الوحدة الثامنة

حساب المثلثات

Trigonometry

مشروع الوحدة: تغير درجات الحرارة

1 **مقدمة المشروع:** تتغيّر درجات الحرارة خلال أشهر السنة وعادة ما تكون متقاربة من سنة إلى أخرى (قبل تأثير الاحتباس الحراري). في بعض البلدان يكون التغيّر واضحًا ومداه كبير وتكون الفصول الأربعة متمايزة.

2 **الهدف:** وضع تمثيل بياني لدالة جيبية تمثل تغيّر درجات الحرارة خلال أشهر السنة في منطقة ما ومقارنتها بتغيّر درجات الحرارة في دولة الكويت.

3 **اللوازم:** ورق رسم بياني، آلة حاسبة مبرمجة، حاسوب.

4 **أسئلة حول التطبيق:**

يبيّن الجدول المقابل معدل درجات الحرارة المسجلة في إحدى المناطق خلال أشهر السنة.

الشهر	معدل درجة الحرارة
يناير	11
فبراير	13
مارس	17
أبريل	19
مايو	25
يونيو	30
يوليو	32
أغسطس	32
سبتمبر	29
أكتوبر	22
نوفمبر	15
ديسمبر	11

a على ورقة رسم بياني ضع مخطط انتشار للبيانات. يبيّن محور السينات أشهر السنة (يناير $= 1$، فبراير $= 2$، ...) محور الصادات معدل درجات الحرارة.

b يمكن تمثيل البيانات بدالة جيبية على الشكل: $y = a\sin(wx - \phi) + b$،

حيث: a: السعة $= \dfrac{\text{أعلى درجة حرارة} - \text{أدنى درجة حرارة}}{2}$

b: الإزاحة الرأسية $= \dfrac{\text{أعلى درجة حرارة} + \text{أدنى درجة حرارة}}{2}$

w: الزمن الدوري $= \dfrac{2\pi}{\text{عدد الأشهر}}$

$\dfrac{\phi}{\omega}$: الإزاحة الأفقية لإيجاد قيمة ϕ يمكن استخدام الزوج المرتب $(1, 11)$ الذي يمثّل معدل درجة الحرارة في شهر يناير والتعويض في المعادلة.

c ارسم بيان الدالة التي حصلت عليها على الورقة حيث مخطط الانتشار.

d ابحث في المراجع عن درجات الحرارة المسجّلة خلال أشهر إحدى السنوات في دولة الكويت أوجد الدالة الجيبيّة المناظرة ومثّل بيانها.

5 **التقرير:** ضع تقريرًا مفصّلًا يبيّن مراحل عملك على المشروع. ضمّن تقريرك التمثيلات البيانية المطلوبة. اكتب فقرة لا تتعدى 25 كلمة تقارن بين تغيّر درجات الحرارة في الكويت وفي الجدول.

دروس الوحدة

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)	التحويلات الهندسية للدوال الجيبية	قانون الجيب	قانون جيب التمام	مساحة المثلث
8-1	8-2	8-3	8-4	8-5

الوحدة الثامنة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت تمثيل بعض الدوال بيانيًّا.
- تعلمت إيجاد معادلة الدائرة.
- تعلمت الأنماط والدوال الدورية.
- تعلمت قياس الزاوية بالدرجات وبالراديان.

ماذا سوف تتعلم؟

- التمثيل البياني للدوال: الجيب، جيب التمام، الظل.
- التحويلات على الدوال الجيبية.
- خصائص الدوال الجيبية.
- قانون الجيب واستخدامه في حل مسائل متنوعة.
- استخدام قانون جيب التمام في حل المثلث.
- إيجاد مساحة المثلث بدلالة قياسات زواياه وأطوال أضلاعه.

المصطلحات الأساسية

دالة الجيب – دالة جيب التمام – قيمة عظمى – قيمة صغرى – التمدد الرأسي – الانكماش الرأسي – التمدد الأفقي – الانكماش الأفقي – سعة الدالة – دالة زوجية – دالة فردية – دورة الدالة – قانون الجيب – قانون جيب التمام – قاعدة هيرون.

أضف إلى معلوماتك

علم المثلثات Trigonometry مأخوذة من اللغة اليونانية القديمة.

Trigone: مثلث، Metron: قياس.

يعتبر البابليون أول من درسوا علم المثلثات من خلال عملهم في علم الفلك ومحاولتهم قياس المسافات بين الكواكب ومن هنا يأتي النظام الستيني في قياس الزوايا $(1^{\circ} = 60' \; , \; 1' = 60'')$.

طوّر العلماء المسلمون علم المثلثات، نذكر منهم الخوارزمي وأبو الوفا، وقد استخدموا جداول مثلثية للجيب والظل على فترات 0.25° وبدقة تصل إلى جزء من مئة من المليون.

8–1

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)

Graphs of Trigonometric Functions (Sine, Cosine and Tangent)

سوف تتعلم

- التمثيل البياني لدالة الجيب.
- التمثيل البياني لدالة جيب التمام.
- التمثيل البياني لدالة الظل.

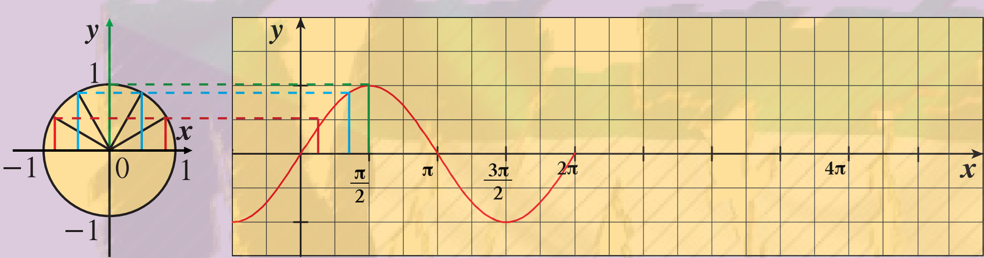
المفردات والمصطلحات:

- دوال جيبية Sinusoidal Functions
- دالة الجيب Sine Function
- دالة جيب التمام Cosine Function
- دالة الظل Tangent Function
- دالة زوجية Even Function
- دالة فردية Odd Function
- محور تناظر Axis of Symmetry
- مركز تناظر Center of Symmetry

دعنا نفكر ونتناقش

يمكن استخدام دائرة الوحدة لإيجاد جيب وجيب تمام الزاوية الموجهة التي قياسها θ والتي في وضع قياسي، حيث الضلع النهائي للزاوية الموجهة يقطع دائرة الوحدة في نقطة مثلثية إحداثيها الصادي يمثل جيب الزاوية وإحداثيها السيني يمثل جيب تمام الزاوية.

في الشكل لاحظ أن دالة الجيب $y = \sin\theta$ تربط القياس θ بالإحداثي الصادي للنقطة المثلثية. وينتج منحنى دالة الجيب:



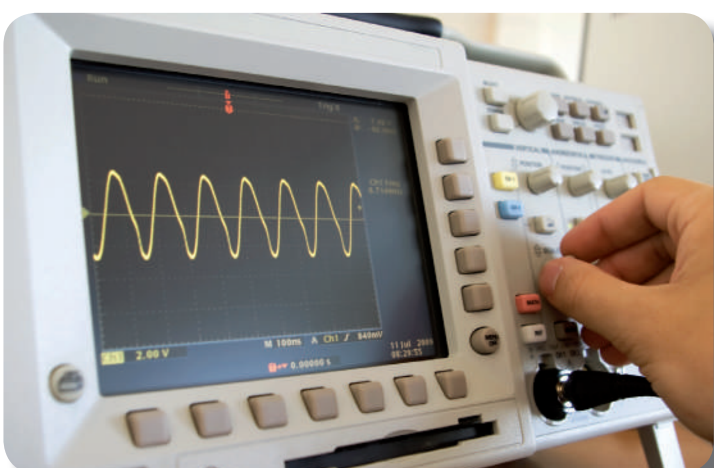
1. لأي قيمة لِـ θ يصل منحنى الدالة إلى القيمة العظمى 1؟
2. أكمل التمثيل البياني ليشمل زوايا قياساتها بين $2\pi , 4\pi$.
   هل يصل المنحنى إلى القيمة العظمى 1 مرة ثانية؟ ولأي قيمة لِـ θ؟
3. هل دالة الجيب دورية (أي أنها تكرر قيمها بعد كل فترة محددة)؟ اشرح.

الدوال الجيبية Sinusoidal Functions

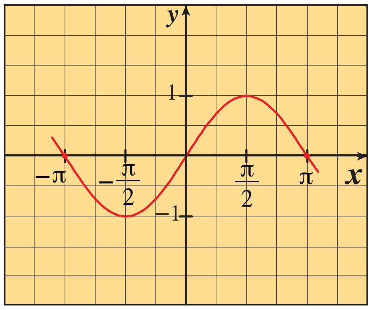
تسمّى الدالة على الصورة $y = a\sin bx$ **دالة الجيب** والدالة على الصورة $y = a\cos bx$ **دالة جيب التمام** حيث $a \neq 0 \ , \ b \neq 0$ وهما دالتان جيبيتان وكل منهما دورية.

