الوحدة الثانية

الدوال الحقيقية

The Real Functions

مشروع الوحدة: رياضة القوس والنشاب

1 **مقدمة المشروع:** تستخدم رياضة القوس والنشاب سلاحًا على شكل قوس وأدوات رماية وهي الأسهم. يصوب فيها اللاعب على قرص كبير مقسم إلى خمس حلقات مختلفة الألوان بترتيب محدد من الداخل إلى الخارج: أصفر، أحمر، أزرق، أسود وأخيرًا أبيض ولكل حلقة عدد من النقاط غير المتساوية تتدرج من 1 إلى 10 بحسب قربها أو بعدها عن المركز. فمثلًا إذا سقط السهم على الحلقة البيضاء ينال الرامي نقطة واحدة (1) أما إذا سقط السهم على الحلقة الصفراء فينال الرامي 10 نقاط.

2 **الهدف:** خلال عملك في هذه الوحدة سوف تبحث في مواضيع مثل: كيف يختار الرماة أسهمهم؟ وكيف غيرت التكنولوجيا في هذه الرياضة؟ وقد تحتاج في نهاية المشروع إلى تقديم عرض لما توصلت إليه.

3 **اللوازم:** السهم: قطره الأقصى 9.3 mm، القوس: يختلف وزنه بين الإناث والرجال، أوراق رسم بياني، آلة حاسبة، أوراق ملصقات.

4 **أسئلة حول التطبيق:**

a يرسم الطلاب القطع المكافئ الذي يمكن أن يمثله مسار السهم عندما يطلقه الرامي أثناء وقوفه أو أثناء جلوسه على كرسي متحرك.

b يمكن تنفيذ عدة رسوم لمسارات عدد من الأسهم، ثم تحديد التشابهات والاختلاف بينها. يوضح الجدول أدناه كيف أن وزن السهم يؤثر على محوره المركزي. ارسم البيانات المعطاة في الجدول على شبكة إحداثيات. هل حصلت على نموذج خطي أم على نموذج تربيعي؟

الوزن بالجرام (g)	140	150	170	175	205
المحور المركزي بالسنتيمتر (cm)	3.6	3.2	2.4	2	1.1

c افترض أنك أحد الرماة وصوبت سهمًا وأنت واقفًا. قس المسافة من الأرض إلى كتفك. افترض أنك قد أصبت هدفًا على ارتفاع 5 m عن سطح الأرض. ارسم بيانيًّا الشكل الممثل لمسار سهمك مستخدمًا هذه البيانات. حدد هذا الشكل.

d أجر مقابلة مع أحد رماة القوس والنشاب في نادي الرماية الكويتي. ابحث عن بعض تقنيات هذه اللعبة وتطورها وشروط تطبيقها.

5 **التقرير:** قدم تقريرًا مفصلًا عن أبحاثك ورسومك عارضًا إيجابيات هذه اللعبة من حيث الدقة والتركيز والميزات الأساسية للاعب. قدم مشروعك بعرض بصري أو مسرحي قصير أو على قرص مدمج.

دروس الوحدة

مجال الدالة	الدوال التربيعية ونمذجتها	الدوال التربيعية والقطوع المكافئة	مقارنة بين صورة المعادلة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحنى والصورة العامة	المعكوسات ودوال الجذر التربيعي	حل المتباينات
2−1	2−2	2−3	2−4	2−5	2−6

الوحدة الثانية

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت العمليات الأساسية على التعابير الجذرية.
- تعرفت قوانين الأسس وكيفية استخدامها في تبسيط الجذور.
- تعلمت كيفية إيجاد حلول لمعادلات جذرية ومعادلات أسية.
- تعرفت نمذجة مواقف حياتية إلى دوال خطية ومعادلات تربيعية.
- تعلمت إيجاد حلول معادلة من الدرجة الثانية بطرائق متعددة.

ماذا سوف تتعلم؟

- الدوال التربيعية واستخداماتها.
- نمذجة البيانات.
- إيجاد أوسع مجال للدوال الحدودية والنسبية والجذرية.
- إيجاد القيم الصغرى والقيم العظمى لدالة تربيعية.
- رسم القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه.
- إيجاد رأس منحنى الدالة من الدالة المكتوبة في الصورة العامة.
- كتابة المعادلات التربيعية بدلالة إحداثيات الرأس وفي الصورة العامة.
- إيجاد معكوس الدوال الخطية والدوال التربيعية.
- استخدام دوال الجذر التربيعي لتمثيل مواقف حياتية.
- حل متباينات تتضمن حدوديات من الدرجة الثانية في متغير واحد أو حدوديات نسبية.

المصطلحات الأساسية

دالة تربيعية – نمذجة بيانات – مجال – مدى – قيمة صغرى – قيمة عظمى – قطع مكافئ – رأس القطع المكافئ – الصورة العامة – معادلة بدلالة إحداثيات رأس القطع المكافئ – معكوس دالة خطية – معكوس دالة تربيعية – متباينة من الدرجة الثانية – متباينة حدوديات نسبية.

أضف إلى معلوماتك

ارتبطت رياضة الرماية منذ بداياتها الأولى بالقوة إذ بدأت كسلاح ثم تطورت لتصبح رياضة للنخبة.

حث الإسلام المسلمين على ممارسة هذه الرياضة وجعلها في مصاف الفروسية والسباحة. حتى أن الخليفة عمر بن الخطاب قال: «علموا أبناءكم السباحة والرماية وركوب الخيل». وبقيت هذه الهواية مصدرًا لكبرياء العرب وسلاحًا للدفاع عن أنفسهم.

ومن المتعارف عليه أنّ الرماية بالقوس والسهم يتطلب توازنًا وقدرة فائقة على التركيز تحت ضغط كبير وقوة مميّزة في جذب الوتر وإطلاق السهم وذلك بسرعة تصل إلى 240 km/h تقريبًا.

لقد تمكن المنتخب الوطني الكويتي لرماية القوس والسهم من الحصول على 8 ميداليات متنوعة في البطولة العربية الثامنة لرماية القوس والسهم والتي أقيمت في مدينة «سرت» الليبية لذا وضعت إدارة نادي الرماية الكويتي برامج هادفة لاستقطاب الشباب الكويتي على تطوير مهاراتهم وقدراتهم في ممارسة هذه الرياضة وقررت تجهيز ميدان متكامل وتوفير أحدث الأجهزة من أقواس وأسهم ومعدات للرماة.

2-1

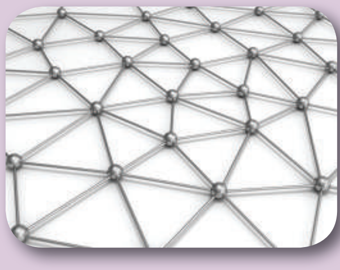
مجال الدالة

Domain of the Function

سوف تتعلم
- متى تمثل العلاقة دالة.
- مجال الدالة.

المفردات والمصطلحات:
- العلاقة Relation
- المجال Domain
- المجال المقابل Co-Domain
- المدى Range
- الدالة Function
- اختبار المستقيم الرأسي Vertical Line Test
- أصفار المقام Zeros of Denominator

دعنا نفكر ونتناقش



من أهم ما يميز حياة الإنسان العلاقات. مثل انتماء شخص إلى وطنه أو إلى نادي رياضي أو ثقافي أو انتماء نقطة إلى منحنى. يمكن تمثيل العلاقات أحيانًا بمخططات سهمية.

a اختر خمسة من أصدقائك، واكتب أسماءهم ثم صل كل اسم بسنة ولادته.

b أعد كتابة الأسماء الخمسة واكتب أسماء ثلاث رياضات ثم صل اسم كل شخص برياضته المفضلة.

في الفقرة **a** يرتبط كل اسم بسنة ولادته بينما في الفقرة **b** قد يرتبط الاسم الواحد بأكثر من رياضة أو قد لا يرتبط بأي رياضة.

قارن بين عملك وعمل زملائك في الفصل.

سوف نتعرف في هذا الدرس على العلاقات ونمثلها بيانيًا، وسوف نتعرف أيضًا متى تمثل العلاقة دالة مع التركيز على العلاقات في المستوى الإحداثي.

العلاقة والدالة Relation and Function

كثيرًا ما نحتاج في الرياضيات وتطبيقاتها إلى التعبير عدديًا أو جبريًا عن علاقة تربط بين متغيرين أو أكثر، والعلاقة رياضيًا هي أي مجموعة من الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي، وتسمى مجموعة المساقط الأولى لهذه الأزواج (الإحداثيات الأفقية أي السينية) **مجال العلاقة**. وتسمى مجموعة المساقط الثانية (الإحداثيات الرأسية أي الصادية) **مدى العلاقة** وهي مجموعة جزئية من **المجال المقابل**

عندما يكون كل عنصر (عدد) في المجال مرتبطًا بعنصر (عدد) واحد فقط من المجال المقابل، فإن العلاقة تسمى دالة.

والدالة التي مجالها ومجالها المقابل مجموعتان جزئيتان من الأعداد الحقيقية تسمى دالة حقيقية.

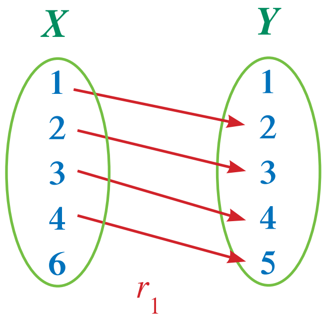
معلومة مفيدة:
(a, b) زوج مرتب يسمى a المسقط الأول، b المسقط الثاني.

مثال توضيحي (1)

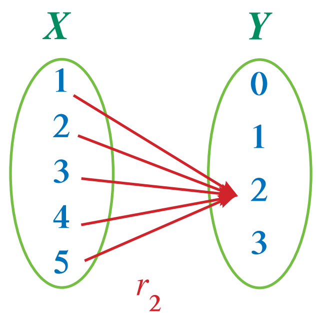
في المخططات السهمية التالية علاقات من: $X \longrightarrow Y$

1. حدّد المجال والمجال المقابل والمدى.
2. اكتب كل علاقة على شكل مجموعة من الأزواج المرتبة.
3. بيّن أي من العلاقات يمثل دالة حقيقية وأيها لا يمثل دالة حقيقية مع ذكر السبب.

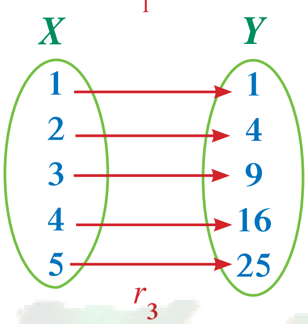
a



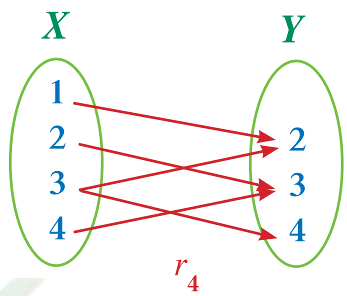
b



c



d



الحل:

a

1. المجال $= \{1, 2, 3, 4, 6\}$

المجال المقابل $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

المدى $= \{2, 3, 4, 5\}$

2. العلاقة: $r_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

3. العلاقة r_1 لا تمثل دالة لأن العنصر 6 من المجال لم يقترن بعنصر من المجال المقابل.

b

1. المجال $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

المجال المقابل $= \{0, 1, 2, 3\}$

المدى $= \{2\}$

2. العلاقة: $r_2 = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$

3. العلاقة r_2 تمثل دالة حقيقية لأن كل عنصر من المجال يقترن بعنصر واحد فقط من المجال المقابل.

c

1. المجال $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

المجال المقابل $= \{1, 4, 9, 16, 25\}$

المدى $= \{1 ،4, 9, 16, 25\}$

2. العلاقة: $r_3 = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$

3. العلاقة r_3 تمثل دالة حقيقية لأن كل عنصر من المجال يقترن بعنصر واحد فقط من المجال المقابل.

d

1. المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$

المجال المقابل $= \{2, 3, 4\}$

المدى $= \{2, 3, 4\}$

2 العلاقة: $r_4 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)\}$

3 العلاقة r_4 لا تمثل دالة حقيقية لأن العنصر 3 من المجال يقترن بعنصرين من المجال المقابل.

إذا كانت العلاقة ممثلة بيانيًّا في المستوى الإحداثي، نستخدم في هذه الحالة **اختبار المستقيم الرأسي** (العمودي) لمعرفة ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا.

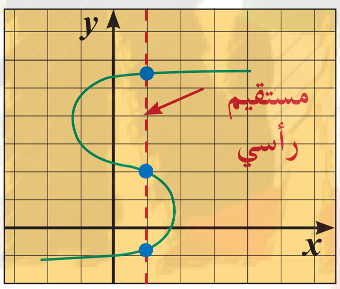
اختبار المستقيم الرأسي:

إذا تقاطع كل مستقيم رأسي مع بيان علاقة ما بنقطة واحدة على الأكثر، فإن هذه العلاقة تكون دالة.

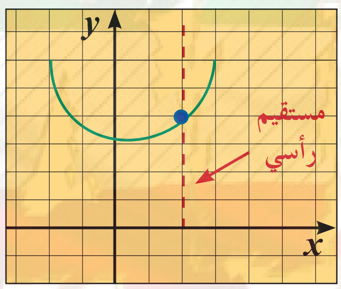
مثال (1)

استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل بيان دالة أم لا:

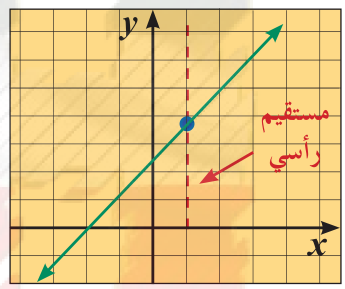
a



b



c



الحل:

a يمكن رسم على الأقل مستقيم رأسي واحد يقطع المنحنى بأكثر من نقطة واحدة ∴ البيان لا يمثل دالة.

