الوحدة الرابعة

الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Functions

مشروع الوحدة: الآثار المتبقية

1 **مقدمة المشروع:** علماء الآثار هم مجموعة من العلماء يهتمون بدراسة إنجازات الحضارات القديمة من خلال آثارها الباقية. نذكر منها على سبيل المثال المومياوات المصرية الشهيرة التي حفظت منذ حوالى 400 3 سنة ق. م ولا تزال معروضة حتى الآن في المتحف الوطني المصري.

المومياء

2 **الهدف:** في هذه الوحدة، سوف تتحرى طرائق مختلفة لتحديد عمر قطعة أثرية.

3 **اللوازم:** آلة حاسبة علمية.

4 **أسئلة حول التطبيق:**

إحدى طرائق تأريخ الإبداعات الإنسانية تسمى التأريخ بالكربون المشع.

العناصر التي تمّ سردها في الجدول تمّ اكتشافها داخل المقابر الأثرية.

استخدم العلاقة: $t = 1.904 \times 10^4 \times \log\left(\frac{13.7}{n}\right)$

حيث تمثل "t" عمر العنصر بالسنوات، و"n" عدد انبعاثات أشعة بيتا كل دقيقة لكل جرام من الكربون في العنصر.

الماموث

العنصر	وزن الكربون بالجرام (g)	انبعاثات أشعة بيتا لكل دقيقة
عظم ماموث	400	1 640 ± 30
شظايا عظمية	15	61.5 ± 1.5
قطعة فخار	25	342 ± 7
فحم نباتي	10	41.0 ± 1.3
قصبة رمح	250	1 020 ± 30

a احسب عمر كل عنصر.

b ما الاستثناء في البيانات أعلاه؟ كيف يمكنك تفسيره؟

c التأريخ بالإشعاع الكربوني هي طريقة لاستخدام معلومات عن فترة نصف العمر لنظير ما لتحديد عمر عنصر، للكربون $(c-14)$ هي 40 ± 730 5 سنة. مقبض فأس فيه 42 g من الكربون $(c-14)$ يعتقد أنه كان موجودًا منذ حوالى 040 19سنة.

اشرح كيف يمكن لعالم آثار استخدام العلاقة أعلاه لإيجاد معدل انبعاث أشعة بيتا من مقبض الفأس.

5 **التقرير:** ضع تقريرًا مفصلًا حول تنفيذ المشروع مستفيدًا من دروس الوحدة. ضمّن تقريرك صورًا لآثار قديمة وملصقًا ورسومًا بيانية سبق أن استخدمتها.

دروس الوحدة

استكشاف النماذج الأسية	الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًّا	الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًّا	خواص اللوغاريتمات	المعادلات الأسية واللوغاريتمية	اللوغاريتم الطبيعي
4–1	4–2	4–3	4–4	4–5	4–6

الوحدة الرابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت نمذجة الدوال الخطية وحل معادلات خطية.
- تعلمت نمذجة الدوال التربيعية وحل معادلات تربيعية.
- تعلمت نمذجة دوال كثيرات الحدود وحل معادلات كثيرات الحدود.
- تعلمت إيجاد معكوس الدالة وتمثيله بيانيًّا.

ماذا سوف تتعلم؟

- تمثيل النمو الأسي والتضاؤل الأسي.
- تمثيل بيان بعض الدوال الأسية.
- استخدام الرمز e كأساس.
- إيجاد قيمة المقادير اللوغاريتمية.
- تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا.
- اختصار المقادير اللوغاريتمية وفكها.
- حل معادلات أسية.
- استخدام اللوغاريتمات والأسس لحل معادلات لوغاريتمية.
- علاقة اللوغاريتم الطبيعي بالدالة الأسية.

المصطلحات الأساسية

الدوال الأسية – معامل النمو – معامل التضاؤل – الرمز e – الدوال اللوغاريتمية – اللوغاريتمات المعتادة – المعادلات الأسية – اللوغاريتم الطبيعي.

أضف إلى معلوماتك

تستخدم الدوال الأسية لتمثيل الاضمحلال الإشعاعي في المادة الإشعاعية، ولتمثيل نمو البكتيريا، ولحل المسائل التي تتضمن نموًّا أو تضاؤلًا أسيًّا. فإنك تحتاج إلى معرفة كيفية استخدام الدوال الأسية ومعكوساتها وهي الدوال اللوغاريتمية.

معلومة جغرافية:
جزيرة فيلكا (فيلجا) جزيرة كويتية تبلغ مساحتها $43\ km^2$. تقع في الركن الشمالي الغربي من الخليج العربي وتبعد $20\ km$ عن سواحل مدينة الكويت. تتخذ شكل مثلث قاعدته من الغرب ورأسه في الجنوب الشرقي. يُعتقد أن اسمها مشتق من كلمة إغريقية تعني نقطة تمركز أو موقع بعيد. تُعد أرضها من الأراضي الطينية الصالحة للزراعة.

وفي الجزيرة أيضًا آثار تعود للاسكندر المقدوني ومقام للعبد الصالح الخضر وتلال أثرية تعود إلى الألف الثالث قبل الميلاد. في عام 1973 عثر في الجزيرة على «حجر سويتلس» منقوش عليه باللغة اليونانية وإثر هذا الاكتشاف بدأت عمليات التنقيب عن الآثار مما أظهر ارتباط الجزيرة بحضارة دلمون تلك الحضارة التي كانت تضم البحرين والساحل الشرقي لشبه الجزيرة العربية.

4-1

استكشاف النماذج الأسية

Exploring Exponential Models

سوف تتعلم

- تمثيل النمو الأسي.
- تمثيل التضاؤل الأسي.

المفردات والمصطلحات:

- الدوال الأسية Exponential Functions
- عامل النمو Growth Factor
- عامل التضاؤل Decay Factor
- النسبة المئوية للتغير Percent of Change
- نمو أسي Exponential Growth
- تضاؤل أسي Exponential Decay
- عامل التغير Variation Factor
- معدل التغير Rate of Change

عمل تعاوني

تقام في دولة الكويت مسابقات لكرة قدم الصالات ويشترك فيها 64 فريقًا مختلفًا، على أن يستبعد الفريق الخاسر من المنافسة في كل مباراة.

1. اعمل مع زميل لك لتحديد عدد الفرق المتبقية في المسابقة بعد الدور الأول من المسابقة.
2. a أكمل الجدول حتى يتبقى فريق واحد.

بعد الدور (x)	عدد الفرق المتبقية في المسابقة (y)
0	64
1	
2	
⋮	⋮

b كم دورًا يجب لعبه حتى نهاية المسابقة؟

3. عيّن النقاط (x, y) من جدولك على ورقة رسم بياني.
4. هل الرسم البياني يمثل دالة خطية؟ فسّر إجابتك.
5. كيف تقارن عدد الفرق المتبقية في كل دور بعدد الفرق في الدور الذي يسبقه؟

استخدام الدوال الأسية Using Exponential Functions

تعتبر الدالة التي تمثل عدد الفرق المتبقية في مسابقة كرة قدم الصالات بعد كل دورة مثالًا على الدالة الأسية.

الدالة:

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad y = ab^x$

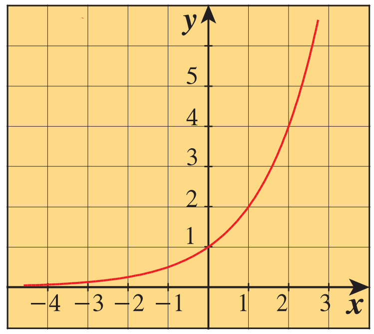
$a \in \mathbb{R}^*$ $\quad$ **(عدد ثابت)**

$b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ $\quad$ **(الأساس)**

تسمى دالة أسية.

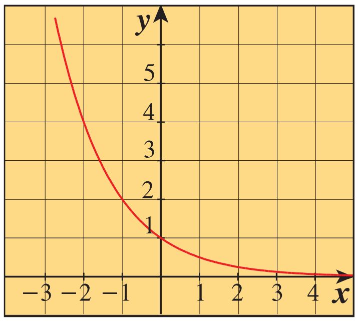
الدالة الأسية التي فيها $a > 0$ يمكن أن تستخدم كنموذج للنمو أو للتضاؤل معتمدًا على قيمة b، كالتالي:

نمو أسي



عندما تكون $1 < b$، فإن الدالة تمثل نموًّا أسيًّا، وتكون b هي عامل النمو.

تضاؤل أسي



عندما تكون $0 < b < 1$، فإن الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا، وتكون b هي عامل التضاؤل.

مثال (1)

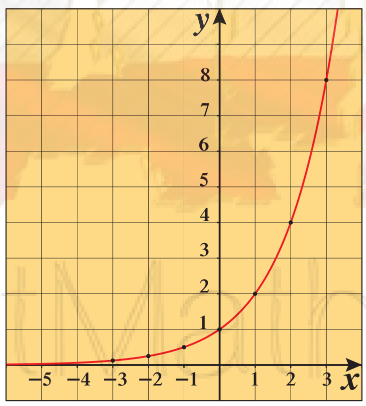
مثّل بيانيًّا الدالة $y = 2^x$. ثم بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا وحدّد العامل.

الحل:

الخطوة 1: اصنع جدول قيم.

x	2^x	y
-3	2^{-3}	0.125
-2	2^{-2}	0.25
-1	2^{-1}	0.5
0	2^0	1
1	2^1	2
2	2^2	4
3	2^3	8

الخطوة 2: مثّل بيانيًّا الإحداثيات. صل بين النقاط بمنحنى.



$\because b = 2$

$\therefore b > 1$

$\therefore$ الدالة تمثل نموًّا أسيًّا

$\therefore$ عامل النمو: $b = 2$

حاول أن تحل

1 مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال التالية، ثم بيّن ما إذا كانت تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا وحدّد العامل.

a $y = 4(2)^x$

b $y = 3^x$

مثال (2)

مثّل بيانيًّا الدالة $y = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$

ثم بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا وحدّد العامل.

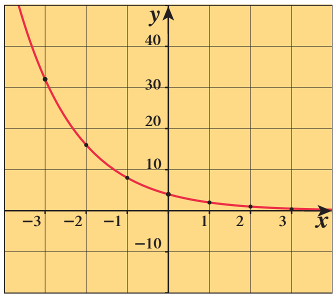
الحل:

الخطوة 1: اصنع جدول قيم.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	32	16	8	4	2	1	0.5

الخطوة 2: مثّل بيانيًّا الإحداثيات.

صل بين النقاط بمنحنى.



$\because\ b = \frac{1}{2}$

$\therefore\ 0 < b < 1$

$\therefore$ الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا

$\therefore$ عامل التضاؤل: $b = \frac{1}{2}$

حاول أن تحل

2 مثّل بيانيًّا ثم بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا وحدّد العامل.

a $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b $y = 2(0.1)^x$

تدريب

1 اكتب دالة تمثل نموًّا أسيًّا.

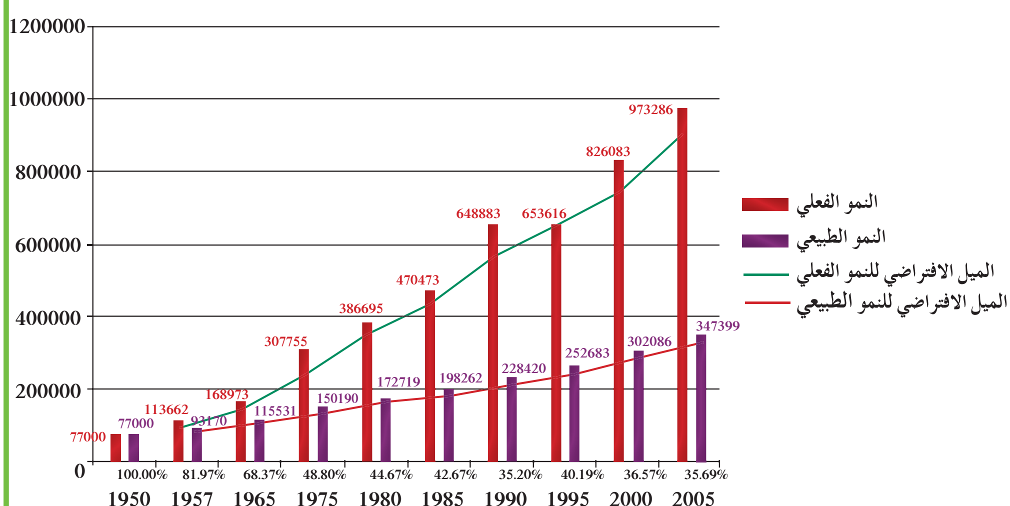
2 اكتب دالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا.

