كثيرات الحدود $= \frac{1-3+2\sqrt{3}i}{4} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} + 1$

بالتبسيط $= \frac{-2+2\sqrt{3}i-2-2\sqrt{3}i+4}{4}$

$= 0$

$\therefore$ $z_1 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة.

b إذا كان z_2 هو الجذر الثاني فيكون $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$.

ومنه $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} + z_2 = -1$

$z_2 = -1 + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$z_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

وبالتالي مجموعة الحل = $\left\{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right\}$

حاول أن تحل

5 لتكن المعادلة: $2z^2 - 6z + 5 = 0$

a أثبت أن العدد المركب $z_1 = \frac{3-i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة.

b أوجد الجذر الثاني.

الجذر التربيعي لعدد مركب Square Root of a Complex Number

لإيجاد جذر تربيعي لعدد مركب z نبحث عن عدد w يكون مربعه يساوي z.

ليكن $z = a + bi$

ابحث عن $w = m + ni$، بحيث يكون $w^2 = z$

$$(m+ni)^2 = a + bi$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = a + bi$$

$$\therefore \begin{cases} m^2 - n^2 = a \\ 2mn = b \end{cases}$$

للمساعدة على حل هذا النظام ندخل معادلة ثالثة ناتجة عن كون $|w|^2 = |z|$،

أي $(\sqrt{m^2+n^2})^2 = \sqrt{a^2+b^2}$.

مثال (6)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 3 + 4i$

الحل:

ليكن $w = m + ni$ جذرًا تربيعيًّا للعدد z، فيكون $w^2 = z$

تذكر:
في المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
مجموع الجذرين $\frac{-b}{a}$
حاصل ضرب الجذرين $\frac{c}{a}$

معلومة:
إذا كان $z = a + bi, b \neq 0$ جذرًا لمعادلة معاملاتها أعدادًا حقيقية فإن $\overline{z} = a - bi$ هو جذر آخر لها.

معلومة:
إذا كان z_1, z_2 جذرين تربيعيين للعدد z فإن: $z_1 + z_2 = 0$

معلومة:
إذا كان $z_1 = z_2$ فيكون: $|z_1| = |z_2|$.

بالتعويض $(m+ni)^2 = 3+4i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود $m^2 - n^2 + 2mni = 3+4i$

خاصية المساواة لعددين مركبين
$$\begin{cases} m^2 - n^2 = 3 & (1) \\ 2mn = 4 & (2) \end{cases}$$

نضيف المعادلة: $|w|^2 = |z|$

$$\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{(3)^2+(4)^2}$$

$$m^2+n^2 = 5 \qquad (3)$$

$$\begin{cases} m^2+n^2 = 5 \\ m^2-n^2 = 3 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين (3), (1) نحصل على: $2m^2 = 8 \Rightarrow m^2 = 4$

بالتعويض في (1) نحصل على: $\therefore\ n^2 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 2\ ,\ m = -2 \\ n = 1\ \ ,\ n = -1 \end{cases}$$

من المعادلة $2mn = 4$ نستنتج أن m , n لهما الإشارة نفسها

$\therefore\ m = 2\ ,\ n = 1$ أو $m = -2\ ,\ n = -1$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = 3+4i$ هما: $w_1 = 2+i\ ,\ w_2 = -2-i$

حاول أن تحل

6 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3-4i$

مثال (7)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7-24i$.

الحل:

ليكن $w = m+ni$ جذرًا تربيعيًّا للعدد z، فيكون $w^2 = z$

بالتعويض $(m+ni)^2 = 7-24i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود $m^2 - n^2 + 2mni = 7-24i$

خاصية المساواة لعددين مركبين
$$\therefore \begin{cases} m^2 - n^2 = 7 & (1) \\ 2m\,n = -24 & (2) \end{cases}$$

نضيف المعادلة: $|w|^2 = |z|$

$$\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{(7)^2+(24)^2}$$

$$m^2+n^2 = 25 \qquad (3)$$

بجمع المعادلتين $(3), (1)$ نحصل على:

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 25 \\ m^2 - n^2 = 7 \end{cases}$$

$2m^2 = 32 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$

بالتعويض في (1) نحصل على:

$n^2 = 9 \Rightarrow n = \pm 3$

$\because 2mn = -24 \quad , \quad -24 < 0$

من المعادلة $2mn = -24$ نستنتج أن m, n لهما إشارتان مختلفان.

$\therefore \quad m = -4 \ , \ n = 3$ أو $m = 4 \ , \ n = -3$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $7 + 24i$ هما:

$w_1 = 4 - 3i \ , \ w_2 = -4 + 3i$

حاول أن تحل

7 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 5 + 12i$.

مثال (8)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -21 - 20i$.

