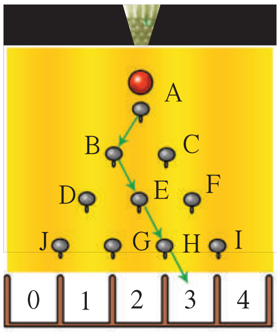
الوحدة الحادية عشرة

الجبر المتقطع
Discrete Algebra

مشروع الوحدة: لوحة غالتون (Galton).



1 **مقدمة المشروع:** هي آلة اخترعها السير فرنسيس غالتون Galton (1822–1911).
وتتألف من لوحة مستطيلة الشكل غرزت فيها مسامير على مسافات متساوية ومرتبة كما في الشكل.
بحيث إذا أفلتت كرة ما على هذه اللوحة، فهي لا بد من أن تمر إما عن يمين مسمار أو عن يساره، ولكلتا الحالتين الاحتمال نفسه، حيث إنها تنهي مسارها بوصولها إلى إحدى الخانات الموجودة في أسفل هذه اللوحة.

2 **الهدف:** إيجاد ومقارنة احتمال وصول الكرة إلى كل خانة من الخانات.

3 **اللوازم:** ورق مقوى، لوحة خشبية، مسامير، أقلام تلوين، كرات متماثلة، مادة لاصقة، حاسوب، جهاز إسقاط (Data Show).

4 **أسئلة حول التطبيق:**

a ارسم مخطط الشجرة البيانية ممثلًا كل الطرق التي يمكن أن تسلكها الكرة عند إفلاتها من أعلى اللوحة (أي من أعلى النقطة A).

b نفذ لوحة غالتون أي اللوحة المبينة أعلاه.

c أفلت كرة من أعلى النقطة A، ثم دوّن رقم الخانة التي تقع فيها. كرر العملية نفسها 49 مرّة.

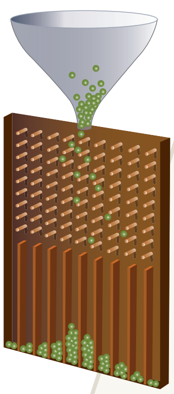
d ارسم تمثيلًا بيانيًا بالأعمدة يبيّن النسب المئوية لوقوع الكرة في كل خانة من الخانات المرقمة من صفر إلى أربعة.

e مستخدمًا مخطط الشجرة البيانية، أوجد احتمال سقوط الكرة في كل خانة من الخانات الخمس.

f قارن بين الاحتمال الذي وجدته والنسب المئوية التي حصلت عليها في d .

إذا كنت متمكنًا من البرمجة، ضع برنامجًا على الحاسوب يحاكي لوحة غالتون التي صنعتها، ثم ارسم تمثيلًا بيانيًا بالأعمدة يبيّن النسب المئوية إذا أفلتت الكرة 500 مرّة، وقارن النسب التي حصلت عليها بما حصلت عليه في e .

5 **التقرير:** ضعْ تقريرًا مفصلًا حول تنفيذ المشروع مستفيدًا من دروس الوحدة.
اعرض اللوحة التي نفذتها، وضع ملصقًا يبيّن التمثيل البياني الذي رسمته.



نموذج لآلة غالتون

دروس الوحدة

الاحتمال	نظرية ذات الحدين	مبدأ العد والتباديل والتوافيق
11–3	11–2	11–1

الوحدة الحادية عشرة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت رسم مخطط الشجرة البيانية واستخدامه في العد.
- تعرفت طرائق العد ومنها التباديل والتوافيق.
- حللت مسائل باستخدام طرائق العد.
- تعرفت الاحتمالات المشروطة.

ماذا سوف تتعلم؟

- حل مسائل باستخدام مبدأ العد والتباديل والتوافيق.
- استخدام مثلث باسكال.
- استخدام نظرية ذات الحدين.
- تتعرف التجربة العشوائية وفضاء العينة.
- تعيين احتمالات بعض الأحداث.
- تعيين احتمال ذات الحدّين.

المصطلحات الأساسية

مبدأ العد – التباديل – الحالة الخاصة – التوافيق – مفكوك ذات الحدين – مثلث باسكال – نظرية ذات الحدين – التجربة العشوائية – فضاء العينة – الحدث – الحدث البسيط – الحدث المركب – الحدث المستحيل – الحدث المؤكد – الحدثان المتنافيان – الحدث المتمم – الحدثان المستقلان – التقاطع – الاتحاد – المتمم – احتمال ذات الحدين.

أضف إلى معلوماتك

قام عالم الرياضيات السويسري جاكوب برنولي Jacob Bernouilli (1667–1784) بدراسة التجارب العشوائية المستقلة لأول مرة وذلك في كتابه «فن الحدس Ars Conjectandi»، الذي نشره حفيده نقولا Nicolas بعد 8 سنوات من وفاته.

يبيّن برنويي النتيجة التالية: إن تكرار ظهور ناتج في جملة تجارب يقترب كثيرًا من احتمال حدوث هذا الحدث.

على سبيل المثال، إذا رميت مكعبًا منتظمًا مرقمًا، فإن احتمال ظهور الرقم 2 هو $\frac{1}{6}$. إذا كررنا رميه المكعب عددًا n كبيرًا من المرات فإنه من شبه المؤكد أن ظهور الرقم 2 هو m من المرات يحقق العلاقة $\frac{1}{6} = \frac{m}{n}$.

وقد سُمِّي هذا التعبير الرياضي بقانون الأعداد الكبيرة.

أما حاليًا فتستخدم المحاكاة على الحاسوب للتحقق مما جاء في كتاب برنولي.

مبدأ العد والتباديل والتوافيق

Counting Principle, Permutations and Combinations

سوف تتعلم

- استخدام مبدأ العد في حل مسائل عملية.
- استخدام التباديل والتوافيق لعد الطرائق الممكنة في عملية ما.

المفردات والمصطلحات:

- مبدأ العد Counting Principle
- التباديل Permutations
- المضروب Factorial
- قانون التباديل Law of Permutations
- التوافيق Combinations

دعنا نفكر ونتناقش

يوجد في فصلكم 24 طالبًا وتريدون تشكيل وفد من n طالب ليمثل الفصل.

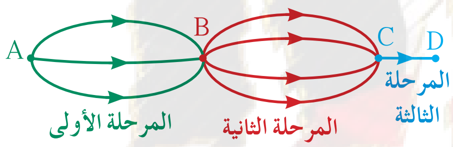
1. هل ترتيب طلاب الوفد مهم؟ متى يصبح الترتيب مهمًا؟
2. هل يمكن اختيار الطالب نفسه لأكثر من مرّة في الوفد نفسه؟
3. ما قيمة n التي تسمح بتشكيل أكبر عدد ممكن من الوفود؟ بيّن طريقة عملك.
4. ما قيمة n التي تسمح بتشكيل أكبر عدد ممكن من الوفود إذا كان عدد طلاب الفصل 25؟

مبدأ العد Counting Principle

تريد تنفيذ عمل على 3 مراحل متتابعة. هناك 3 طرائق مختلفة لتنفيذ المرحلة الأولى، و4 طرائق مختلفة لتنفيذ المرحلة الثانية، وطريقة واحدة لتنفيذ المرحلة الثالثة.