يمكنك استخدام الدوال الأسية $y = ab^x$ لنمذجة التغير السكاني إذا عرفت معدل التغير I.
يمكنك إيجاد عامل النمو b باستخدام المعادلة: $b = 1 + \mathrm{I}$.

معلومة:
معدل التغير I قد يكون معدل تزايد أو معدل تناقص.

مثال (3)

يقدر معدل التزايد السكاني في دولة الكويت من المواطنين بـ 2.44%



تحليل النمو السكاني لدولة الكويت
موقع تاريخ الكويت

a أوجد عامل النمو.

b كوّن الدالة الأسية التي تنمذج التغير السكاني حيث بلغ عدد سكان الكويت من المواطنين 598 038 1 مواطنًا في سنة 2007.
(المصدر: الإدارة المركزية للإحصاء).

c إذا افترضنا أن معدل التزايد ثابت، فكم سيكون عدد سكان الكويت من المواطنين سنة 2013؟

الحل:

a عامل النمو:

$$\left(\mathrm{I} = 2.44\% = \frac{2.44}{100} = 0.0244\right)$$

$$b = 1 + \mathrm{I}$$
$$= 1 + 0.0244$$
$$\therefore\ b = 1.0244$$

b يتزايد السكان أسيًّا لذلك نستخدم الدالة الأسية $y = ab^x$،

حيث x عدد السنوات بعد 2007، y عدد السكان بالمليون.

أي أن:

$y = a(1.0244)^x$

(عدد السكان سنة 2007) $y = 1\ 038\ 598$

عندما $x = 0$ (سنة البدء 2007) $1\ 038\ 598 = a(1.0244)^0$

أي عدد غير صفري مرفوع للأس صفر يساوي واحد $1\ 038\ 598 = a \times 1$

$a = 1\ 038\ 598$

$\therefore$ دالة التغير السكاني هي: $y = 1\ 038\ 598(1.0244)^x$

c سنة 2013 هي السنة السادسة $y = 1\ 038\ 598(1.0244)^6$

أي أن $x = 6$ $y \approx 1\ 200\ 231$

من المتوقع أن يصبح عدد مواطني الكويت مليون ومئتي ألف و231 نسمة في سنة 2013.

حاول أن تحل

3 من المعلومات في مثال (3)

a إذا بقي معدل التزايد ثابتًا، فكم تتوقع أن يكون عدد مواطني الكويت سنة 2017؟

b التفكير الناقد: لماذا قد لا يكون التوقع صحيحًا لسنة 2017؟

يمكن كتابة دالة أسية بمعلومية نقطتين على رسمها البياني.

مثال (4)

اكتب دالة أسية: $y = ab^x$، يمر بيانها بالنقطتين: $P(2, 2)$, $Q(3, 4)$

الحل:

استخدام الدالة الأسية $y = ab^x$

عوّض عن (x, y) بـ $(2, 2)$ $ab^2 = 2$

اقسم على b^2 $\qquad \frac{2}{b^2} = a$

عوّض عن (x , y) بـ $(3, 4)$ $\qquad 4 = ab^3$

عوّض عن a بـ $\frac{2}{b^2}$ $\qquad 4 = \frac{2}{b^2} b^3$

خاصية قسمة الأسس $\qquad 4 = 2b^{3-2}$

بسّط $\qquad 4 = 2b$

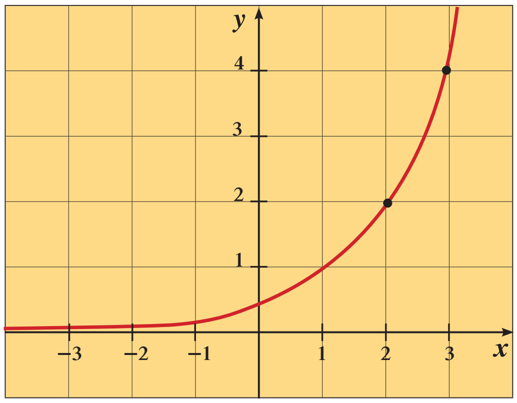
$b = 2$

$a = \frac{2}{b^2}$

عوّض عن b بـ 2 $\qquad \therefore\ a = \frac{2}{2^2}$

بسّط $\qquad a = \frac{1}{2}$

$\therefore\ y = \frac{1}{2}(2)^x$



الدالة الأسية التي يمر بيانها بالنقطتين $(2, 2)$، $(3, 4)$، هي: $y = \frac{1}{2}(2)^x$.

حاول أن تحل

4 اكتب دالة أسية بالصورة $y = ab^x$ يمر بيانها بالنقطتين: $S(3, 16)$ ، $H(2, 4)$

انخفاض (تضاؤل) القيمة: هو نقص قيمة سلعة ما نتيجة الزمن t أو استهلاكها. عندما تفقد السلعة تقريبًا النسبة المئوية نفسها من قيمتها كل عام، فإنه يمكنك استخدام دالة أسية لتمثيل انخفاض القيمة.

النسبة المئوية للتغير $= \frac{\text{مقدار التغير}}{\text{القيمة الابتدائية}} \times 100\%$

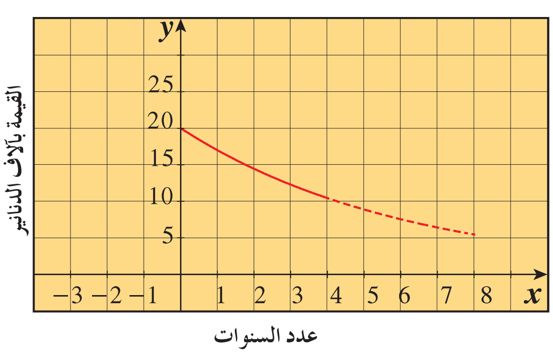
علمًا أن مقدار التغير = القيمة النهائية − القيمة الابتدائية.

مثال (5)

يبيّن التمثيل البياني الأسي المقابل الانخفاض (التناقص) في قيمة سيارة خلال 4 سنوات.

a قدّر النسبة المئوية لانخفاض قيمة السيارة في نهاية السنة الأولى.

b كوّن دالة أسية $y = ab^x$ يمكن أن يمثلها هذا البيان لتقدير قيمة السيارة في نهاية السنة السادسة.



الحل:

a من الشكل القيمة الابتدائية للسيارة 20000 دينار.

بعد سنة واحدة تصبح قيمتها حوالي 17000 دينار.

نسبة التغير = $\dfrac{\text{القيمة النهائية} - \text{القيمة الابتدائية}}{\text{القيمة الابتدائية}}$

$$\text{Decay Ratio} = \frac{17\,000 - 20\,000}{20\,000}$$
$$= -0.15$$

النسبة المئوية للتغير: $-0.15 \times 100\% = -15\%$

تنخفض قيمة السيارة بمقدار 15% في العام الأول.

b نستخدم الدالة الأسية: $y = ab^x$ لتقدير قيمة السيارة بعد 6 سنوات،

حيث (x) عدد السنوات، (y) قيمة السيارة بالدينار، b هو عامل الانخفاض (التضاؤل).

$\therefore$ عامل الانخفاض $b = 1 + \text{I}$، حيث I معدل التغير.

عامل الانخفاض: $b = 1 - 0.15 = 0.85$

عوّض عن y بـ 20 000، عن x بـ 0 $\quad 20\,000 = a(0.85)^0$

$a = 20\,000$

$\therefore\ y = 20\,000(0.85)^x$

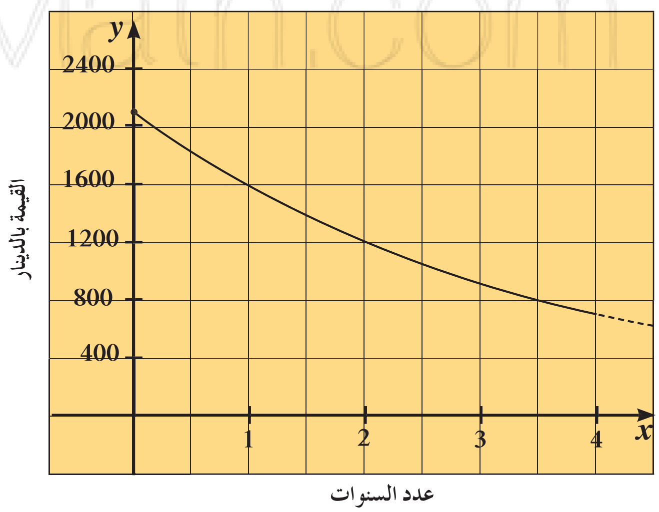
عوّض عن x بـ 6 $\quad y = 20\,000(0.85)^6$

بسّط $\quad y \approx 7\,542.99$

تصبح قيمة السيارة بعد 6 سنوات حوالي 7540 دينارًا.

حاول أن تحل

5 يبيّن التمثيل البياني الأسي أدناه الانخفاض (التناقص) في قيمة حاسوب خلال 4 سنوات.



a قدّر النسبة المئوية للانخفاض في نهاية السنة الأولى.

b كوّن دالة أسية $y = ab^x$ يمكن أن يمثلها هذا البيان ثم استخدمها لتقدير قيمة الحاسوب في نهاية السنة الرابعة.

4-2

الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًّا

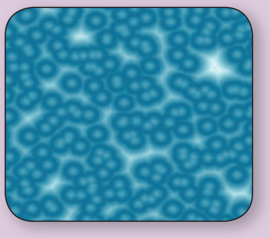
Exponential Functions and their Graphs

سوف تتعلم
- التمثيل البياني لبعض الدوال الأسية.
- تحديد دور الثوابت في الدوال الأسية.
- استخدام e كأساس.

المفردات والمصطلحات:
- انعكاس Reflexion
- انسحاب Translation

عمل تعاوني نمو البكتيريا

ليكن $f(t)$ عدد البكتيريا (بالآلاف) في اللحظة t (بالساعات) حيث $f(t) = a \cdot b^t$. من خلال الملاحظة توصلنا إلى ما يلي:



- $f(0) = 1$
- يتضاعف عدد البكتيريا كل ساعة.
- على فترات زمنية متساوية، عامل النمو هو نفسه.

a أوجد عامل النمو على فترة نصف ساعة، وعلى فترة ربع ساعة.

b أكمل الجدول التالي: (قرّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة)

t	0	0.25	0.50	0.75	1	1.25	1.50	1.75	2	2.25	2.50	2.75	3	3.25	3.50	3.75	4
$f(t)$	1				2				4				8				16

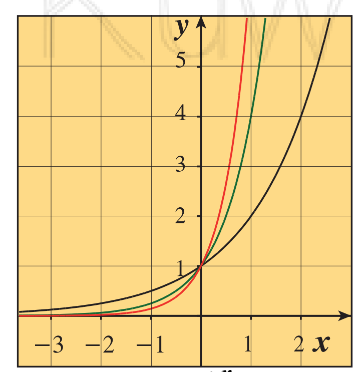
c ضع رسمًا بيانيًّا يمثل نمو البكتيريا خلال الساعات الأربع.

d استخدم آلة حاسبة علمية لمقارنة قيم $f(t)$ في الجدول مع قيم $g(t) = 2^t$ ماذا تلاحظ؟

التمثيل البياني للدوال الأسية Graphing Exponential Functions

يمكن دراسة تأثير القيم المختلفة لكل من a, b على الدالة الأسية $y = ab^x$ حيث $a \neq 0$، $b > 0$, $b \neq 1$ باستخدام الرسوم البيانية كالتالي:

أولًا: عندما a موجب

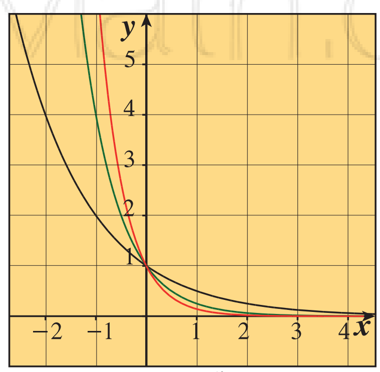


$y = b^x$

(1) $y = 2^x$

(2) $y = 4^x$

(3) $y = 7^x$



$y = b^{-x}$

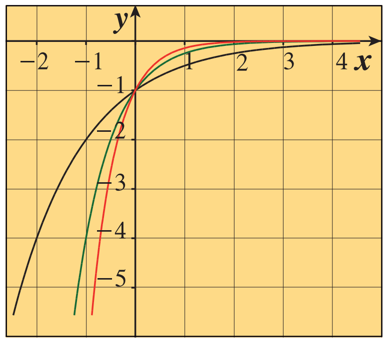
(4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2)^{-x}$

(5) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x = (4)^{-x}$

(6) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x = (7)^{-x}$

نلاحظ أن بيان الدالة $y = b^{-x}$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = b^x$ في المحور الصادي.