معلومة رياضية:

$\mathbb{R} = (-\infty , \infty)$

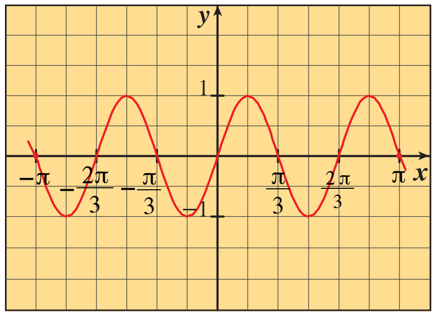


تمثل الأشكال التالية بيانات بعض دوال الجيب:



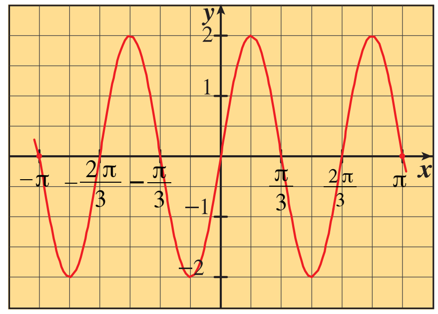
$y = \sin x$

شكل (1)



$y = \sin 3x$

شكل (2)



$y = 2\sin 3x$

شكل (3)

1. تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية.
2. $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0, 2\pi]$
3. $\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.

تدريب (1)

انظر إلى الأشكال السابقة وأكمل الجدول.

بيان الدالة	سعة الدالة	دورة الدالة
شكل (1)		
شكل (2)		
شكل (3)		

وبالمثل يمكننا إيجاد **السعة والدورة** لدالة جيب التمام على الصورة $y = a\cos bx$

مثال (1)

أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

(a) $y = 2\cos x$

(b) $y = -5\cos\frac{x}{3}$

الحل:

(a) $y = 2\cos x$ هي دالة على الصورة

$y = a\cos bx$ فيكون: $b = 1\ ,\ a = 2$

$\therefore$ سعة الدالة: $|a| = 2$

دورة الدالة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

(b) $y = -5\cos\frac{x}{3}$ هي دالة على الصورة

$y = a\cos bx$ فيكون: $b = \frac{1}{3}\ ,\ a = -5$

$\therefore$ سعة الدالة: $|a| = |-5| = 5$

دورة الدالة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$

حاول أن تحل

1 أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

a $y = -2\cos 5x$

b $y = \frac{1}{2}\cos(-x)$

مثال (2)

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\sin bx$ إذا كانت:

a الدورة هي $\frac{\pi}{2}$ ، $a = 3$

b الدورة هي 2π ، $a = -\frac{1}{2}$

c الدورة هي 3 ، $a = 1.5$

الحل:

a الدورة هي $\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$$

$$|b| = 4 \Leftrightarrow b = 4 \;,\; b = -4$$

$$\because a = 3$$

$\therefore$ معادلة الدالة هي: $y = 3\sin(-4x)$ أو $y = 3\sin 4x$

b الدورة هي 2π

$$\therefore \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi$$

$$|b| = 1 \Leftrightarrow b = 1 \;,\; b = -1$$

$$\because a = -\frac{1}{2}$$

$\therefore$ معادلة الدالة هي: $y = -\frac{1}{2}\sin(-x)$ أو $y = -\frac{1}{2}\sin x$

c الدورة هي 3

$$\therefore \frac{2\pi}{|b|} = 3$$

$$|b| = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow b = \frac{2\pi}{3} \;,\; b = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\because a = 1.5$$

$\therefore$ معادلة الدالة هي: $y = 1.5\sin\left(\frac{-2\pi}{3}x\right)$ أو $y = 1.5\sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$

حاول أن تحل

2 اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos bx$ إذا كانت:

a الدورة هي $\frac{\pi}{3}$ ، $a = -2$

b الدورة هي π ، $a = 0.25$

c الدورة هي 2 ، $a = 1$

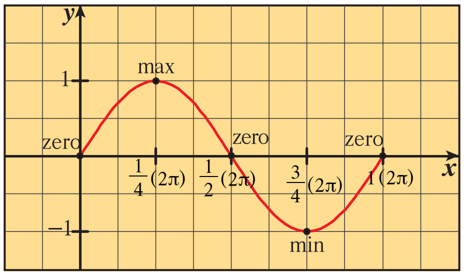
التمثيل البياني للدوال المثلثية Graph of Trigonometric Functions

أوّلًا: دالة الجيب The Sine Function

$y=\sin x$ هي دالة مثلثية مجالها $\mathbb{R}$ ومداها $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

للحصول على التمثيل البياني لِـ $y=\sin x$ في دورة واحدة، تقسم الدورة الواحدة إلى أرباع، ثم نكوّن الجدول في الفترة $[0,2\pi]$ كالتالي:

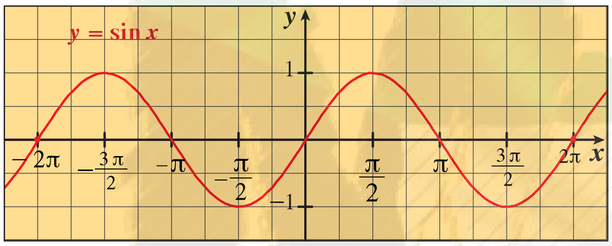
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0



وحيث إنها دالة دورية، دورتها 2π فإنها تكرر قيمها ومن ذلك يمكن رسم بيان الدالة: $f(x)=\sin x\ ,\ x\in\mathbb{R}$

يمكنك التحقق باستخدام آلة حاسبة.

من بيان دالة الجيب نلاحظ:



1. لأي عدد صحيح n فإن $\sin(n\pi)=0$
2. لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x)=\sin x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$
3. دالة الجيب دالة فردية لأنّ: $\sin(-x)=-\sin x\ ,\forall x\in\mathbb{R}$
4. منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل.
5. سعة الدالة هي: $\frac{\max f-\min f}{2}$

مثال (3)

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a) $y=3\sin 2x$ b) $y=-2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\ ,\ -4\pi\le x\le 4\pi$

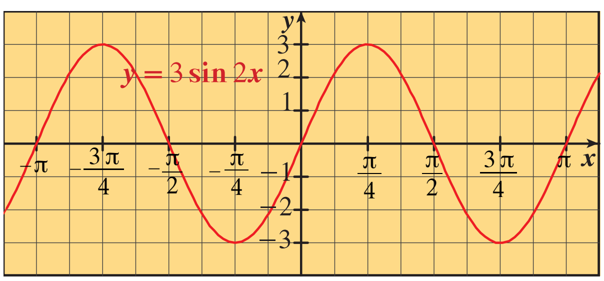
الحل:

a) $y=3\sin 2x$ هي دالة دورية مجالها $\mathbb{R}$.

السعة: $|a|=|3|=3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $=\frac{\pi}{4}$



x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0
$y=3\sin 2x$	0	3	0	-3	0

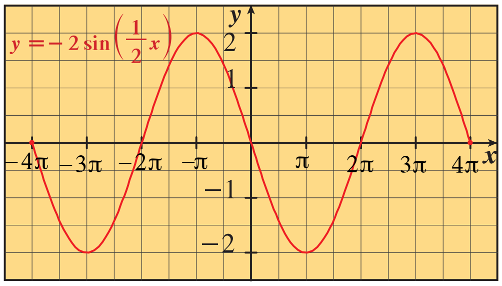
b $y = -2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ هي دالة دورية.

السعة: $|a| = |-2| = 2$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \pi$

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{1}{2}x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$	0	1	0	-1	0
$y = -2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$	0	-2	0	2	0



وحيث أن منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل يتم كذلك رسم المنحنى على الفترة $\left[-4\pi, 0\right)$

حاول أن تحل

3 أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = \frac{1}{2}\sin 4x$

b $y = -4\sin x \ , \ x \in [-\pi \ , \ 2\pi]$

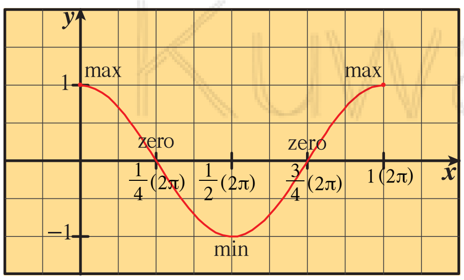
ثانيًا: دالة جيب التمام The Cosine Function

$y = \cos x$ هي دالة مثلثية مجالها هو أيضًا $\mathbb{R}$ ومداها هو $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

ونستطيع الحصول على التمثيل البياني للدالة $y = \cos x$ على مجالها عن طريق رسمها على الفترة $[0, 2\pi]$ تمامًا مثلما فعلنا في دالة الجيب.

وتكرر نفسها ونحصل على البيان التالي:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1



يمكنك التحقق باستخدام الآلة الحاسبة.

من بيان دالة جيب التمام نلاحظ أن:

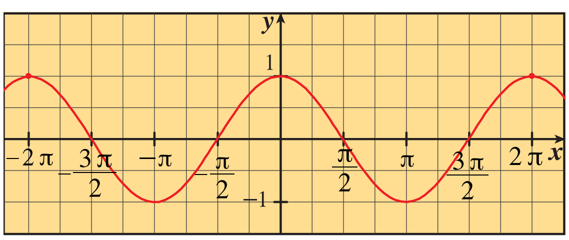
1 لأي عدد صحيح n فإن $\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$

2 لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x) = \cos x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x = 2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x = \pi + 2n\pi$

3 دالة جيب التمام دالة زوجية لأن: $\cos(-x) = \cos x \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$

4 محور الصادات هو خط تناظر لمنحنى الدالة.

5 سعة الدالة هي: $\frac{\max f - \min f}{2}$



مثال (4)

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي، ثم ارسم بيانها.

a $y = 2\cos 4x$

b $y = -5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)\ ,\ x \in [-3\pi\ ,\ 3\pi]$

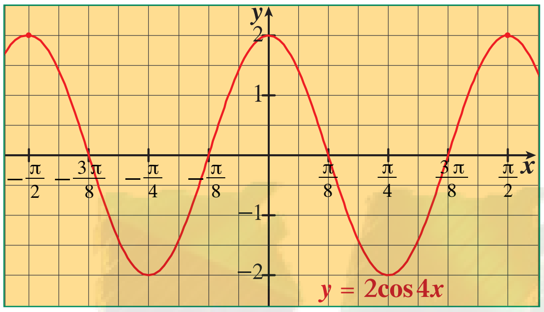
الحل:

a الدالة $y = 2\cos4x$ هي دالة دورية.