ما عدد الطرائق الممكنة لتنفيذ هذا العمل؟

عدد الطرائق الممكنة: طريقة 12 = $3 \times 4 \times 1$



مبدأ العد Counting Principle

لإجراء عملية على عدد من المراحل المتتابعة، كما يلي:

المرحلة الأولى بـ r_1 طريقة مختلفة،

المرحلة الثانية بـ r_2 طريقة مختلفة،

المرحلة الثالثة بـ r_3 طريقة مختلفة،

.....وهكذا حتى المرحلة n بـ r_n طريقة مختلفة

فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $r_1 \times r_2 \times r_3 \times ... \times r_n$

مثال (1)

لتكن: $A = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

يراد تكوين أعداد ذات ثلاثة منازل باستخدام عناصر A

أوجد:

a. عدد الأعداد الممكن تكوينها.

b. عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

c. عدد الأعداد الفردية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

الحل:

نفرض أن: r_1: عدد طرائق اختيار رقم من A لمنزلة الآحاد

r_2: عدد طرائق اختيار رقم من A لمنزلة العشرات

r_3: عدد طرائق اختيار رقم من A لمنزلة المئات

a ∵ الأعداد المطلوبة يمكن تكرار الأرقام فيها

$\therefore r_1 = 5,\ r_2 = 5,\ r_3 = 5$

فيكون عدد الأعداد الممكن تكوينها هو:

$r_1 \times r_2 \times r_3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ (عددًا)

b ∵ الأعداد المطلوبة مختلفة الأرقام

$\therefore r_1 = 5,\ r_2 = 4,\ r_3 = 3$

$r_1 \times r_2 \times r_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ (عددًا)

c ∵ الأعداد فردية ∴ الرقم في منزلة الآحاد هو 5 أو 1: طريقتان أي أن $r_1 = 2$

يبقى 4 طرائق مختلفة للرقم في منزلة العشرات أي أن $r_2 = 4$

و3 طرائق مختلفة للرقم في منزلة المئات أي أن $r_3 = 3$

عدد الأعداد الفردية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها: $2 \times 4 \times 3 = 24$ (عددًا)

حاول أن تحل

1 من مثال (1)، أوجد:

a عدد الأعداد الفردية الممكن تكوينها.

b عدد الأعداد الزوجية الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد الزوجية المختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

مثال (2)

لتكن: $B = \{0, 3, 4, 5, 7, 9\}$

تم تكوين أعداد ذات أربعة منازل باستخدام عناصر المجموعة B

أوجد: a عدد الأعداد الممكن تكوينها.

b عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 5 الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد مختلفة الأرقام والمحصورة بين 7 000، 4 000 الممكن تكوينها.

الحل:

a هناك 6 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة الآحاد

و6 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة العشرات

و6 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة المئات

و5 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة الألوف (لا يمكن اختيار الصفر)

الآحاد	العشرات	المئات	الألوف
6	6	6	5

∴ يمكن تكون $6 \times 6 \times 6 \times 5 = 1080$ عددًا مختلفًا.

b يقبل عدد القسمة على 5 إذا كان الرقم في منزلة الآحاد 5 أو 0

∴ 5 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة الألوف

و 6 طرائق مختلفة لاخيار الرقم في منزلة المئات

و 6 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة العشرات

وطريقتان لاختيار الرقم في منزلة الآحاد

الآحاد	العشرات	المئات	الألوف
2	6	6	5

∴ يمكن تكوين $360 = 2 \times 6 \times 6 \times 5$ عددًا مختلفًا.

c لكي يكون العدد محصورًا بين 7 000 ,4 000 فإن الرقم في منزلة الألوف هو 5 أو 4

(لا يمكن أن يكون 7 لأن العدد في هذه الحالة يكون أكبر من 7 000).

∴ توجد طريقتان لاختيار الرقم في منزلة الألوف

يبقى 5 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة المئات

و 4 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة العشرات

و 3 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة الآحاد

الآحاد	العشرات	المئات	الألوف
3	4	5	2

∴ يمكن تكوين $120 = 3 \times 4 \times 5 \times 2$ عددًا مختلفًا محصورًا بين 7 000، 4 000

حاول أن تحل

2 من المثال (2) أوجد:

a عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

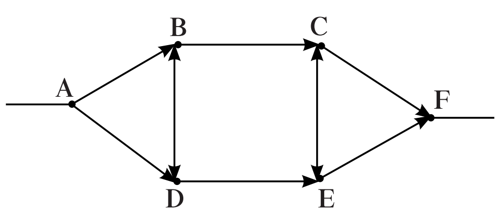
b عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 10 الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد مختلفة الأرقام والأكبر من 5 000 الممكن تكوينها.

يمكن وضع قائمة منظمة لمعرفة عدد طرائق إجراء العملية.

مثال (3)

بكم طريقة مختلفة يمكن الانتقال من المحطة A إلى المحطة F، باتباع (الأسهم) ومن دون المرور بالمحطة نفسها مرتين في كل طريقة انتقال؟



الحل:

نستخدم القوائم المنظمة:

A B C F　　　A D E F

A B C E F　　　A D E C F

A D B C F   A B D E F

A D B C E F   A B D E C F

∴ هناك 8 طرائق مختلفة للانتقال من المحطة A إلى المحطة F

حاول أن تحل

3 من مثال (3) بكم طريقة يمكن الانتقال من المحطة A إلى المحطة F مرورًا بخمس محطات فقط؟

التباديل Permutations

عند وضع قائمة منظمة لمعرفة عدد طرائق إجراء العمليات كما في مثال (3) وجدنا أن ترتيب العناصر مهمّ حيث يختلف الطريق $ABDECF$ عن الطريق $ADBCEF$

التبديل هو توزيع العناصر **وفق ترتيب معيّن.**

وقد سبق لك دراسة عدد تباديل n من العناصر فيما بينها ويسمّى «مضروب n» $(n-\text{Factorial})$ ويرمز له بالرمز $n!$ ويكون:

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3\times 2\times 1 \ ,\ n\in\mathbb{Z}^+$$

فمثلًا:

$$4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$$

$$5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$$

وكذلك درست **عدد تباديل n من العناصر مأخوذ منها r في كل مرة.**

ويرمز له بالرمز «${}_nP_r$» ويكون:

قانون التباديل Law of Permutations

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: $n, r\in\mathbb{Z}^+ \ ,\ n\geq r$

ملاحظة: ${}_nP_0 = 1\ ,\ {}_nP_n = n!\ ,\ {}_nP_1 = n$

فمثلًا:

$${}_7P_3 = 7\times 6\times 5 = 210$$

$${}_5P_0 = 1$$

$${}_6P_6 = 6! = 720$$

$${}_8P_1 = 8$$

تذكر:

$1! = 1$

$0! = 1$

ملاحظة:
يجب الأخذ بعين الاعتبار نوع الآلة الحاسبة لأنه يوجد فروق بين مفاتيح الآلات وطريقة استخدامها.

تذكر:
يمكن استخدام المفتاح $\boxed{{}_nP_r}$ على الآلة الحاسبة لإيجاد عدد التباديل.
مثلًا، لإيجاد ${}_7P_4$ اضغط على المفاتيح التالية بالترتيب من اليسار إلى اليمين:
$\boxed{7}\ \boxed{{}_nP_r}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$
فيظهر على الشاشة العدد $\boxed{840}$
أي أن: ${}_7P_4 = 840$

معلومة:
تستخدم بعض الكتب الرمز ${}^nP_r$ أو $P(n,r)$ بدلًا من ${}_nP_r$

مثال (4)

اشتركت 7 يخوت في سباق.

بكم طريقة مختلفة يمكن توقع وصول اليخوت الثلاثة الأوائل بالترتيب؟

الحل:

ترتيب وصول اليخوت مهم ولا تكرار

∴ عدد تباديل 3 يخوت من بين 7:

$${}_7P_3 = \frac{7\,!}{(7-3)!} = \frac{7\,!}{4\,!}$$

$$= \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1} = 210 \text{ (طريقة)}$$

هناك 210 تراتيب مختلفة لوصول اليخوت الثلاثة الأوائل إلى نهاية السباق.

ملاحظة:

في المثال (4)، يمكن احتساب ${}_7P_3$ بثلاث طرائق مختلفة:

(1) باستخدام الآلة الحاسبة:

$\boxed{7}\ \boxed{{}_nP_r}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{210}$

(2) باستخدام القانون:

$${}_7P_3 = \frac{7\,!}{(7-3)!} = 210$$

(3) باستخدام مبدأ العد:

$${}_7P_3 = \underbrace{7\times6\times5}_{\text{3 أعداد}}$$

حاول أن تحل

4 ما عدد الطرائق المختلفة لوصول اليخوت الثلاثة الأوائل إذا اشترك في السباق 10 يخوت؟

مثال (5)

حل المعادلات التالية:

a $\;{}_nP_5 = 6\times{}_nP_4\,,\; n\geqslant 5$

b $\;{}_6P_r = 4\times{}_6P_{r-1}$

c $\;\dfrac{{}_{2n}P_{n+2}}{{}_{2n}P_{n-1}} = 60$

الحل:

a $\;{}_nP_5 = 6\times{}_nP_4$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 6\times n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) - 6n(n-1)(n-2)(n-3) = 0$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)((n-4)-6) = 0$$