ثانيًا: عندما a سالب

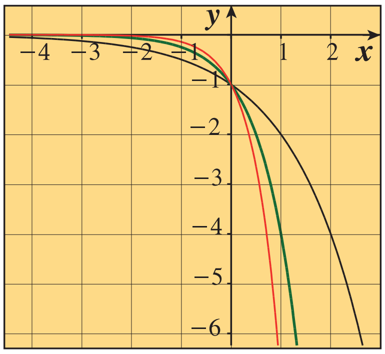


$y = -b^{-x}$

(4) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x = -(2)^{-x}$

(5) $y = -\left(\frac{1}{4}\right)^x = -(4)^{-x}$

(6) $y = -\left(\frac{1}{7}\right)^x = -(7)^{-x}$



$y = -b^x$

(1) $y = -2^x$

(2) $y = -4^x$

(3) $y = -7^x$

نلاحظ أيضًا أن بيان الدالة $y = -b^{-x}$ حيث $b \neq 1$ ، $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = -b^x$ في المحور الصادي.

ملاحظة: من أولًا وثانيًا نلاحظ أن بيان الدالة $y = -b^x$ حيث $b \neq 1$ ، $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = b^x$ في المحور السيني.

مثال (1)

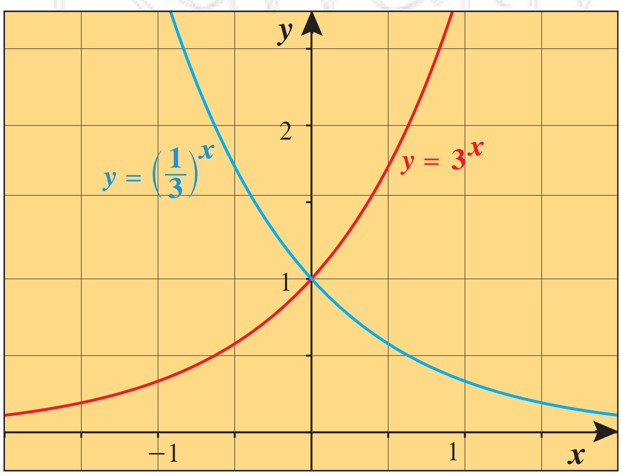
مثّل بيانيًّا كل من: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$، $y = 3^x$ في نفس المستوى الإحداثي.

الحل:

الخطوة 1: اصنع جدول قيم.

x	$y = 3^x$	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
−2	0.111	9
−1	0.333	3
0	1	1
1	3	0.333
2	9	0.111
3	27	0.037

الخطوة 2: مثّل بيانيًّا الدالتين.



حاول أن تحل

1 مثّل بيانيًّا كلًّا من: $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ ، $y = 5^x$ في نفس المستوى الإحداثي.

مثال (2)

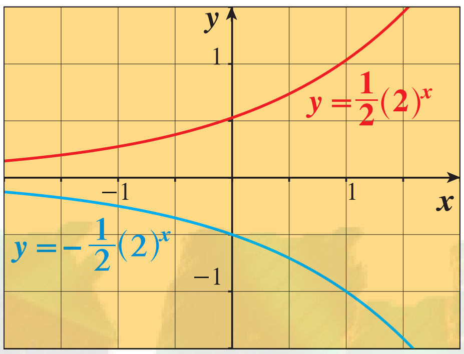
مثّل بيانيًا كلًّا من: $y = -\frac{1}{2}(2)^x$, $y = \frac{1}{2}(2)^x$ في نفس المستوى الإحداثي.

الحل:

الخطوة 1: اصنع جدول قيم.

x	$y = \frac{1}{2}(2)^x$	$y = -\frac{1}{2}(2)^x$
-2	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
-1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
1	1	-1
2	2	-2
3	4	-4

الخطوة 2: مثّل بيانيًا الدالتين.



حاول أن تحل

2 **a** مثّل بيانيًا في نفس المستوى الإحداثي.

1) $y = -4(2)^x$

2) $y = 4(2)^x$

b ماذا تلاحظ بين بياني كلٍّ من الدالتين في **a** .

يمكنك تمثيل بيان العديد من الدوال الأسية وذلك بانسحاب لبيان دالة المرجع $y = ab^x$، حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ، $a \neq 0$.

التمثيل البياني للدالة: $y = a(b)^{x-h} + k$، هو **انسحاب** لبيان الدالة $y = ab^x$ بمقدار h وحدة أفقيًّا، k وحدة رأسيًّا.

مثال (3)

مثّل بيانيًّا الدالة: $y_1 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ومنها مثّل بيانيًّا الدالة: $y_2 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 3$

الحل:

الخطوة 1:

جدول قيم الدالة $y_1 = f_1(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125

مثّل بيانيًّا: $f_1(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$

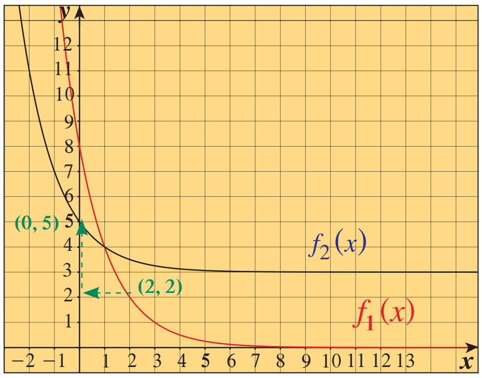
الخطوة 2:

لرسم بيان الدالة: $y_2 = f_2(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 3$

حيث $h = -2$, $k = 3$

اسحب بيان دالة المرجع: $f_1(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

وحدتين إلى جهة اليسار و 3 وحدات إلى الأعلى.



حاول أن تحل

3 مثّل كل دالة مما يلي وذلك بانسحاب لبيان دالة المرجع: $y = 2(3)^x$

a $y_1 = 2(3)^{x+1}$ **b** $y_2 = 2(3)^x - 4$ **c** $y_3 = 2(3)^{x-3} + 1$

بعض الدوال الأسية هي على الصورة: $y = ab^{rx}$، حيث r ثابت، $r \neq 0$

مثال (4)

مثّل بيانيًّا الدالة: $f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x}$

الحل:

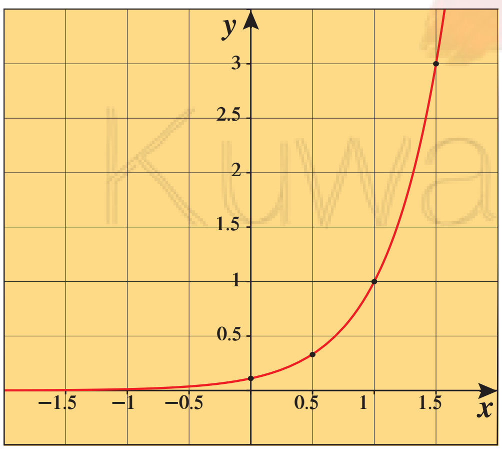
جدول قيم الدالة:

$f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x}$

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$	0.11	0.33	1	3	9	27

مثّل بيانيًّا:

$f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x}$



حاول أن تحل

4 مثّل بيانيًّا الدالة: $f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x} - 1$

تطبيق إثرائي (الطب)

فترة نصف العمر لمادة مشعة هو الوقت الذي تستغرقه المادة في تضاؤل أو تحلل نصفها. لنفرض أن إحدى المستشفيات تحضر 100 mg مزودة بتكنيشيوم (Tc − 99 m)، حيث فترة نصف عمره 6 ساعات.

a ضع جدولًا يوضح كمية التكنيشيوم (Tc − 99 m) المتبقية في نهاية كل فترة 6 ساعات لمدة 36 ساعة.

b اكتب معادلة لوصف الدالة الأسية.

c استخدم الدالة لإيجاد كمية التكنيشيوم (Tc − 99 m) المتبقية بعد 75 ساعة.

الحل:

a كمية التكنيشيوم (Tc − 99 m) تقل بمقدار النصف كل 6 ساعات.

عدد مرات نصف العمر (6 h)	عدد الساعات المستغرق	تكنيشيوم (Tc − 99 m) الكمية الحالية (mg)
0	0	100
1	6	50
2	12	25
3	18	12.5
4	24	6.25
5	30	3.125
6	36	1.5625

b الكمية الابتدائية للتكنيشيوم (Tc − 99 m) هي 100 mg

عامل التضاؤل هو $b = \frac{1}{2}$، نصف العمر 6 h

افرض أن: y تمثل كمية التكنيشيوم (Tc − 99 m)

(x) عدد الساعات المستغرق ، $\left(\frac{1}{6}\right)x$ عدد أنصاف العمر.

اكتب: $y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}x}$

c

$y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}x}$

عوّض عن x بـ 75 $\quad y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}\times 75}$

بسّط $\quad y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{12.5}$

≈ 0.01726

تبلغ كمية التكنيشيوم (Tc − 99 m) المتبقية بعد 75 h حوالى 0.017 mg

الكيمياء

التكنيشيوم Technetium (Tc − 99 m) هو مادة مشعة. كثيرًا ما تستخدم لتشخيص أمراض الغدد الدرقية، والمخ، والكبد، والكلى.

أشعة جاما

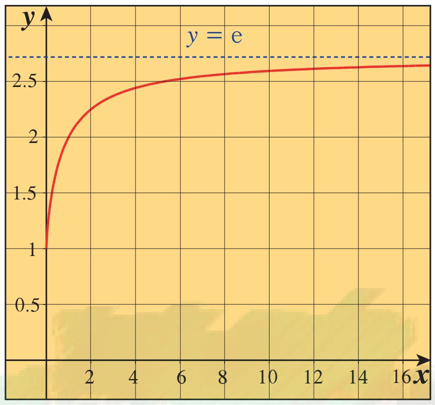
عندما يتحلل التكنيشيوم (Tc − 99 m) تنبعث طاقة منخفضة من أشعة جاما.

الرمز e — Symbol e

التمثيل البياني أدناه هو جزء من بيان الدالة: $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$.

عندما يأخذ x قيمًا أكبر فأكبر تقترب قيم y من 2.718 هذه القيمة تسمّى e وهو عدد غير نسبي ويساوي تقريبًا 2.71828 تستخدم الدوال الأسية التي أساسها e لوصف النمو (التزايد) أو التضاؤل (التناقص) المستمر. وفي آلتك الحاسبة يوجد مفتاح $\boxed{e}$ أو $\boxed{e^x}$ أو $\boxed{(e^{\square})}$.

x	$f(x)$
2	2.25
4	2.4414
6	2.5216
8	2.5658
10	2.5937
12	2.613
14	2.6272
16	2.6379



معلومة:
أول من استخدم الرمز e هو الرياضي السويسري أويلر في العام 1748. وقد عرّف الدالة الأسية على أنها معكوس دالة اللوغاريتم الطبيعي.

مثال (5)

(a) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد القيم التالية (مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من ألف):

$e^{2},\quad e^{-1},\quad e^{\frac{1}{3}},\quad e^{\frac{3}{4}},\quad 4e^{-1.5}$

(b) ارسم بيان: $y=e^{x}$

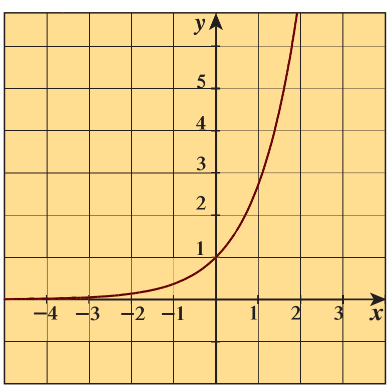
الحل:

(a) $e^{\frac{1}{3}}\approx 1.396$ $\quad e^{-1}\approx 0.368$ $\quad e^{2}\approx 7.389$

$4e^{-1.5}\approx 0.893$ $\quad e^{\frac{3}{4}}\approx 2.117$

(b) جدول قيم $y=e^{x}$ — بيان الدالة $y=e^{x}$

x	−2	−1	0	1	2	3
$y=e^{x}$	0.135	0.37	1	2.718	7.39	20



حاول أن تحل

5 استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيم كل مما يلي:

(قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف).

(a) e^{4} (b) e^{-3} (c) $e^{\frac{1}{2}}$

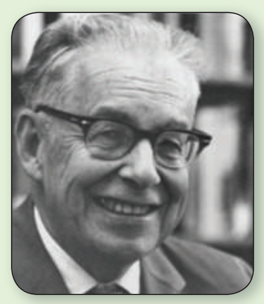
4-3

الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًّا
Logarithmic Functions and their Graphs

سوف تتعلم
- استخدام رموز اللوغاريتمات.
- إيجاد قيم المقادير اللوغاريتمية.
- تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا.