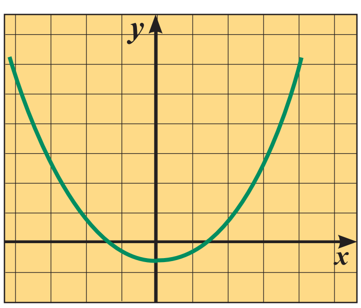
b كل مستقيم رأسي يقطع المنحنى بنقطة واحدة على الأكثر ∴ البيان يمثل دالة.

c كل مستقيم رأسي يقطع المنحنى بنقطة واحدة ∴ البيان يمثل دالة.

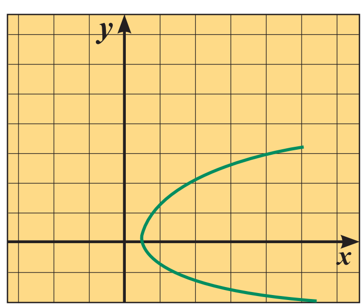
حاول أن تحل

1 **استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل دالة أم لا:**

a



b



Domain of the function　مجال الدالة

إذا كانت لدينا دالة: $y = f(x)$، فإن مجالها هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية التي يأخذها المتغير x ولتكن D هذه المجموعة، وينتج عنها قيم حقيقية للمتغير y ونقول **أن الدالة معرّفة على المجال D.**

مثال توضيحي (2)

حدّد مجال كل من الدوال التالية:

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $g(x) = x^2 + 3x + 1$

c) $t(x) = \sqrt{3x - 4}$

d) $h(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$

e) $u(x) = \sqrt[3]{2x+1}$

f) $v(x) = \dfrac{\sqrt{3x-4}}{x-2}$

الحل:

a) الدالة f كثيرة حدود وبالتالي أي قيمة حقيقية يأخذها المتغير x ينتج عنها قيمة حقيقية للمتغير y ومنه نجد أن مجال الدالة f هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

b) الدالة g كثيرة حدود وكما هو في a نجد أن مجال الدالة g هو $\mathbb{R}$.

c) من المعروف أنه لا يوجد للعدد السالب جذر تربيعي في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وعليه يكون مجال الدالة t هو مجموعة قيم x الحقيقية والتي تجعل المجذور عددًا موجبًا أو صفرًا.

لذا نكتب:

$$3x - 4 \geq 0 \Longrightarrow x \geq \frac{4}{3}$$

$$x \in \left[\frac{4}{3}, \infty\right)$$

أي أن مجال t هو $\left[\frac{4}{3}, \infty\right)$

d) لنفرض أن: $h(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$

الدالة h دالة نسبية (حدودية نسبية) حيث البسط n دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$ والمقام d دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$.

لإيجاد أصفار المقام نكتب: $d(x) = 0$

كالتالي: $x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 4$

فيكون مجال الدالة h مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ باستثناء العدد 4.

$\therefore$ مجال الدالة $h = \mathbb{R}/\{4\}$

أو $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$.

e) إن الجذر التكعيبي لأي عدد معرّف في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ومنها الجذر التكعيبي لأي دالة كثيرة الحدود يكون معرفًا على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

$\therefore$ مجال الدالة u هو $\mathbb{R}$

f) لنفرض أن: $v(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$

الدالة v دالة نسبية حيث البسط n دالة مجالها $\left[\frac{4}{3}, \infty\right)$ والمقام d دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$.

معلومة رياضية:

$\mathbb{R} - \{4\}$ يمكن أن تكتب بالصورة $\mathbb{R}/\{4\}$.

مجموعة أصفار المقام $= \{2\}$

$\because$ مجال v هو كل قيم لـ x الحقيقية التي ينتج عنها $v(x)$ قيمًا حقيقية.

$\therefore$ تكون مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي البسط والمقام هي $\left[\frac{4}{3},\infty\right)$ باستثناء $\{2\}$

أي أن مجال $v = \left[\frac{4}{3},\infty\right)/\{2\}$

أو $\left[\frac{4}{3},2\right) \cup (2,\infty)$

تساعدنا القواعد التالية على تحديد مجال الدالة:

1. مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
2. مجال الدالة الحدودية النسبية هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ عدا مجموعة أصفار المقام.
3. مجال الدالة $f(x) = |x|$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
4. مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد زوجي هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط $g(x) \geq 0$.
5. مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد فردي هو مجال الدالة g.
6. مجال الدالة $f(x) = g(x) \pm h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g.
   أي أن مجال $f =$ مجال $g \cap$ مجال h.
7. مجال الدالة $f(x) = g(x).h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g.
   أي أن مجال $f =$ مجال $g \cap$ مجال h.
8. مجال الدالة $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g عدا أصفار المقام $(h(x) \neq 0)$.
   أي أن مجال $f =$ (مجال $g \cap$ مجال h)/مجموعة أصفار المقام.

مثال (2)

أوجد مجال كل دالة مما يلي:

b $g(x) = (2x^2 + x)\sqrt{8 - 2x}$

a $f(x) = 2x^3 - 4x - \sqrt{2x - 6}$

d $u(x) = \frac{4}{\sqrt{-x}}$

c $h(x) = \frac{\sqrt[3]{1 + x}}{x^2 - 1}$

الحل:

a لنفرض أن: $b(x) = 2x^3 - 4x \quad , \quad a(x) = \sqrt{2x - 6}$

فيكون $f(x) = b(x) - a(x)$

مجال b هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة الحدود.

مجال a يتحقق إذا كان: $2x - 6 \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant 3$

مجال a هو: $[3, \infty)$

$\therefore$ مجال $f =$ مجال $a \cap$ مجال b

أي أن مجال f: $\mathbb{R} \cap [3, \infty)$

$= [3, \infty)$

b لنفرض أن: $m(x) = 2x^2 + x$, $p(x) = \sqrt{8-2x}$

فيكون: $g(x) = m(x) \cdot p(x)$

مجال الدالة m هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة الحدود.

مجال الدالة p يتحقق إذا كان $8 - 2x \geqslant 0 \Longrightarrow x \leqslant 4$

$\therefore$ مجال p هو $(-\infty, 4]$

أي أن مجال g: $\mathbb{R} \cap (-\infty, 4]$

$= (-\infty, 4]$

c لنفرض أن: $h(x) = \dfrac{q(x)}{r(x)}$ حيث $q(x) = \sqrt[3]{1+x}$ $r(x) = x^2 - 1$

مجال البسط q هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لأنه جذر تكعيبي لكثيرة حدود.

المقام r دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$ ومجموعة أصفار المقام هي $\{-1, 1\}$

$\therefore$ مجال h = (مجال q $\cap$ مجال r)/مجموعة أصفار المقام.

أي أن مجال h:

$(\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{1-, 1\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

d لنفرض أن: $u(x) = \dfrac{s(x)}{t(x)}$، حيث $s(x) = 4$, $t(x) = \sqrt{-x}$

مجال البسط s هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لأنها دالة ثابتة.

مجال المقام t هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تجعل المجذور عددًا موجبًا أو صفرًا. $-x \geq 0 \Longrightarrow x \leq 0$

$x \in (-\infty, 0]$

مجموعة أصفار المقام هي $\{0\}$

$\therefore$ مجال u = (مجال s $\cap$ مجال t)/مجموعة أصفار المقام.

أي أن مجال u:

$\left(\mathbb{R} \cap (-\infty, 0]\right) - \{0\} = (-\infty, 0)$

حاول أن تحل

2 أوجد مجال كل دالة مما يلي:

a $f_1(x) = \dfrac{2x+5}{x-4}$

b $f_2(x) = x^3 - 4x^2 - 4 + \sqrt{x-9}$

c $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{5-4x}}{x^2+4}$

d $f_4(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 5x}{x}}$

2-2

الدوال التربيعية ونمذجتها

Quadratic Functions and their Modelling

سوف تتعلم

- الدوال التربيعية واستخداماتها.
- تقدير متى تستخدم النموذج الخطي أو النموذج التربيعي.

سوف تحتاج إلى...

- عبوة بلاستيكية سعتها لتران.
- شريط لاصق.
- مسمار.
- مسطرة.
- ساعة رقمية.
- مياه.
- وعاء أو حوض.
- ورق رسم بياني.
- آلة حاسبة علمية.

المفردات والمصطلحات

- الدوال التربيعية Quadratic Functions
- الصورة العامة General Form
- حد من الدرجة الثانية Quadratic Term
- حد مطلق (ثابت) Constant Term
- دالة خطية Linear Function
- مجال الدالة Domain of the Function

عمل تعاوني

قسم الفصل إلى مجموعات لإجراء هذه التجربة.

حدد مهام أفراد مجموعتك. اطلب إلى أحدهم أن يراقب الزمن، واطلب إلى آخر أن يقوم بوضع العلامات. ثبت شريطًا لاصقًا بطول الزجاجة واصنع ثقبًا بجانب قاعدتها بواسطة مسمار.

أولًا: ضع علامة عند مستوى الثقب على الشريط اللاصق واكتب عند هذه العلامة «0»، ثم أغلق الثقب بواسطة الشريط اللاصق.

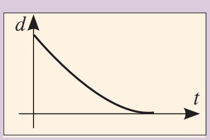
املأ الزجاجة بالماء، ثم ضع علامة عند مستوى الماء في الزجاجة.

ثانيًا: انزع الشريط اللاصق من على الثقب ودع الماء يتدفق. ضع علامة عند مستوى سطح الماء كل 10 s استمر على هذا النحو حتى يصل مستوى سطح الماء إلى الصفر.

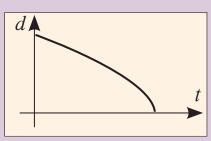
1. قس المسافة من «0» إلى كل علامة، ثم ارسم جدولًا مماثلًا للجدول أدناه ودوّن فيه بياناتك.
2. a مثل بياناتك على شبكة إحداثيات.
   b أضف خطًّا إلى رسمك يوضح نزعة البيانات. هل تبدو البيانات خطية؟
3. أي منحنى مما يلي يبدو أكثر ملاءمة لتمثيل بياناتك؟

الزمن بالثانية (s)	مستوى الماء بالميليلتر (ml)
0	
10	
20	
30	
40	
⋮	⋮

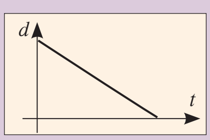
a



b



c



الدوال التربيعية Quadratic Functions

من الممكن أحيانًا أن تمثل البيانات غير الخطية، مثل البيانات التي جمعتها سابقًا في «عمل تعاوني» بدالة تربيعية.

الصورة العامة للدالة التربيعية هي:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$$

حد من الدرجة الثانية | حد من الدرجة الأولى | حد مطلق (ثابت)

تمثل الدالة التربيعية بيانيًّا بمنحنى متماثل حول المستقيم الرأسي الذي يمر برأس المنحنى، ويسمى شكل المنحنى **قطعًا مكافئًا** «parabola».

والإحداثي السيني لرأس هذا المنحنى $x = \frac{-b}{2a}$ وهو معادلة المستقيم الرأسي الذي يسمى **محور التماثل**.

نشاط

أي النقاط الواردة أدناه تقع على منحنى الدالة:

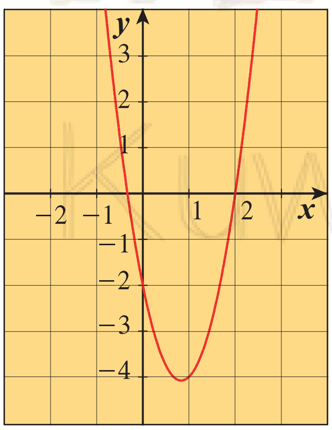
$f(x) = 3x^2 - 5x - 2$

A(1, −4)

B(2, 0)

C(0, 2)

D(−3, 40)



أكبر أس لمتغير ما في الدالة التربيعية هو (2)، وتكون الدالة خطية إذا كان أكبر أس لمتغير فيها هو (1).

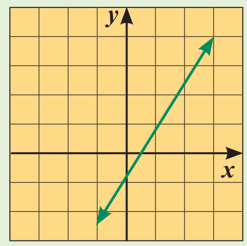
تعريف الدالة الخطية:

الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

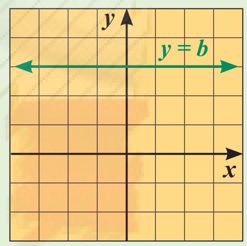
$f(x) = ax + b$

أو $y = ax + b$

حيث $a \neq 0$ ، $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$ تسمى دالة خطية وبيانها خط مستقيم.



عندما $a = 0$ تكون الدالة $y = b$ ثابتة وبيانها خطًا مستقيمًا أفقيًّا.



مثال (1)

حدّد ما إذا كانت الدالة: $f(x)=(3x-4)(x+2)$ خطية أم تربيعية.

الحل:

نكتب الدالة بالصورة العامة:

$$f(x)=(3x-4)(x+2)$$

التوزيع بالضرب $\quad f(x)=3x^2+6x-4x-8$

جمع الحدود المتشابهة $\quad f(x)=3x^2+2x-8$

$\because$ الدالة في الصورة العامة تتضمن الحد $3x^2$ (من الدرجة الثانية)

$\therefore$ هي دالة تربيعية.

حاول أن تحل

1 حدّد ما إذا كانت الدالة خطية أم تربيعية.

a $f(x)=2x(x-3)$

b $f(x)=(x-2)(2x+1)$

c $f(x)=(2x+3)^2-4x^2-7x$

d $f(x)=3(x^2-4x)-3x^2+4$

نمذجة البيانات Modelling Data

تعلمت سابقًا كيفية كتابة نموذج خطي لبيانات، حيث يحدد الخط المستقيم نزعة معروفة للبيانات. ولكن يوجد بيانات لا يمكن نمذجتها خطيًّا وقد تكون الدالة التربيعية أفضل نمذجة لها.