السعة: $|a| = |2| = 2$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{8}$



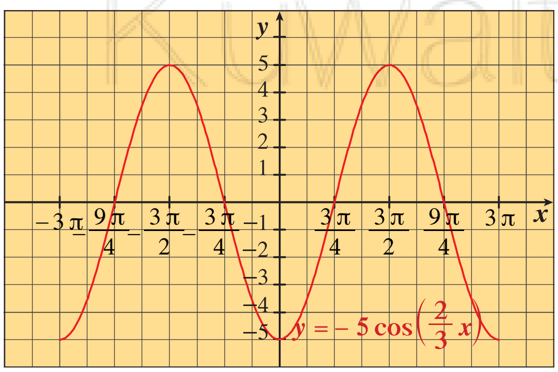
x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$4x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos 4x$	1	0	-1	0	1
$2\cos4x$	2	0	-2	0	2

b الدالة $y = -5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$ هي دالة دورية.

السعة: $|a| = |-5| = 5$

الدورة: $\frac{2\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|} = \frac{3}{2} \times 2\pi = 3\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{3\pi}{4}$



x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4}$	3π
$\frac{2x}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos\left(\frac{2x}{3}\right)$	1	0	-1	0	1
$y = -5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$	-5	0	5	0	-5

حاول أن تحل

4 أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها.

a $y = 3\cos 2x$

b $y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)\ ,\ 0 \le x \le 2\pi$

ثالثًا: دالة الظل Tangent Function

هي الدالة المثلثية على الصورة $y = \tan x$ وتكتب:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \ : \ \cos x \neq 0$$

مجالها: $D = \mathbb{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi \ , \ n \in \mathbb{Z}\right\}$

ومداها: $\mathbb{R}$

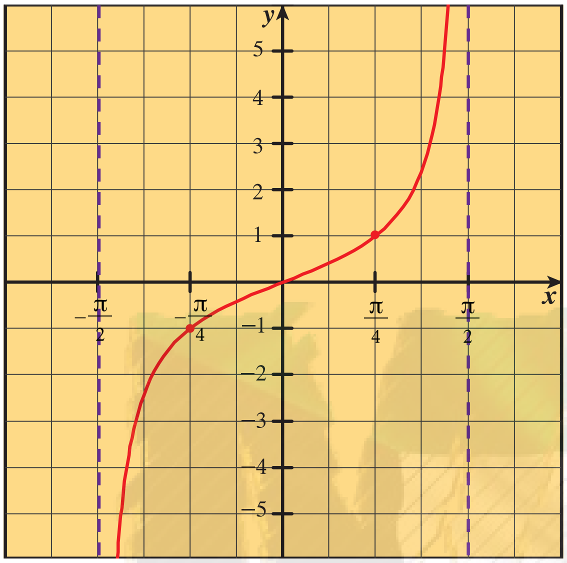
وهي دالة دورية ذات دورة π

وللحصول على التمثيل البياني لـ: $y = \tan x$

في دورة واحدة $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

نقسم الدورة إلى أرباع كما هو في الجدول التالي:

x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف

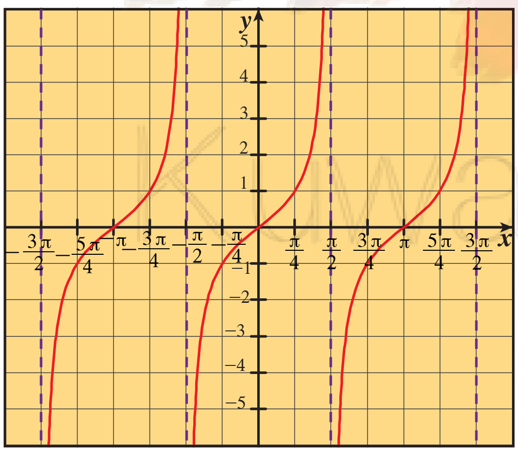


وحيث إنها دالة دورية دورتها π فإنها تكرر قيمتها.

ومن ذلك يمكننا رسم الدالة $y = \tan x$ على مجالها.

من بيان دالة الظل نلاحظ أن دالة الظل:

1. ليس لها سعة.
2. لأي عدد صحيح n فإن $\tan(n\pi) = 0$
3. لأي عدد صحيح n فإن $\tan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ غير معرف.
   وتسمى المستقيمات $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ محاذيات رأسية لبيان الدالة $y = \tan x$
4. دالة فردية لأن: $\tan(-x) = -\tan x \ , \ \forall x \in D$
5. منحناها متناظر حول نقطة الأصل.



وبصفة عامة: الدالة $y = a\tan bx$،

دورتها: $\frac{\pi}{|b|}$ أي في الفترة $\left(\frac{-\pi}{2b} \ , \ \frac{\pi}{2b}\right)$ وتكرر منحناها على مجالها.

مثال (5)

أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها.

a $y = \tan 2x \ , \ x \in \left(\frac{-\pi}{4} \ , \ \frac{3\pi}{4}\right)$

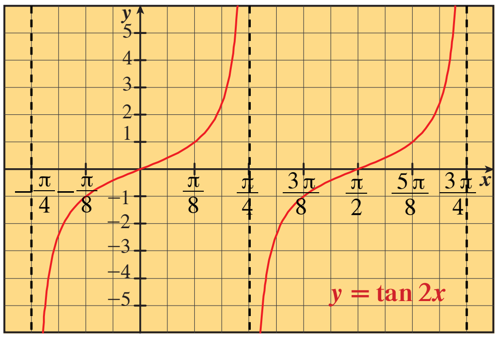
b $y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$

الحل:

a الدالة $y = \tan 2x$ هي دالة دورية.

الدورة: $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ ربع الدورة $= \dfrac{\pi}{8}$

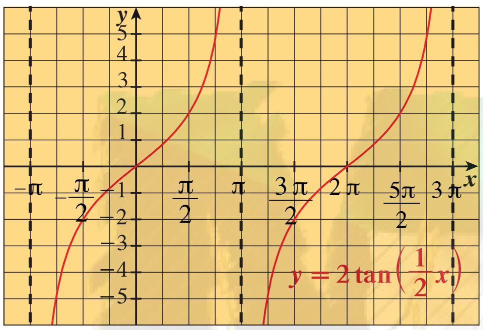


x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
$2x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \tan 2x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف

b الدالة $y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$ هي دالة دورية.

الدورة: $\dfrac{\pi}{|b|} = \dfrac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \dfrac{\pi}{2}$



x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\frac{1}{2}x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف
$y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$	غير معرف	-2	0	2	غير معرف

حاول أن تحل

5 أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = -\tan x$

b $y = \frac{1}{2}\tan x$

خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in \mathbb{Z}$

$\tan x$	$\cos x$	$\sin x$	الخاصية
π	2π	2π	الدورة
$\mathbb{R} - \left\{x, x = \frac{\pi}{2} + n\pi\right\}$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	المجال
$(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	المدى
$x = n\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$	$x = n\pi$	الأصفار
فردية	زوجية	فردية	زوجية أو فردية

8-2

التحويلات الهندسية للدوال الجيبية

Geometric Transformations of Sinusoid Functions

سوف تتعلم

- التحويلات على الدوال الجيبية.
- خصائص الدوال الجيبية.

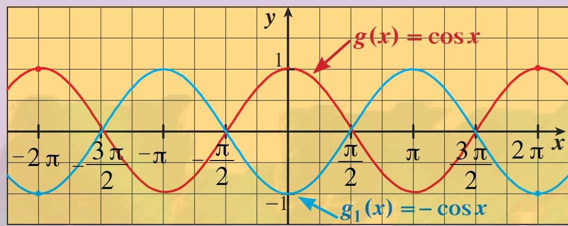
المفردات والمصطلحات:

- تحويلات هندسية Geometric Transformations
- تمدد Stretch
- انكماش Shrink
- سعة Amplitude
- دورة Period
- إزاحة Translation
- انعكاس Reflection
- إزاحة أفقية Horizontal Translation

دعنا نفكر ونتناقش

تعلمت أن الدالتان الجيبيّتان: $f(x) = \sin x$ ، $g(x) = \cos x$ هما دالتان دوريتان وأن دورة كل دالة منهما هي: 2π

أوّلًا: يبيّن الشكل (1) التمثيل البياني للدالتين g ، g_1 حيث $g(x) = \cos x$ ، $g_1(x) = -\cos x$



شكل (1)

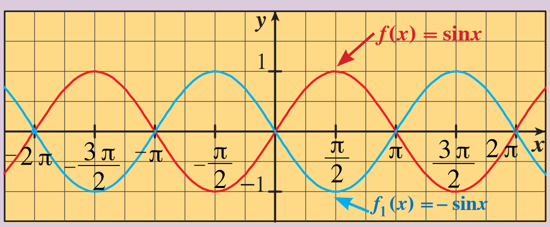
أكمل:

a التمثيل البياني للدالة g_2 حيث $g_2(x) = \cos(-x)$ ينطبق على التمثيل البياني للدالة ....

b التمثيل البياني للدالة g_1 حيث $g_1(x) = -\cos x$ هو .... للتمثيل البياني للدالة g حيث $g(x) = \cos x$ في المحور ....

c التمثيل البياني للدالة g_2 حيث $g_2(x) = \cos(-x)$ هو .... للتمثيل البياني للدالة g حيث $g(x) = \cos x$ في المحور ....