المفردات والمصطلحات:
- مقادير لوغاريتمية Logarithmic Expressions
- اللوغاريتمات المعتادة Common Logarithms
- الدوال اللوغاريتمية Logarithmic Functions

معلومة:
لم يكن تشارلز ريختر Charles F. Richter) (1900–1985) راضيًا عن مقياس روسي (Rossi) الذي يعود للعام 1880 ولم يكن راضيًا أيضًا عن مقياس مركالي (Mercalli) الذي يعود للعام 1902 لذلك اقترح عام 1935 مقياسه الشهير لقياس قوة الزلازل.
في العام 1977 اقترح هيرو كاناموري مقياسًا جديدًا أكثر تطورًا لقياس قوة الزلازل.
أقوى زلزال سجل على مقياس ريختر هو زلزال التشيلي في 22 مايو 1960.


تشارلز ريختر

عمل تعاوني

1 باستخدام الدالة الأسية $y = 10^x$، أكمل الجدول التالي:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y								

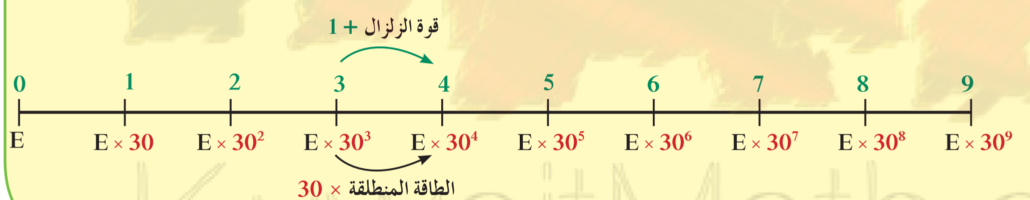
2 لكل زيادة وحدة في x، صف الزيادة المناظرة في y.

3 صف الزيادة في y إذا كانت x تتزايد بمقدار 1.5؛ بمقدار 0.5

كتابة المقادير اللوغاريتمية وحسابها
Writing and Calculating Logarithmic Expressions

قوة الزلزال هي قياس كمية الطاقة المنطلقة (E). يقيس مقياس ريختر قوة الزلازل باستخدام الصورة الأسية فمثلًا الزلزال الذي تبلغ قوته 5 درجات بمقياس ريختر طاقته المنطلقة (E) تساوي 30 × الطاقة المنطلقة من الزلزال الذي قوته 4 درجات.

مقياس ريختر



مثال (1)

سجل زلزال مكسيكو سنة 1995 بقوة 8.0 درجات على مقياس ريختر.
وقد سجل أيضًا زلزال في واشنطن سنة 2011 بقوة 6.8 درجات.
كم مرة تكون الطاقة المنطلقة من زلزال مكسيكو أكبر من كمية الطاقة المنطلقة من زلزال واشنطن؟
(إرشاد: استعن بمقياس ريختر)

الحل:

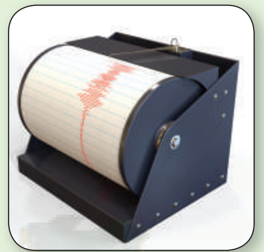
$\because$ قوة زلزال مكسيكو 8 درجات.

$\therefore$ الطاقة المنطلقة من زلزال مكسيكو = $E \times 30^8$

$\because$ قوة زلزال واشنطن 6.8 درجات.

$\therefore$ الطاقة المنطلقة من زلزال واشنطن = $E \times 30^{6.8}$

السيزموغراف
Seismograph
السيزموغراف (أو مقياس الزلازل) هو جهاز قياس مزود بلاقط يقوم برصد وتسجيل حركات الأرض.
أثناء الزلزال يهتز الجهاز ويسجل على أسطوانة من الورق تموجات لها شكل الموجات الزلزالية.



الطاقة المنطلقة من زلزال مكسيكو = x × الطاقة المنطلقة من زلزال واشنطن.

$$(\mathrm{E}\times 30^{6.8})\times x = \mathrm{E}\times 30^{8}$$

$$x = \frac{\mathrm{E}\times 30^{8}}{\mathrm{E}\times 30^{6.8}}$$

$$x = \frac{30^{8}}{30^{6.8}}$$

$$= 30^{1.2}$$

$$\approx 59.2$$

∴ أطلق زلزال مكسيكو طاقة تساوي 59.2 مرة تقريبًا من طاقة زلزال واشنطن.

حاول أن تحل

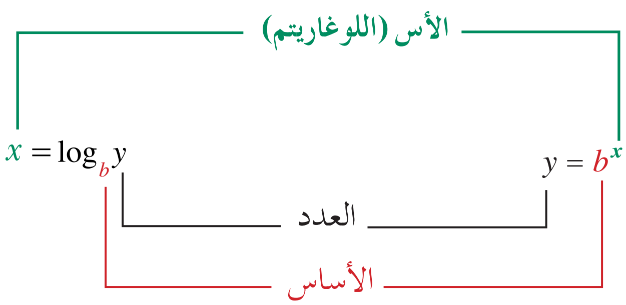
1 كم مرة تكون الطاقة المنطلقة من زلزال قوته 7 درجات أكبر من الطاقة المنطلقة من زلزال آخر قوته 4.9 درجات على مقياس ريختر؟

في الصورة الأسية $y = b^{x}$، b هو الأساس، x هو الأس، y هو الناتج.
للحصول على قيمة الأس x بمعلومية الأساس b والناتج y نستخدم ما يعرف **بالصورة اللوغاريتمية**.
حيث x تساوي لوغاريتم العدد y للأساس b ويرمز للوغاريتم بالرمز (log) ويكتب على الصورة $x = \log_{b} y$.

تدريب

أكمل الجدول التالي:

الصورة اللوغاريتمية	الصورة الأسية
$\log_{7} 49 = 2$	$7^{2} = 49$
$\log_{10} \ldots = \ldots$	$10^{3} = 1\,000$
$\log_{3} \ldots = \ldots$	$3^{5} = 243$
$\log_{4} 2 = \frac{1}{2}$	$4^{\cdots} = \ldots$
	$\left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \frac{1}{16}$
$\log_{5} \frac{1}{25} = -2$	...
...	$12^{0} = 1$



ملاحظة: تعلم أن: $1 = 1^1 = 1^2 = 1^3 = 1^4 = \dots = 1^n \; (n \in \mathbb{N})$

وهذا يعني أن: $\log_1 1^1 = 1, \; \log_1 1^2 = 2, \; \log_1 1^3 = 3 \; \dots$

ولذلك $\log_1 y$ غير معيّن لأنه ليس وحيدًا.

تذكر:
الرمز $\Leftrightarrow$ يقرأ (إذا وفقط إذا)

تعريف

$$\forall y \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

يتعين عدد حقيقي x بحيث يكون: $y = b^x \iff \log_b y = x$

لإيجاد قيمة اللوغاريتمات، يمكنك كتابتها في صورة أسية.

مثال (2)

أوجد قيمة $\log_8 16$.

الحل:

افرض أن $\log_8 16 = x$

حوّل إلى صورة أسية $16 = 8^x$

اكتب كلًّا من الطرفين بالأساس 2 $2^4 = 2^{3x}$

اكتب الأسس في تساوٍ $4 = 3x$

$x = \frac{4}{3}$

$\therefore \log_8 16 = \frac{4}{3}$

حاول أن تحل

2 أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

a $\log_{10} 100$ b $\log_9 27$ c $\log_{64} \frac{1}{32}$

ملاحظة:

$\log x$ هو اللوغاريتم المعتاد ذو الأساس 10 أي: $\log_{10} x$ تكتب $\log x$

فمثلًا: $\log_{10} 4 = \log 4$

مثال (3) التـرابط

يستخدم العلماء اللوغاريتمات لقياس الحموضة pH.

وهي تتزايد مع تزايد تركيز أيون الهيدروجين $[H^+]$ في المادة.

pH لمادة يساوي $(-\log[H^+])$.

يبلغ pH عصير الليمون 2.3، في حين يبلغ pH الحليب 6.6

أوجد تركيز أيونات الهيدروجين بالصورة العلمية في كل مادة. أي مادة هي الأكثر حموضة؟

الحل:

تركيز أيونات الهيدروجين في عصير الليمون

$pH = -\log[H^+]$

$2.3 = -\log[H^+]$

$\log[H^+] = -2.3$

$[H^+] = 10^{-2.3}$ باستخدام الآلة الحاسبة

$\approx 5 \times 10^{-3}$ باستخدام الآلة الحاسبة

تركيز أيونات الهيدروجين في الحليب

$pH = -\log[H^+]$

$6.6 = -\log[H^+]$

$\log[H^+] = -6.6$

$[H^+] = 10^{-6.6}$

$\approx 2.5 \times 10^{-7}$

$\because\ 5 \times 10^{-3} > 2.5 \times 10^{-7}$

$\therefore$ تركيز أيونات الهيدروجين في العصير أكثر منه في الحليب.

$\therefore$ عصير الليمون أكثر حموضة.

حاول أن تحل

3 أوجد تركيز أيونات الهيدروجين بالصورة العلمية لشراب القيقب (Maple Syrup)، حيث $pH = 5.2$.

التمثيل البياني للدوال اللوغاريتمية Graphing Logarithmic Functions

الدوال اللوغاريتمية هي معكوسات الدوال الأسية.

تعريف: الدالة اللوغاريتمية

$\forall x > 0\ ,\ b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

فإن الدالة: $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_b x$

تسمى دالة لوغاريتمية أساسها b

مثال (4)

أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

a $y = \log_5(6x)$

b $f(x) = \log(3 - x)$

c $g(x) = \log_2(x^2)$

d $h(x) = 4\log_3(5 - 3x)$

الحل:

a $\because\ 6x > 0 \Rightarrow x > 0$

$\therefore$ مجال الدالة $= (0, +\infty)$

b $\because\ 3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$

$\therefore$ مجال الدالة $= (-\infty, 3)$

معلومة:

شراب القيقب أو الأسفندن (Maple Syrup) هو شراب مصنوع من نسغ (عصارة) أشجار القيقب السكري التي تنبت بكثرة في كندا لذا فورقتها موجودة على العلم الكندي. تخزن الأشجار خلال البرد النشا في جذوعها وجذورها الذي ما يلبث أن يتحول بعد ذلك إلى سكر يرتفع في النسغ في الربيع فيتم ثقب فتحات في جذوعها لجمع النسغ الناضج الذي تتم معالجته وتصنيعه بالتسخين لإنتاج شراب مركز ذي لون ذهبي. فوائده كثيرة، ويعتبر سكان أميركا الشمالية الأصليون أول من قاموا بجمع هذا الشراب واستخدامه.

شجرة القيقب

شراب القيقب

تذكر: مربع أي عدد حقيقي هو عدد موجب أو يساوي صفر
$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$.

معلومة: $\sqrt{x^2} = |x|$

c $\because x^2 > 0 \Rightarrow |x| > 0$

$\therefore x > 0$ أو $x < 0$

$\therefore$ مجال الدالة $= (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

أو $\mathbb{R} - \{0\}$

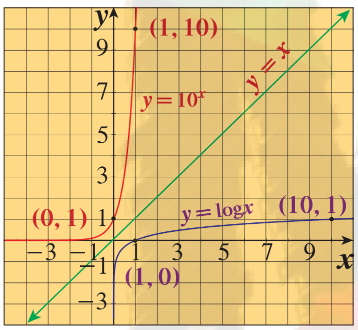
d $\because 5 - 3x > 0 \Rightarrow -3x > -5 \Rightarrow x < \frac{5}{3}$

$\therefore$ مجال الدالة $= \left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$.

حاول أن تحل

4 أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

a $y = 2 + \log_5(x-2)$ **b** $f(x) = \log_4(x^2+1)$ **c** $g(x) = \log_7(1-x)$



الشكل المقابل يبيّن التمثيل البياني للدالتين:

$y = \log x$، $y = 10^x$.

لاحظ النقطتين $(0, 1)$، $(1, 10)$ تنتميان إلى بيان $y = 10^x$

بينما $(1, 0)$، $(10, 1)$ تنتميان إلى بيان $y = \log x$

كل من المنحنيين المرسومين انعكاس للآخر في الخط المستقيم $y = x$.

لاحظ أن كلًّا من الدالتين معكوس للأخرى.

مثال (5)

استخدم خواص الانعكاس لرسم بيان الدالة: $y = \log_2 x$ ومعكوسها.