مثال (2)

يبيّن الجدول التالي عدد القطع المستقيمة الواصلة بين نقطتين مختلفتين إذا كان لدينا x نقطة، شرط ألا تكون 3 نقاط منها على مستقيم واحد.

عدد النقاط (x)	2	3	4	5	6	7
عدد القطع المستقيمة (y)	1	3	6	10	15	21

a إذا كانت العلاقة بين x, y تنمذج بدالة تربيعية فاكتب هذه الدالة.

b أوجد عدد القطع المستقيمة التي تصل بين 10 نقاط، وبين 20 نقطة .

الحل:

a الصورة العامة للدالة التربيعية: $f(x)=ax^2+bx+c$

بالتعويض بالأزواج $(4, 6)$، $(3, 3)$، $(2, 1)$، ينتج النظام التالي:

$$\begin{cases} 1=4a+2b+c & (1)\\ 3=9a+3b+c & (2)\\ 6=16a+4b+c & (3)\end{cases}$$

إرشاد

الإجراءات اللازمة لحل 3 معادلات بـ 3 مجاهيل:

لحل ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل يمكن استخدام طريقة الحذف أو طريقة التعويض.

تقوم طريقة التعويض على عزل أحد المجاهيل في إحدى المعادلات والتعويض عن هذا المجهول بما يساويه في المعادلتين الباقيتين. وهكذا نحصل على نظام معادلتين بمجهولين يسهل حلّه.

أما طريقة الحذف فتقوم على استخدام العمليات الأربع على المعادلات بحيث يتم إلغاء أحد المجاهيل وينتج من ذلك نظام معادلتين بمجهولين.

نطرح 1 من 2 ثم نطرح 2 من 3 فينتج:

$$\begin{cases} 2 = 5a + b & \quad 4 \\ 3 = 7a + b & \quad 5 \end{cases}$$

نطرح 4 من 5 فينتج:

$$2a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

نعوّض في 4 عن $a = \frac{1}{2}$:

$$2 = 5 \times \frac{1}{2} + b \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{2}$$

نعوّض في 1 عن $a = \frac{1}{2}\ ,\ b = -\frac{1}{2}$:

$$1 = 4\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + c$$

$$1 = 2 - 1 + c$$

$$c = 0$$

$$\because\ a = \frac{1}{2}\ ,\ b = -\frac{1}{2}\ ,\ c = 0$$

$\therefore$ الدالة التربيعية هي: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$

b عدد القطع المستقيمة التي تصل بين (10) نقاط هي $f(10)$:

$$f(10) = \frac{1}{2}(10)^2 - \frac{1}{2}(10)$$

$$f(10) = 50 - 5 = 45$$

أي يوجد 45 قطعة مستقيمة تربط بين 10 نقاط اثنتين اثنتين.

وبالمثل $f(20)$:

$$f(20) = \frac{1}{2}(20)^2 - \frac{1}{2}(20)$$

$$f(20) = 200 - 10 = 190$$

أي يوجد 190 قطعة مستقيمة تربط بين 20 نقطة اثنتين اثنتين.

حاول أن تحل

2 يبيّن الجدول التالي عدد الأقطار في المضلعات بحسب عدد أضلاعها.

عدد الأضلاع (x)	4	5	6	7
عدد الأقطار (y)	2	5	9	14

a إذا كانت العلاقة بين x, y تنمذج بدالة تربيعية فاكتب هذه الدالة.

b مستخدمًا العلاقة في a، أوجد عدد أقطار المضلع إذا كان عدد أضلاعه 10 وإذا كان عدد أضلاعه 15 .

نشاط إثرائي (تطبيقات حياتية)

يبيّن الجدول التالي بيانات اختبار مشابه للاختبار السابق في فقرة «عمل تعاوني»، حيث t تمثل المدة الزمنية بالثواني (s)، y تمثل مستوى المياه بالميليلتر (ml).

t	4	8	12	16	20	24	28	32
y	112.3	104.8	97.5	90.4	83.5	76.8	70.3	64

a أوجد دالة تربيعية تنمذج هذه البيانات.

b استخدم الدالة أعلاه لإيجاد مستوى المياه بعد مرور 36 s.

الحل:

a لتكن الدالة التربيعية: $f(t)=at^2+bt+c \ , \quad y=f(t)$

نختار من الجدول 3 أزواج تحقق الدالة.

الزوج $(4, 112.3)$ $\quad 112.3=a\times(4)^2+b(4)+c$

الزوج $(12, 97.5)$ $\quad 97.5=a(12)^2+b(12)+c$

الزوج $(20, 83.5)$ $\quad 83.5=a(20)^2+b(20)+c$

بالتبسيط نحصل على النظام:

$$\begin{cases}16a+4b+c=112.3\\144a+12b+c=97.5\\400a+20b+c=83.5\end{cases}$$

باستخدام آلة حاسبة علمية ينتج: $a=\frac{1}{160}=0.00625 \quad b=-\frac{39}{20}=-1.95 \quad c=120$

$$\therefore\ f(t)=\frac{1}{160}t^2-\frac{39}{20}t+120$$

أو

$$f(t)=0.00625t^2-1.95t+120$$

لاحظ أن النقطة $(8\ ,\ 104.8)$ تحقق المعادلة حيث

$$f(8)=\frac{1}{160}(8)^2-1.95(8)+120=104.8\ \checkmark$$

بالمثل يمكن إثبات أن بقية الأزواج المرتبة تحقق المعادلة.

b نوجد:

$$f(36)=\frac{1}{160}(36)^2-\frac{39}{20}(36)+120$$
$$=8.1-70.2+120$$
$$=57.9$$

أي يصبح مستوى المياه حوالى 58cm

الربط بالتكنولوجيا

خطوات الحل المستخدمة لحل ثلاث معادلات بالحاسبة.

اضغط المفتاح Mode

يظهر على الشاشة 8 خيارات لبرامج مستخدمة

اختر البرنامج: 5: EQN

فيظهر على الشاشة 4 صيغ لمعادلات.

اختر الصيغة:

$2{:}\ a_nx+b_ny+c_nz=d_n$

فيظهر على الشاشة المصفوفة:

$$\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}\begin{bmatrix}a\square & b\square & c\square & d\square\\ \square & \square & \square & \square\\ \square & \square & \square & \square\end{bmatrix}$$

اكتب كلًّا من المعادلات الثلاث على الشكل التالي:

$$ax+by+cz=d$$

املأ المربعات في السطر الأول بمعامل x يليه = ثم معامل y يليه = ثم معامل z يليه = ثم قيمة d يليه = .

كرر العملية في السطرين الثاني والثالث.

اضغط الآن على المفتاح = تظهر قيمة x (المجهول الأول)

اضغط ثانية على المفتاح = تظهر قيمة y (المجهول الثاني)

اضغط ثالثة على المفتاح = تظهر قيمة z (المجهول الثالث)

نشاط إثرائي (الصلة بالواقع)

يقف أحد السباحين على منصة يبلغ ارتفاعها 3 m عن مستوى سطح المياه. يقفز إلى أعلى ثم يسقط في المياه. يبيّن الجدول التالي ارتفاعه y بالأمتار (m)، ابتعاده الأفقي عن المنصة x بالأمتار (m).

x	0.6	1	1.2	1.3	1.6	2	2.6	3
y	4.44	4.92	5.016	5.028	4.92	4.44	3	1.56

استخدم البيانات المدونة في الجدول لإيجاد معادلة تربيعية تنمذج العلاقة بين x , y ثم تحقق.

الحل:

لتكن الدالة التربيعية: $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad y = f(x)$

يتضمن الجدول 8 أزواج مرتبة (x,y) أي أن القطع المكافئ يجب أن يمر بهذه النقاط. نختار 3 أزواج لنجد الثوابت (a, b, c)

الزوج $(0.6, 4.44)$ $\quad 4.44 = a(0.6)^2 + b(0.6) + c$

الزوج $(1, 4.92)$ $\quad 4.92 = a(1)^2 + b(1) + c$

الزوج $(1.2, 5.016)$ $\quad 5.016 = a(1.2)^2 + b(1.2) + c$

بالتبسيط نحصل على النظام:

$$\begin{cases} 0.36a + 0.6b + c = 4.44 \\ a + b + c = 4.92 \\ 1.44a + 1.2b + c = 5.016 \end{cases}$$

نستخدم آلة حاسبة لحل النظام فنحصل على: $a = -1.2, \quad b = 3.12, \quad c = 3$

$$f(x) = -1.2x^2 + 3.12x + 3$$

للتحقق، نعوّض عن $(x , f(x))$ ببقية أزواج قيم الجدول.

مثلًا: نعوّض بالزوج: $(1.3, 5.028)$:

$$5.028 \stackrel{?}{=} -1.2(1.3)2 + 3.12(1.3) + 3$$

$$5.028 \stackrel{?}{=} -1.2 \times 1.69 + 3.12 \times 1.3 + 3$$

$$5.028 \stackrel{\checkmark}{=} 5.028$$

$\therefore$ $(1.3, 5.028)$ يحقق المعادلة.

بالمثل يمكنك إثبات أن بقية الأزواج المرتبة تحقق المعادلة.

تدريب إثرائي

استخدم البيانات المدونة في الجدول لإيجاد معادلة تربيعية تنمذجها ثم تحقق من بقية الأزواج في الجدول.

x	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	3	4
y	10	6.25	3	0.25	−2	−3.75	−5	−6	−5

2-3

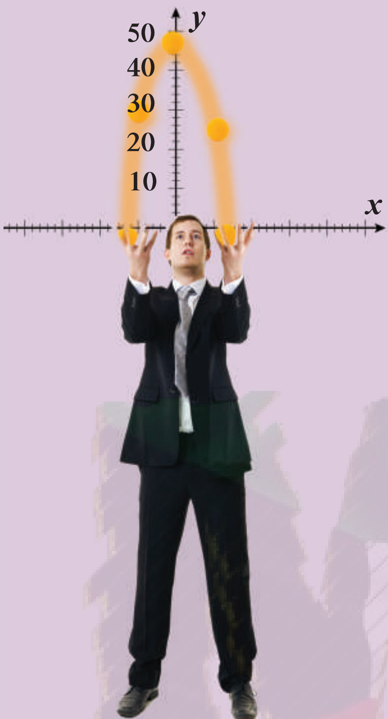
الدوال التربيعية والقطوع المكافئة

Quadratic Functions and Parabolas

سوف تتعلم
- إيجاد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لدالة تربيعية.
- إيجاد معادلة محور التماثل.
- رسم القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه.

المفردات والمصطلحات
- قطع مكافئ Parabola
- رأس القطع المكافئ Vertex of the Parabola
- محور التماثل Axis of Symmetry

عمل تعاوني



عندما تقذف بعض الأشياء (الأجسام) في الهواء مثل الكرات في الصورة المقابلة، فإن مسار الأشياء (الأجسام) يكون على شكل قطع مكافئ.

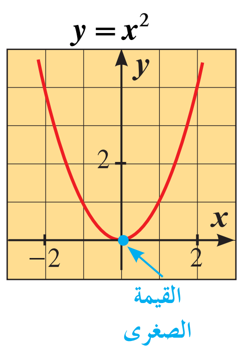
1. استخدم الرسم البياني في الصورة إذا كان القياس بالسنتيمترات (cm)، فما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟
2. كون جدولًا بالقيم للمعادلة:
$$y = -0.35x^2 + 50$$
ما قيمة x التي تحصل عندها على القيمة العظمى لـ y؟ ما القيمة العظمى لـ y؟
3. كيف تقارن إجاباتك عن السؤالين رقم 1، 2؟

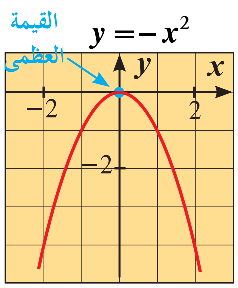
تعلمت في ما سبق أن بيان الدالة التربيعية يكون على شكل منحنى يسمى قطعًا مكافئًا وسنوضح في هذا البند بعض خصائص القطوع المكافئة في حالات خاصة.

القطوع المكافئة التي تمثل دوال تربيعية

Parabolas Representing Quadratic Functions

رأس القطع المكافئ هو أعلى (أو أدنى) نقطة في القطع المكافىء الذي يمثّل الدالة التربيعية بيانيًا، فنقطة الرأس هي النقطة التي تكون للدالة عندها أكبر قيمة وتسمى **قيمة عظمى** وفي هذه الحالة تكون فتحة القطع المكافئ لأسفل أو نقطة الرأس هي النقطة التي تكون للدالة عندها أصغر قيمة وتسمى **قيمة صغرى** وفي هذه الحالة تكون فتحة القطع المكافئ لأعلى.





محور التماثل (التناظر) يقسم القطع المكافئ إلى جزءين متطابقين (كل جزء هو صورة للآخر بالانعكاس في المحور)، لذلك فإن كل نقطة من نقاط القطع المكافئ تناظرها نقطة أخرى هي صورتها بالانعكاس في محور التماثل، وتقع كلتا النقطتين المتناظرتين على البعد نفسه من محور التماثل الذي معادلته $x = x_1$ حيث x_1 الإحداثي السيني لنقطة رأس القطع.

نشاط (1)

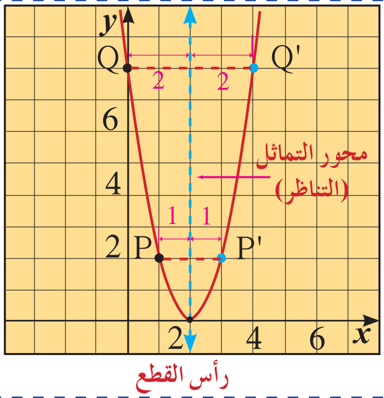
مستخدمًا الرسم البياني الموضح:

a أوجد إحداثيات الرأس.

b حدد معادلة محور التماثل.

c حدّد النقطة المناظرة لكل من:

$P(1, 2)$, $Q'(4, 8)$



ملاحظة: **معادلة الدالة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0, 0)$ هي: $y = ax^2$**

لإيجاد قيمة a، استخدم إحداثيات نقطة على المنحنى غير نقطة الرأس.