ثانيًا: يبيّن الشكل (2) التمثيل البياني للدالتين f ، f_1 حيث $f(x) = \sin x$ ، $f_1(x) = -\sin x$



شكل (2)

a التمثيل البياني للدالة f_2 حيث $f_2(x) = \sin(-x)$ ينطبق على التمثيل البياني للدالة ....

b التمثيل البياني للدالة f_1 حيث $f_1(x) = -\sin x$ هو .... للتمثيل البياني للدالة f حيث $f(x) = \sin x$ في المحور ....

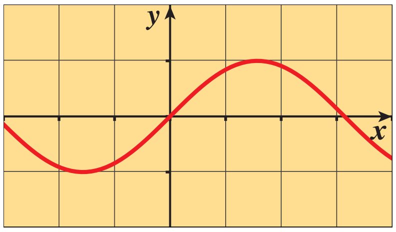
c التمثيل البياني للدالة f_2 حيث $f_2(x) = \sin(-x)$ هو .... للتمثيل البياني للدالة f حيث $f(x) = \sin x$ في المحور ....

الإزاحة الأفقية — Horizontal Translation

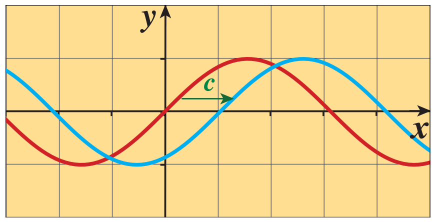
بيان الدالة $y = f(x - c)$ ينتج من **إزاحة أفقية** لبيان الدالة $y = f(x)$ بمقدار c

إذا كان c موجبًا فإن الإزاحة تكون جهة اليمين.

إذا كان c سالبًا فإن الإزاحة تكون جهة اليسار.

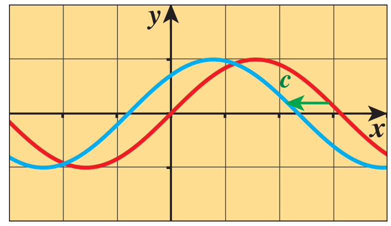


$y = f(x)$



$y = f(x - c)$

$c > 0$



$y = f(x - c)$

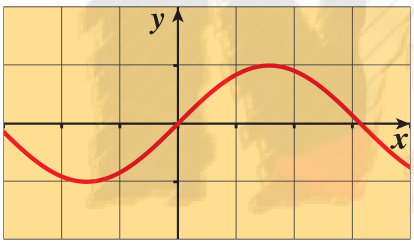
$c < 0$

الإزاحة الرأسية — Vertical Translation

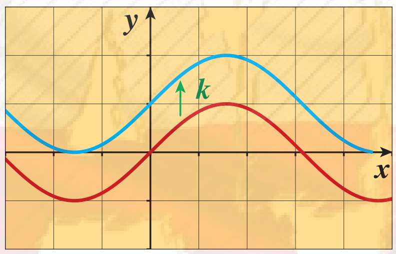
بيان الدالة $y = f(x) + k$ ينتج من **إزاحة رأسية** لبيان الدالة $y = f(x)$ بمقدار k

إذا كان k موجبًا فإن الإزاحة تكون إلى الأعلى.

إذا كان k سالبًا فإن الإزاحة تكون إلى الأسفل.

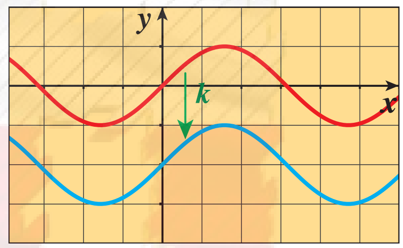


$y = f(x)$



$y = f(x) + k$

$k > 0$



$y = f(x) + k$

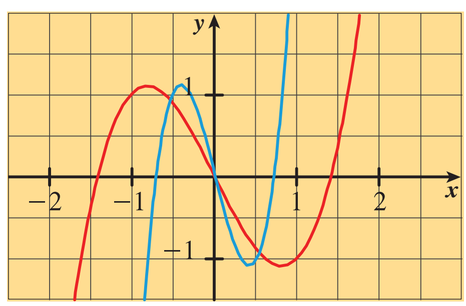
$k < 0$

التمدد / الانكماش الأفقي — Horizontal Stretch or Shrink

ليكن b عددًا موجبًا.

بيان الدالة $y = f(bx)$ ينتج من انكماش / تمدد أفقي لبيان الدالة $y = f(x)$

إذا كان $b > 1$: انكماش بمعامل $\frac{1}{b}$

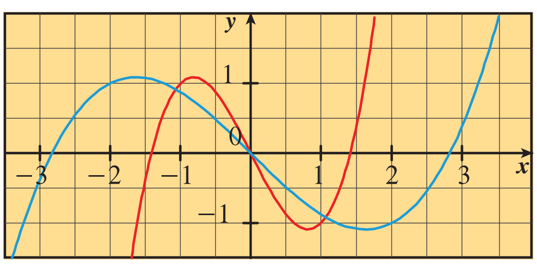


$y = f(x) = x^3 - 2x$

$y = f(2x) = (2x)^3 - 2(2x)$

انكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{2}$

إذا كان $b < 1$: تمدد بمعامل $\frac{1}{b}$



$y = f(x) = x^3 - 2x$

$y = f(0.5x) = (0.5x)^3 - 2(0.5)x$

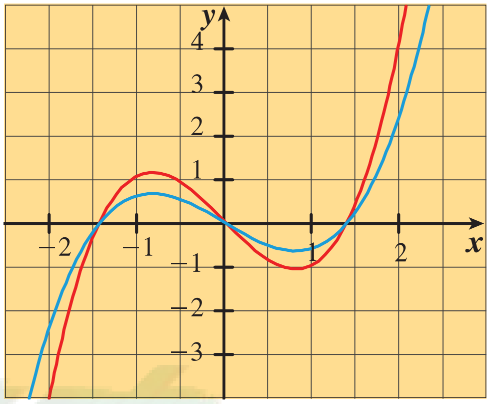
تمدد أفقي بمعامل $\frac{1}{0.5}$

التمدد/الانكماش الرأسي Vertical Stretch or Shrink

ليكن a عددًا موجبًا $a \neq 0$

بيان الدالة $y = af(x)$ ينتج من انكماش/تمدد رأسي لبيان الدالة $y = f(x)$

إذا كان $1 > |a|$: انكماش بمعامل $|a|$

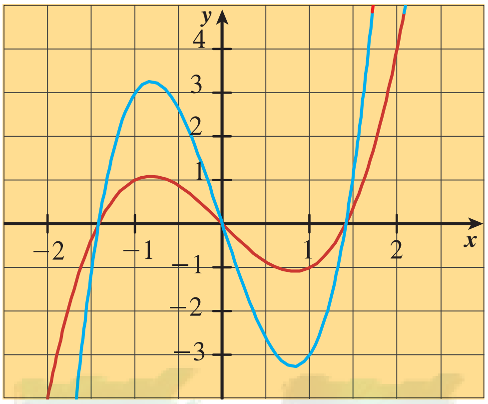


$y = f(x) = x^3 - 2x$

$y = 0.6f(x) = 0.6x^3 - 1.2x$

انكماش رأسي بمعامل 0.6

إذا كان $1 < |a|$: تمدد بمعامل $|a|$



$y = f(x) = x^3 - 2x$

$y = 3f(x) = 3x^3 - 6x$

تمدد رأسي بمعامل 3

تطبيق التحويلات على الدوال الجيبية Applying Transformations to Sinusoids

يمكن أن تطبق التحويلات السابقة على أي دالة بما في ذلك الدوال المثلثية.

والتمثيلات البيانية التي نحصل عليها من تطبيق هذه التحويلات على دالتي الجيب وجيب التمام هي دوال جيبية.

تكون الدالة جيبية إذا أمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$f(x) = a\sin(bx - h) + k$$

أو $$f(x) = a\cos(bx - h) + k$$

حيث a, b, h, k ثوابت $b \neq 0$, $a \neq 0$

سوف نرى في مثال لاحق أن $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ،

لذلك فإن رسم دالة جيب التمام هو نفسه رسم دالة الجيب بعد إزاحتها إلى اليسار بمقدار $\frac{\pi}{2}$ وحدة.

بسبب هذه العلاقة يمكن أن نعيد كتابة كل الدوال الجيبية على الصورة:

$$f(x) = a\sin(bx - h) + k$$

التمدد/الانكماش الرأسي وسعة الدالة الجيبية

Vertical Stretch/Shrink and the Amplitude of a Sinusoid

عند تطبيق التمدد الرأسي أو الانكماش الرأسي على دالة جيبية، فإن خاصية الدالة التي تتغير تسمى **السعة** حيث:

سعة الدالة $f(x)=a\sin(bx-h)+k$ أو $f(x)=a\cos(bx-h)+k$ هي $|a|$.

تذكر:
سعة الدالة = $\dfrac{\text{القيمة العظمى} - \text{القيمة الصغرى}}{2}$
$= \dfrac{\max f - \min f}{2}$

مثال (1)

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_1=\cos x$ ، $y_2=-2\cos x$.