الحل:

الدالة $y = \log_2 x$ هي معكوس الدالة $y = 2^x$

الخطوة 1:

كوِّن الجدول

x	-1	0	1	2
$y = 2^x$	0.5	1	2	4

ارسم بيان الدالة $y = 2^x$

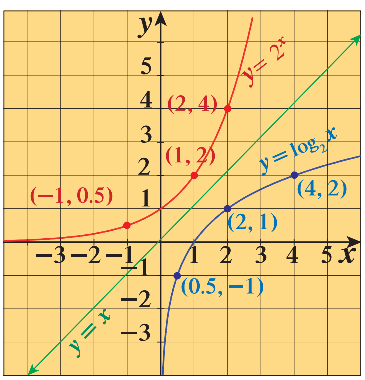
الخطوة 2:

ارسم المستقيم $y = x$

الخطوة 3:

اعكس إحداثيات النقاط المختارة في الجدول السابق

وارسم بيان الدالة $y = \log_2 x$



x	0.5	1	2	4
$y = \log_2 x$	-1	0	1	2

حاول أن تحل

5 استخدم خواص الانعكاس لرسم بيان الدالة: $y = \log_3 x$ ومعكوسها.

انسحاب الدوال اللوغاريتمية Translating Logarithmic Functions

يمكنك تمثيل العديد من الدوال اللوغاريتمية على أنها انسحاب لدالة المرجع: $y = \log_b x$

التمثيل البياني للدالة: $y = \log_b (x - h) + k$ هو انسحاب لبيان دالة المرجع: $y = \log_b x$، h وحدة أفقيًا، k وحدة رأسيًا.

مثال (6)

ارسم بيان الدالة: $y = \log_6 (x + 2) - 3$ مستخدمًا دالة المرجع.

الحل:

الخطوة 1:

دالة المرجع هي: $y = \log_6 x$

اصنع جدول قيم دالة المرجع: $y = \log_6 x$

x	$\log_6 x$	y
6	$\log_6 6 = 1$	1
1	$\log_6 1 = 0$	0
$\frac{1}{6}$	$\log_6 \frac{1}{6} = -1$	-1
$\frac{1}{36}$	$\log_6 \frac{1}{36} = -2$	-2

الخطوة 2:

للحصول على بيان الدالة: $y = \log_6 (x + 2) - 3$

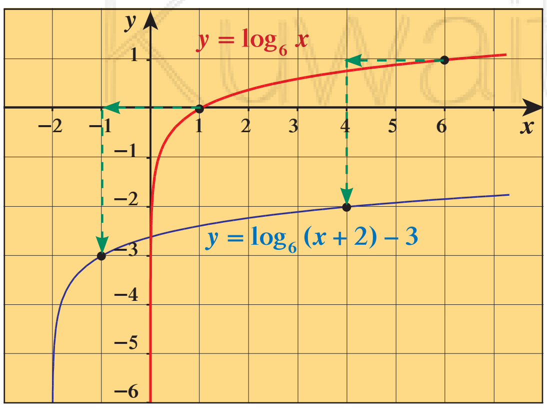
نستخدم بيان دالة المرجع $y = \log_6 x$ كالتالي:

$\because \ h = -2$ (سالبة)

$\therefore$ انسحاب أفقي جهة اليسار بمقدار وحدتين.

$\because \ k = -3$ (سالبة)

$\therefore$ انسحاب رأسي للأسفل بمقدار 3 وحدات.



حاول أن تحل

6 ارسم بيان الدالة: $y = \log_3 (x - 3) + 1$ مستخدمًا دالة المرجع.

4-4

خواص اللوغاريتمات

Properties of Logarithms

سوف تتعلم

- خواص اللوغاريتمات.
- اختصار المقادير اللوغاريتمية وفكها.
- تطبيق خواص اللوغاريتمات.

المفردات والمصطلحات:

- خاصية الضرب
Multiplication Property
- خاصية القسمة
Division Property
- خاصية القوى
Power Property
- شدة الصوت
Sound Intensity
- مستوى شدة الصوت
Level of Sound Intensity

الربط بالتكنولوجيا:
تسمح الآلات الحاسبة البيانية برسم بيانات الدوال. تختلف الخطوات المتبعة من حاسبة إلى أخرى لكن معظمها يبسّط كثيرًا هذه العملية:

a اضغط على رمز بيان الدالة GRAPH.
b اكتب معادلة الدالة.
c اضغط على EXE، يظهر بيان الدالة على الشاشة.

انتبه:
$\log_b (m+n) \neq \log_b m + \log_b n$,
إلا في حالات خاصة ونادرة حيث $m+n = m \times n$

عمل تعاوني

1 أكمل الجدول التالي باستخدام الآلة الحاسبة.
قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من الألف.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
$\log x$												

2 استخدم جدولك في تكملة كل زوج من الجمل التالية. ماذا تلاحظ؟

a $\log 3 + \log 5 = \ldots$ $\qquad \log(3 \times 5) = \ldots$

b $\log 1 + \log 6 = \ldots$ $\qquad \log(1 \times 6) = \ldots$

c $\log 10 + \log 2 = \ldots$ $\qquad \log(10 \times 2) = \ldots$

3 **عمّم:** أكمل الجملة التالية: $\log(m \times n) = \ldots$

4 a **تفكير ناقد:** وضح كيف يمكنك كتابة المقدار $\log \frac{m}{n}$ باستخدام المقادير $\log m$, $\log n$

b استخدم آلتك الحاسبة لتحقيق ما كتبته مستخدمًا قيمًا مختلفة لكل من m , n

5 مثّل بيانيًّا كل زوج من الدوال التالية في نفس المستوى الإحداثي (يفضل استخدام الآلة الحاسبة البيانية). ماذا تلاحظ؟

a $y = \log x^3$, $y = 3\log x$

b $y = \log x^{-1}$, $y = (-1)\log x$

6 استخدم تمثيلاتك البيانية لمساعدتك في تكملة الجملة $\log m^k = \ldots$

7 وضح كيف يمكنك استخدام هذه النتيجة لإيجاد قيمة $\log 1\,000$

خواص اللوغاريتمات Properties of Logarithms

تمّ تلخيص خواص اللوغاريتمات بما يلي:

خواص اللوغاريتمات

$\forall m, n, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$

خاصية الضرب: $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$

خاصية القسمة: $\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

خاصية القوى: $\log_b m^k = k \log_b m \ , \ k \in \mathbb{R}$

يمكنك كتابة مجموع أو فرق اللوغاريتمات (التي لها الأساسات نفسها) بشكل لوغاريتم واحد.

مثال (1)

أعد كتابة كل مقدار لوغاريتمي مما يلي بصورة لوغاريتم واحد:

a $\log_2 8 - \log_2 4$ b $3\log_b x + \log_b y$ c $3\log_5 2 + \log_5 4 - \log_5 16$

الحل:

a $\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2 \frac{8}{4} = \log_2 2$ خاصية القسمة

b $3\log_b x + \log_b y = \log_b x^3 + \log_b y$ خاصية القوى

$= \log_b (x^3 y)$ خاصية الضرب

c $3\log_5 2 + \log_5 4 - \log_5 16 = \log_5 2^3 + \log_5 2^2 - \log_5 2^4$ خاصية القوى

$= \log_5 (2^3 \times 2^2) - \log_5 2^4$ خاصية الضرب

$= \log_5 \frac{2^3 \times 2^2}{2^4}$ خاصية القسمة

$= \log_5 2$

حاول أن تحل

1 a أعد كتابة كل مقدار لوغاريتمي مما يلي بصورة لوغاريتم واحد.

1 $\log_5 2 + \log_5 6$ 2 $3\log_b 4 - 3\log_b 2$ 3 $4\log_3 2 - \log_3 5 + \log_3 10$

b تفكير ناقد: هل يمكنك كتابة $3\log_2 9 - \log_6 9$ بشكل لوغاريتم واحد؟

اشرح.

يمكنك أحيانًا كتابة لوغاريتم واحد كمجموع أو فرق بين لوغاريتمين أو أكثر.

مثال (2)

أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي حيث x، y عددان حقيقيان موجبان.

a $\log_5 \frac{x}{y}$ b $\log(3x^4)$ c $\log \sqrt{\frac{25}{x}}$

الحل:

a $\log_5 \frac{x}{y} = \log_5 x - \log_5 y$ خاصية القسمة

b $\log(3x^4) = \log 3 + \log x^4$ خاصية الضرب

$= \log 3 + 4\log x$ خاصية القوى

c $\log\sqrt{\frac{25}{x}} = \log\left(\frac{25}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\log\frac{25}{x}$ خاصية القوى

$= \frac{1}{2}(\log 25 - \log x)$ خاصية القسمة

$= \frac{1}{2}(\log 5^2 - \log x)$

$= \frac{1}{2}(2\log 5 - \log x)$ خاصية القوى

$= \log 5 - \frac{1}{2}\log x$

حاول أن تحل

2 أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي حيث a، b، c أعداد حقيقية موجبة.

a $\log_2(7b)$ b $\log\left(\frac{c}{3}\right)^2$ c $\log_7(a^3b^4)$

ملاحظات:

1 $\log_b 1 = 0$ 2 $\log_b b = 1$ 3 $\log_b b^m = m$

حيث b , m عددان حقيقيان موجبان $b \neq 1$

تذكر:

$\log 3 = \log_{10} 3$

مثال (3)

إذا كان $\log 5 \approx 0.699$, $\log 3 \approx 0.477$, $\log 2 \approx 0.301$

استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة.

(قرب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف).

a $\log 20$ b $\log 0.5$

c $\log\frac{8}{3}$ d $\log 600$

الحل:

a $\log 20 = \log(4 \times 5)$

$= \log 4 + \log 5$ خاصية الضرب

$= \log 2^2 + \log 5$

$= 2\log 2 + \log 5$ خاصية القوى

$\approx 2(0.301) + 0.699$

≈ 1.301

b $\log 0.5 = \log \frac{1}{2}$

$= \log(2)^{-1}$

$= -\log 2$ خاصية القوى

≈ -0.301

c $\log \frac{8}{3} = \log 8 - \log 3$ خاصية القسمة

$= \log 2^3 - \log 3$

$= 3\log 2 - \log 3$ خاصية القوى

$\approx 3(0.301) - 0.477 \approx 0.426$

d $\log 600 = \log(2^3 \times 3 \times 5^2)$

$= \log 2^3 + \log 3 + \log 5^2$ خاصية الضرب

$= 3\log 2 + \log 3 + 2\log 5$ خاصية القوى

$\approx 3 \times 0.301 + 0.477 + 2 \times 0.699 \approx 2.778$

حاول أن تحل

3 باستخدام المعطيات في مثال (3) أوجد:

a $\log 30$

b $\log 4.5$

c $\log \frac{1}{25}$

d $\log 1200$

تطبيقات على خواص اللوغاريتمات:

شدة الصوت هو قياس الطاقة المحمولة بالموجة الصوتية. والصوت ذو الشدة الكبيرة هو الصوت الذي يبدو عاليًا جدًّا.

تستخدم اللوغاريتمات لقياس **مستوى شدة الصوت Sound Intensity Level**.

شدة الصوت هي كثافة طاقة الصوت على مساحة معينة وتحسب بقسمة طاقة الصوت على المساحة.