معادلة محور تماثل هذا القطع المكافئ هي $x = 0$

مثال (1)

كل نقطة مما يلي تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل. اكتب معادلة تربيعية لهذا القطع المكافئ واذكر ما إذا كان بيانه مفتوحًا إلى أعلى أم إلى أسفل.

a $F(-1, 6)$　　b $H(-4, -8)$

الحل:

a معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل هي على الصورة: $y = ax^2$

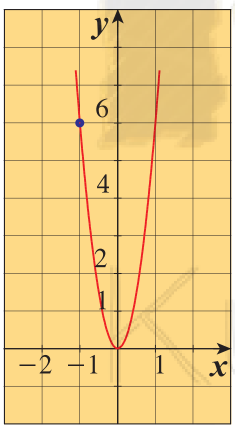
يمر القطع المكافئ بالنقطة $F(-1, 6)$

$$6 = a(-1)^2 \Longrightarrow a = 6$$

$\therefore$ تصبح المعادلة: $y = 6x^2$

$$\because a = 6 \quad , 6 > 0$$

$\therefore$ القطع المكافئ مفتوح إلى أعلى.



b المعادلة هي على الصورة: $y = ax^2$

يمر القطع المكافئ بالنقطة $H(-4, -8)$

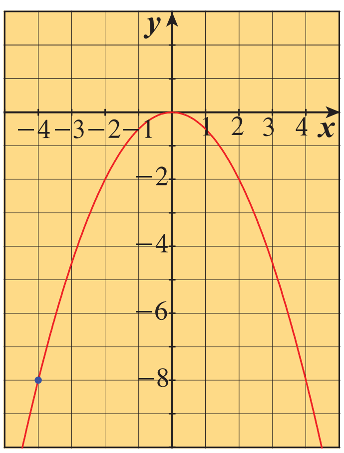
$$-8 = a(-4)^2$$

$$16a = -8 \Longrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

تصبح المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x^2$

$$\because a = -\frac{1}{2} \quad , \quad -\frac{1}{2} < 0$$

$\therefore$ القطع المكافئ مفتوح إلى أسفل.



حاول أن تحل

1 كل نقطة مما يلي تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل.

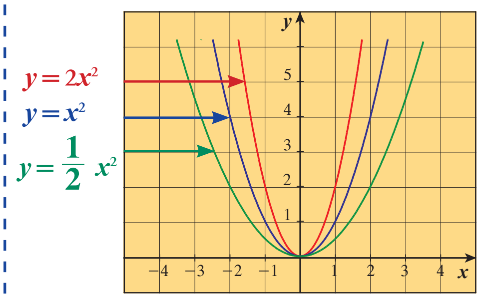
اكتب معادلة تربيعية لهذا القطع المكافئ واذكر ما إذا كان بيانه مفتوحًا إلى أعلى أم إلى أسفل.

a $E(4, 2)$　　b $D(1, -5)$

كل القطوع المكافئة لها الشكل العام نفسه. ويتغير **اتساع القطع المكافئ** تبعًا لتغير معامل حد الدرجة الثانية.

نشاط (2)

استخدم الرسم البياني المجاور.



a حدّد معامل كل حد من حدود الدرجة الثانية.

b كيف تؤثر زيادة قيمة معامل حد الدرجة الثانية على الرسم البياني للدالة التربيعية؟

مثال (2)

الصلة بالواقع

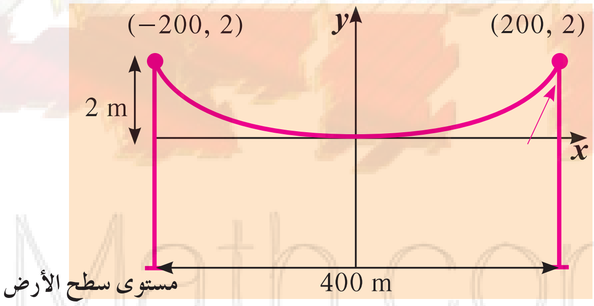
الكهرباء: توضع أعمدة خط التوتر العالي لنقل الطاقة الكهربائية بارتفاع مناسب فإذا كان البعد الرئيس بين العمودين هو 400 m، يتدلى السلك حوالي 2 m في الوسط بين العمودين.

أوجد معادلة القطع المكافئ والتي قد تمثل سلك أبراج خط التوتر العالي.

افترض أن رأس القطع المكافئ هو نقطة الأصل.

الحل:

ابدأ برسم الشكل



(الرسم تقريبي)

بما أن النقطة (200, 2) تقع على الرسم البياني، عوض بالقيم في المعادلة:

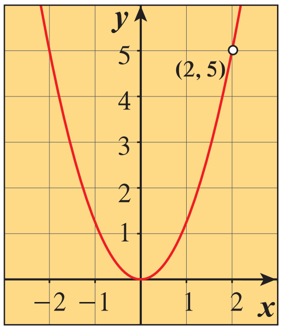
$$y = ax^2$$
$$a(200)^2 = 2$$
$$a = \frac{2}{40\,000}$$
$$a = 0.000\,05$$

المعادلة التي تصف الشكل الناتج عن السلك هي: $y = 0.00005x^2$

حاول أن تحل

2 البيان المقابل يمثل دالة: $y = ax^2$

أوجد معادلة هذه الدالة.



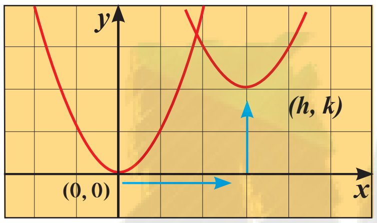
معادلات بعض القطوع المكافئة بدلالة إحداثيات رؤوسها وخواصها

Equations of some Parabolas in terms of the Coordinates of Vertices

ليس بالضرورة أن يكون رأس القطع المكافئ نقطة الأصل.

المعادلة في الصورة: $y = a(x-h)^2 + k,\ \ a \neq 0\ , h\ ,k \in \mathbb{R}$

تسمى **معادلة القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه (h, k)** وهي عبارة عن إزاحة لبيان منحنى الدالة: $y = ax^2$



وتذكر أنه عندما تكون h، k موجبتين فإن الإزاحة تحرك المنحنى عدد h من الوحدات يمينًا وعدد k من الوحدات إلى الأعلى كما في الشكل. وعندما تكون h سالبة يزاح المنحنى عدد من الوحدات إلى اليسار، وعندما تكون k سالبة، يزاح المنحنى عدد من الوحدات إلى الأسفل.

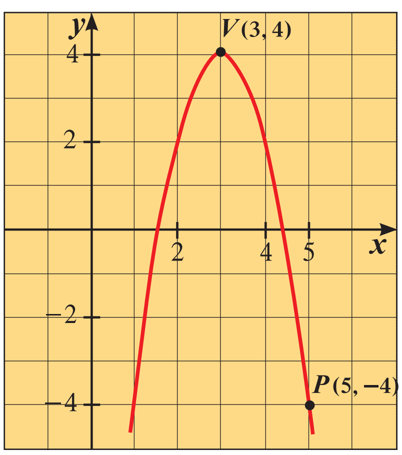
بعض خواص القطوع المكافئة

المعادلة على الصورة: $y = a(x-h)^2 + k$، هي دالة مكتوبة بدلالة إحداثيات الرأس، وهذه المعادلة تمدك بالمعلومات التالية:

- رأس المنحنى هو النقطة (h, k)، ومحور التماثل هو الخط: $x = h$
- تكون فتحة القطع المكافئ إلى الأعلى عندما تكون a موجبة، وتكون فتحة القطع المكافئ إلى الأسفل عندما تكون a سالبة.
- إذا كان $|a| < 1$، فإن الرسم سوف يكون أوسع من رسم الدالة: $y = x^2$
- إذا كان $|a| > 1$، فإن الرسم سوف يكون أضيق من رسم الدالة: $y = x^2$

مثال (3)

في الشكل المقابل اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $V(3, 4)$ ويمر بالنقطة $P(5, -4)$



الحل:

رأس القطع: $(h, k) = (3, 4)$.

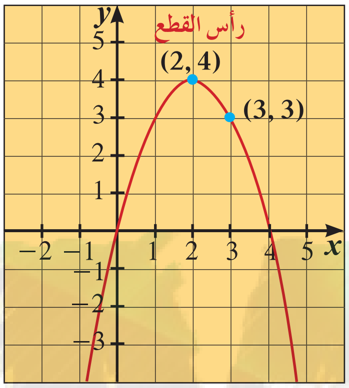
لذلك استخدم المعادلة، ثم حلها لإيجاد قيمة a:

	$y = a(x-h)^2 + k$
$h = 3\,, k = 4$	$y = a(x-3)^2 + 4$
عوض بالنقطة $(5, -4)$	$-4 = a(5-3)^2 + 4$
اختصر	$-8 = 4a$
حل لإيجاد قيمة a	$-2 = a$

$\therefore$ معادلة القطع المكافىء هي: $y = -2(x-3)^2 + 4$

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة القطع المكافئ في الرسم المقابل.



يمكنك استخدام خصائص القطوع المكافئة لرسم بيان الدوال التربيعية.

مثال (4)

ارسم منحنى الدالة: $y = 2(x+1)^2 - 2$ مستخدمًا خواص القطوع المكافئة.

الحل:

$\because$ المعادلة تربيعية على الصورة $y = a(x-h)^2 + k$ فهي تمثل قطعًا مكافئًا.

$\therefore \; h = -1, \quad k = -2$

$\therefore$ $(-1, -2)$ رأس المنحنى

وكذلك $2 > 0 \quad \because a = 2,$

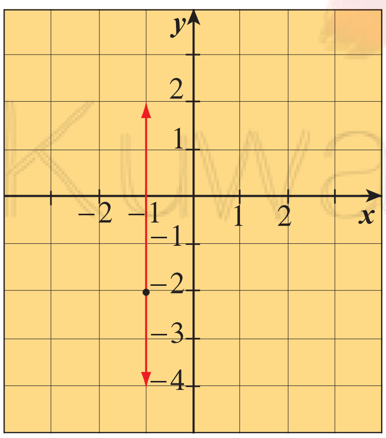
$\therefore$ فتحة المنحنى لأعلى

والرأس عنده قيمة صغرى للدالة.

معادلة محور التماثل هي: $x = h$

$\therefore$ $x = -1$ هو محور التماثل.

نرسم محور التماثل.

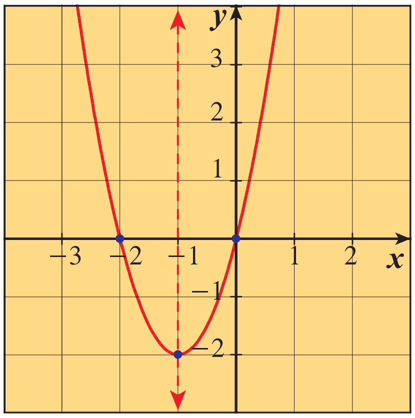


أوجد نقطة أخرى: عند $x = 0$ فإن $y = 0$

أي أن المنحنى يمر بنقطة الأصل.

حدّد انعكاس نقطة الأصل حول محور التماثل.

ارسم منحنى يمر في النقاط الثلاث.



حاول أن تحل

4 ارسم منحنى الدالة: $y = (x+3)^2 + 1$.

مثال (5)

ارسم منحنى الدالة: $y = -0.5(x-2)^2 + 3$ مستخدمًا خواص القطوع المكافئة.

الحل:

$\because$ المعادلة تربيعية على الصورة $y = a(x-h)^2 + k$ فهي تمثل قطعًا مكافئًا

$\therefore$ $h = 2$ ،$k = 3$

$\therefore$ $(2, 3)$ رأس المنحنى

$\because a = -0.5 \,,\, -0.5 < 0$

$\therefore$ فتحة المنحنى إلى أسفل والرأس عنده قيمة عظمى للدالة.

معادلة محور التماثل هي $x = h$.

$\therefore$ $x = 2$ هو محور التماثل

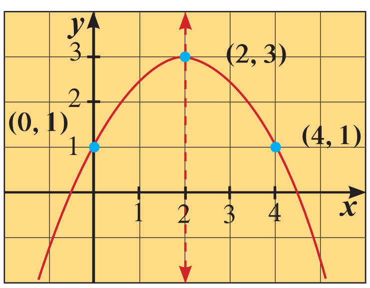
نرسم محور التماثل.

أوجد نقطة أخرى: عند $x = 0$ فإن $y = 1$

حدّد موقع النقطة $(0, 1)$.

حدّد موقع انعكاس النقطة $(0, 1)$ حول محور التماثل وهي $(4, 1)$.

ارسم منحنى يمر في النقاط الثلاث.



حاول أن تحل

5 ارسم منحنى الدالة: $y = -2(x-3)^2 - 1$

مثال (6) تطبيقات حياتية

رميت كرة من فوق حاجز بارتفاع 150 cm عن سطح الملعب فاجتازت الكرة الحاجز الشبكي ثم سقطت على الأرض مبتعدة 300 cm عن قاعدة الحاجز.

استخدم الحاجز كمحور تناظر واكتب معادلة تنمذج مسار الكرة.

افترض أن نقطة الأصل هي حيث يتقاطع الحاجز مع الأرض.

الحل:

يمكن نمذجة المسألة كما يبين الرسم، باعتباره قطع مكافئ.