لماذا؟

$$\because\; n\geqslant 5 \;\therefore\; n(n-1)(n-2)(n-3)\neq 0$$

$$\therefore\; n-4=6$$

$$n=10$$

b $\;{}_6P_r = 4\times{}_6P_{r-1}$

عند أخذ r عنصر من 6 فإن $r\leq 6$

$$\frac{6!}{(6-r)!} = 4\times\frac{6!}{(6-(r-1))!}$$

$$\frac{6!}{(6-r)!} = \frac{4\times6!}{(6-r+1)!}$$

بضرب كلًّا من الطرفين في $\frac{(6-r)!}{6!}$

$$\frac{6!}{(6-r)!} = \frac{4 \times 6!}{(6-r+1)\times(6-r)!}$$

$$1 = \frac{4}{6-r+1}$$

$$6-r+1 = 4$$

$$r = 3$$

c $\frac{{}_{2n}P_{n+2}}{{}_{2n}P_{n-1}} = 60$

$$\frac{\frac{(2n)!}{(2n-n-2)!}}{\frac{2n!}{(2n-n+1)!}} = 60$$

$$\frac{\cancel{(2n)}!}{(n-2)!} \times \frac{(n+1)!}{\cancel{(2n)}!} = 60 \Longrightarrow \frac{(n+1)!}{(n-2)!} = 60$$

$$\frac{(n+1)(n)(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 60$$

$$(n+1)(n)(n-1) = 60$$

خمّن

$$(n+1)(n)(n-1) = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$$\therefore \; n = 4$$

حاول أن تحل

5 حل المعادلات التالية:

a ${}_nP_7 = 12 \times {}_nP_5$

b ${}_8P_r = 4 \times {}_8P_{r-1}$

التوافيق Combinations

سبق لك دراسة التوافيق حيث تحتاج أحيانًا إلى معرفة عدد المجموعات الجزئية والتي يمكن اختيارها من مجموعة ما.

عندما نتكلم عن **مجموعة** فهذا يعني أن **ترتيب العناصر غير مهم**. لذلك نحسب عدد **التوافيق**. نرمز لعدد توافيق r عنصرًا مأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n بالرمز ${}_nC_r$ ويكون:

قانون التوافيق Law of Combinations

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث: $n, \; r \in \mathbb{Z}^+ \; , \; n \geq r$

ملاحظة:

$${}_nC_0 = 1 \; , \; {}_nC_1 = n \; , \; {}_nC_n = 1$$

معلومة:

يمكن استخدام الآلة الحاسبة في حل مثال (c) (5)، وذلك باعتبار أن

$(n+1)n(n-1) = 0$

$\Longrightarrow n^3 - n - 60 = 0$

أو بحل معادلة التكعيبية

معلومة:

تستخدم بعض الكتب الرمز ${}^nC_r$ أو $C(n,r)$ أو $\binom{n}{r}$ للتعبير عن عدد التوافيق.

مثال (6)

في مكتبة المدرسة 15 كتابًا مختلفًا من مجموعة روايات التاريخ الإسلامي.
بكم طريقة يمكنك اختيار 4 كتب منها للمطالعة؟

الحل:

تريد اختيار 4 كتب من مجموعة مكونة من 15 كتابًا.

ترتيب الكتب المختارة غير مهم، وليس هناك تكرار (أي لا يمكن اختيار الكتاب نفسه أكثر من مرة واحدة).

∴ عليك معرفة عدد توافيق 4 كتب من بين 15 كتابًا.

$$ {}_{15}C_4 = \frac{15!}{(15-4)! \times 4!} $$
$$ = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times (11)!}{(11)! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} $$
$$ = 1365 $$

يمكنك اختيار الكتب الأربعة بـ 1 365 طريقة مختلفة.

معلومة:
يمكنك حل المثال (6) باستخدام الآلة الحاسبة.

حاول أن تحل

6 في المثال (6):
a بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 7 كتب؟
b بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 8 كتب؟
c ماذا تلاحظ؟

مثال (7)

ترشح 10 طلاب لتمثيل القسم العلمي من مدرستك. يجري اختيار الممثلين الثلاثة بالاقتراع السري.
يمكنك اختيار ثلاثة طلاب أو أقل. بكم طريقة مختلفة يمكنك أن تقترع؟

الحل:

المطلوب اختيار مجموعة من 3 طلاب على الأكثر والترتيب غير مهم وليس هناك تكرار.

∴ نحسب عدد التوافيق.

يمكنك أن تقترع لِـ :

3 طلاب فيكون عدد الطرق: $ {}_{10}C_3 $

أو طالبين فيكون عدد الطرق: $ {}_{10}C_2 $

أو طالب واحد فيكون عدد الطرق: $ {}_{10}C_1 $

أو ورقة بيضاء فيكون عدد الطرق: $ {}_{10}C_0 $

∴ عدد طرائق الاقتراع:

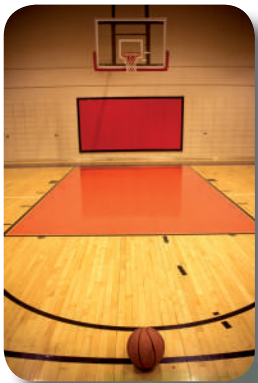
$$ {}_{10}C_3 + {}_{10}C_2 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_0 $$
$$ = 120 + 45 + 10 + 1 $$
$$ = 176 $$

يمكنك الاقتراع بـ 176 طريقة مختلفة.

حاول أن تحل

7 في المثال (7)، بكم طريقة مختلفة يمكنك الاقتراع لـ 5 طلاب أو أقل؟

مثال (8)



في الصف الحادي عشر 28 طالبًا وفي الصف الثاني عشر 24 طالبًا.
أراد معلم الرياضة اختيار 5 طلاب لتشكيل فريق لكرة السلة، شرط أن يتضمن الفريق على الأقل لاعبًا واحدًا من الصف الحادي عشر. ما عدد الخيارات الممكنة؟

الحل:

طريقة أولى:

حيث إن ترتيب العناصر غير مهم $\therefore$ الخيارات هي توافيق،

يمكن أن يتكون الفريق من لاعب واحد من الصف الحادي عشر و 4 لاعبين من الصف الثاني عشر: $_{28}C_1 \times {}_{24}C_4$

أو لاعبين اثنين من الصف الحادي عشر: $_{28}C_2 \times {}_{24}C_3$

أو 3 لاعبين من الصف الحادي عشر: $_{28}C_3 \times {}_{24}C_2$

أو 4 لاعبين من الصف الحادي عشر: $_{28}C_4 \times {}_{24}C_1$

أو 5 لاعبين من الصف الحادي عشر: $_{28}C_5 \times {}_{24}C_0$

عدد الخيارات: $_{28}C_1 \times {}_{24}C_4 + {}_{28}C_2 \times {}_{24}C_3 + {}_{28}C_3 \times {}_{24}C_2 + {}_{28}C_4 \times {}_{24}C_1 + {}_{28}C_5 \times {}_{24}C_0$

$= 297\,528 + 765\,072 + 904\,176 + 491\,400 + 98\,280$

$= 25\,564\,56$

طريقة ثانية:

يمكن أخذ كل الخيارات الممكنة لـ 5 طلاب من بين $52 = 24 + 28$ ورفض الخيارات التي تتضمن صفر طالب من الصف الحادي عشر أي اختيار الخمسة طلاب من الصف الثاني عشر.

$_{52}C_5 - {}_{24}C_5 = 25\,564\,56$

حاول أن تحل

8 في مثال (8)، ما عدد الخيارات الممكنة شرط أن يتضمن الفريق على الأقل لاعبين من الصف الثاني عشر؟

خواص أخرى للتوافيق

$_nC_m = {}_nC_{n-m}$

$_nC_m = {}_{n-1}C_m + {}_{n-1}C_{m-1}$

مثال (9)

في الصف الحادي عشر 20 طالبًا. يريد المدير اختيار وفد من 4 طلاب لتمثيل طلاب من الصف الحادي عشر.

a أوجد عدد الوفود المختلفة الممكن تكوينها.

b أوجد عدد الوفود المختلفة الممكن تكوينها شرط أن يكون الطالب سالم (من طلاب الصف الحادي عشر) مشاركًا في الوفد.

c أوجد عدد الوفود المختلفة الممكن تكوينها شرط ألّا يكون الطالب سالم (من طلاب الصف الحادي عشر) مشاركًا في الوفد.

d قارن بين إجابة a ومجموع إجابتي c و b . فسّر.