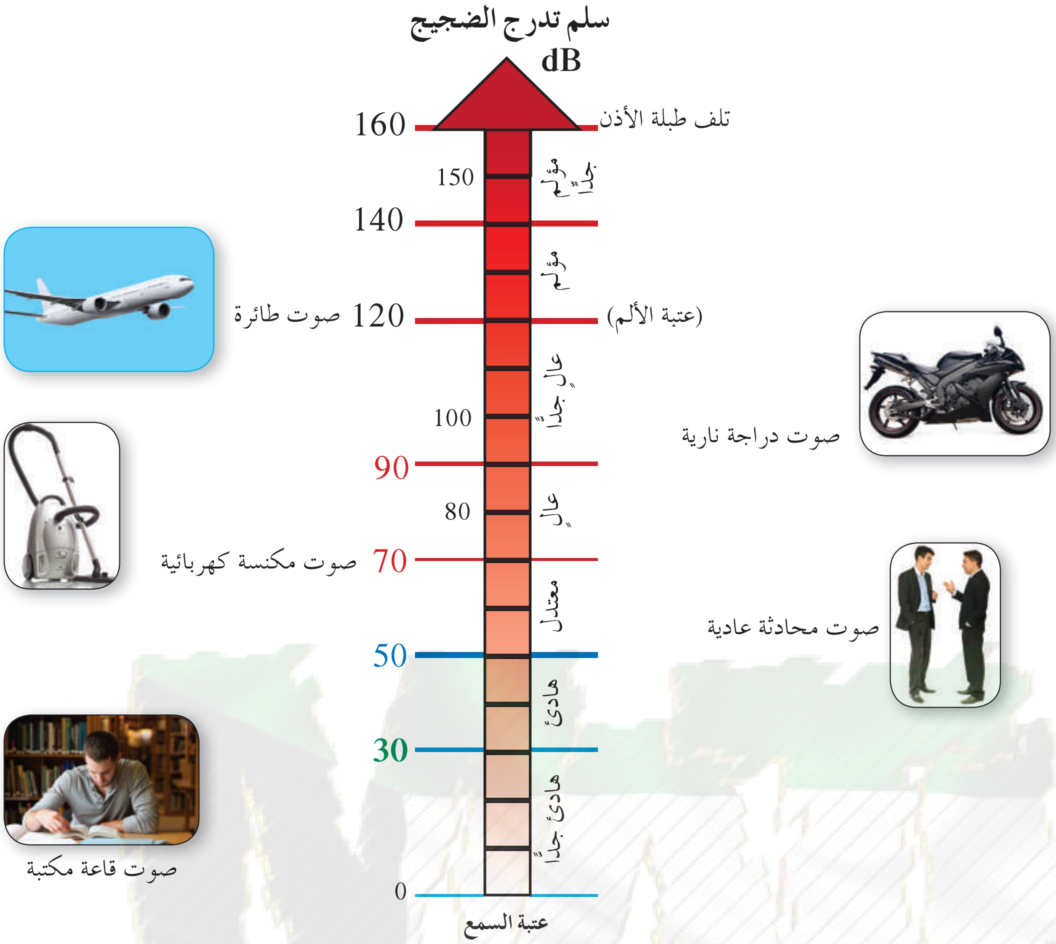
يعطى مستوى شدة الصوت بالعلاقة:

$$L = 10 \times \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

حيث: L تمثل مستوى شدة الصوت وتقاس بوحدة الديسيبل (dB)

I تمثل شدة الصوت وتقاس بالوات/ متر مربع (w/m^2)

I_0 أقل صوت تستطيع أذن إنسان عادية أن تميزه (عتبة السمع) وتمثل عددًا ثابتًا يساوي 10^{-12}



معلومة:
هل تعلم أن عتبة الألم عند 120 dB وتلف طبلة الأذن عند 160 dB.

معلومة:
تخطيط السمع هي عملية تسجيل القدرة السمعية وفق عتبة السمع لترددات صوتية مختلفة.

تدريب

أكمل الجدول التالي، حيث: $L = 10 \times \log \frac{I}{I_0}$

نوع الصوت	الشدة w/m^2	مستوى شدة الصوت	قوة الصوت
صوت صفارة إنذار	10^2	140	مؤلم
صوت مصنع	10^{-2}	...	...
صوت منظف غبار	10^{-5}	...	...
صوت دقات الساعة	10^{-8}	...	...
صوت تساقط أوراق الشجر	10^{-10}	...	هادئ جداً

مثال (4)

تطبيق حياتي

بدأت شركة شحن في نقل حمولات طائرات الشحن خارج مطار المدينة، وقد اشتكى السكان المجاورون لها من صوتها المرتفع جدًّا، إذا افترضنا أن شركة الشحن قد طلبت إليك ابتكار طريقة تعمل على تخفيض شدّة الصوت إلى النصف، باستخدام العلاقة:

$L=(10)\log\frac{I}{I_0}$ حيث I شدة الصوت، I_0 عتبة السمع $(10)^{-12}$

فكم ديسيبل (dB) يجب أن ينخفض هذا الصوت؟

الحل:

لنفرض أن: مستوى شدة الصوت الحالي $= L_1$

مستوى شدة الصوت بعد خفضه $= L_2$

اربط: مقدار انخفاض مستوى شدة الصوت يعطى بـ: $L_1 - L_2$،

$\because$ شدة الصوت المنخفض نصف شدة الصوت الحالي:

$$L_1=(10)\log\frac{I}{I_0},\quad L_2=(10)\log\left(\frac{0.5\times I}{I_0}\right)$$

$$L_1-L_2=(10)\log\frac{I}{I_0}-(10)\log\left(\frac{0.5\times I}{I_0}\right)$$

$$=(10)\log\frac{I}{I_0}-(10)\log\left(0.5\times\frac{I}{I_0}\right)$$

خاصية الضرب

$$=(10)\log\frac{I}{I_0}-10\left(\log 0.5+\log\frac{I}{I_0}\right)$$

جمع الحدود المتشابهة

$$=(10)\log\frac{I}{I_0}-(10)\log 0.5-(10)\log\frac{I}{I_0}$$

$$=(-10)\log 0.5$$

$$\approx 3.01$$

يجب أن ينخفض مستوى شدة الصوت حوالي 3dB

حاول أن تحل

4 في مثال (4) السابق لنفرض أن شركة الشحن طلبت إليك تخفيض شدة الصوت 25% من شدة الصوت الحالية، فكم ديسيبل يجب أن ينخفض مستوى شدة الصوت الحالي؟

4–5

المعادلات الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Equations

سوف تتعلم

- حل معادلات أسية.
- استخدام اللوغاريتمات لحل المعادلات الأسية.
- استخدام الأسس لحل المعادلات اللوغاريتمية.

المفردات والمصطلحات:

- معادلات أسية
Exponential Equations
- معادلات لوغاريتمية
Logarithmic Equations
- قاعدة تغيير الأساس
Change of Base Formula

مواصفات الحصان العربي

هو من أقدم سلالات الخيول، صغير الحجم، له قدرة عالية على تحمل المشاق، قليل الأمراض، شجاع بالفطرة، وفيّ لصاحبه، يتكيف مع تقلبات المناخ وهو أيضًا محب للموسيقى.

عمل تعاوني

الأحياء: تصف العلاقة $F = kw^{\frac{2}{3}}$، كمية الطعام F بالكجم (kg) التي يجب أن يتناولها حيوان ثديي يوميًّا (في هذه العلاقة k هي ثابت التغير الذي يعتمد على النوع، w هي وزن الحيوان).

اعمل مع زميل لك:

a لحساب وزن فيل كبير حيث:

$F = 145\text{ kg}$، $k = 0.421$ باستخدام الآلة الحاسبة:

1 عوّض عن قيم k , F في العلاقة $F = kw^{\frac{2}{3}}$ وأوجد قيمة $w^{\frac{2}{3}}$

2 أوجد قيمة w

3 كيف يمكنك حل المعادلة $F = kw^{\frac{2}{3}}$ لإيجاد $w^{\frac{2}{3}}$؟ صف الناتج إذا ما تم رفع كل من طرفي المعادلة للقوة $\frac{3}{2}$، ثم اكتب العلاقة الناتجة.

b الحصان العربي من الثدييات. إذا اعتبرنا أن وزنه المثالي 400 kg ويأكل يوميًّا 15 kg فما قيمة الثابت k؟

حل معادلات أسيّة Solving Exponential Equations

تعلمت في ما سبق حل معادلة أسية مثل $7^{3x} = 49$ وذلك بتوحيد الأساس ومساواة الأسس.

سوف تتعلم في هذا الدرس حل معادلات أسية على الصورة: $b^{kx} = a$ حيث يتضمن الأس المتغير x وذلك باستخدام اللوغاريتمات:

$$\forall a , b \in \mathbb{R}^+ , m \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$
$$a = b \Leftrightarrow \log_m a = \log_m b$$

لحل معادلات أسية يمكننا أخذ لوغاريتم كل من طرفي المعادلة.

مثال (1)

حل المعادلة التالية، ثم تحقق: $7^{3x} = 20$

الحل:

$$7^{3x} = 20$$

خذ لوغاريتم كل من طرفي المعادلة $\log 7^{3x} = \log 20$

$$3x \log 7 = \log 20$$ خاصية القوى

$$x = \frac{\log 20}{3 \log 7}$$

$$\approx 0.5132$$ استخدم الآلة الحاسبة

تحقق:

$$7^{3x} = 20$$

$$7^{3(0.5132)} \approx 20.00382 \approx 20$$ الإجابة صحيحة

حاول أن تحل

1 حل كل معادلة مما يلي مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من ألف:

a $3^x = 4$ b $6^x = 21$ c $3^{x+4} = 101$

تعلمت حل معادلات جذرية باستخدام قوانين الأسس والجذور.
يمكن أيضًا حلها باستخدام اللوغاريتمات.

مثال (2)

حل كلًّا من المعادلات التالية:

a $x^{\frac{2}{3}} = 25 \ , \ x > 0$ b $\sqrt{m^5} = 32 \ , \ m > 0$

الحل:

a $x^{\frac{2}{3}} = 25$

$$\log x^{\frac{2}{3}} = \log 25$$ أخذ لوغاريتم الطرفين

$$\log x^{\frac{2}{3}} = \log 5^2$$

$$\frac{2}{3} \log x = 2 \log 5 \quad , \quad x > 0$$ خاصية القوى

$$\left(\frac{3}{2}\right)\frac{2}{3} \log x = \left(\frac{3}{2}\right) 2 \log 5$$

$$\log x = 3 \log 5$$

$$\log x = \log 5^3$$ خاصية رفع القوى

$$x = 5^3$$

$$x = 125 \in (0, \infty)$$

b $\sqrt{m^5} = 32$

$m^{\frac{5}{2}} = 32$

أخذ لوغاريتم الطرفين $\log m^{\frac{5}{2}} = \log 32$

$\log m^{\frac{5}{2}} = \log 2^5$

خاصية القوى $\frac{5}{2}\log m = 5\log 2 \ , \qquad m > 0$

$\log m = 5 \times \frac{2}{5}\log 2$

بسّط $\log m = 2\log 2$

$\log m = \log 2^2$

$m = 2^2$

$m = 4 \ , \qquad 4 \in (0, \infty)$

حاول أن تحل

2 حل كل معادلة مما يلي:

a $t^{\frac{7}{2}} = 128 \ , \ t > 0$

b $\sqrt[3]{u^4} - 5 = 11 \ , \ u > 0$

لحساب اللوغاريتم لأي أساس موجب لا يساوي الواحد، يمكنك استخدام خاصية تغيير الأساس.

قاعدة تغيير الأساس

$$\forall m, b, c \in \mathbb{R}^+, \ b \neq 1, \ c \neq 1$$

$$\log_b m = \frac{\log_c m}{\log_c b}$$

فمثلاً: $\log_3 7 = \frac{\log_2 7}{\log_2 3} = \frac{\log_5 7}{\log_5 3} = \frac{\log 7}{\log 3}$

مثال (3)

استخدم قاعدة تغيير الأساس لإيجاد قيمة $\log_3 15$ ثم حوّل $\log_3 15$ إلى لوغاريتم للأساس 2

الحل:

$\log_b m = \frac{\log_c m}{\log_c b}$

استخدم قاعدة تغيير الأساس $\log_3 15 = \frac{\log 15}{\log 3}$

استخدم الآلة الحاسبة ≈ 2.4650

للتحويل إلى لوغاريتم للأساس 2:

اكتب معادلة	$\log_3 15 = \log_2 x$
عوّض عن $\log_3 15$ بـ 2.4650	$2.4650 \approx \log_2 x$
استخدم قاعدة تغيير الأساس	$2.4650 = \dfrac{\log x}{\log 2}$
الضرب التقاطعي	$2.4650(\log 2) = \log x$
بسّط	$0.7420 \approx \log x$
اكتب في الصيغة الأسية	$x = 10^{0.7420}$
استخدم الآلة الحاسبة	$x \approx 5.5208$
	$\therefore\ \log_3 15 \approx \log_2 5.5208$

حاول أن تحل

3 a أوجد قيمة $\log_3 400$ ثم حوّلها إلى لوغاريتم للأساس 8

b التفكير الناقد: في المثال (3)، $\log_2 x \approx 2.4650$

كيف يمكن حل هذه المعادلة دون استخدام قاعدة تغيير الأساس؟

يمكنك استخدام قاعدة تغيير الأساس لحل معادلات أسية وذلك بأخذ اللوغاريتم لكلا الطرفين مستخدمًا أساس الأس كأساس للوغاريتم، ثم استخدم قاعدة تغيير الأساس.