معادلة القطع المكافئ بدلالة إحداثيات الرأس هي:

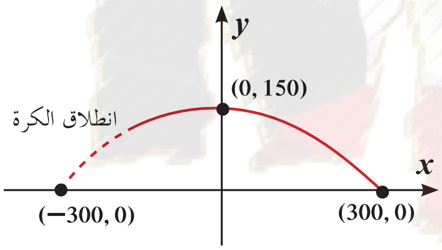
$$y = a(x-h)^2 + k$$

$\because$ إحداثيات الرأس: $(0, 150)$

$$\therefore\ h = 0\ ,\ k = 150$$

$$y = a(x-0)^2 + 150 \quad , \quad y = ax^2 + 150$$

يمر البيان بالنقطة $(300, 0)$ فيكون:



$$a(300)^2 + 150 = 0 \Longrightarrow a = -\frac{1}{600}$$

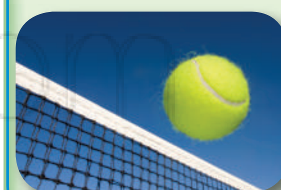
معادلة مسار الكرة هي:

$$y = -\frac{1}{600}x^2 + 150$$

الربط بالحياة:

كرة المضرب (Tennis) هي إحدى النشاطات الرياضيّة الحائزة على عدد كبير من تشجيع الجماهير. حيث يتبارى فيها لاعبان في مباريات الفردي أو فريقان مكوّنان من لاعبين في مباريات الزوجي.

يستخدم كل لاعب مضرب يستخدمه في إرسال الكرة إلى منطقة الخصم بهدف تسجيل النقاط. وما يميز لعبة كرة المضرب عن غيرها من بقية الألعاب هو أنها تفيد أجزاء كثيرة من الجسم فضلًا عن التوافق بين الذهن وكافة عضلات الجسم.



حاول أن تحل

6 في ملعب لكرة المضرب، رمى لاعب الكرة من فوق الشبكة بارتفاع 1 m عن سطح الملعب فاجتازت الكرة الشبكة ثم سقطت على الأرض مبتعدة 6 m عن قاعدتها.

افترض أن نقطة الأصل هي حيث يتقاطع المستقيم الرأسي في منتصف الشبكة مع أرض الملعب.

استخدم المستقيم كمحور تناظر واكتب معادلة تنمذج مسار الكرة.

مثال (7)

تطبيقات حياتية

يبيع أحد المحلات عددًا أكبر من الفطائر عندما يخفض السعر، لكن ربحه يتغير. تنمذج أرباح هذا المحل (بالدينار) وفقًا للدالة التالية: $y=-100(x-1.75)^2+300$ أرباح هذا المحل بالدينار، حيث x سعر الفطيرة بالدينار. يرغب صاحب المحل في تحقيق القيمة العظمى لربحه من المبيع.

a صف المجال الواقعي للدالة.

b أوجد أرباحه اليومية إذا باع الفطيرة الواحدة، بـ 2 دينار. وإذا باع الفطيرة الواحدة بـ 1.25 دينار.

c ما السعر الذي يجب أن يبيع به الفطيرة الواحدة ليحقق الربح الأكبر؟ وما قيمة هذا الربح؟

الحل:

a حيث إن x تمثل سعر الفطيرة يجب أن تكون $x>0$.

b في المعادلة:

$$y=-100(x-1.75)^2+300$$

عند $x=2$

$$y=-100(2-1.75)^2+300$$

$$y=293.75$$

أي يكون ربحه 293.75 دينارًا.

عند $x=1.25$

$$y=-100(1.25-1.75)^2+300$$

$$y=275$$

أي يكون ربحه 275 دينارًا.

c تمثل الدالة قطعًا مكافئًا له قيمة عظمى لأن $-100<0$، وبالتالي إحداثيات رأسه $(1.75, 300)$، حيث إن 1.75 دينار هو السعر الذي يحقق الربح الأكبر وقيمة هذا الربح الأكبر هي 300 دينار.

حاول أن تحل

7 في المثال (7) أوجد سعر مبيع الفطيرة الواحدة إذا لم يربح ولم يخسر في أحد الأيام.

2-4

مقارنة بين صورة معادلة الدالة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحنى والصورة العامة

Comparing Vertex and General Form Equation of Quadratic Functions

سوف تتعلم

- إيجاد رأس منحنى الدالة من التربيعة بالصورة العامة.
- كتابة المعادلات بدلالة إحداثيات الرأس وفي الصورة العامة.

المفردات والمصطلحات

- رأس القطع المكافئ
Vertex of a Parabola
- الصورة العامة
General Form

ربط بالحياة:

تسمح الآلات الحاسبة البيانية برسم بيانات الدوال ومنها الدوال التربيعية. تختلف الخطوات المتبعة من حاسبة لأخرى لكن معظمها بسّط كثيرًا عملية الرسم كالتالي :

a اضغط على رمز GRAPH.

b اكتب معادلة الدالة.

c اضغط على EXE ، يظهر بيان الدالة على الشاشة.

عمل تعاوني

اعمل في مجموعات قوامها أربعة طلاب.

أوّلًا a اطلب من كل مجموعة رسم بيان زوج من المعادلات التالية. ويمكنك استخدام الآلة الحاسبة البيانية في رسم بيان زوج من المعادلات التالية على الشاشة نفسها للآلة الحاسبة.

	$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ (الصورة العامة)	a	b	$y = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$ (صورة المعادلة بدلالة إحداثيات رأس المنحنى)	h
1	$y = x^2 - 4x + 4$			$y = (x-2)^2$	
2	$y = x^2 + 6x + 8$			$y = (x+3)^2 - 1$	
3	$y = -3x^2 - 12x - 8$			$y = -3(x+2)^2 + 4$	
4	$y = 2x^2 + 12x + 19$			$y = 2(x+3)^2 + 1$	

b ما الذي تلاحظه في رسوم كل زوج من المعادلات؟

c هل كل زوج من المعادلات يمثل معادلتين متكافئتين؟

ثانيًا a **أنماط:** أكمل الجدول أعلاه.

b انظر إلى القيم h ،b في أول زوجين من المعادلات. اكتب صيغة توضح العلاقة بين b، h.

c استخدم الزوجين الأخيرين من المعادلات لتوسع الصيغة التي حصلت عليها ولكي توضح العلاقة بين a، b، h.

ثالثًا a ما العلاقة بين محور التماثل ورأس القطع المكافئ؟

b ما معادلة محور التماثل للقطع المكافئ: $y = ax^2 + bx + c$

c ما معادلة محور التماثل للقطع المكافئ: $y = 2x^2 + 10x + 7$

في فقرة «عمل تعاوني»، بحثت في كيفية تحديد رأس منحنى الدالة التربيعية. عندما تكتب معادلة الدالة في الصورة العامة، فإن الإحداثي **السيني لرأس القطع المكافئ** يكون: $-\frac{b}{2a}$، ولإيجاد الإحداثي الصادي k، عوض بقيمة الإحداثي السيني h في المعادلة ثم بسط.

مثال (1)

اكتب الدالة: $y = 2x^2 + 10x + 7$ ، بدلالة إحداثيات الرأس.

الحل:

صورة المعادلة بدلالة إحداثيات الرأس (h, k) هي: $y = a(x-h)^2 + k$

الإحداثي السيني:

استخدم $\frac{-b}{2a}$ لإيجاد الإحداثي السيني $\quad h = -\frac{b}{2a}$

عوّض بقيم a، b $\quad = \frac{-10}{2(2)}$

$= -2.5$

الإحداثي الصادي:

عوض بـ $x = -2.5$ في المعادلة الأصلية $\quad k = 2(-2.5)^2 + 10(-2.5) + 7$

$= -5.5$

$\therefore$ المعادلة بدلالة إحداثيات الرأس هي: $y = 2(x+2.5)^2 - 5.5$

حاول أن تحل

1 اكتب الدالة: $y = -3x^2 + 12x + 5$ بدلالة إحداثيات رأس المنحنى، ثم ارسم بيانها.

يمكنك استخدام رأس القطع المكافئ في تطبيقات حياتية تتطلب إيجاد أكبر مساحة وأصغر مساحة.

مثال (2) الصلة بالواقع

إذا قمت بالتخطيط لصنع برواز مستطيل الشكل لمجموعة من الصور، وذلك لتقديمها كهدية تخرج لأحد الأصدقاء، وكان لديك قطعة من الخشب طولها 2.8 m لصنع برواز. فما أبعاد البرواز التي تعطيك أكبر مساحة (A) لوضع مجموعة الصور؟

وما هي أكبر مساحة؟

الحل:

استخدم صيغة المحيط (P) لإيجاد تعبير رياضي (مقدار) يعبر عن طول البرواز (L) بدلالة العرض (W).

المحيط = 2 (الطول + العرض) $\quad P = 2(L + W)$

$P = 2.8\ m = 280\ cm$ $\quad 2(W + L) = 280$

بسط، وحل لإيجاد الطول $\quad L = 140 - W$

المصطلحات

- المحيط: مح Perimetre (P)
- المساحة: م Area (A)
- الطول: ل Length (L)
- العرض: ض Width(W)
- الارتفاع: ع Height (h)
- المستطيل Rectangle

مراجعة سريعة:

لإيجاد محيط المستطيل ومساحته، استخدم ما يلي:

المحيط = 2 (الطول + العرض)

$P = 2(L + W)$

المساحة = الطول × العرض

$A = L \times W$

اكتب معادلة لإيجاد مساحة البرواز

المساحة = الطول × العرض $\qquad A = L \times W$

عوّض بالطول والعرض $\qquad A = (140 - W)(W)$

بسّط $\qquad A = -W^2 + 140W$

المساحة دالة تربيعية وبيانها قطع مكافئ له قيمة عظمى عند رأس المنحنى $\frac{-b}{2a}$

نحصل على أكبر مساحة عندما يكون

$$W = \frac{-b}{2a} = \frac{-140}{2(-1)} = 70 \text{ cm}$$

وحيث إن $\qquad L = 140 - W$

$$L = 140 - 70 = 70 \text{ cm}$$

وتتحقق أكبر مساحة للبرواز عندما يكون كل من طول وعرض البرواز يساوي 70 cm

وتكون أكبر مساحة: $70 \times 70 = 4\,900$،

أي أكبر مساحة: $4\,900 \text{ cm}^2$

حاول أن تحل

2 a ما أفضل تسمية للشكل الهندسي الذي يعطي أكبر مساحة للبرواز في المثال (2)؟

b هل تعتقد أن هذا الشكل يعطي دائمًا أكبر مساحة لشكل مستطيل محيطه معلوم؟

c أوجد عددين موجبين c, d على أن يكون: $c + d = 18$ و $c \times d$ أكبر ما يمكن.

لقد حولت معادلة الدالة التربيعية من الصورة العامة إلى الصورة بدلالة إحداثيات الرأس.
يمكنك أيضًا تحويل معادلة الدالة التربيعية من صورتها بدلالة إحداثيات الرأس إلى الصورة العامة.

مثال (3)

اكتب المعادلة: $y = 3(x-1)^2 + 12$ في الصورة العامة.

الحل:

$y = 3(x-1)^2 + 12$

أوجد $(x-1)(x-1)$ $\qquad y = 3(x^2 - 2x + 1) + 12$

استخدم خاصية التوزيع $\qquad y = 3x^2 - 6x + 3 + 12$

بسّط $\qquad y = 3x^2 - 6x + 15$

حاول أن تحل

3 a اكتب المعادلة: $y=-2(x+3)^2-7$ في الصورة العامة. وارسم بيانها.

b تعطي كل من المعادلة في الصورة بدلالة إحداثيات الرأس والصورة العامة معلومات عن الدالة. ما مميزات استخدام كل صورة لرسم بيان الدالة؟

مثال (4)

منحنى الدالة $y=ax^2+bx+12$ له رأس عند النقطة $(1, 8)$ فما قيم a, b ؟

الحل:

طريقة أولى:

النقطة $(1, 8)$ تنتمي إلى منحنى الدالة

∴ بالتعويض

$$8=a(1)+b(1)+12$$
$$8=a+b+12$$
$$a+b=-4 \quad (1)$$

الإحداثي السيني لرأس القطع المكافئ:

$$x=\frac{-b}{2a}$$
$$\therefore 1=\frac{-b}{2a} \Longrightarrow b=-2a \quad (2)$$

نحل النظام

$$\begin{cases} a+b=-4 & (1) \\ b=-2a & (2) \end{cases}$$

في (1) نعوّض عن b بقيمتها في (2) فنحصل على:

$$a-2a=-4$$
$$-a=-4 \Longrightarrow a=4$$

في (2) نعوّض عن a بـ 4 فنحصل على: $b=-2(4)=-8$

∴ $b=-8$ ، $a=4$

طريقة ثانية:

$$y=a(x-1)^2+8$$
$$=a(x^2-2x+1)+8$$
$$=ax^2-2ax+a+8$$

بالمقارنة مع الدالة المعطاة $y=ax^2+bx+12$ نجد أن

$$a+8=12 \Longrightarrow a=4$$
$$-2a=b \Longrightarrow b=-2(4)=-8$$

حاول أن تحل

4 منحنى الدالة $y=ax^2+4x+c$ له رأس عند النقطة $(-1, 5)$. فما قيم a, c ؟

مثال (5) تطبيقات حياتية

وجد صاحب محل لبيع الأحذية الرياضية أنه يمكن نمذجة ربحه بالدالة:

$f(x) = -15x^2 + 600x + 50$ ،

حيث x تمثل سعر الحذاء بالدينار.

a ما سعر الحذاء الذي يحقق أعلى ربح؟

b ما قيمة أعلى ربح؟

الحل:

a $f(x) = -15x^2 + 600x + 50$

رسمها البياني قطع مكافئ له قيمة عظمى، تتحقق القيمة العظمى عند

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-600}{2(-15)} = 20$$

أي أن ثمن الحذاء الذي يحقق أعلى ربح هو 20 دينارًا.

b $f(20) = -15(20)^2 + 600(20) + 50 = 6\,050$

$\therefore$ الربح الأعلى يساوي 6 050 دينارًا.

حاول أن تحل

5 لاحظ صاحب محل لبيع الدراجات النارية أن بالإمكان نمذجة ربحه بالدالة:

$$f(x) = -x^2 + 2200x - 1150\,000$$

حيث x تمثل سعر مبيع الدراجة النارية بالدينار

a أوجد سعر مبيع الدراجة النارية الذي يحقق أعلى ربح.

b أوجد قيمة أعلى ربح.