الحل:

a في عملية اختيار الوفد ترتيب العناصر غير مهم لذلك نحسب عدد التوافيق.

نختار 4 طلاب من بين 20:

$$_{20}C_4 = \frac{_{20}P_4}{4!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 4\,845$$

b إذا كان سالم مشاركًا في الوفد فهذا يعني أنه يجب اختيار 3 طلاب من بين بقية الطلاب أي من بين $19 = 1 - 20$ طالبًا.

$$_{19}C_3 = \frac{_{19}P_3}{3!} = \frac{19 \times 18 \times 17}{3 \times 2 \times 1} = 969$$

c إذا استثنى سالم من المشاركة في الوفد فهذا يعني أنه يجب اختيار 4 طلاب من بين $19 = 1 - 20$ طالبًا.

$$_{19}C_4 = \frac{_{19}P_4}{4!} = \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3\,876$$

d $969 + 3\,876 = 4\,845$

أي: $_{19}C_3 + {_{19}C_4} = {_{20}C_4}$

وهذا يتفق مع الخاصية $_nC_m = {_{n-1}C_m} + {_{n-1}C_{m-1}}$

حاول أن تحل

9 يتكون فريق كرة القدم في المدرسة من 18 لاعبًا. يريد المدرب تشكيل فريق من 11 لاعبًا.

a أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها.

b أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها إذا أراد المدرب أن يتضمن الفريق اللاعب عبد العزيز.

c أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها إذا استثنى المدرب اللاعب عبد العزيز من تشكيلة الفريق بطريقتين مختلفتين.

مثال (10)

أوجد قيمة n في كل مما يلي:

a $_nC_3 = {_nC_4}$

b $\frac{_nC_7}{_{(n-1)}C_6} = \frac{8}{7}$

الحل:

a $_nC_3 = {_nC_4}$

$$\frac{_nP_3}{3!} = \frac{_nP_4}{4!}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3!}$$

$$4n(n-1)(n-2) = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$n(n-1)(n-2)\big(4-(n-3)\big)=0 \qquad ,n\neq 0\ ,n\neq 1,\ n\neq 2$$

$$4-n+3=0$$

$$7-n=0$$

$$n=7$$

b $$\frac{{}_nC_7}{{}_{(n-1)}C_6}=\frac{8}{7}$$

$$\frac{\dfrac{n!}{(n-7)!\times 7!}}{\dfrac{(n-1)!}{(n-1-6)!\times 6!}}=\frac{8}{7}$$

$$\frac{n\times \cancelto{1}{(n-1)!}}{\cancelto{1}{(n-7)!}\times 7\times 6!}\times\frac{\cancelto{1}{(n-7)!}\times 6!}{\cancelto{1}{(n-1)!}}=\frac{8}{7}$$

$$\frac{n}{7}=\frac{8}{7}$$

$$n=8$$

حاول أن تحل

10 أوجد قيمة n في كلٍّ مما يلي:

a ${}_nC_2=105$

b ${}_nC_4={}_nC_5$

11-2

نظرية ذات الحدين

The Binomial Theorem

دعنا نفكر ونتناقش

الكثير من الاكتشافات الرياضية بدأت بدراسة الأنماط.

a أوجد مفكوك كلٍّ من: $(x+1)^3$, $(x+1)^2$, $(x+1)^1$, $(x+1)^0$

b هل يمكنك إيجاد مفكوك $(x+1)^{12}$ بسهولة؟

c ناقش الأنماط في مفكوك كلٍّ من: $(x+1)^3$, $(x+1)^2$, $(x+1)^1$, $(x+1)^0$

ماذا تلاحظ؟

مفكوك ذات الحدين Binomial Expanding

إذا فككت المقدار الذي على الصورة $(x+y)^n$، حيث 5، ... ، 2، 1، 0 = n، ستحصل على مفكوك يسمى مفكوك ذات الحدين عدد حدوده $(n+1)$ حدًّا، كما هو موضح أدناه:

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = 1x^1y^0 + 1x^0y^1$$
$$(x+y)^2 = 1x^2y^0 + 2x^1y^1 + 1x^0y^2$$
$$(x+y)^3 = 1x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + 1x^0y^3$$
$$(x+y)^4 = 1x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1x^0y^4$$
$$(x+y)^5 = 1x^5y^0 + 5x^4y^1 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5x^1y^4 + 1x^0y^5$$

في الصف الثالث نرى المعاملات: 1, 2, 1

في الصف الرابع نرى المعاملات: 1, 3, 3, 1

تشكل كل مجموعة من المعاملات صفًّا كما هو مبين في الصفحة أدناه.

إذا وضعت هذه المجموعات تحت بعضها بعضًا تكوّن ما يُسمّى بـ **مثلث باسكال**.

مثلث باسكال Pascal's Triangle

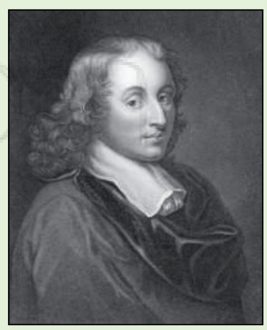
$(x+y)^0$	row 1						1					
$(x+y)^1$	row 2					1		1				
$(x+y)^2$	row 3				1		2		1			
$(x+y)^3$	row 4			1		3		3		1		
$(x+y)^4$	row 5		1		4		6		4		1	
$(x+y)^5$	row 6	1		5		10		10		5		1

سوف تتعلم

- استخدام مثلث باسكال.
- إيجاد معامل مفكوك ذات الحدين.
- استخدام نظرية ذات الحدين.

المفردات والمصطلحات:

- مفكوك ذات الحدين Binomial Expanding
- مثلث باسكال Pascal's Triangle
- نظرية ذات الحدين The Binomial Theorem



بليز باسكال
Blaise PASCAL
(1623–1662)

الترابط:
بليز باسكال: فيلسوف وعالم رياضيات، صنع أول آلة حاسبة رقمية في العام 1642.

لاحظ النمط في مثلث بسكال:

- **الحافات الخارجية تساوي 1.**
- **أي عدد غير الواحد في كل صف يساوي مجموع العددين الواقعين فوقه.**

فمثلًا للحصول على الصف الخامس، نجمع كل عددين متجاورين من الصف الرابع (الذي هو أعلى من الصف الخامس مباشرة) ولا ننسى أن الصف يبدأ بـ 1 وينتهي بـ 1 أيضًا.

1   4   6   4   1

1   5   10   10   5   1

1 + 4 + 6 + 4 + 1

1   5   10   10   5   1

نشاط

استخدم مثلث باسكال السابق لفك: $(x+y)^6$

الحل:

عدد حدود المفكوك = ...

من مثلث باسكال، الصف السادس: ....

يمكن إيجاد الصف السابع من الصف السادس كما يلي:

يبدأ كل صف بالعدد							ينتهي كل صف بالعدد
	1	5	10	10	5	1	
	+	+	+	+	+		
1	6	15	$\square$	$\square$	$\square$	1	

استخدم الأعداد في الصف السادس كمعاملات.

تبدأ أسس x بـ 6 وتتناقص...

$$(x+y)^6 = 1x^6y^0 + 6x^5y^1 + 15x^4y^2 + 20x^{\square}y^3 + 15x^2y^{\square} + 6x^{\square}y^5 + 1x^{\square}y^{\square}$$

تبدأ أسس y بـ 0 وتتزايد

نظرية ذات الحدين The Binomial Theorem

الأعداد في مثلث باسكال تمثل معاملات حدود مفكوك ذات الحدين $(x+y)^n$. ويمكن إيجاد قيمة هذه الأعداد عن طريق تكرار صف بعد صف باستخدام الطريقة في النشاط السابق.

يمكن أن نوجد أيضًا معاملات مفكوك ذات الحدين عن طريق استخدام **التوافيق**.

إذا حسبنا: ${}_3C_0$ ، ${}_3C_1$ ، ${}_3C_2$ ، ${}_3C_3$ نحصل على 1, 3 , 3, 1 وهي تتطابق مع قيم الصف الرابع من مثلث باسكال.

كذلك إذا حسبنا ${}_4C_0$ ، ${}_4C_1$ ، ${}_4C_2$ ، ${}_4C_3$ ، ${}_4C_4$ نحصل على 1, 4, 6, 4, 1 وهي تتطابق مع قيم الصف الخامس من مثلث باسكال.