مثال (4)

حل المعادلة: $2^{3x} = 172$

الحل:

	$2^{3x} = 172$
خذ اللوغاريتم للأساس 2 لكلا الطرفين	$\log_2(2^{3x}) = \log_2(172)$
بسّط	$3x = \log_2 172$
استخدم قاعدة تغيير الأساس	$3x = \dfrac{\log 172}{\log 2}$
استخدم الآلة الحاسبة	$x \approx 2.4754$

حاول أن تحل

4 استخدم قاعدة تغيير الأساس لحل المعادلة: $7^{5x} = 3\,000$

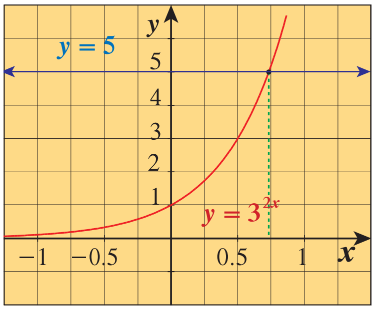
يمكنك أيضًا حل معادلات أسية بيانيًّا.

فمثلًا الشكل المقابل يمثل حل المعادلة $3^{2x} = 5$ حيث

تمّ تمثيل بيان الدالة: $y = 3^{2x}$ والدالة $y = 5$

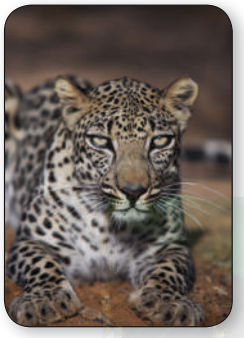
نقطة التقاطع للمنحنيين $(0.732, 5)$.

$\therefore$ حل المعادلة هو 0.732 تقريبًا.



تطبيق إثرائي

كان النمر العربي من أكثر السنوريات انتشارًا في شبه الجزيرة العربية لكنه الآن موجود على اللائحة الحمراء لأنواع الحيوانات المهددة بالانقراض.



كان عدده 112 سنة 1990 في بعض مناطق شبه الجزيرة العربية وانخفض إلى 65 سنة 2006.

a اكتب معادلة أسية تنمذج تناقص عدد النمور.

b إذا بقي هذا التناقص على حاله، في أية سنة يبقى فقط 5 نمور في شبه الجزيرة العربية؟ وضّح بيانيًّا.

الحل:

a المعادلة الأسية على الشكل $y = ab^x$.

لتكن سنة 1990 ممثلة بالصفر وسنة 2006 بـ 16

عوّض عن x بـ 0، عن y بـ 112 $\qquad 112 = ab^0$

$b^0 = 1 \qquad a = 112$

$\therefore y = 112b^x$

عوّض عن x بـ 16، عن y بـ 65 $\qquad 65 = 112 \times b^{16}$

$b^{16} = \frac{65}{112}$

خذ اللوغاريتم لكلا الطرفين $\qquad \log b^{16} = \log \frac{65}{112}$

$16 \log b = \log \frac{65}{112}$

استخدم الآلة الحاسبة $\qquad \log b \approx -0.01476904$

$b \approx 0.96656476$

$\therefore y = (112)(0.96656476)^x$

b

$y = 5$

$y = (112)(0.96656476)^x$

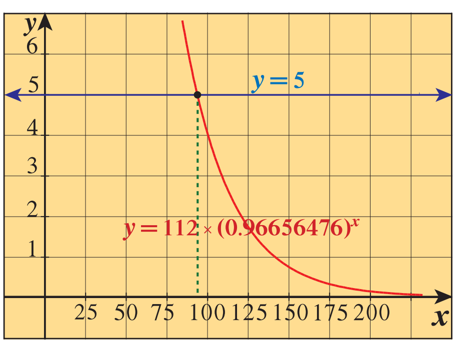
$5 = (112)(0.96656476)^x$

الإجابة $\qquad x \approx 92$

$1990 + 92 = 2082$

يبقى في شبه الجزيرة العربية 5 نمور فقط سنة 2082.

الشكل المقابل يوضّح الحل بيانيًّا.



نقطة التقاطع $(91.79, 5)$

حل معادلات لوغاريتمية Solving Logarithmic Equations

كل معادلة تتضمن تعبيرًا لوغاريتميًّا تسمى معادلة لوغاريتمية ويمكن وضعها على الصورة:

$$\log_b y = x \qquad \forall\ y, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$$

ويكون حلها بما يحقق هذه الشروط لذا يتوجب إيجاد مجال التعريف (شرط الحل) أو التحقق من القيم الناتجة.

مثال (5)

حل المعادلة: $\log(3x+1) = 5$

الحل:

نوجد المجال: $3x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{1}{3}$

$\therefore$ المجال $= \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$

$\log(3x+1) = 5$

اكتب في الصورة الأسية $3x + 1 = 10^5$

$3x + 1 = 100\,000$

$x = 33\,333$

$\because 33\ 333 \in \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$

$\therefore$ الحل مقبول.

حاول أن تحل

5 حل المعادلة: $\log(7-2x) = -1$

في بعض الحالات، عليك استخدام خواص اللوغاريتمات لتبسيط التعابير قبل حل المعادلة.

مثال (6)

حل المعادلة: $2\log x - \log 3 = 2$

الحل:

نوجد المجال: $x > 0$

$\therefore$ المجال $= (0, \infty)$

$2\log x - \log 3 = 2$

اكتب لوغاريتم واحد $\log\left(\frac{x^2}{3}\right) = 2$

اكتب في الصورة الأسية $\frac{x^2}{3} = 10^2$

$x^2 = 3 \times 100$

$x = \pm 10\sqrt{3}$

$10\sqrt{3} \in (0, \infty), -10\sqrt{3} \notin (0, \infty)$

حل المعادلة هو: $x = 10\sqrt{3}$

حاول أن تحل

6 حل المعادلة: $\log 6 - \log 3x = -2$

مثال (7)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية مستخدمًا خواص اللوغاريتمات:

a $\log x(x+1) = \log 2$

b $\log_2(x-1) - \log_2(x+3) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad x \in (1, \infty)$

c $\log_{x+1} 32 = 5 \quad , \quad x \in (0, \infty)$

الحل:

a

نوجد المجال: $x(x+1) > 0$

المعادلة المناظرة $x(x+1) = 0$

$\therefore x = 0$ أو $x = -1$

لإيجاد قيم x التي تحقق $x(x+1) > 0$

$x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1 \quad | \quad x < 0$

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \quad | \quad x > 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

المجال $= \mathbb{R} - [-1, 0]$

$\log x(x+1) = \log 2$

خاصية اللوغاريتم

$x(x+1) = 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x-1)(x+2) = 0$

$x = 1$ أو $x = -2$

$1, -2 \in \mathbb{R} - [-1, 0]$

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة $= \{1, -2\}$

b $\log_2(x-1)-\log_2(x+3)=\log_2\left(\frac{1}{x}\right)$, $x\in(1,\infty)$

$$\log_2\left(\frac{x-1}{x+3}\right)=\log_2\left(\frac{1}{x}\right)$$ خاصية القسمة

$$\frac{x-1}{x+3}=\frac{1}{x}$$ خاصية اللوغاريتم

$$x(x-1)=x+3$$ الضرب التقاطعي

$$x^2-2x-3=0$$

$$(x-3)(x+1)=0$$

$$x=-1\ ,\ x=+3$$

$-1\notin(1,\infty)$ مرفوضة

$3\in(1,\infty)$

∴ مجموعة حل المعادلة = $\{3\}$

c $\log_{x+1}32=5$, $x\in(0,\infty)$

$$\frac{\log 32}{\log(x+1)}=5$$ قاعدة تغيير الأساس

$$\log 32=5\log(x+1)$$ الضرب التقاطعي

$$\log 32=\log(x+1)^5$$ خاصية رفع القوى

$$32=(x+1)^5$$

$$2^5=(x+1)^5$$

$$x+1=2$$

$$x=1$$

$1\in(0,\infty)$

∴ مجموعة حل المعادلة = $\{1\}$

حاول أن تحل

7 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

a $\log x^2-\log(x^2-x)=1$, $x\in(1,\infty)$

b $\log_4(x+6)-\log_4 12=\log_4 2-\log_4(x-4)$, $x\in(4,\infty)$

4-6

سوف تتعلم

- علاقة اللوغاريتم الطبيعي بالدالة $y = e^x$.
- حل المعادلات باستخدام اللوغاريتم الطبيعي.

المفردات والمصطلحات:

- اللوغاريتم الطبيعي

Natural Logarithm

اللوغاريتم الطبيعي
Natural Logarithm

دعنا نفكر ونتناقش

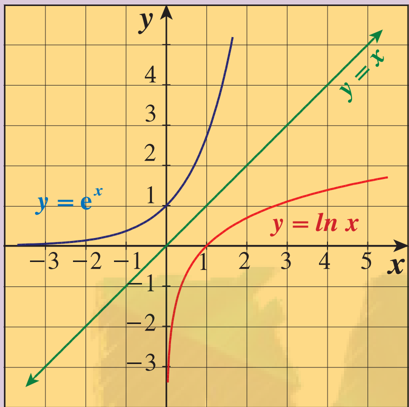
في الدرس (2–4) وجدت أن العدد $e \approx 2.71828$ وقد أمكن استخدامه كأساس.

فالدالة $y = e^x$ لها معكوس هو $y = \log_e x$ ويسمى دالة اللوغاريتم الطبيعي ورمزه:

$y = \ln x$

وتقرأ y تساوي اللوغاريتم الطبيعي لِـ x

يوضح الرسم البياني المجاور الدالتين:



1 $y = e^x$

2 $y = \ln x$

الآلة الحاسبة: استخدم المفتاح $\ln$ على آلتك الحاسبة لإيجاد قيم:

a $\ln 5,\ \ln 3,\ \ln 15,\ \ln 5 + \ln 3$

b $\ln 1,\ \ln e,\ \ln e^2$

كيف تربط إجابتك بما سبق دراسته؟

تطبق خواص اللوغاريتمات المعتادة على اللوغاريتم الطبيعي أيضًا.
أعد ذكر خاصية الضرب وخاصية القسمة وخاصية القوى بدلالة اللوغاريتم الطبيعي.

تدريب

أكمل ما يلي حيث $k, m, n \in \mathbb{R}^+$.

1 $\ln(mn) = ...$ (خاصية ....)

2 $\ln \frac{m}{n} = ...$ (خاصية ....)

3 $\ln m^k = ...$ (خاصية ....)

4 $\ln e = ...$

5 $\ln e^k = ...$

6 $e^{\ln k} = ...$

مثال (1)

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل: $8e^{2x} = 20$

الحل:

$8e^{2x} = 20$

اقسم كل طرف على 8 $e^{2x} = \frac{20}{8}$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف $ln\, e^{2x} = ln\, 2.5$

خاصية القوى حيث $ln\, e = 1$ $2x\, ln\, e = ln\, 2.5$

اختصر $2x = ln\, 2.5$

اقسم كل طرف على 2 $x = \frac{ln\, 2.5}{2}$

استخدم آلتك الحاسبة $x \approx 0.458$

حاول أن تحل

1 استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل: $e^{4(x+1)} = 32$.

اللوغاريتم الطبيعي يبسط تعبيرات العديد من العلاقات في المجالات المختلفة ومنها المجال الفيزيائي.

مثال (2) الصلة بالواقع

الفضاء: يمكن أن يبلغ صاروخ مدارًا ثابتًا على بعد 300 km فوق سطح الأرض إذا ما بلغت سرعته 7.7 km/s وتحسب أقصى سرعة (v) له بالعلاقة: $v = -0.0098\, t + c\, ln\, r$

(حيث t هي زمن اشتعال وقود محرك الصاروخ بالثانية (s)، c هي سرعة انطلاق البخار بـ (km/s)، r هي النسبة بين كتلة الصاروخ وهو محمل بالوقود إلى كتلته من دون وقود).

لنفرض أن صاروخًا قد استخدم لدفع سفينة فضاء، وله نسبة كتلة حوالي 25 وسرعة انطلاق البخار 2.8 (km/s)، وزمن الاشتعال 100 s، فهل يبلغ هذا الصاروخ مدارًا ثابتًا؟

الحل:

في هذه الحالة: $r \approx 25$, $c = 2.8$ km/s , $t = 100$ s

لإيجاد v، استخدم العلاقة: $v = -0.0098\, t + c\, ln\, r$

$$v = -0.0098\,(100) + 2.8\, ln\, 25$$
$$\approx -0.98 + 2.8(3.219)$$
$$\therefore v \approx 8 \text{ km/s}$$

وهذه السرعة أكبر من السرعة 7.7km/s، والتي تلزم لبلوغ المدار الثابت.

لذلك فإن هذا الصاروخ يمكنه أن يبلغ المدار الثابت.