2–5

المعكوسات ودوال الجذر التربيعي

Inverses and Square Root Functions

سوف تتعلم

- إيجاد معكوس الدالة.
- استخدام دوال الجذر التربيعي.

المفردات والمصطلحات

- المعكوس Inverse
- معكوس الدالة Inverse of a Function
- دوال الجذر التربيعي Square Root Functions

عمل تعاوني

هل تعلم أن هناك ارتباطًا بين طول قطعة الجليد الموضحة بالصورة وطول قطر أكبر مقطع دائري لها؟

1 يمكن استخدام الدالة $L = 11d - 0.5$، لمعرفة الطول التقريبي L لقطعة الجليد إذا علم طول قطرها d عند أكبر مقطع دائري لها.

a يبلغ طول قطر أكبر مقطع لقطعة جليدية مدلاة 5 cm أوجد طولها.

b اشرح الخطوات التي استخدمتها لإيجاد الطول في الجزء **a**.

2 **a** يبلغ طول قطعة جليدية مدلاة 27 cm أوجد طول قطر أكبر مقطع.

b اشرح الخطوات التي استخدمتها لإيجاد القطر في الفقرة **a**.

الخطوات التي سبق لك استخدامها لإيجاد طول قطر أكبر مقطع لقطعة جليدية مدلاة عند معرفة طولها مشابهة لتلك المستخدمة في إيجاد ما يسمى **معكوس الدالة**.

نشاط:

اعتبر الدالتين: $f(x) = 2x - 8$ ، $g(x) = \frac{x+8}{2}$

مجال الدالة f هو $\mathbb{R}$ ومجال الدالة g هو $\mathbb{R}$ أيضًا.

فإذا أخذنا أي عدد ينتمي لمجال الدالة f وليكن 6.

نوجد $f(6)$

$f(x) = 2x - 8$: إدخال 6 ← الضرب في 2 ← الطرح 8 ← الناتج 4

نوجد $g(4)$

$g(x) = \frac{x+8}{2}$: إدخال 4 ← الجمع 8 ← القسمة على 2 ← الناتج 6

الدالتان: $g(x) = \frac{x+8}{2}$, $f(x) = 2x - 8$ كلًّا منهما تعكس عمليات الأخرى،

لذلك تسمى g معكوس الدالة f أو f معكوس الدالة g

1 **a** ارسم الدالتين: g , f في مستوى إحداثي واحد.

b أوجد ثلاث نقاط على الرسم البياني للدالة f

c اعكس إحداثيات كل نقطة، ثم ارسم النقاط الجديدة.

ماذا تلاحظ؟

إذا كانت r علاقة تصل بين عنصر a من مجال r وعنصر b من مدى r

فإن **معكوس العلاقة** r يصل من b إلى a.

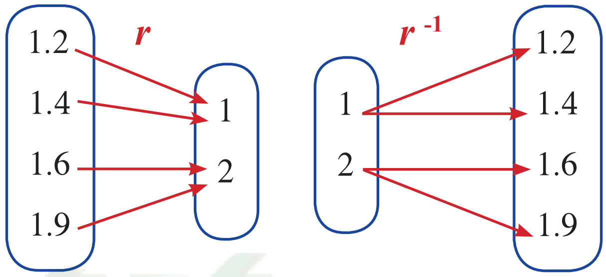
إذا كان (a, b) زوج مرتب من علاقة r فإن (b, a) هو زوج مرتب من معكوس هذه العلاقة.

يبيّن المخطط أدناه علاقة r ومعكوسها r^{-1}

مدى العلاقة r هو مجال معكوس هذه العلاقة ومجال r هو مدى معكوسها.

معلومة:

يعبر عن معكوس العلاقة r بالرمز r^{-1}.



مثال توضيحي

يبيّن الجدول المقابل علاقة S

x	1	2	3	4
y	-1	0	1	1

a) أوجد معكوس العلاقة S

b) مثّل بيان S وبيان معكوسها

c) صف العلاقة بين المستقيم $y = x$ وبيان S وبيان معكوسها.

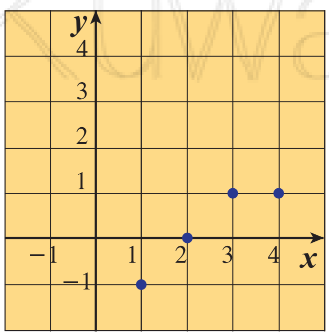
d) هل العلاقة S تمثل دالة؟ هل معكوس S يمثل دالة؟

الحل: a) نبدل قيم y , x في الجدول.

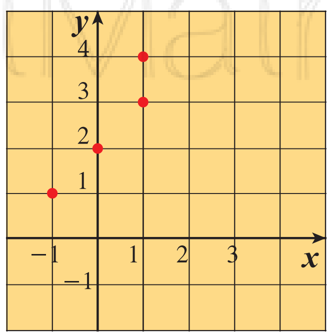
x	-1	0	1	1
y	1	2	3	4

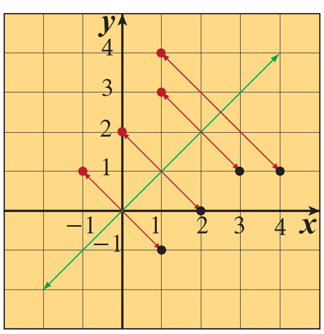
b) بيان S وبيان معكوسها

بيان العلاقة S



بيان معكوس S





c) المستقيم $y = x$ هو خط انعكاس لبيان S وبيان معكوسها.

d) العلاقة S تمثل دالة لأن كل عنصر من المجال يقترن بعنصر واحد فقط من المجال المقابل.

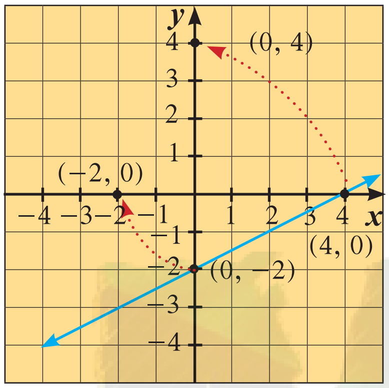
بينما معكوس S لا يمثل دالة لأن العنصر (1) من المجال يقترن بعنصرين من المجال المقابل.

إذا كانت النقطة (a, b) تنتمي إلى بيان دالة فإن النقطة (b, a) تنتمي إلى بيان معكوس هذه الدالة. ولكي ترسم معكوس الدالة بيانيًّا اعكس الترتيب لكل زوج مرتب ينتمي لبيان الدالة.

معكوس الدالة الخطية هو دالة خطية أيضًا.

مثال (1)

ارسم بيان الدالة $y = \frac{x-4}{2}$ ومعكوسها ثم اكتب معادلة المعكوس.



الحل:

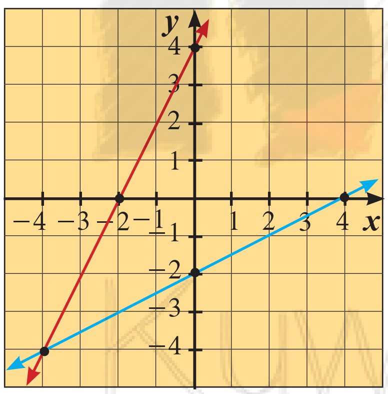
نرسم بيان الدالة الأصلية $y = \frac{x-4}{2}$ وهي دالة خطية

x	0	2	4
y	-2	-1	0

$\because$ $(0, -2)$، $(4, 0)$ تنتميان لبيان الدالة y.

$\therefore$ $(-2, 0)$، $(0, 4)$ تنتميان لبيان معكوس الدالة y وهو خط مستقيم.

ارسم المستقيم المار بالنقطتين الجديدتين.



لكتابة معادلة هذا المستقيم:

الميل: $(x_2 \neq x_1)$, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$= \frac{4-0}{0-(-2)} = 2$$

معادلة المستقيم المار بالنقطة $(0, 4)$ وميله 2 هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = 2(x - 0)$$

$$y = 2x + 4$$

معادلة المعكوس هي: $y = 2x + 4$

حاول أن تحل

1 ارسم الدالة $y = -3x + 5$ ومعكوسها، ثم اكتب معادلة المعكوس.

طريقة أخرى لإيجاد معكوس الدالة جبريًّا وهي التبديل بين متغيرات الدالة x, y ثم الحل بالنسبة إلى y

إذا كانت الدالة تستخدم الرمز $f(x)$ عوّض عن $f(x)$ بـ y

فمثلًا لإيجاد معكوس الدالة $y = \frac{x-4}{2}$ نبدل بين المتغيرات فيكون: $x = \frac{y-4}{2}$

$2x = y - 4$

$y = 2x + 4$

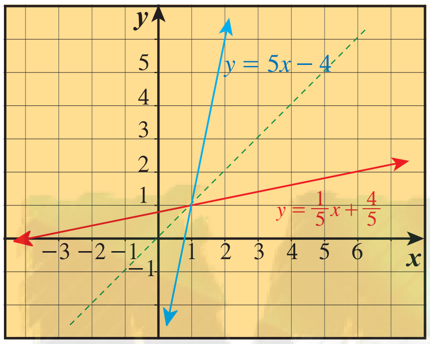
مثال (2)

أوجد معكوس الدالة $y = 5x - 4$

الحل:

	$y = 5x - 4$
بدّل x , y	$x = 5y - 4$
حلّ بالنسبة إلى y	$5y = x + 4$
	$y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$

معكوس الدالة $y = 5x - 4$ هو $y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$



حاول أن تحل

2 أوجد معكوس الدالة:

a $y = \frac{2x - 1}{3}$

b $y = 2(x + 1) - 3$

مثال (3)

أوجد معكوس الدالة: $f(x) = x^2 + 3$ وناقش الحلول.

الحل:

	$f(x) = x^2 + 3$
عوّض عن $f(x)$ بـ y	$y = x^2 + 3$
بدل x، y	$x = y^2 + 3$
حل بالنسبة إلى y	$x - 3 = y^2$
أوجد الجذر التربيعي للطرفين	$y = \pm\sqrt{x - 3}$

معكوس الدالة $f(x) = x^2 + 3$ هو:

$y = \pm\sqrt{x - 3}$

الرسم البياني للدالة: $y = x^2 + 3$، ومعكوسها:

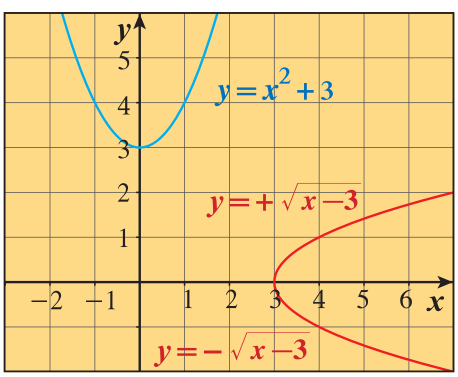
$y = \pm\sqrt{x - 3}$ موضح إلى اليسار،

وكما ترى فإن معكوس الدالة ربما لا يكون دالة.

ومعكوس القطع المكافئ الممثل بالدالة:

$y = x^2 + 3$، هو قطع مكافئ مفتوح لليمين،

وهو ليس دالة لأنه توجد قيمتان لـ y لبعض قيم x



مناقشة الحلول:

a ما معادلة المعكوس للدالة: $y = x^2 + 3$ عند $x \geq 0$؟ $y = \sqrt{x - 3}$

b هل المعكوس دالة؟ نعم

c ما معادلة المعكوس للدالة: $y = x^2 + 3$ عند $x \leq 0$؟ $y = -\sqrt{x - 3}$

d هل المعكوس دالة؟ نعم

حاول أن تحل

3 أوجد معكوس الدالة: $f(x) = (x+3)^2 - 4$. ناقش الحلول.

دوال الجذر التربيعي Square Root Functions

المعادلة $y = \sqrt{x}$ دالة جذر تربيعي.

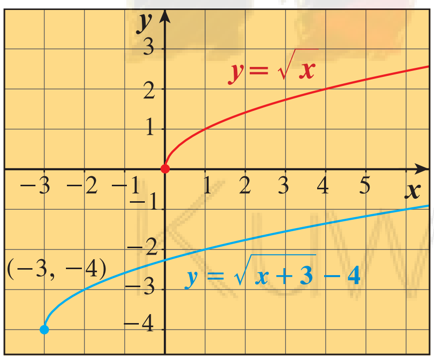
الشكل المرسوم يمثل بيان هذه الدالة ويبدأ من $(0, 0)$، حيث إن الدالة معرفة فقط بالنسبة إلى صفر وإلى القيم الموجبة لـ x. أي أنها معرّفة عندما $x \geq 0$.

فيكون مجالها $[0, \infty)$. والمدى هو $[0, \infty)$ لأن $y \geq 0$ وهي قيم الدالة عند المجال المعطى.

التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي $y = \sqrt{x - h} + k$

ينتج من إزاحة لبيان دالة المرجع $y = \sqrt{x}$ كالتالي:

- عندما تكون k, h موجبتين فإن الإزاحة تكون بعدد h من الوحدات يمينًا وعدد k من الوحدات إلى الأعلى.
- وعندما تكون h سالبة يزاح البيان إلى اليسار.
- وعندما تكون k سالبة يزاح البيان إلى الأسفل.



فمثلًا بيان الدالة: $y = \sqrt{x - (-3)} - 4$ أو $y = \sqrt{x + 3} - 4$ ينتج من إزاحة بيان الدالة $y = \sqrt{x}$ ثلاث وحدات إلى اليسار وأربع وحدات إلى الأسفل.

مثال (4)

ارسم الدالة: $y = \sqrt{x - 4} - 2$ ، وعيّن المجال والمدى للدالة.