معلومة:
كان هذا النمط العددي المثلثي معروفًا بين عامي 200 – 300 ق.م. من خلال العالم الرياضي الهندي هلايودا Halayudha والعالم العربي الكرخي وغيرهما إلّا أنه سمّي مثلث باسكال نسبة إلى عالم الرياضيات الفرنسي بليز باسكال Blaise Pascal

أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي
من علماء الرياضيات المسلمين قضى حياته في بغداد، برع في الهندسة والأنماط الرياضية ووضع المثلث المشهور الذي يعرف اليوم بمثلث باسكال.

ملاحظة:
لاحظ أن مجموع الأسين في كل حد من حدود المفكوك $(x+y)^6$ يساوي 6 دائمًا.

وكذلك تتطابق قيم ${}_5C_0$ إلى ${}_5C_5$ مع قيم الصف السادس من مثلث باسكال.

يمكننا الاستنتاج أن معاملات حدود x, y في المفكوك $(x+y)^n$ هي قيم ${}_nC_r$ حيث $r = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n$

نظرية ذات الحدين

لأي عدد صحيح موجب n،

$$(x+y)^n = {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1}y + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \ldots\ldots + {}_nC_rx^{n-r}y^r + \ldots\ldots + {}_nC_{n-1}xy^{n-1} + {}_nC_ny^n$$

خواص نظرية ذات الحدين Properties of the Binomial Theorem

1. مفكوك $(x+y)^n$ يتضمن $n+1$ حدًّا يرمز لها بـ: $T_1, T_2, \ldots, T_{r+1}, \ldots, T_n, T_{n+1}$
2. الحد الأول في المفكوك هو x^n، ثم ينقص أس x في الحدود التالية بمقدار الواحد على التوالي.
3. يبدأ ظهور العدد y في الحد الثاني، ثم يزيد أس العدد y بمقدار الواحد على التوالي حتى نصل إلى الحد الأخير في المفكوك ويكون y^n.
4. مجموع أسي x و y في أي حد من حدود المفكوك **ثابت** ويساوي الأس n.
5. معامل الحد T_1 يساوي معامل الحد T_{n+1}، ومعامل الحد T_2 يساوي معامل الحد T_n، وهكذا ...
6. الحد العام الذي رتبته $r+1$ يرمز له بالرمز: T_{r+1}

$$T_{r+1} = {}_nC_r \cdot x^{n-r} \cdot y^r$$

مثال (1)

استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل من:

a) $(x+y)^5$ b) $(x-3)^6$ c) $(x^2+3y)^4$

الحل:

بتطبيق نظرية ذات الحدين:

a) $(x+y)^5 = {}_5C_0x^5 + {}_5C_1x^4y + {}_5C_2x^3y^2 + {}_5C_3x^2y^3 + {}_5C_4xy^4 + {}_5C_5y^5$

$= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

b $(x-3)^6 = {}_6C_0x^6 + {}_6C_1x^5(-3) + {}_6C_2x^4(-3)^2 + {}_6C_3x^3(-3)^3 + {}_6C_4x^2(-3)^4 + {}_6C_5x(-3)^5 + {}_6C_6(-3)^6$

$= x^6 + (6)(-3)x^5 + (15)(-3)^2x^4 + (20)(-3)^3x^3 + (15)(-3)^4x^2 + (6)(-3)^5x + (-3)^6$

$= x^6 - 18x^5 + 135x^4 - 540x^3 + 1215x^2 - 1\,458x + 729$

c $(x^2+3y)^4 = {}_4C_0(x^2)^4 + {}_4C_1(x^2)^3(3y) + {}_4C_2(x^2)^2(3y)^2 + {}_4C_3(x^2)^1(3y)^3 + {}_4C_4(3y)^4$

$= x^8 + 12x^6y + 54x^4y^2 + 108x^2y^3 + 81y^4$

حاول أن تحل

1 استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل من:

a $(a-b)^4$ b $(d+2)^7$ c $(2x-y^2)^5$

مثال (2)

في مفكوك: $(2x-3y^2)^{10}$ أوجد الحدّ السابع.

الحل:

تكتب $(2x-3y^2)^{10}$ على الصورة $(2x+(-3y^2))^{10}$

الحدّ السابع هو:

$T_{r+1} = {}_nC_r \,.\, x^{n-r} \,.\, y^r$

$T_7 = T_{6+1}$

$T_7 = {}_{10}C_6(2x)^4 \times (-3y^2)^6$

$= (210)(2^4)(-3)^6(x^4)(y^2)^6$

$= 2\,449\,440\, x^4y^{12}$

حاول أن تحل

2 في مفكوك: $(3x^2-y)^{15}$ أوجد معامل T_{12}

مثال (3)

أوجد الحد الذي يحتوي على x^3y^4 في مفكوك $(2x+3y)^7$

الحل:

الحد الذي رتبته $r+1$ هو: $T_{r+1} = {}_nC_r \,.\, x^{n-r} \,.\, y^r$

في مفكوك كثيرة الحدود $(2x+3y)^7$ ، $n = 7$

$\because$ أس y يساوي 4 $\therefore$ $r = 4$

يصبح هذا الحد:

$$T_5 = {}_7C_4\,(2x)^3\,(3y)^4$$
$$= 35 \times (2)^3 x^3 (3)^4 y^4$$
$$= 35 \times 8 \times 81 \times x^3 y^4$$
$$= 22\,680\,x^3 y^4$$

حاول أن تحل

3 أوجد الحد الذي يحتوي على x^2y^3 في مفكوك $(3x - y)^5$

11–3

الاحتمال

Probability

سوف تتعلم

- تعرف التجربة العشوائية وفضاء العينة.
- تعرف بعض نظريات الاحتمال.
- تعيين احتمالات الأحداث.
- تعيين احتمالات الأحداث المتنافية ومتمم الحدث والأحداث المستقلة.
- تعيين احتمال ذات الحدين.

المفردات والمصطلحات:

- الاحتمال Probability
- التجربة العشوائية Random Experiment
- فضاء العينة Sample Space
- حدث بسيط Simple Event
- حدث مركب Compound Event
- حدث مستحيل Impossible Event
- حدث مؤكد Certain Event
- حدثان متنافيان Mutually Exclusive Events
- حدث متمم Complement Event
- حدثان مستقلان Independent Events
- التقاطع Intersection
- الاتحاد Union
- المتمم Complement
- احتمال ذات الحدين Binomial Probability

عمل تعاوني: استكشاف الاحتمال التجريبي

خذ ورق مقوى مستطيلة الشكل وإطوها لوجهين مستطيلين غير منطبقين، كما هو مبين في الرسم. نريد أن نعرف كيف تقع هذه الورقة على الأرض عند إفلاتها من ارتفاع ما.

ورقة تدوين النتائج	
وجهة السقوط	**التكرار**
الوجهة الصغرى	𝍸 𝍸 ||
الوجهة الكبرى	𝍸 𝍸 𝍸 |||
شكل الخيمة	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |
الحرف	𝍸 ||||

1. أفلت الورقة من يدك 60 مرة.
   دوّن كل مرة وضع سقوطها.
2. أي الأوضاع هي الأكثر توقعًا لسقوط الورقة؟ وأي الأوضاع هي الأقل توقعًا؟
3. ما النسبة المئوية لسقوط الورقة على الوجهة الصغرى؟
   أوجد النسب المئوية لبقية وجهات السقوط.
4. (a) لنفرض أنك أفلت الورقة 20 مرة إضافية. توقع عدد مرات سقوطها لكل وضع.
   (b) أفلت الورقة 20 مرة جديدة. دوّن أوضاع السقوط.
   (c) قارن بين ما دونته وما توقعته. هل هما متقاربتان؟ كيف يمكنك تحسين توقعك؟

التجربة العشوائية—فضاء العينة

Random Experiment—Sample Space

في حياتنا اليومية، هناك الكثير من الأمور التي لها صفة العشوائية.

فمثلًا عندما نرمي مكعبًا مرقمًا (حجر نرد) لا يمكننا مسبقًا معرفة العدد الذي سيظهر على الوجهة العليا.

أو قبل الوصول إلى التقاطع في الشارع، لا يمكننا معرفة ما سيكون عليه لون إشارة المرور.

كذلك عندما نأخذ كرة من كيس (دون النظر إلى داخله) يحتوي على كرات متساوية الحجم، مختلفة الألوان،لها الملمس نفسه فإنه لا يمكننا مسبقًا معرفة ما سيكون عليه لون الكرة.