الحل:

ليكن $w = m + ni$ جذرًا تربيعيًا للعدد z، فيكون $w^2 = z$

بالتعويض

$(m + ni)^2 = -21 - 20i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود

$m^2 - n^2 + 2mni = -21 - 20i$

خاصية المساواة لعددين مركبين

$$\therefore \begin{cases} m^2 - n^2 = -21 & (1) \\ 2mn = -20 & (2) \end{cases}$$

نضيف المعادلة:

$|w|^2 = |z|$

$\left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \sqrt{(-21)^2 + (-20)^2}$

$m^2 + n^2 = 29 \qquad (3)$

المعادلتان $(3), (1)$ تعطيان $m^2 = 4$، $n^2 = 25$ أي $m = \pm 2$، $n = \pm 5$

المعادلة (2) تبين أن m, n مختلفتان في الإشارة.

$\therefore \quad m = 2 \ , \ n = -5$ أو $m = -2 \ , \ n = 5$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $-21 - 20i$ هما:

$w_1 = 2 - 5i \ , \ w_2 = -2 + 5i$

حاول أن تحل

8 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 + 24i$

مثال (9) **تطبيق إثرائي**

أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2 + (2+i)z - 1 + 7i = 0$.

الحل:

$$\Delta = (2+i)^2 - 4(1)(-1+7i)$$

$$\Delta = 4 - 1 + 4i + 4 - 28i$$

$$\Delta = 7 - 24i$$

لإيجاد $\sqrt{\Delta}$ نبحث عن $w = m + ni$، بحيث يكون $w^2 = \Delta$.

بالتعويض $(m+ni)^2 = 7 - 24i$

من المثال (7) نستنتج: $w_1 = 4 - 3i \ , \ w_2 = -4 + 3i$

$$z_1 = \frac{-(2+i)-(4-3i)}{2} = -3 + i$$

$$z_2 = \frac{-(2+i)-(-4+3i)}{2} = 1 - 2i$$

مجموعة الحل $= \{-3+i \ , \ 1-2i\}$

الربط بالحياة

الهواتف الجوالة: آلات سهلة الاستعمال، تخدمنا وتساعدنا في حياتنا اليومية، لكننا ننسى التكنولوجيا التي تكمن وراءها، ووراء هذه التكنولوجيا الأعداد المركبة. في الهاتف الجوال، يتحول الصوت أولًا إلى إشارة كهربائية، ثم إلى سلسلة من الأعداد الثابتة التي تستخدم فقط العددين $+1$ و -1

تعتبر هذه الأعداد معاملات كثيرة حدود وتخضع لعدة تغيرات. تنتقل الإشارة على شكل موجات، فتعترضها معوقات بيئية مثل الأبنية والسيارات...

للتأكد من الحصول على الإشارة الصحيحة تُستخدم عند الاستقبال منظومة تنقية تعتمد الأعداد المركبة.

يحدث كل هذا بسرعة فائقة إذ ينتقل الصوت في الواقع وكأن شيئًا لم يحدث.

المرشد لحل المسائل

تذكر:

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

يمكن حل المعادلة: $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة.

a أثبت أن للمعادلة جذرًا تخيليًا. ثم أوجد هذا الجذر.

b حل المعادلة.

الحل:

a نبحث عن العدد التخيلي ni الذي يحقق المعادلة لذلك نعوّض عن z بـ ni:

$$(ni)^3 + (-8+i)(ni)^2 + (17-8i)(ni) + 17i = 0$$

$$-n^3 i + (-8+i)(-n^2) + 17ni + 8n + 17i = 0$$

$$-n^3 i + 8n^2 - n^2 i + 17ni + 8n + 17i = 0$$

الصورة الجبرية للعدد المركب

$$(8n^2 + 8n) + (-n^3 - n^2 + 17n + 17)i = 0$$

من المعادلة (1): $8n(n+1) = 0 \Rightarrow n = 0 \ , \ n = -1$

من المعادلة (2): $-n^2(n+1) + 17(n+1) = 0$

$$(n+1)(17-n^2) = 0 \Rightarrow n = -1 \ , \ n = \sqrt{17} \ , \ n = -\sqrt{17}$$

قيمة n المشتركة في (1), (2) هي $n = -1$ $\therefore$ $z = -i$ هو جذر تخيلي للمعادلة.

b $(z+i)$ هو عامل من عوامل $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$.

نستخدم القسمة التركيبية، للقسمة على هذا العامل.

$-i$	1	$-8+i$	$17-8i$	$17i$
		$-i$	$+8i$	$-17i$
	1	-8	17	0

نحصل على: $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$

وتصبح المعادلة: $(z+i)(z^2 - 8z + 17) = 0$

$\therefore$ $z + i = 0$ أو $z^2 - 8z + 17 = 0$

$z = -i$ أو $z^2 - 8z + 17 = 0$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times (1) \times (17) = -4 = 4i^2$$