الحل:

سعة الدالة y_2، هي: $|a|=|-2|=2$

$\because\ |a|>1$

$\therefore$ التمثيل البياني للدالة: $y_2=-2\cos x$ هو تمدد رأسي لمنحنى الدالة $y_1=\cos x$ بمعامل 2،

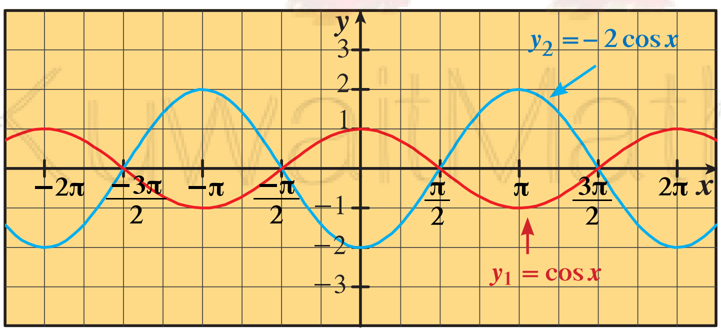
$\because\ a$ سالبة $\therefore$ يوجد انعكاس في محور السينات.

معلومة:
انعكاس بيان $f(x)$ في محور الصادات هو بيان $f(-x)$
وانعكاس بيان $f(x)$ في محور السينات هو بيان $-f(x)$

حاول أن تحل

1 صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_1=\sin x$ ، $y_2=\frac{1}{3}\sin x$.

ملاحظة: الشكل أدناه يمثل بيان الدالة في مثال (1).



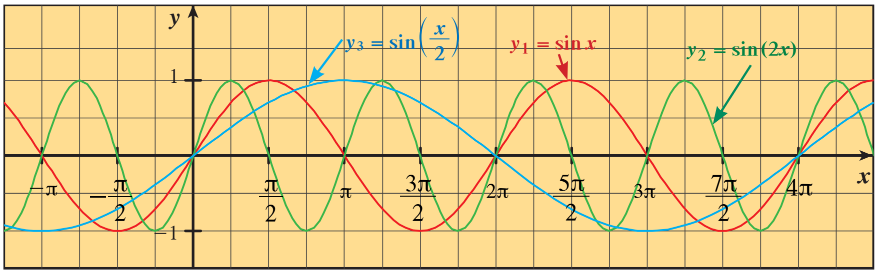
التمدد/الانكماش الأفقي ودورة الدالة

Horizontal Stretch/Shrink and the Period

عند تطبيق التمدد الأفقي أو الانكماش الأفقي على دالة جيبية فإن خاصية الدالة التي تتغير تسمى **دورة الدالة** حيث:

دورة كلّ من: $y=a\cos(bx)$ ، $y=a\sin(bx)$ هي $\dfrac{2\pi}{|b|}$

فمثلًا، التمثيل البياني للدالة: $y_2=\sin 2x$، هو انكماش أفقي للتمثيل البياني للدالة: $y_1=\sin x$ بمعامل: $\dfrac{1}{|b|}=\dfrac{1}{2}$

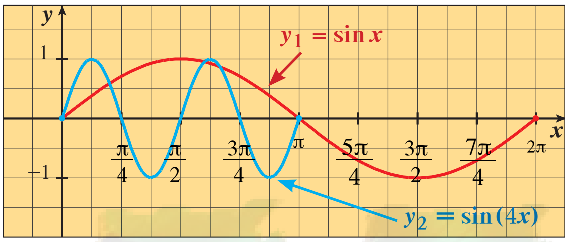


وهذا بدوره يؤدي إلى انكماش لدورة الدالة بمعامل $\left(\frac{1}{2}\right)$، أي من 2π إلى π. والتمثيل البياني $y_3 = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ هو تمدد أفقي للتمثيل البياني للدالة $y_1 = \sin x$

بمعامل: $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

وهذا بدوره يمد دورة الدالة بمعامل 2 أي من 2π إلى 4π

مثال (2)



صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين لكل من:

$y_2 = \sin 4x$ ، $y_1 = \sin x$

ارسم دورتين من الدالة: $y_2 = \sin 4x$

الحل:

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة: $y_2 = \sin 4x$

من التمثيل البياني للدالة $y_1 = \sin x$، وذلك بانكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{4}$

حاول أن تحل

2 صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين لكل من: $y_1 = \cos x \;,\; y_2 = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

ارسم دورتين من الدالة: $y_2 = \cos\frac{x}{2}$

مثال (3)

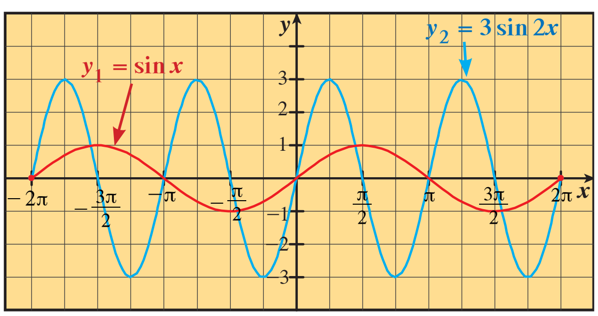
صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_1 = \sin x \;,\; y_2 = 3\sin 2x$

الحل: يمكن الحصول على التمثيل البياني لـ $y_2 = 3\sin 2x$ من التمثيل البياني لـ $y_1 = \sin x$، بتمدد رأسي بمعامل 3 وانكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{2}$

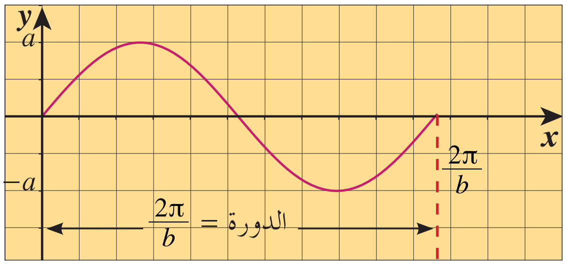
حاول أن تحل

3 صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_1 = \cos x \;,\; y_2 = 2\cos\left(-\frac{1}{3}x\right)$

ملاحظة: الشكل المقابل يوضح بيان الدوال في مثال (3).



Horizontal Translation الإزاحة الأفقية



في دراستنا لدالة الجيب $y = a\sin bx$،

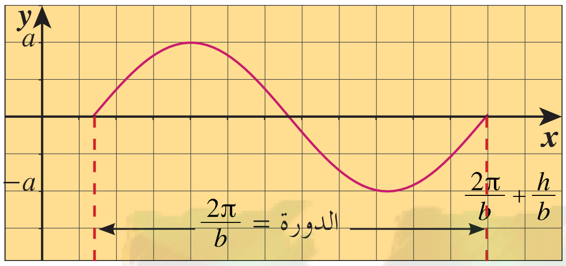
تبيّن لنا أن السعة: $|a|$ والدورة: $\frac{2\pi}{|b|}$

رسمت في الشكل المقابل دورة واحدة لبيان هذه الدالة

عندما $b > 0$، حيث تتغير x من 0 إلى $\frac{2\pi}{b}$ أو تتغير bx من 0 إلى 2π

سنناقش الآن بيان الدالة:

$$y = a\sin(bx - h) \implies y = a\sin\left(b\left(x - \frac{h}{b}\right)\right) \;,\; \alpha, h \in \mathbb{R}^* \;,\; b > 0$$



سيكون هذا البيان بيان دالة جيبية، السعة: $|a|$

بما أن $(bx - h)$ تتغير من 0 إلى 2π، سنرسم دورة واحدة.

تبدأ هذه الدورة عندما: $x = \frac{h}{b}$, $bx - h = 0$ وتنتهي عندما:

$x = \frac{2\pi}{b} + \frac{h}{b}$, $bx - h = 2\pi$ (انظر الشكل المقابل).

نرى أن بيان $y = a\sin(bx - h)$

ينتج من إزاحة أفقية لبيان $y = a\sin bx$، بمقدار $\frac{h}{b}$ إلى جهة اليمين عندما $h > 0$، وإلى جهة اليسار عندما $h < 0$

وبالمثل لبيان الدالة: $y = a\cos(bx - h)$

مثال (4)

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين:

a $y_1 = \sin x \;,\; y_2 = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

b $y_1 = \cos 2x \;,\; y_2 = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

الحل:

a $y_1 = \sin x \,,\; y_2 = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

$\because\; h = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة $y_2 = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

من التمثيل البياني للدالة $y_1 = \sin x$ بإزاحة أفقية مقدارها $\frac{\pi}{3}$ لجهة اليمين.

b $y_1 = \cos 2x \;,\; y_2 = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$y_2 = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)\right)$$
$$= \cos\left(2\left(x - \left(\frac{-\pi}{8}\right)\right)\right)$$

يمكن الحصول على التمثيل البياني لِـ $y_2 = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ من التمثيل البياني لِـ $y_1 = \cos 2x$ بإزاحة أفقية مقدارها $\frac{\pi}{8}$ لجهة اليسار.

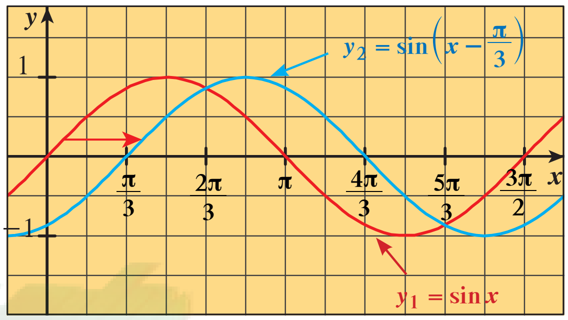
حاول أن تحل

4 صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين:

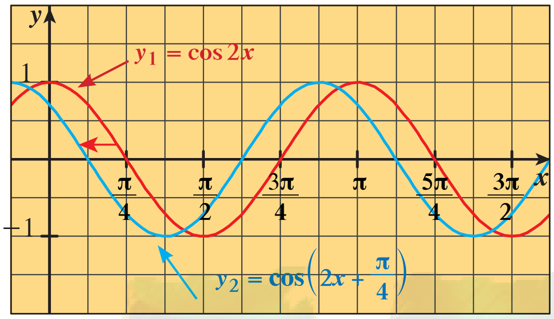
a $y_1 = \cos x \ , \ y_2 = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

b $y_1 = \sin 3x \ , \ y_2 = \sin(3x - 7)$

ملاحظة: الشكل (1) والشكل (2) يوضحان بيان الدوال في مثال (4) السابق.