التجربة العشوائية

هي تجربة لها عدة نواتج مختلفة ممكنة ولكن لا يمكن التأكد مسبقًا من أن أي ناتج منها سوف يتحقق عند إجراء التجربة.

في كل تجربة عشوائية نهتم أولًا بمعرفة **مجموعة النواتج** الممكنة لتلك التجربة.

مجموعة النواتج هذه تسمى **فضاء العينة**.

وكل **حدث** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

في تجربة رمي حجر نرد، فضاء العينة هو:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، $n(S) = 6$

ويعتبر الحصول على عدد من مضاعفات العدد 3 هو حدث وليكن A أي $A = \{3, 6\}$

ويكون $n(A) = 2$

في «العمل التعاوني» **فضاء العينة هو أوضاع السقوط الأربع** المبينة في «ورقة تدوين النتائج» وكل وضع سقوط هو **حدث**.

معلومة:

- نرمز عادة لفضاء العينة بـ S.
- لأي مجموعة A، يرمز لعدد عناصرها بالرمز $n(A)$

معلومة:

يقصد بحجر النرد هو مكعب أوجهه مرقمة من 1 إلى 6 وكل وجه له نفس فرصة الظهور

أنواع الأحداث Types of Events

حدث بسيط Simple Event

مجموعة جزئية من فضاء العينة (S) تحوي ناتجًا واحدًا من نواتج التجربة العشوائية (مجموعة تحوي عنصرًا واحدًا) فإذا كان A حدثًا بسيطًا فإن $n(A) = 1$

حدث مركب Compound Event

مجموعة جزئية تحوي أكثر من ناتج واحد من نواتج التجربة العشوائية.

فإذا كان B حدثًا مركبًا فإن $n(B) > 1$

حدث مستحيل Impossible Event

مجموعة جزئية خالية $\varnothing$ من فضاء العينة (S): فإذا كان D حدثًا مستحيلًا فإن $n(D) = 0$

حدث مؤكد Certain Event

مجموعة جزئية تساوي فضاء العينة (S): فإذا كان F حدثًا مؤكدًا فإن $n(F) = n(S)$

حدثان متنافيان Mutually Exclusive Events

يقال للحدثين A, B أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما ينفي (يمنع) وقوع الآخر أثناء التجربة.

أي أن: $A \cap B = \phi$ ويكون $n(A \cap B) = n(\phi) = 0$

تذكر:

إذا كانت A , B مجموعتان فإن:

$A \cap B$ هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A و B

$A \cup B$ هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A أو B

حدث متمم Complement Event

الحدث المتمم للحدث A هو الحدث الذي يحوي جميع عناصر فضاء العينة (S) التي لا تنتمي إلى الحدث A

نرمز إلى الحدث المتمم بالرمز $\overline{A}$

A، $\overline{A}$ هما حدثان متنافيان. ويكون: $A \cap \overline{A} = \phi$ ، $A \cup \overline{A} = S$

حدثان مستقلان Independant Events

يقال للحدثين A, B أنهما مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر أثناء التجربة العشوائية.

مثال توضيحي

عند رمي حجر نرد أعط مثالًا على كل من:

a حدث بسيط
b حدث مركب
c حدث مستحيل
d حدث مؤكد
e حدثين متنافيين
f حدث متمم
g حدثين مستقلين

الحل:

a ظهور العدد 5 هو حدث بسيط.

b ظهور أحد مضاعفات العدد 3 هو حدث مركب.

c ظهور العدد 8 هو حدث مستحيل.

d ظهور عدد من 1 إلى 6 هو حدث مؤكد.

e الحدثان: A: «ظهور أحد العددين 5 أو 6»،
B: «ظهور عدد أصغر من 4» هما حدثان متنافيان.

f إذا كان الحدث A: «ظهور أحد العددين 5 أو 6»
فإن الحدث $\overline{A}$: «ظهور عدد أصغر من أو يساوي 4» هو الحدث المتمم للحدث A

g إذا رمينا حجر النرد مرتين، الحدثان A: «ظهور العدد 5 في المرة الأولى»،
B: «ظهور العدد 4 في المرة الثانية» هما حدثان مستقلان.

مثال (1)

في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوي.

1 اكتب وحدد نوع كلٍ من الأحداث التالية:
a A: ظهور عدد أكبر من 5
b B: ظهور عدد فردي
c C: ظهور عدد زوجي
d D: ظهور عدد أصغر من 7

2 a أثبت أن B, C حدثان متتامان.
b بيّن فيما إذا كان الحدثان C, D متنافيان أم لا.

ملاحظة:
نرمز لاحتمال الحدث E بالرمز $P(E)$.

الحل:

1 a $A = \{6\} \quad , \quad n(A) = 1$

$\therefore$ A حدث بسيط.

b $B = \{1,3,5\} \quad , \quad n(B) = 3$

$\therefore$ B حدث مركب.

c $C = \{2,4,6\} \quad , \quad n(C) = 3$

$\therefore$ C حدث مركب.

d $D = \{1,2,3,4,5,6\} \quad , \quad n(D) = 6$

$\therefore$ D حدث مؤكد.

2 ليكن S فضاء العينة.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

a $B \cup C = \{1,3,5,2,4,6\} = S, B \cap C = \phi$

$\therefore$ B, C حدثان متتامان.

b $C \cap D = \{2,4,6\} \neq \phi$

$\therefore$ الحدثان C, D ليسا متنافيان.

حاول أن تحل

1 في أحد المخيمات الصيفية يشارك الطالب في مجموعة من الأنشطة وهي: كرة القدم، كرة السلة، كرة المضرب، الكرة الطائرة، السباحة وركوب الدراجات.

a اكتب وحدد نوع كل من الأحداث التالية:

(1) A: المشاركة في كرة المضرب فقط.

(2) B: المشاركة في الأنشطة التي تستخدم فيها كرة كبيرة.

(3) C: المشاركة في الأنشطة التي لا تستخدم فيها كرة.

b (1) بيّن فيما إذا كان الحدثان B, C متتامان أم لا.

(2) أعطِ مثالاً عن حدثين متنافيين.

الاحتمال Probability

إذا كانت جميع نواتج التجربة العشوائية لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث هو:

$$P(E) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث } E}{\text{عدد نواتج فضاء العينة } S} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

لأن أي حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة، فإن عدد نواتج حدث ما يكون دائمًا **أصغر من أو يساوي** عدد نواتج فضاء العينة لذلك فإن احتمال وقوع حدث ما يكون دائمًا **عددًا ينتمي إلى الفترة $[0, 1]$**

خواص الاحتمال لحدث ما — Properties of the Probabilty of an Event

E حدث في فضاء عينة S حيث S منته وغير خالٍ

a) $0 \leq P(E) \leq 1$

b) إذا كان E حدثًا مستحيلًا، فإن $P(E) = 0$

c) إذا كان E حدثًا مؤكدًا، فإن $P(E) = 1$

d) مجموع احتمالات كل الأحداث البسيطة في فضاء العينة $= 1$

مثال (2)

يبيّن الجدول المقابل وسيلة النقل التي يستخدمها طلاب الصف الحادي عشر بشعبتيه للمجيء إلى المدرسة.

وسيلة النقل	الشعبة A	الشعبة B	المجموع
الحافلة المدرسية	16	15	31
مع الأهل	6	8	14
سيارة نقل عام	2	5	7
المجموع	24	28	52

اختير طالب عشوائيًّا من بين طلاب شعبتي الصف الحادي عشر.
ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يستقلون الحافلة المدرسية للمجيء إلى المدرسة؟

الحل:

لنفرض الحدث E: «المجيء بالحافلة المدرسيّة إلى المدرسة».

عدد نواتج الحدث E: $16 + 15 = 31$

عدد نواتج فضاء العينة S: $(16 + 6 + 2) + (15 + 8 + 5) = 52$

$$P(E) = \frac{31}{52}$$

حاول أن تحل

2 في المثال (2)،

a) ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يقلونهم أهلهم إلى المدرسة؟

b) ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الشعبة B؟

مثال (3)

حصل الطلاب: مصطفى، محمد، طه، أحمد، أمين على الدرجة النهائية العظمى في اختبار الرياضيات وأراد مدير المدرسة اختيار 3 منهم لتمثيل المدرسة في مسابقة ثقافية.
ما احتمال اختيار «محمد»؟

الحل:

احتمال الحدث:

$$P(E) = \frac{E \text{ عدد نواتج الحدث}}{S \text{ عدد نواتج فضاء العينة}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

∵ نتكلم عن المجموعة ∴ ترتيب العناصر غير مهم.