الحل:

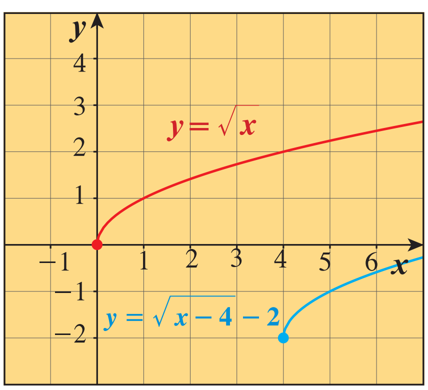
أزح بيان دالة المرجع: $y = \sqrt{x}$،

4 وحدات يمينًا و 2 وحدة إلى الأسفل.

يبدأ بيان الدالة $y = \sqrt{x - 4} - 2$ عند النقطة $(4, -2)$

ويبيّن الرسم البياني لها أن المجال $= [4, \infty)$

والمدى $= [-2, \infty)$



حاول أن تحل

4 **a** ارسم بيانيًا: $y = \sqrt{x - 2} + 1$

عيّن المجال والمدى للدالة.

b إذا تم إزاحة بيان الدالة: $y = \sqrt{x}$، 5 وحدات يمينًا 2 وحدة إلى الأسفل.

اكتب معادلة الدالة الناتجة عن الإزاحة.

يمكنك استخدام دالة الجذر التربيعي لتمثيل مواقف حياتية.

مثال (5) **الصلة بالواقع**

مقاس شاشة إعلانات هو طول قطر الشاشة، d، بالبوصة (in).

المعادلة: $d = \sqrt{2A}$، تقدر طول قطر شاشة إعلانات بالمساحة A.

لنفرض أن تاجرًا يريد شراء شاشة إعلانات مساحتها ضعف مساحة شاشته القديمة التي مساحتها $100\ \text{in}^2$، فما مقاس الشاشة التي يجب أن يشتريها؟

الحل:

مساحة الشاشة الجديدة $2 \times 100\ \text{in}^2$ أو $200\ \text{in}^2$.

الطريقة الأولى: استخدام التعويض

استخدام دالة الجذر التربيعي $d = \sqrt{2A}$

عوض بـ 200 عن A $= \sqrt{2(200)}$

$= \sqrt{400} = 20$

يجب أن يشتري شاشة 20 in

الطريقة الثانية: الربط بالتكنولوجيا (إثرائي)

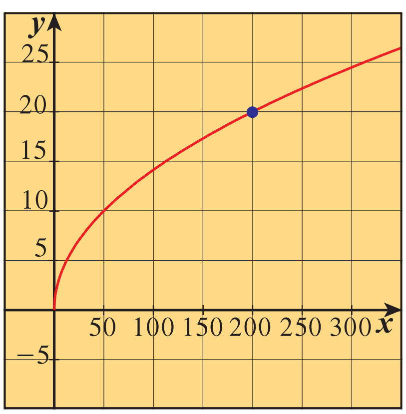
استخدام الآلة الحاسبة البيانية.

أدخل $y = \sqrt{2x}$.

اقرأ قيمة y عند $x = 200$

يجب أن يشتري شاشة 20 in

ملاحظة: $1\ \text{in} = 2.54\ \text{cm}$



حاول أن تحل

5 إذا كان لدى تاجر شاشة إعلانات قياسها 42 in (طول القطر 42 in).

فما هي مساحة الشاشة علمًا بأن المعادلة: $d = \sqrt{2A}$ تحدد العلاقة بين طول القطر d والمساحة A لشاشة الإعلانات؟

2-6

حل المتباينات

Solving Inequalities

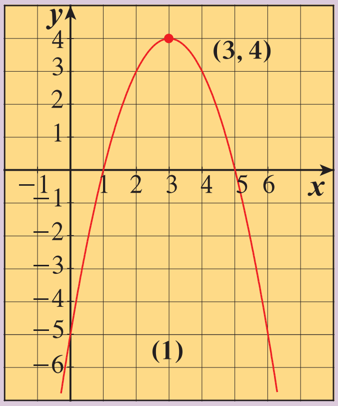
سوف تتعلم

- حل متباينات من الدرجة الثانية في متغير واحد.
- حل متباينات تتضمن حدوديات نسبية في متغير واحد.
- إيجاد مجال دالة جذرية.

المفردات والمصطلحات

- متباينة **Inequality**
- حدوديات نسبية **Rational Expressions**
- متباينة من الدرجة الثانية **Quadratic Inequality**

عمل تعاوني



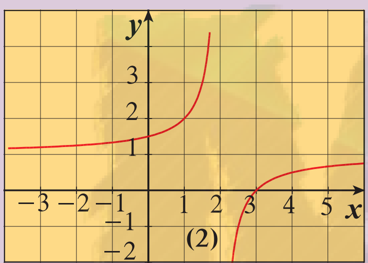
أولًا: يبيّن الرسم البياني المقابل (1) منحنى $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ ومن الرسم

أوجد:

a قيم x حيث $f(x) = 0$.

b قيم x حيث $f(x) > 0$.

c قيم x حيث $f(x) < 0$.



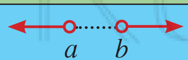
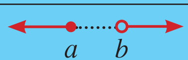
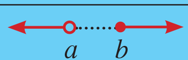
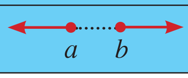
ثانيًا: يبيّن الرسم البياني المقابل (2) للدالة

$$f(x) = \frac{x-3}{x-2}$$

أجب عن الأسئلة **a**، **b**، **c**.

من العمل التعاوني السابق يمكننا أن نعبر عن اتحاد مجموعتي القيم $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$ بصورة أخرى وهي $\mathbb{R} / [1, 5]$.

يبيّن الجدول التالي كيفية كتابة اتحاد فترتين بصورة أخرى في بعض الحالات.

رمز الفترة	صورة أخرى لرمز الفترة	تمثيل الفترة على خط الأعداد
$(-\infty, a) \cup (b, \infty)$	$\mathbb{R} / [a, b]$	
$(-\infty, a] \cup (b, \infty)$	$\mathbb{R} / (a, b]$	
$(-\infty, a) \cup [b, \infty)$	$\mathbb{R} / [a, b)$	
$(-\infty, a] \cup [b, \infty)$	$\mathbb{R} / (a, b)$	

تذكر:

إذا كان $a \times b = 0$

فإن $a = 0$ أو $b = 0$

مثال (1)

أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^2 - x - 6 < 0$.

الحل:

المعادلة المناظرة $x^2 - x - 6 = 0$

نحلل $(x+2)(x-3) = 0$

$x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$

أو

$x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=3$

للبحث عن قيم x التي تحقق $(x+2)(x-3)<0$ نتبع التالي:

$x-3<0 \Longrightarrow x<3$	$x+2<0 \Longrightarrow x<-2$
$x-3>0 \Longrightarrow x>3$	$x+2>0 \Longrightarrow x>-2$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

يبيّن الجدول أن $(x+2)(x-3)<0$ لكل قيم x حيث $-2<x<3$.

مجموعة الحل $=(-2, 3)$.

حاول أن تحل

1 أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^2+4x+3 \leq 0$.

مثال (2)

أوجد مجموعة حل المتباينة: $-x^2+7x-10 \leq 0$

الحل:

$-x^2+7x-10 \leq 0$

اضرب في -1 $\quad x^2-7x+10 \geq 0$

المعادلة المناظرة $\quad x^2-7x+10=0$

حلل $\quad x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$

$x-2=0 \Longrightarrow x=2$

$x-5=0 \Longrightarrow x=5$

للبحث عن قيم x التي تحقق: $(x-2)(x-5) \geq 0$ نتبع التالي:

$x-5<0 \Longrightarrow x<5$	$x-2<0 \Longrightarrow x<2$
$x-5>0 \Longrightarrow x>5$	$x-2>0 \Longrightarrow x>2$

تذكر:

عند ضرب طرفي متباينة في عدد سالب نعكس علاقة الترتيب.

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)(x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

يبيّن الجدول أن $(x-2)(x-5) \geq 0$ لكل قيم x حيث $x \leq 2$ أو $x \geq 5$.

$\therefore$ مجموعة الحل $= (-\infty, 2] \cup [5, \infty)$

أو $\mathbb{R} / (2, 5)$

حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة قيم x التي تحقق المتباينة: $-2x^2 + 5x - 3 > 0$.

تذكر:

يمكنك ضرب طرفي المتباينة في (-1) للسهولة.

مثال (3) تطبيقات حياتية

صمم مهندس مخططاً لحديقة منزل على شكل مستطيل طول أحد بعديها x ومحيطها $20\ \text{m}$.

a ما المجال الواقعي للمتغير x؟

b إذا اعتبرنا f دالة مساحة هذا المستطيل، فعبر عنها بدلالة x .

c ما مجموعة حل المتباينة $f(x) < 24$ ؟

d ما مجموعة حل المتباينة $f(x) > 9$ ؟

الحل:

a

$$P = 2(L + W) = 20\ \text{m}$$

$$L + W = \frac{20}{2} = 10\ \text{m}$$

إذا اعتبرنا أحد البعدين يساوي x $\therefore$ البعد الآخر $= 10 - x$

$\therefore$ المجال الواقعي للمتغير هو:

$$0 < x < 10$$

$$x \in (0,\ 10)$$

b المساحة $=$ الطول $\times$ العرض

$$f(x) = L \times W$$

$$f(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$$

c $f(x) < 24$

$$-x^2 + 10x < 24 \Longrightarrow -x^2 + 10x - 24 < 0$$

المعادلة المناظرة

$-x^2+10x-24=0$

حلل

$(-x+4)(x-6)=0$

$x-6=0$ أو $-x+4=0$

$\therefore\ x=6 \quad \therefore\ x=4$

لايجاد قيم x التي تحقق: $(-x+4)(x-6)<0$ نتبع التالي:

$x-6<0 \Longrightarrow x<6$	$-x+4<0 \Longrightarrow x>4$
$x-6>0 \Longrightarrow x>6$	$-x+4>0 \Longrightarrow x<4$

نكوّن الجدول مع مراعاة $x \in (0,\ 10)$

x	0		4		6		10
$-x+4$		+	0	−		−	
$x-6$		−		−	0	+	
$(-x+4)(x-6)$		−	0	+	0	−	

من الجدول: مجموعة الحل $=(0,4)\cup(6,10)$

d $f(x)>9$

$-x^2+10x>9 \Longrightarrow -x^2+10x-9>0$

المعادلة المناظرة

$-x^2+10x-9=0$

حلل

$(-x+1)(x-9)=0$

$x-9=0$ أو $-x+1=0$

$\therefore\ x=1$

$\therefore\ x=9$

لإيجاد قيم x التي تحقق: $(-x+1)(x-9)>0$ نتبع التالي:

$x-9<0 \Longrightarrow x<9$	$-x+1<0 \Longrightarrow x>1$
$x-9>0 \Longrightarrow x>9$	$-x+1>0 \Longrightarrow x<1$

نكوّن الجدول: مع مراعاة $x \in (0,\ 10)$

x	0		1		9		10
$-x+1$		+	0	−		−	
$x-9$		−		−	0	+	
$(-x+1)(x-9)$		−	0	+	0	−	

من الجدول: مجموعة الحل $=(1,9)$.

حاول أن تحل

3 إذا كان محيط مستطيل يساوي 16 m وكان x طول أحد بعديه.

a ما المجال الواقعي للمتغير x؟

b إذا اعتبرنا f دالة مساحة المستطيل فعبر عنها بدلالة x

c ما مجموعة حل المتباينة $f(x) > 7$ ؟

مثال (4) تطبيق على مجال الدالة

أوجد مجال كل دالة مما يلي:

a $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

b $g(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$

الحل:

a $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

مجال الدالة f هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط $x^2-4 \geqslant 0$

نوجد المعادلة المناظرة $x^2-4=0$

حل $(x-2)(x+2)=0$

$x=2$ أو $x=-2$

لايجاد قيم x التي تحقق: $(x-2)(x+2) \geqslant 0$ نتبع التالي:

$x+2<0 \Longrightarrow x<-2$ | $x-2<0 \Longrightarrow x<2$

$x+2>0 \Longrightarrow x>-2$ | $x-2>0 \Longrightarrow x>2$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

مجال الدالة f هو : $(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$

$= \mathbb{R} / (-2, 2)$

b $g(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$

الحل:

مجال الدالة g هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط $-x^2+4x-3 \geqslant 0$

المعادلة المناظرة $-x^2+4x-3=0$

تحليل إلى عوامل $(-x+1)(x-3)=0$

الأصفار $x=1$ أو $x=3$

لايجاد قيم x التي تحقق: $(-x+1)(x-3) \geqslant 0$ نتبع التالي:

$x-3<0 \Longrightarrow x<3$ | $-x+1<0 \Longrightarrow x>1$

$x-3>0 \Longrightarrow x>3$ | $-x+1>0 \Longrightarrow x<1$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-x+1)(x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

مجال الدالة g هو : $[1,3]$

حاول أن تحل

4 a هل يمكنك إيجاد مجال الدالة $y=\sqrt{x^2-4}$ بطريقة أخرى.

b أوجد مجال كل دالة مما يلي:

1 $h(x)=\sqrt{x^2-x}$

2 $q(x)=\sqrt{9-x^2}$

تذكر:

الحدوديات النسبية غير معرّفة عند أصفار المقام.