شكل (1)



شكل (2)

مثال توضيحي

بيّن أن التمثيل البياني للدالة:

a $y_2 = \cos x$ هو إزاحة أفقية للتمثيل البياني لِـ $y_1 = \sin x$ بمقدار $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ أي أن $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

b $y_2 = \sin x$ هو إزاحة أفقية للتمثيل البياني لِـ $y_1 = \cos x$ بمقدار $\frac{\pi}{2}$ أي أن $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

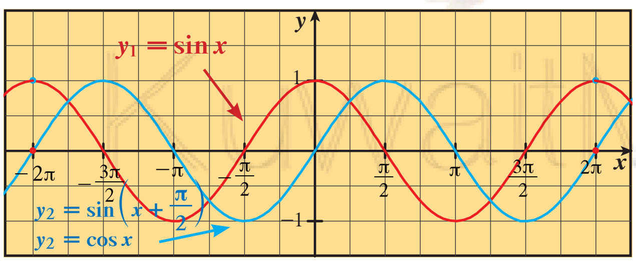
الحل:

a التمثيل البياني لمنحنى الدالة $y_2 = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

ينتج عن إزاحة أفقية لمنحنى الدالة:

$y_1 = \sin x$، بمقدار $-\frac{\pi}{2}$ أفقيًا

أي مسافة $\frac{\pi}{2}$ وحدة جهة اليسار. (انظر الشكل).



التمثيلات البيانية لكل من $\cos x$، $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin x$ لها الشكل نفسه.

نلاحظ أن بيان $y_2 = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ينطبق مع بيان $y_2 = \cos x$.

$$\therefore \ \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

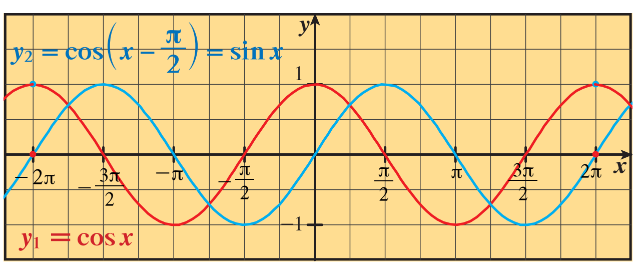
b التمثيل البياني لمنحنى الدالة $y_2 = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

ينتج عن إزاحة أفقية لمنحنى الدالة:

$y_1 = \cos x$، بمقدار $\frac{\pi}{2}$ أفقيًا

أي $\frac{\pi}{2}$ وحدة جهة اليمين.

(انظر الشكل).



التمثيلات البيانية لكل من $\sin x$, $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x$ لها الشكل نفسه.

نلاحظ أن بيان $y_2=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ ينطبق مع بيان $y_2=\sin x$

$\therefore\ \sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

المثال التوضيحي السابق يفسر صحة المتطابقات التي سبق دراستها وهي:

لكل قيم x يكون التالي صحيحًا:

1. $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$
2. $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$
3. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$
4. $\cos(x\pm 2\pi)=\cos x$
5. $\sin(x\pm 2\pi)=\sin x$
6. $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$

الإزاحة الرأسية

بيان الدالة $y=a\sin(bx-h)+k$ ينتج عن إزاحة رأسية لبيان الدالة $y=a\sin(bx-h)$ بمقدار k (إلى أعلى إذا كانت k موجبة، وإلى أسفل إذا كانت k سالبة).

مثال (5)

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_2=3\cos x-2$, $y_1=3\cos x$

الحل:

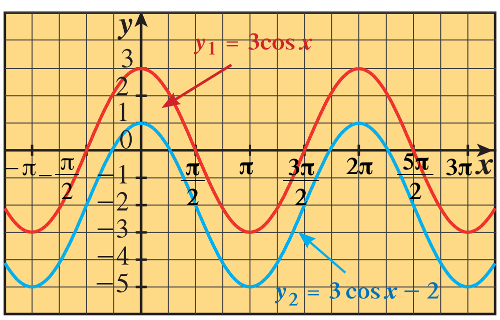
حيث إن $k=-2$

$\therefore$ يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة $y_2=3\cos x-2$ من التمثيل البياني للدالة $y_1=3\cos x$ بإزاحة رأسية بمقدار 2 إلى الأسفل.

حاول أن تحل

5. صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_2=\frac{3}{4}\sin x+2$, $y_1=\frac{3}{4}\sin x$

ملاحظة: الشكل أدناه يوضّح بيان الدوال في مثال (5).



ويمكننا التعبير عن الإزاحة الرأسية بالصورة التالية: $k=\frac{\max f+\min f}{2}$

ملخص التحويلات على الدوال الجيبية
Transformations Sinusoid Functions

التحويل	بالتطبيق على $y=\cos x$	بالتطبيق على $y=\sin x$
التمدد الرأسي/الانكماش (السعة)	$y=a\cos x$	$y=a\sin x$
التمدد الأفقي/الانكماش (الدورة)	$y=\cos bx$	$y=\sin bx$
الإزاحة الأفقية	$y=\cos(x-h)$	$y=\sin(x-h)$
الإزاحة الرأسية	$y=\cos x+k$	$y=\sin x+k$
الانعكاس في محور السينات	$y=-\cos x$	$y=-\sin x$
الانعكاس في محور الصادات	$y=\cos(-x)=\cos x$	$y=\sin(-x)=-\sin x$

ملاحظة:
تساعد التحويلات في الدوال المثلثية على فهم التغير في بعض الحالات الفيزيائية مثل قوة التيار الكهربائي المتردد وغيرها.

مثال (6)

وضّح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين عن طريق التحويلات للدوال المثلثية: $\sin x$ أو $\cos x$ ثم أوجد أيضًا سعة كل دالة ودورتها.

(a) $f(x)=3\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+1$

(b) $g(x)=\sin(2-x)+4$

الحل:

(a) $f(x)=3\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+1 \Longrightarrow f(x)=3\cos\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)+1$

بالمقارنة مع $y=a\cos\left(b\left(x-\frac{h}{b}\right)\right)+k$،

نجد أن: $a=3\ ,\ b=\frac{1}{2}\ ,\ \frac{h}{b}=\frac{\pi}{3}\ ,\ k=1$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة f من التمثيل البياني لدالة $\cos x$ عن طريق تطبيق التحويلات التالية بحسب الترتيب التالي:

أولًا: تمدد أفقي بمعامل: $\frac{1}{|b|}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ للحصول على $\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

ثانيًا: إزاحة أفقية إلى اليمين بمقدار $\frac{\pi}{3}$ للحصول على $\cos\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

ثالثًا: تمدد رأسي بمعامل: $|a|=|3|=3$ للحصول على $3\cos\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

رابعًا: إزاحة رأسية إلى الأعلى بمقدار: $k=1$ للحصول على:

$$f(x)=3\cos\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)+1$$

وتكون السعة: $|a|=|3|=3$

دورة الدالة: $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=4\pi$

b $g(x)=\sin(2-x)+4 \implies g(x)=\sin(-(x-2))+4$

$$\implies g(x)=-\sin(x-2)+4$$

بالمقارنة مع: $y=a\sin\left(b\left(x-\frac{h}{b}\right)\right)+k$ ،

نجد أن: $a=-1\ ,\ b=1\ ,\ \frac{h}{b}=2\ ,\ k=4$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة g من التمثيل البياني للدالة $\sin x$ عن طريق تطبيق التحويلات التالية بحسب الترتيب الآتي:

أولًا: إزاحة أفقية إلى اليمين بمقدار $\frac{h}{b}=2$ للحصول على $\sin(x-2)$

ثانيًا: انعكاس في محور السينات للحصول على $-\sin(x-2)$

ثالثًا: إزاحة رأسية إلى الأعلى بمقدار $k=4$ للحصول على:

$$g(x)=-\sin(x-2)+4$$

وتكون السعة: $|a|=|-1|=1$ ، دورة الدالة: $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{1}=2\pi$

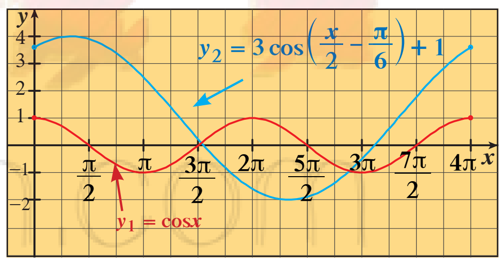
حاول أن تحل

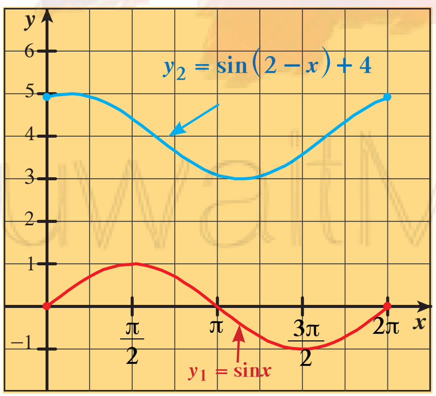
6 وضّح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين عن طريق التمثيلات البيانية للدوال المثلثية: $\sin x$ أو $\cos x$. أوجد أيضًا سعة كل دالة ودورتها.

a $y=\cos(1-x)+2$

b $y=2\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)-1$

والشكلان فيما يلي يوضحان الدوال من مثال (6).