(i) عدد نواتج فضاء العينة:

اختيار 3 طلاب من بين5: $n(S) = {}_5C_3 = \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} = 10$

(ii) عدد نواتج الحدث E:

اختيار محمد بطريقة واحدة $_1C_1 = 1$

يبقى اختيار طالبين من بين الأربعة المتبقين: $_4C_2 = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = 6$

∴ عدد نواتج الحدثE: $_1C_1 \times {}_4C_2 = 1 \times 6 = 6$

$P(E) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

احتمال اختيار «محمد» يساوي $\frac{3}{5}$

حاول أن تحل

3 في المثال (3)، اعتذر طه عن المشاركة. فما احتمال اختيار «محمد»؟

درست فيما سبق بعض القواعد التي تساعد في إيجاد احتمال بعض الأحداث A، B في فضاء العينة S:

A، B حدثان فإن		$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
A، B حدثان متنافيان	$\Longleftrightarrow$	$P(A \cap B) = 0$
A، B حدثان مستقلان	$\Longleftrightarrow$	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$\overline{A}$ هو الحدث المتمم للحدث A	$\Longleftrightarrow$	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

معلومة:

$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

مثال (4)

يتصل المستمعون بإحدى الإذاعات، لتسمية أغنيتهم المفضلة.
تختار إدارة الإذاعة كل ساعة 4 مستمعين وتبث أغانيهم.
اتصلت مرتين، الأولى بعد الثامنة صباحًا والثانية بعد الثالثة بعد الظهر.
الجدول المقابل يبيّن عدد المتصلين، فما احتمال أن تبث الإذاعة الأغنيتين المفضلتين لديك؟

الساعة	عدد المتصلين
الثامنة صباحًا	125
الثالثة بعد الظهر	200

الحل:

ليكن الحدث A: «تم اختيارك من بين متصلي الساعة الثامنة»

الحدث B: «تم اختيارك من بين متصلي الساعة الثالثة»

توضيح:
اختيارك بين متصلي الساعة الثامنة يعني اختيارك واختيار 3 من بقية المتصلين أي من بين 124

نلاحظ أن الحدثين B، A مستقلان.

$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A) = \frac{{}_1C_1 \times {}_{124}C_3}{{}_{125}C_4} = \frac{4}{125}$$

$$P(B) = \frac{{}_1C_1 \times {}_{199}C_3}{{}_{200}C_4} = \frac{4}{200} = \frac{1}{50}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{125} \times \frac{1}{50} = \frac{4}{6\,250} = \frac{2}{3125}$$

احتمال أن تبث الإذاعة الأغنيتين المفضلتين لديك يساوي $\frac{2}{3125}$

حاول أن تحل

4 في المثال (4)، إذا اختارت إدارة الإذاعة 5 متصلين كل ساعة.

فما احتمال أن تبث أغنيتيك المفضلتين؟

مثال (5)

حوالي 53% من طلاب إحدى الجامعات عمرهم أصغر من 25 عامًا وحوالى 21% من طلاب هذه الجامعة عمرهم أكبر من 34 عامًا.

اختير طالب عشوائيًا من هذه الجامعة.

a ما احتمال أن يكون عمر الطالب أصغر من 25 أو أكبر من 34؟

b ما احتمال أن يكون عمر الطالب 25 عامًا فأكثر؟

الحل:

ليكن الحدث A: «عمر الطالب أصغر من 25 عامًا».

ليكن الحدث B: «عمر الطالب أكبر من 34 عامًا».

$\therefore$ الحدثان A, B متنافيان.

$$\therefore \quad P(A \cap B) = 0$$

$$P(A) = \frac{53}{100} = 0.53\,, \quad P(B) = \frac{21}{100} = 0.21$$

a الحدث: عمر الطالب أصغر من 25 أو أكبر من 34 هو $A \cup B$

$$\therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.53 + 0.21 - 0 = 0.74$$

b الحدث: عمر الطالب 25 عامًا فأكثر هو حدث متمم للحدث A وهو $\overline{A}$

$$\therefore \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.53 = 0.47$$

حاول أن تحل

5 في المثال (5)، أوجد احتمال كل حدث مما يلي:

a عمر الطالب بين 25 عامًا و34 عامًا.

b عمر الطالب 34 عامًا وأقل.

مثال (6)

رُمي حجر نرد منتظم. فما احتمال الحصول على أحد مضاعفات العدد 3 أو عدد زوجي؟

الحل:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \implies n(S) = 6$$

ليكن الحدث A: «مضاعفات العدد 3»

$$A = \{3, 6\} \implies P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

الحدث B: «عدد زوجي»

$$B = \{2, 4, 6\} \implies P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

الحدثان A ،B غير متنافيين لأن

$$A \cap B = \{6\} \implies P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \; P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

احتمال الحصول على عدد من مضاعفات العدد 3 أو عدد زوجي يساوي $\frac{2}{3}$

طريقة أخرى:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

حاول أن تحل

6 في المثال (6)، ما احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أولي؟

احتمال ذات الحدين — Binomial Probability

إقامة تجربة n مرّة وتسجيل نتائجها علمًا أن هناك فقط لكل تجربة نتيجتين H أو T

إذا كان $P(H) = m$، الحدث E «H تحقق فقط k مرّة» فبالتالي:

$$P(E) = {}_nC_k \cdot P(H)^k \cdot P(T)^{n-k}$$

$$= {}_nC_k \cdot m^k (1-m)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot m^k (1-m)^{n-k}$$

يستخدم احتمال ذات الحدين:

- في حالة تكرار حدث عدة مرات.
- إذا كان للحدث **ناتجان فقط:**

ربح – خسارة، نجاح – فشل، كتابة – صورة، ...

مثال (7)

خلال شهر التسوق يقدم أحد المحلات العرض التالي: عند شراء كل صنف تحصل على بطاقة. تفوز 40% من البطاقات بجوائز ويتم اختيار هذه البطاقات الرابحة بشكل عشوائي. مع راشد 3 بطاقات. ما احتمال أن يفوز راشد بجائزتين؟

الحل:

نفرض الحدث A: «فوز راشد بجائزة» $P(A) = m = 0.40$

الحدث B: «عدم فوز راشد بجائزة» $P(B) = 1 - m = 0.60$

والحدث E: «فوز راشد بجائزتين»

فيكون: $n = 3$ و $k = 2$

$$P(E) = {}_nC_k \cdot (m)^k \cdot (1-m)^{n-k}$$
$$= {}_3C_2 (0.4)^2 (0.6)^1$$
$$= 0.288$$

احتمال فوز راشد بجائزتين يساوي 0.288

حاول أن تحل

7 في المثال (7)، ما احتمال أن يفوز راشد بجائزة واحدة فقط؟

مثال (8)

في إحدى الآلات الحاسبة 4 بطاريات. احتمال أن تخدم كل بطارية مدة عام كامل يساوي 90%
ما احتمال أن تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام؟

الحل:

ليكن الحدث A «تخدم البطارية مدّة عام كامل» $P(A) = m = 0.9$

ليكن الحدث B «لا تخدم البطارية مدّة عام كامل» $P(B) = 1 - m = 1 - 0.9 = 0.1$

الحدث E «تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام كامل»

نستخدم احتمال ذات الحدين $n = 4$ ، $k = 4$

$$P(E) = {}_nC_k \cdot (m)^k \cdot (1-m)^{n-k}$$
$$= {}_4C_4 (0.9)^4 (0.1)^0$$
$$= 0.6561$$

احتمال أن تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام يساوي 0.6561

حاول أن تحل

8 في المثال (8)، ما احتمال أن تخدم 3 بطاريات فقط مدة عام كامل؟

المرشد لحل المسائل

المطلوب:

يلعب فيصل كرة المضرب. احتمال نجاحه في الإرسال الأول يساوي $\frac{2}{3}$

إذا فشل في الإرسال الأول يحق له أن يحاول مرة ثانية، وفي هذه الحالة، احتمال نجاحه في الإرسال يساوي $\frac{4}{5}$

عندما يفشل في الإرسالين يسمى ذلك خطأ مزدوج وإلا يعتبر الإرسال ناجحًا.

a ما احتمال أن ينجح فيصل في الإرسال؟

b ما احتمال أن ينجح فيصل في الإرسال 5 مرات من 7 محاولات؟

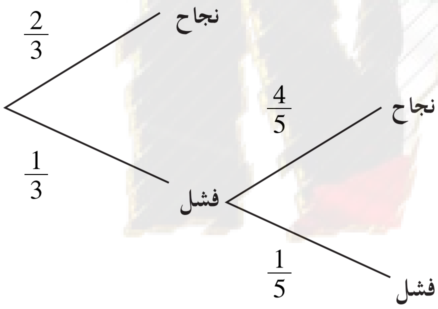
الحل:

a ينجح فيصل في الإرسال في الحالتين:

– إذا نجح في الإرسال الأول.