مثال (5)

أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{3x+7}{x+2} \geq 2$

الحل:

$$\frac{3x+7}{x+2} \geq 2$$

$$\frac{3x+7}{x+2} - 2 \geq 0$$

مقام مشترك $\qquad \frac{3x+7-2x-4}{x+2} \geq 0$

$$\frac{x+3}{x+2} \geq 0$$

أصفار البسط: $x+3=0 \Longrightarrow x=-3$

أصفار المقام: $x+2=0 \Longrightarrow x=-2$

لإيجاد قيم x التي تحقق: $\frac{x+3}{x+2} \geq 0$ نتبع التالي:

$x+2<0 \Longrightarrow x<-2$
$x+2>0 \Longrightarrow x>-2$

$x+3<0 \Longrightarrow x<-3$
$x+3>0 \Longrightarrow x>-3$

نكون الجدول:

x	$-\infty$	-3		-2	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+3}{x+2}$	$+$	0	$-$	غير معرفة	$+$

مجموعة الحل: $(-\infty,-3] \cup (-2, \infty)$

$$= \mathbb{R} / (-3,-2]$$

حاول أن تحل

5 أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{3x-5}{-2x+3} \geq 0$

مثال (6)

أوجد مجموعة حل المتباينة: $\dfrac{x^2-5x+3}{x+4} < 3$

الحل:

$$\frac{x^2-5x+3}{x+4} < 3$$

$$\frac{x^2-5x+3}{x+4} - 3 < 0$$

مقام مشترك $\qquad \dfrac{x^2-5x+3-3x-12}{x+4} < 0$

التبسيط $\qquad \dfrac{x^2-8x-9}{x+4} < 0$

حلل البسط $\qquad \dfrac{(x+1)(x-9)}{(x+4)} < 0$

أصفار البسط: $\qquad (x+1)(x-9)=0$

$x=-1$ أو $x=9$

أصفار المقام: $\qquad x+4=0 \Longrightarrow x=-4$

لإيجاد قيم x التي تحقق: $\dfrac{(x+1)(x-9)}{x+4} < 0$ نتبع التالي:

$x+1<0 \Longrightarrow x<-1$	$x-9<0 \Longrightarrow x<9$	$x+4<0 \Longrightarrow x<-4$
$x+1>0 \Longrightarrow x>-1$	$x-9>0 \Longrightarrow x>9$	$x+4>0 \Longrightarrow x>-4$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		-4		-1		9		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-9$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{(x-1)(x-9)}{x+4}$		$-$	غير معرفة	$+$	0	$-$	0	$+$	

مجموعة حل المتباينة $= (-\infty, -4) \cup (-1, 9)$

حاول أن تحل

6 أوجد مجموعة حل المتباينة: $\dfrac{x^2+5x}{x+3} > -2$.

تذكر:

من المهم جدًّا تحديد أصفار المقام قبل الاختصار.

مثال (7)

أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{x^2-5x+6}{x-3} > 0$.

الحل:

تحليل البسط: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

تكتب المتباينة: $\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)} > 0$

قبل التبسيط نحدد أصفار المقام: $x-3=0 \Longrightarrow x=3$

نبسط المتباينة: $\frac{(x-2)\cancel{(x-3)}^{1}}{\cancel{(x-3)}_{1}} > 0 \qquad x \neq 3$

$x-2>0 \Longrightarrow x>2$

القيمة $x=3$ غير مقبولة لأنها صفر المقام

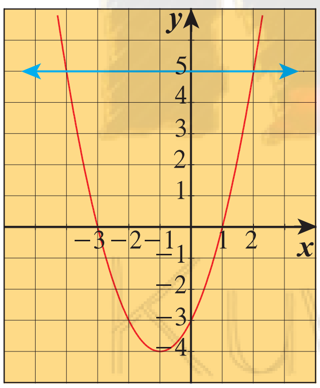
مجموعة الحل $= (2,\infty)/\{3\}$

$=(2,3)\cup(3,\infty)$

حاول أن تحل

7 أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2-49}{x+7} \leq 0$.

مثال (8) تطبيق على الرسم البياني



يبيّن الرسم البياني منحنى الدالة: $f(x)=x^2+2x-3$ والمستقيم $y=5$

a ادرس بيانيًّا المتباينة $f(x) < y$.

b ادرس بيانيًّا المتباينة $f(x) > y$.

c تحقق حسابيًّا من النتائج التي حصلت عليها في a و b.

الحل:

a في الشكل يقطع المستقيم $y=5$ منحنى الدالة f في النقطتين $(2,5)$، $(-4,5)$

نلاحظ أن $f(x) < 5 \qquad \forall\ x \in (-4,\ 2)$

b نلاحظ أن $f(x) > 5 \qquad \forall\ x \in (-\infty,\ -4)\cup(2,\ \infty)$

c للتحقق حسابيًّا:

نضع: $f(x) < 5$

$x^2+2x-3 < 5$

$x^2+2x-8 < 0$

المعادلة المناظرة $x^2+2x-8=0$

$(x-2)(x+4)=0$

$x=2$ أو $x=-4$

لإيجاد قيم x التي تحقق $(x-2)(x+4) < 0$ نتبع التالي:

$x + 4 < 0 \Longrightarrow x < -4$
$x + 4 > 0 \Longrightarrow x > -4$

$x - 2 < 0 \Longrightarrow x < 2$
$x - 2 > 0 \Longrightarrow x > 2$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)(x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

من الجدول نستنتج:

$f(x) < 5 \quad \forall x \in (-4, 2)$

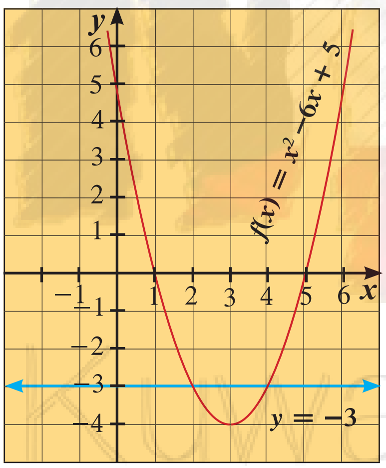
$f(x) > 5 \quad \forall x \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$

حاول أن تحل

8 يبيّن الرسم البياني منحنى الدالة:

$f(x) = x^2 - 6x + 5$ والمستقيم $y = -3$.

ادرس بيانيًّا: $f(x) \geq y \quad , \quad f(x) < y \quad , \quad f(x) = y$



المرشد لحل المسائل

المسافة بين المدينة A والمدينة B على الطريق السريع هي 300 km قاد خالد سيارته من المدينة A باتجاه المدينة B بمعدل سرعة x km/h، وفي طريق العودة من المدينة B إلى المدينة A، كان معدل سرعته $(x - 20)$ km/h

استغرقت هذه الرحلة 5 h 30 min

أوجد معدل سرعة السيارة ذهابًا وإيابًا.

كيف يمكنني حل هذه المسألة؟

أنا أعرف أن المسافة = الزمن × معدل السرعة.

لدي معدل السرعة x في الذهاب، ثم $x - 20$ في العودة.

أنا أعرف أن مجموع الزمن المستغرق هو: 5 h 30 min ويمكن تحويلها إلى 5.5

أنا أعرف المسافة بين المدينتين 300 km باستخدام القاعدة اكتب:

الزمن = $\frac{\text{المسافة}}{\text{معدل السرعة}}$

$$\frac{300}{x} + \frac{300}{x-20} = 5.5$$

المقام المشترك

$$5.5x^2 - 710x + 6\,000 = 0$$

بالتبسيط

$$1.1x^2 - 142x + 1\,200 = 0$$

أحلل المعادلة التربيعية إلى عوامل أولية:

بالقسمة على 1.1

$$x^2 - \frac{142}{1.1}x + \frac{1\,200}{1.1} = 0$$

المربع الكامل

$$\left(x - \frac{71}{1.1} - \frac{61}{1.1}\right)^2 - \frac{3\,721}{1.21} = 0$$

التحليل

$$\left(x - \frac{71}{1.1} - \frac{61}{1.1}\right)\left(x - \frac{71}{1.1} + \frac{61}{1.1}\right) = 0$$

ومنه أحصل على قيمة مقبولة $x = 120$

أي أن معدل سرعة خالد في الذهاب هو 120 km/h، ومعدل سرعته في العودة 100 km/h

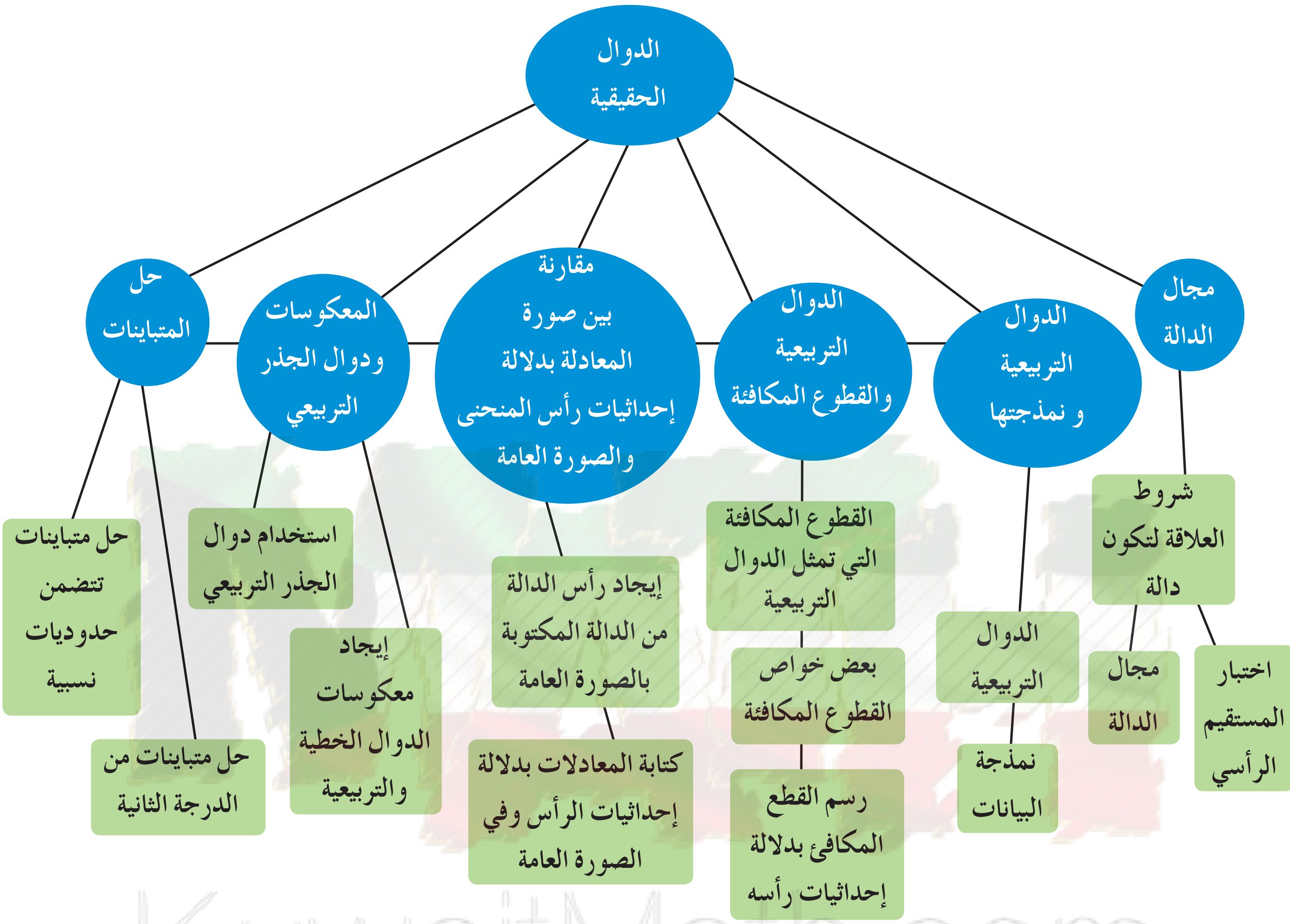
مسائل إضافية

1. كم سيكون معدل سرعة السيارة إذا أراد خالد أن تكون مدة الرحلة المستغرقة 7 h 30 min؟
2. يبيع أحد المحلات الحواسيب، وقد لاحظ أن ربحه يمكن نمذجته بالمعادلة:

   $f(x) = -x^2 + 250x - 2\,400$، حيث x ثمن الحاسوب الواحد بالدينار الكويتي.

   a. إذا باع الحاسوب الواحد بسعر 100 دينار، فما هو ربحه؟
   b. إذا أراد البائع تحقيق أكبر ربح، فبكم سوف يبيع الحاسوب الواحد؟
   c. ما قيمة أكبر ربح؟

مخطط تنظيمي للوحدة الثانية



ملخص

- تكون العلاقة دالة إذا كان كل عنصر (عدد) في المجال مرتبطًا بعنصر (عدد) واحد فقط من المدى.
- كل دالة التي مجالها ومجالها المقابل مجموعتان جزئيتان من الأعداد الحقيقية تسمى دالة حقيقية.
- تكتب الدالة التربيعية على الصورة: $f(x) = ax^2 + bx + c\,,\quad a, b \in \mathbb{R}\,,\; a \neq 0$
- يمكن كتابة بعض البيانات على الصورة الخطية: $y = ax + b$ أو على الصورة التربيعية.
- مجال الدالة هو الجزء من الأعداد الحقيقية أو كل الأعداد الحقيقية حيث يوجد المتغير x لتكون $f(x)$ معرّفة.
- المدى للدالة $f(x)$ هو الجزء من الأعداد الحقيقية أو كل الأعداد الحقيقية حيث $f(x)$ موجودة.
- القيمة الصغرى للدالة التربيعية هي أصغر قيمة للدالة $f(x)$ على محور الصادات.
- القيمة العظمى للدالة التربيعية هي أكبر قيمة للدالة $f(x)$ على محور الصادات.
- يمكن رسم القطع المكافئ إذا كان على الصورة: $f(x) = a(x - h)^2 + k$، حيث (h, k) إحداثيات الرأس.
- يمكن إيجاد الصورة العامة $f(x) = ax^2 + bx + c$ من الصورة $f(x) = a(x - h)^2 + k$ وبالعكس أيضًا.
- يمكن إيجاد معكوس الدوال الخطية والتربيعية بتبديل x , y.
- لإيجاد مجموعة حلول متباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد فإننا نحللها إلى عوامل أولية ونستخدم الجدول.
- لإيجاد مجموعة حلول متباينة من حدوديات نسبية فإننا نستخدم الجدول.