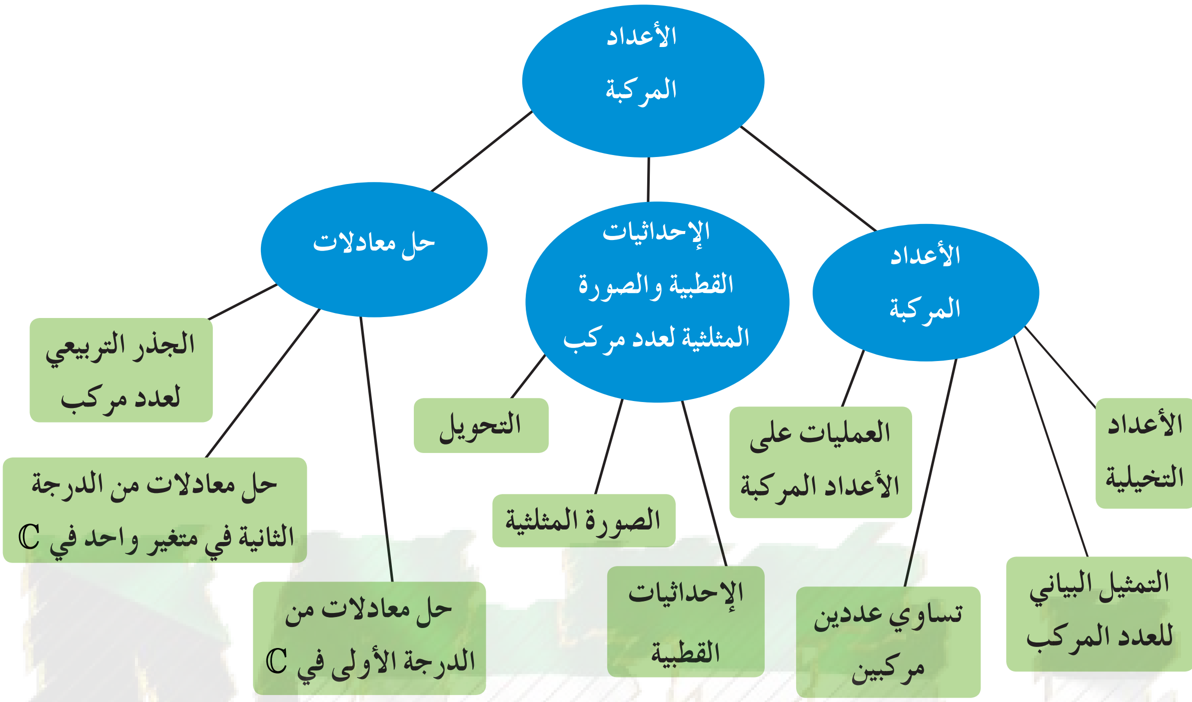
$z = \dfrac{8-2i}{2} = 4 - i$ أو $z = \dfrac{8+2i}{2} = 4 + i$

مجموعة حل المعادلة هي: $\{-i \ , \ 4-i \ , \ 4+i\}$.

مسألة إضافية

أثبت أن للمعادلة: $z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8 = 0$ جذرًا حقيقيًا، ثم حل المعادلة.

مخطط تنظيمي للوحدة السابعة



ملخص

- العدد المركب هو عدد على الصورة $a+bi$ حيث a, b عددان حقيقيان.
- لأي عدد حقيقي موجب a، $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$
- الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=a+bi$ حيث a, b عددان حقيقيان ويسمى a الجزء الحقيقي وb الجزء التخيلي.
- يكون عددان مركبان متساويان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان.
- إذا ساوى عدد مركب الصفر فإن جزءه الحقيقي يساوي الصفر وجزءه التخيلي يساوي الصفر أيضًا.
- يمكن تمثيل العدد المركب $z=a+bi$ بالزوج المرتب (a, b) وتعرف بالصورة الديكارتية للعدد المركب.
- لجمع (أو طرح) أعداد مركبة نجمع (أو نطرح) الأجزاء الحقيقية معًا والأعداد التخيلية معًا كل منهما بشكل منفصل عن الآخر.
- المعكوس الجمعي للعدد المركب $z=a+bi$ هو العدد المركب $-z=-a-bi$
- إذا كان $z_1=a_1+b_1i\ ,\ z_2=a_2+b_2i$ فإن $z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$
- إذا كان p عدد كلي: $i^{4p}=1\ ,\ i^{4p+1}=i\ ,\ i^{4p+2}=-1\ ,\ i^{4p+3}=-i$
- مرافق العدد المركب $z=a+bi$ هو العدد المركب $\bar{z}=a-bi$
- خواص المرافق:
  - $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$
  - $z-\bar{z}=2bi$
  - $z+\bar{z}=2a$
  - $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\ ,\ z_2\neq 0$
  - $\overline{(\overline{z_1})}=z_1$
  - $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
  - $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$
- لقسمة عدد مركب z_1 على عدد مركب z_2 غير صفري نكتبهما على شكل كسر على الصورة $\frac{z_1}{z_2}$، نبسط الكسر ثم نضرب البسط والمقام في مرافق مقام الكسر.
- القيمة المطلقة للعدد المركب $z=a+bi$ هي المسافة بين الصورة الديكارتية (a, b) لهذا العدد ونقطة الأصل $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$
- الإحداثيات القطبية للنقطة M هي الزوج المرتب (r,θ) حيث $r=OM$، θ قياس الزاوية الموجهة في الوضع القياسي.
- الصورة المثلثية للعدد المركب $z=a+bi$ هي $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$، حيث $r=\sqrt{a^2+b^2}$
  $\sin\theta=\frac{y}{r}\ ,\ \cos\theta=\frac{x}{r}\ ,\ \tan\theta=\frac{y}{x}$