– إذا فشل في المحاولة الأولى ونجح في الثانية.

احتمال الفشل في الإرسال الأول يساوي: $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$



فلنفكر:

يمكن رسم مخطط الشجرة البيانية ليمثل الحالة:

P(النجاح في الإرسال) = P(النجاح في الإرسال الأول) + P(الفشل في الإرسال الأول والنجاح في المرة الثانية)

$$P=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{14}{15}$$

احتمال أن ينجح فيصل في الإرسال يساوي $\frac{14}{15}$

b نستخدم احتمال ذات الحدين، لأن الحدث تكرر 7 مرات مع ناتجين: النجاح أو الفشل.

ليكن E الحدث: «النجاح 5 مرات من 7 محاولات».

$$P(E)={}_7C_5\times\left(\frac{14}{15}\right)^5\times\left(\frac{1}{15}\right)^2$$
$$\approx 0.0661$$

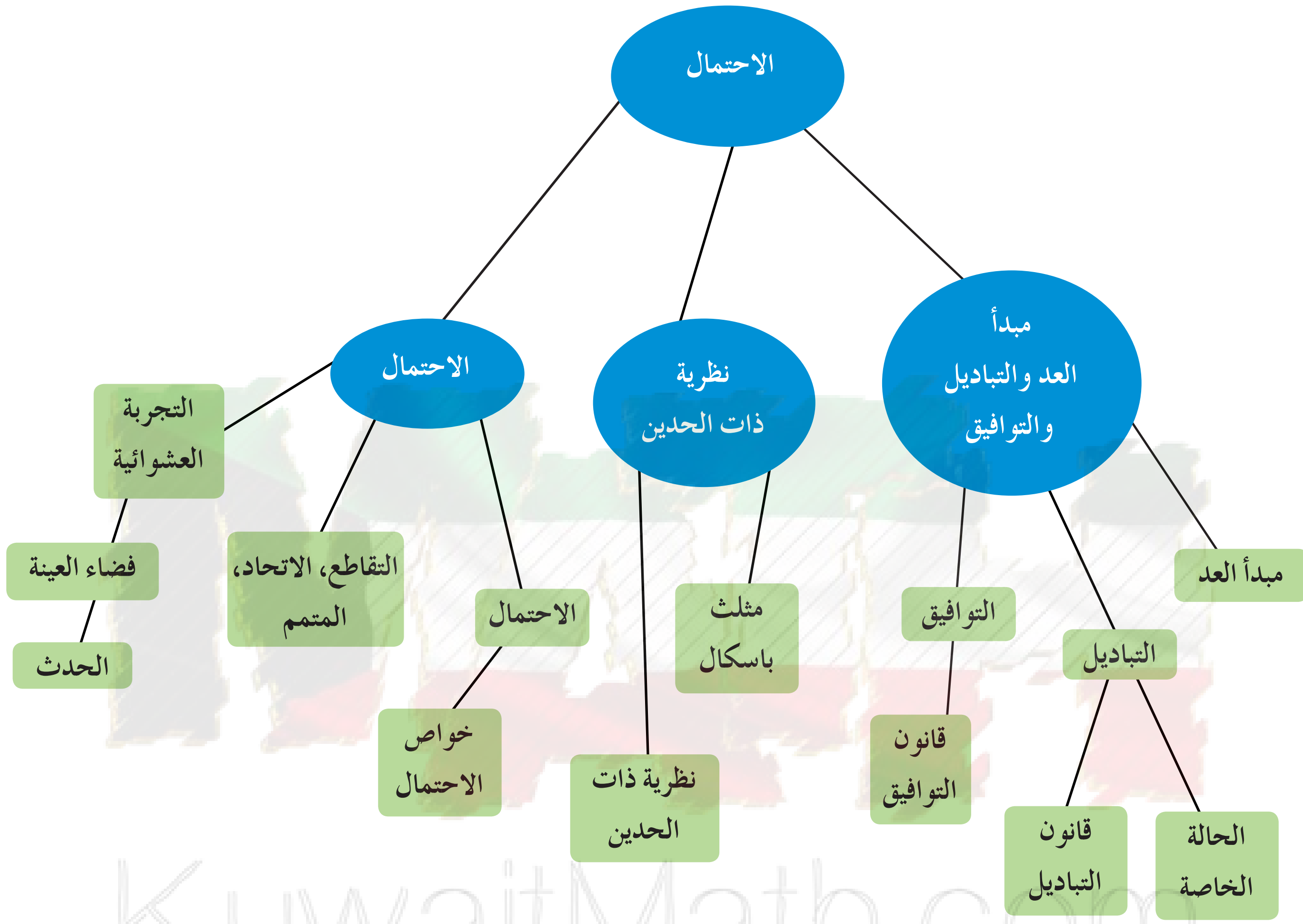
احتمال النجاح 5 مرات من 7 محاولات يساوي حوالي 0.0661

مسألة إضافية

في لعبة القوس والنشاب، احتمال أن يصيب عبد الله الهدف يساوي $\frac{1}{5}$

فما احتمال أن يصيب عبد الله الهدف على الأقل مرتين من 7 محاولات؟

مخطط تنظيمي للوحدة الحادية عشرة



ملخص

- لإجراء عملية على S مرحلة متتابعة، إذا أجريت المرحلة الأولى بـ r_1 طريقة مختلفة، والمرحلة الثانية بـ r_2 طريقة مختلفة وهكذا حتى المرحلة الأخيرة S التي تجري بـ r_n طريقة مختلفة، فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $r_1 \times r_2 \times \ldots r_n$.
- التبديل هو توزيع لعناصر وفق ترتيب معين.
- قانون التباديل: ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
- الحالة الخاصة ${}_nP_n = n!$
- التوفيقة هي توزيع لعناصر حيث الترتيب غير مهم.
- قانون التوافيق: ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
- نظرية ذات الحدين: $(a+b)^n = ({}_nC_0)a^n + ({}_nC_1)a^{n-1}b + \ldots + ({}_nC_r)a^{n-r}b^r + \ldots ({}_nC_n)b^n$

- التجربة العشوائية تجربة لها عدة نواتج مختلفة ممكنة ولكن لا يمكن التأكد مسبقًا من أن أي ناتج منها سوف يتحقق عند إجراء التجربة.
- مجموعة النواتج تسمى فضاء العينة.
- حدث بسيط: ناتج واحد.
- حدث مركب: أكثر من ناتج واحد.
- حدث مستحيل: المجموعة الجزئية خالية.
- حدث مؤكد: المجموعة الجزئية = فضاء العينة.
- حدثان متنافيان: وقوع أحدهما ينفي وقوع الآخر في التجربة.
- حدث متمم: يحوي جميع عناصر فضاء العينة التي لا تنتمي إلى الحدث.
- حدثان مستقلان: وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر.

$$P(E) = \frac{E \text{ عدد النواتج في الحدث}}{S \text{ عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

$$P(E) = \frac{\textit{The number of outcomes in event } E}{\textit{The number of outcomes in sample space } S}$$

- $0 \leq P(E) \leq 1$
- P (حدث مستحيل) $= 0$، P(حدث مؤكد) $= 1$
- مجموع احتمالات النواتج في فضاء العينة $= 1$
- إذا كان A، B حدثين متنافيين، فإن $P(A \cap B) = 0,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- إذا كان A، B حدثين مستقلين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- إذا كان A، B حدثين غير متنافيين، فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- احتمال ذات الحدين $= P(E) = {}_nC_k . (P(H))^k \cdot (P(T))^{n-k}$