حاول أن تحل

2 من مثال (2) أوجد سرعة صاروخ، نسبة كتلته حوالى 15، وسرعة انطلاق البخار قدرها 1.2km/s، وزمن اشتعال المحرك 30s هل يمكن أن يبلغ هذا الصاروخ مدارًا ثابتًا على بعد 300km فوق سطح الأرض؟

يمكنك حل معادلات لوغاريتمية طبيعية باستخدام معادلات أسية والعكس صحيح.

مثال (3)

حل المعادلة: $ln(3x+5)=4$

الحل:

نوجد المجال: $3x+5>0 \Rightarrow x>-\frac{5}{3}$

∴ المجال $=\left(-\frac{5}{3},\infty\right)$

$ln(3x+5)=4$

أعد الكتابة في الصورة الأسية $3x+5=e^4$

اطرح 5 من كل طرف $3x=e^4-5$

اقسم كل طرف على 3 $x=\left(\frac{e^4-5}{3}\right)$

استخدام الآلة الحاسبة $x\approx 16.53$

تذكر: $\log_e x = ln\, x$

حاول أن تحل

3 حل كلًّا من المعادلات التالية:

a $e^{\frac{2x}{5}}+7.2=9.1$

b $5+ln\left(\frac{x+2}{3}\right)=7$

مثال (4)

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل $7e^{2x}+2.5=13$

الحل:

$7e^{2x}+2.5=13$

اطرح 2.5 من طرفي المعادلة $7e^{2x}=10.5$

اقسم طرفي المعادلة على 7 $e^{2x}=1.5$

خذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة	$ln(e)^{2x} = ln\,1.5$
خاصية القوى حيث $ln\,e = 1$	$2x\,ln\,e = ln\,1.5$
اقسم طرفي المعادلة على 2	$x = \frac{ln\,1.5}{2}$
استخدم الآلة الحاسبة	$x \approx 0.2027$

حاول أن تحل

4 استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل المعادلتين التاليتين:

a $e^{x+1} = 30$

b $2^{2x-3} + 4 = 7$

المرشد لحل المسائل

في نهاية العام 2000 وصل عدد مشتركي شبكة الإنترنت في العالم إلى 360 مليونًا وتزايد هذا العدد ليصل في نهاية العام 2011 إلى 2 260 مليون مشترك.

a x تمثّل العدد بالسنين، m معدل الزيادة السنوية، P عدد المشتركين في عام 2000، y عدد المشتركين مع مرور الوقت.
اكتب دالة على الشكل: $y = Pe^{mx}$ تمثل القيمة المتوقعة لزيادة عدد مشتركي شبكة الإنترنت ابتداءً من العام 2000.
y: عدد المشتركين بعد مرور x عام.
m: معدل التزايد السنوي، P: عدد المشتركين عام 2000.

b في أي عام يتخطى عدد مشتركي شبكة الإنترنت المليار؟

c متى يصبح هذا العدد أكثر من 3 مليارات مشترك؟

d أوجد قيمة x بدلالة y.

e كيف يمكن استخدام المعادلة في **d** للتحقق من إجابات **b**، **c**؟

الحل:

a الشكل العام للمعادلة هو كالتالي: $y = Pe^{mx}$
إيجاد المعدل العام لتزايد عدد مشتركي شبكة الإنترنت في العالم بين عام 2000 و2011.

تعويض y بـ 2 260 وP بـ 360 وx بـ 11
$$2\,260 = 360\,e^{11m}$$
قسمة طرفي المعادلة على 360
$$\frac{2\,260}{360} = e^{11m}$$
تطبيق اللوغاريتم الطبيعي على طرفي المعادلة
$$ln\frac{2\,260}{360} = ln\,e^{11m}$$
تبسيط
$$ln\frac{2\,260}{360} = 11m$$
قسمة طرفي المعادلة على 11
$$m = \frac{ln\left(\frac{2\,260}{360}\right)}{11}$$
استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد معدل التزايد السنوي
$$m = 0.167$$
إذًا معدل التزايد السنوي لمشتركي شبكة الإنترنت هو 16.7%.
وبالتالي الدالة هي: $y = 360\,e^{0.167x}$

b
$$y = 360\,e^{0.167x}$$
$$360\,e^{0.167x} > 1\,000$$
$$e^{0.167x} > \frac{1\,000}{360}$$
$$0.167x > ln\frac{1\,000}{360}$$
$$x > \frac{ln\frac{1\,000}{360}}{0.167} \approx 6.11767$$

في العام 2007 يتخطى عدد مشتركي شبكة الإنترنت المليار، ويصبح العدد حوالى 1.159 مليار مشترك.

c
$$y = 360\,e^{0.167x}$$
$$360\,e^{0.167x} > 3\,000$$
وبالمثل
$$x > \frac{ln\frac{3\,000}{360}}{0.167} \approx 12.6961888$$

يتخطى عدد مشتركي شبكة الإنترنت 3 مليارات في العام 2013، ويصبح العدد حوالى 3.156 مليارات مشترك.

d
$$y = 360\,e^{0.167x}$$

قسمة طرفي المعادلة على 360
$$\frac{y}{360} = e^{0.167x}$$

تطبيق اللوغاريتم الطبيعي على طرفي المعادلة
$$ln\left(\frac{y}{360}\right) = ln\left(e^{0.167x}\right)$$

تبسيط
$$ln\left(\frac{y}{360}\right) = 0.167x$$

قسمة طرفي المعادلة على 0.167
$$x = \frac{ln\left(\frac{y}{360}\right)}{0.167}$$

e نعوض عدد y في b، c لنتحقق من الإجابات التي توصلنا إليها من حيث عدد السنوات المطلوبة للوصول إلى هذه الأعداد.

b $x \approx 6.12 \Leftarrow \frac{ln\left(\frac{1\,000}{360}\right)}{0.167}$، إذًا نحتاج إلى أكثر من 6 سنوات، إذًا في 2007.

c $x \approx 12.7 \Leftarrow \frac{ln\left(\frac{3\,000}{360}\right)}{0.167}$، إذًا نحتاج إلى أكثر من 12 سنة، إذًا في 2013.

مسألة إضافية

في نهاية العام 2000، وصل عدد مشتركي الهاتف المحمول حوالى 750 مليونًا في العالم أمّا في نهاية العام 2011 فقد تزايد هذا العدد ليصل إلى حوالى 5.6 مليارات مشترك.

a x تمثّل عدد السنوات منذ العام 2000.

اكتب دالة على الشكل: $y = Pe^{mx}$، تمثل القيمة المتوقعة لزيادة مستخدمي الهاتف المحمول ابتداءً من العام 2000.

y: عدد المستخدمين بعد مرور x سنة.

m: معدل التزايد السنوي.

P: عدد المستخدمين في العام 2000.

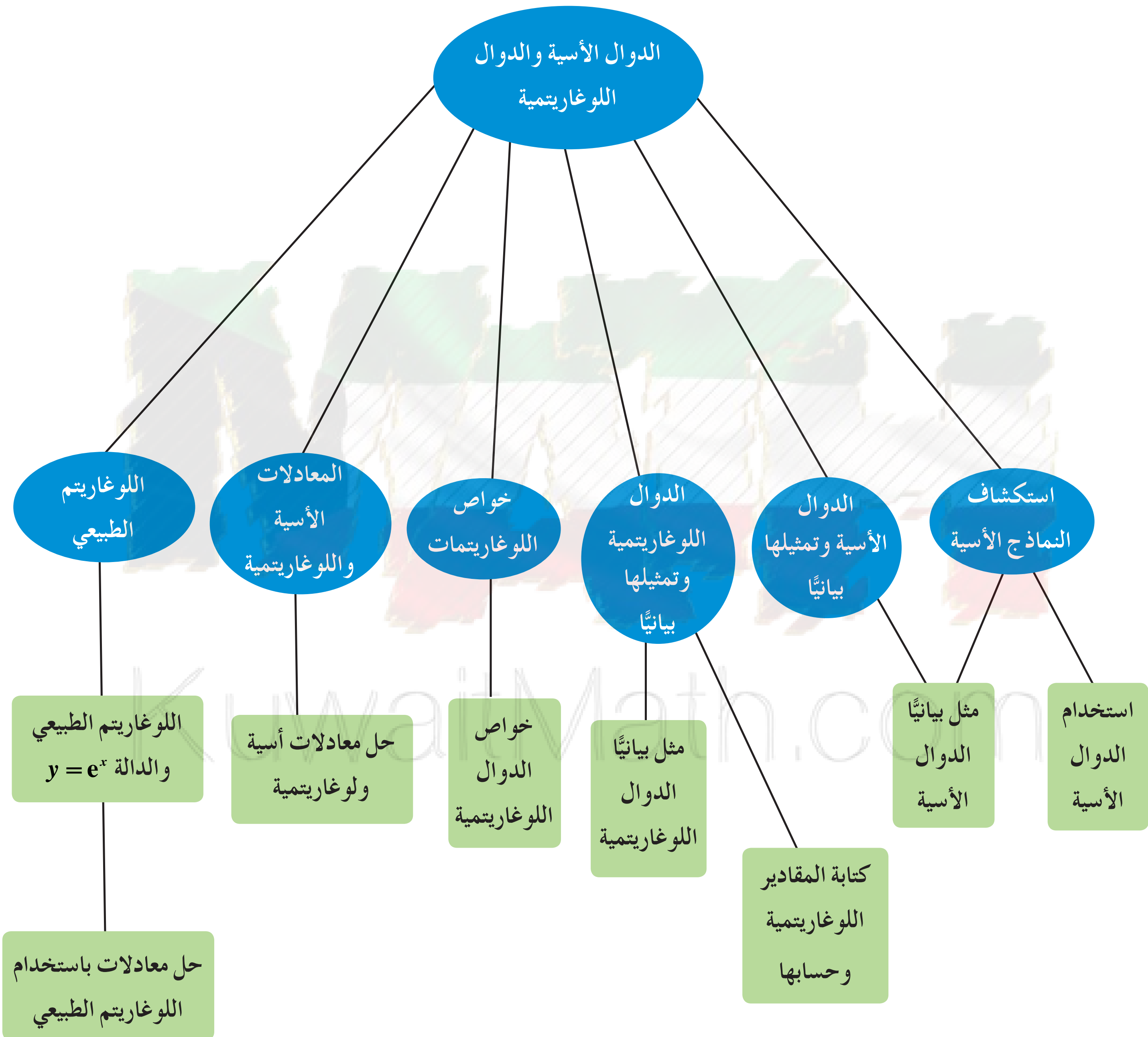
b في أي عام يتخطى عدد مستخدمي الهاتف المحمول الـ 2 مليار؟

c في أي عام يتخطى عدد مستخدمي الهاتف المحمول الـ 9 مليارات؟

d أوجد x بدلالة y.

e كيف يمكن استخدام المعادلة في d للتحقق من الإجابات في b، c؟

مخطط تنظيمي للوحدة الرابعة



ملخص

- صورة الدالة الأسية هي: $y = ab^x$
- $b > 1$ الدالة تمثل نموًّا أسيًّا عامله b
- $0 < b < 1$ الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا عامله b
- $y = ab^{cx}$، تتغير الرسوم البيانية للدالة الأسيّة بتغير قيم إحدى الثوابت التالية: $a\ ,b\ ,c$
- $y = b^x \Leftrightarrow \log_b y = x$
- اقرأ $\log_b y$ لوغاريتم y للأساس b
- الأساس b في المقدار الأس b^x هو نفسه الأساس في اللوغاريتم وفي كلتا الحالتين $b \neq 1$ و $b > 0$ وكذلك الأس.
- x في b^x هو اللوغاريتم في المعادلة $\log_b y = x$
- اللوغاريتمات المعتادة هي اللوغاريتمات للأساس 10 يمكن أن نكتب $\log_{10} y$ أو $\log y$
- الدوال اللوغاريتمية هي معكوسات الدوال الأسية.
- خواص اللوغاريتمات
- لأي أعداد حقيقية موجبة b, n, m، $b \neq 1$

خاصية الضرب $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$

خاصية القسمة $\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

خاصية القوى $\log_b m^k = k \log_b m\ ,\ k \in \mathbb{R}$

- المعادلة الأسية هي على الشكل $a = b^{cx}$، حيث الأس يتغير.
- $\forall a\ ,\ b \in \mathbb{R}^+\ , m \in \mathbb{R}^+ - \{1\}\ ,\ a = b \Longleftrightarrow \log_m a = \log_m b$
- بحساب اللوغاريتمات بأي أساس يمكنك استخدام خاصيّة تغيير الأساس لأي أعداد حقيقية موجبة $c\ ,b\ ,m$

حيث $b \neq 1\ , c \neq 1$

$$\log_b m = \frac{\log_c m}{\log_c b}$$

$$e \approx 2.71828$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\ln e^x = x$$

$$\ln e = 1$$