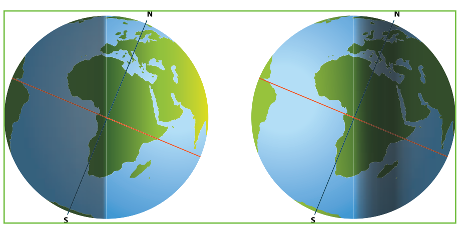
مثال (7)

تطبيق حياتي إثرائي

تبيّن الدراسات أن في إحدى المدن، يبلغ معدل الساعات حيث الشمس مشرقة خلال الانقلاب الصيفي 15.283 وخلال الانقلاب الشتوي 9.067

a أوجد دالة جيبية على الصورة $f(x)=a\sin(bx-h)+k$ تنمذج هذه البيانات.

b استخدم هذه الدالة لتوقع عدد الساعات حيث الشمس مشرقة في هذه المدينة في أول أبريل أي في اليوم 91 من العام.



معلومة:

يحدث الانقلاب الصيفي في نصف الكرة الشمالي في 21 يونيو وفي هذا اليوم يكون أطول نهار وأقصر ليل.

ويحدث الانقلاب الشتوي في نصف الكرة الشمالي في 21 ديسمبر حيث يكون أقصر نهار وأطول ليل.

الحل:

a الخطوة 1:

السعة:

$$a = \frac{1}{2}(\max f - \min f)$$

$$= \frac{15.283 - 9.067}{2} = 3.108$$

الخطوة 2:

الإزاحة الرأسية:

$$k = \frac{\max f + \min f}{2} = 12.175$$

الخطوة 3:

تتكرر البيانات كل 365 يومًا

$$\because\ T = 365\ ,\ T = \frac{2\pi}{b}$$

$$\therefore\ \frac{2\pi}{b} = 365 \implies b = \frac{2\pi}{365}$$

ومنه نحصل على:

$$f(x) = 3.108 \sin\left(\frac{2\pi}{365}x - h\right) + 12.175 \quad (1)$$

الخطوة 4:

لإيجاد الإزاحة الأفقية نحل المعادلة (1) في h بالتعويض عن $f(x)$ بـ 9.067 وعن x بـ 355 (يقع الانقلاب الشتوي في 21 ديسمبر أي في اليوم 355 من العام).

$$9.067 = 3.108 \sin\left(\frac{2\pi}{365} \times 355 - h\right) + 12.175$$

اطرح 12.175 من طرفي المعادلة

$$-3.108 = 3.108 \sin\left(\frac{2\pi}{365} \times 355 - h\right)$$

اقسم طرفي المعادلة على 3.108

$$-1 = \sin\left(\frac{2\pi}{365} \times 355 - h\right)$$

$\sin\theta = -1\ :\ \theta = -\frac{\pi}{2}$

$$\frac{2\pi}{365} \times 355 - h = -\frac{\pi}{2}$$

حل في h

$$h = \frac{357}{146}\pi$$

$\therefore$ معادلة الدالة هي:

$$f(x) = 3.108 \sin\left(\frac{2\pi}{365}x - \frac{357}{146}\pi\right) + 12.175 \quad (2)$$

b لتوقع عدد الساعات حيث الشمس مشرقة في 1 أبريل نعوّض عن x بـ 91 في المعادلة (2) فنحصل على:

$$f(91) = 3.108 \sin\left(\frac{2\pi}{365} \times 91 - \frac{357}{146}\pi\right) + 12.175$$

$$f(91) \approx 12.69$$

يتوقع أن يكون عدد الساعات حيث الشمس مشرقة في 1 أبريل في هذه المدينة حوالى 12.69

8–3

قانون الجيب

Law of Sine

سوف تتعلم

- قانون الجيب.
- استخدام قانون الجيب لحل المثلث.
- تحديد عدد المثلثات والحالة الغامضة.

المفردات والمصطلحات:

- قانون الجيب
Law of Sine
- الحالة الغامضة
Ambiguous Case
- حل المثلث
Solving Triangle

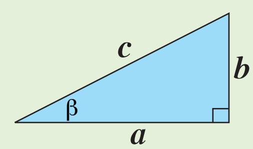
معلومة:

الرمز α يقرأ ألفا.

الرمز β يقرأ بيتا.

الرمز γ يقرأ جاما.

تذكر:



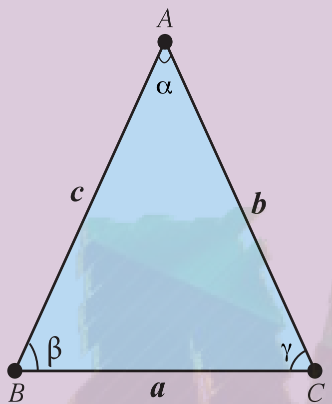
$\sin\beta = \frac{b}{c}$

$\cos\beta = \frac{a}{c}$

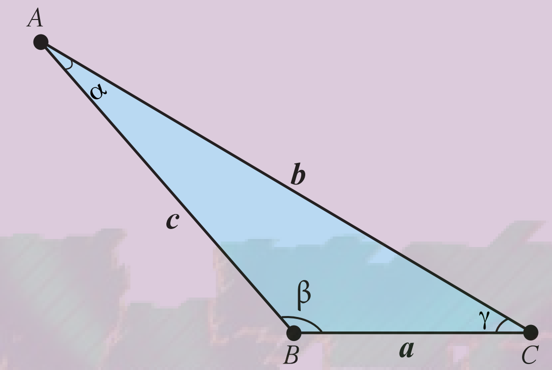
$\tan\beta = \frac{b}{a}$

دعنا نفكر ونتناقش

في هذا الدرس نستخدم الرموز α, β, γ للتعبير عن قياسات زوايا المثلث ABC على الترتيب، وكذلك a, b, c لأطوال الأضلاع المقابلة لهذه الزوايا. على الترتيب أيضًا ونشير أيضًا إلى رؤوس المثلث بالرموز A, B, C



مثلث حاد الزوايا



مثلث منفرج الزاوية

حل مثلث تعني إيجاد أطوال أضلاعه الثلاثة وقياسات زواياه الثلاث أيضًا، ثم معرفة عدد المثلثات الموجودة. ولتأمين ذلك علينا معرفة طول ضلع واحد في المثلث على الأقل، لأن معرفة قياسات الزوايا الثلاث فقط تعطينا «عائلة» من المثلثات المتشابهة. أي أن لها الشكل نفسه لكن بأطوال أضلاع مختلفة.

قانون الجيب Law of Sine

ينص قانون الجيب على أنه بالنسبة لكل زاوية من زوايا المثلث تكون النسبة بين جيب الزاوية وطول الضلع المقابل لها هي نسبة ثابتة، أي أن جيوب زوايا المثلث تتناسب مع أطوال الأضلاع المقابلة لها.

قانون الجيب

في أي مثلث ABC:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

البرهان:

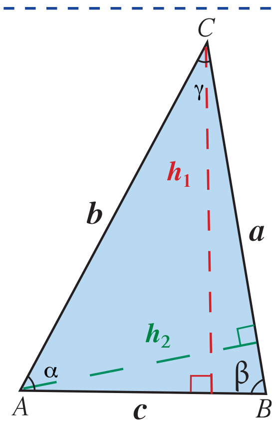
في الشكل (1) أو الشكل (2)

في المثلث ABC، نرسم العمود النازل من رأس المثلث C

وليكن h_1 طول هذا العمود.

$$\therefore \ \sin\beta = \frac{h_1}{a} \implies h_1 = a\sin\beta \ ,$$

$$\sin\alpha = \frac{h_1}{b} \implies h_1 = b\sin\alpha$$



شكل (1)

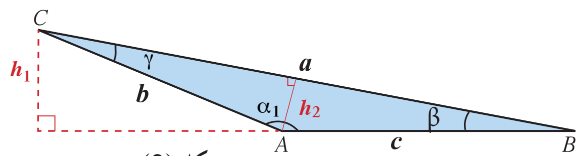
تذكر:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

نستنتج مما سبق أن:

$a \sin\beta = b \sin\alpha$

ومنه: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$ **(1)**



شكل (2)

نرسم الآن العمود النازل من A وليكن h_2 طول هذا العمود

$\therefore \ \sin\beta = \frac{h_2}{c} \implies h_2 = c\sin\beta$

$\sin\gamma = \frac{h_2}{b} \implies h_2 = b\sin\gamma$

ونستنتج مما سبق أن: $c\sin\beta = b\sin\gamma$

ومنه: $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$ **(2)**

المعادلتان (1), (2) تعطيان:

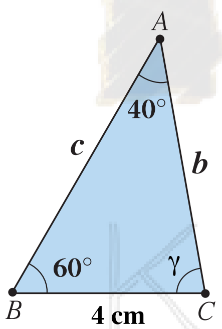
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

استخدام قانون الجيب Using the Law of Sine

يسمح قانون الجيب بحل مثلث إذا علم طول ضلع وقياس زاويتين.

مثال (1)

حل ΔABC حيث: $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$, $a = 4$ cm



الحل:

يبيّن الشكل المقابل المثلث المطلوب حله.

يجب إيجاد: γ, b, c

مجموع زوايا المثلث 180°

$\gamma = 180° - (40° + 60°) = 80°$

قانون الجيب

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\frac{\sin 40°}{4} = \frac{\sin 60°}{b} = \frac{\sin 80°}{c}$

$b = \frac{4 \times \sin 60°}{\sin 40°} \implies b \approx 5.389$

$c = \frac{4 \times \sin 80°}{\sin 40°} \implies c \approx 6.128$

حاول أن تحل

1 حل ΔABC حيث: $\alpha = 36°$, $\beta = 48°$, $a = 8$ cm

معلومة إثرائية:

الحالة الغامضة The Ambiguous Case

الحالة الغامضة هي الحالة التي يكون معلوم فيها طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

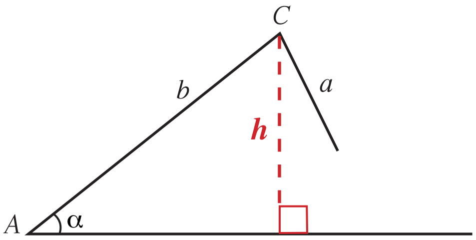
لأن البيانات المعروفة قد تعطي صفر مثلث أو مثلث واحد أو مثلثين.

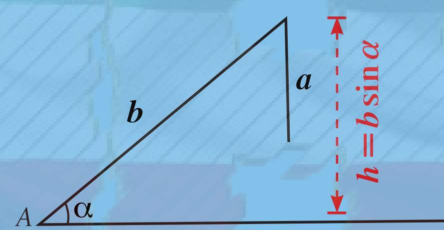
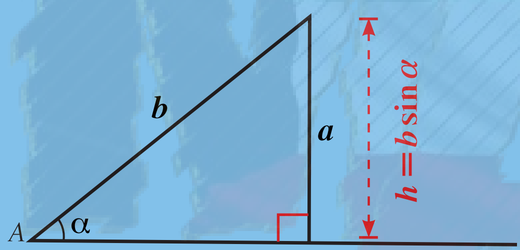
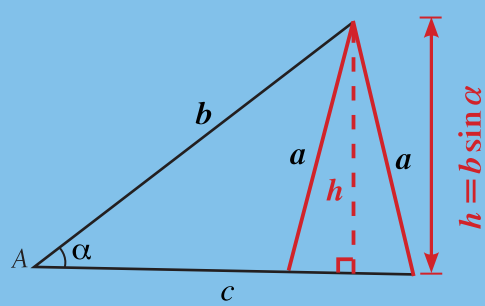
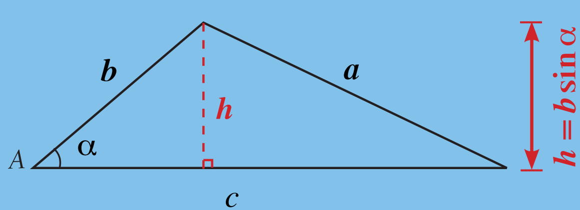
لنفرض أن الأجزاء المعلومة هي: a, b, α

كما هو مبين في الشكل المقابل.

يكمن الحل في معرفة الارتفاع h،

ومنه $h = b\sin\alpha$ وربطه بالأجزاء المعروفة.



لا يوجد مثلث	يوجد مثلث واحد قائم
إذا كان $h = b\sin\alpha$ و كان $a < h$، يكون طول الضلع a غير كافٍ لتكوين مثلث. 	إذا كان $h = b\sin\alpha$ و كان $a = h$ طول الضلع a يكفي لتكوين مثلث قائم. 
يوجد مثلثان	**يوجد مثلث واحد**
إذا كان $h < a < b$ يمكن تكوين مثلثين مختلفين. 	إذا كان $a \geq b$ يمكن تكوين مثلث واحد. 

كما ذكرنا يسمح قانون الجيب بحل مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

معلومة:
إذا كانت $\sin\alpha > 0$ فإن α تقع في الربع الأول وتكون حادة أو تقع في الربع الثاني وتكون منفرجة.

مثال (2)

حل ΔABC حيث: $a = 3\,\text{cm}\ ,\ b = 2\,\text{cm}\ ,\ \alpha = 40^\circ$

الحل:

نستخدم قانون الجيب لإيجاد β

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

عوّض

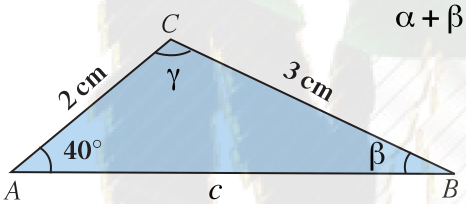
$$\frac{\sin 40^\circ}{3} = \frac{\sin\beta}{2}$$

$$\sin\beta = \frac{2\times\sin 40^\circ}{3} \Longrightarrow \sin\beta \approx 0.43$$

توجد زاويتان β، $0^\circ < \beta < 180^\circ$ تحققان $\sin\beta = 0.43$

$\beta_1 \approx 25.4^\circ$ أو $\beta_2 \approx 154.6^\circ$

الحالة $\beta_2 \approx 154.6^\circ$ مرفوضة، لأن $\alpha + \beta_2 \approx 194.6^\circ$ وهو أكبر من 180°



باستخدام $\beta_1 \approx 25.4^\circ$ نحصل على:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta_1$$

$$\approx 180^\circ - 40^\circ - 25.4^\circ$$

$$\gamma \approx 114.6^\circ$$

يمكن الآن معرفة طول الضلع الثالث c

قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 40^\circ}{3} = \frac{\sin 114.6^\circ}{c}$$

$$c = \frac{3\sin 114.6^\circ}{\sin 40^\circ}$$

$$c \approx 4.24\,\text{cm}$$

حاول أن تحل

2 حل ΔABC حيث: $a = 7\,\text{cm}\ ,\ b = 6\,\text{cm}\ ,\ \alpha = 26.3^\circ$

مثال (3)

حل ΔABC حيث: $a = 5\text{ cm}\ ,\ b = 8\text{ cm}\ ,\ \alpha = 30^\circ$

الحل:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

قانون الجيب

$$\frac{\sin 30^\circ}{5} = \frac{\sin\beta}{8}$$

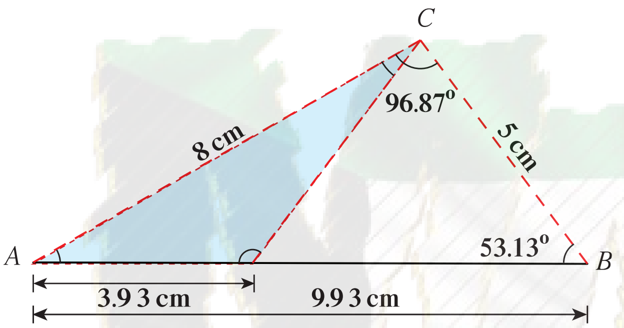
$$\sin\beta = \frac{8 \times \sin 30^\circ}{5} \Rightarrow \sin\beta = 0.8\ ,\ \sin\beta > 0$$

عوّض

$$\therefore\ \beta_1 \approx 53.13^\circ\ ;\ \beta_2 \approx 180^\circ - 53.13^\circ \approx 126.87^\circ$$

$$\alpha + \beta_1 \approx 30^\circ + 53.13^\circ \approx 83.13^\circ$$

$$\alpha + \beta_2 \approx 30^\circ + 126.87^\circ \approx 156.87^\circ$$



$\therefore$ لكل من قيمتي β نحصل على: $\alpha + \beta < 180^\circ$

$\therefore$ يوجد مثلثان يحققان المعطى.

كذلك يوجد قياسان للزاوية γ

$$\gamma_1 = 180 - (\alpha + \beta)$$

$$\gamma_1 \approx 180^\circ - 83.13^\circ$$

$$\approx 96.87^\circ$$

$$\gamma_2 = 180 - 156 \cdot 87^\circ \approx 23.13^\circ$$

يبقى إيجاد c

في المثلث الثاني

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma_2}{c_2}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{5} = \frac{\sin 23.13^\circ}{c_2}$$

$$c_2 = \frac{5 \times \sin 23.13^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$c_2 \approx 3.93\text{ cm}$$

في المثلث الأوّل

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma_1}{c_1}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{5} = \frac{\sin 96.87^\circ}{c_1}$$

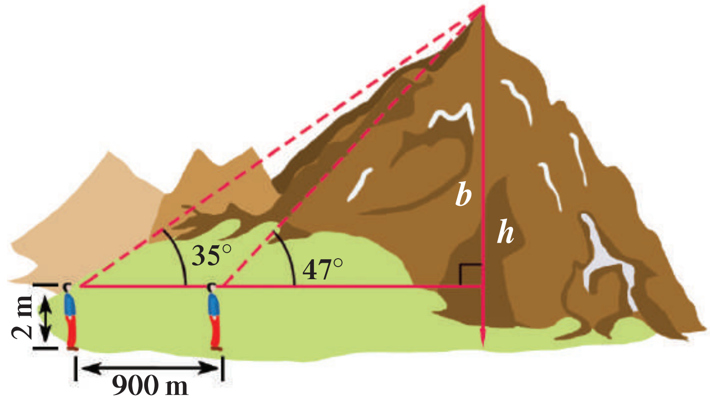
$$c_1 = \frac{5 \times \sin 96.87^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$c_1 \approx 9.93\text{ cm}$$

حاول أن تحل

3 حل ΔABC حيث: $a = 6\text{ cm}\ ,\ b = 7\text{ cm}\ ,\ \alpha = 45^\circ$

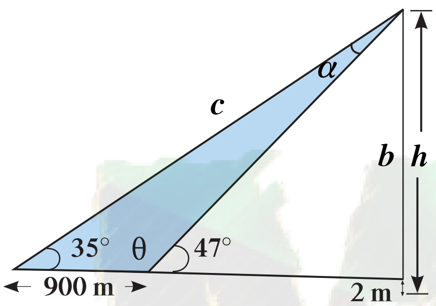
مثال (4) تطبيقات حياتية



لمعرفة ارتفاع جبل، قام طوبوغرافي بأخذ قياسين للذروة من نقطتين تبعدان 900 m عن بعضهما بعضًا حيث بلغ قياس كل من الزاويتين 47° , 35°

إذا كان ارتفاع مستوى النظر الأفقي عن سطح الأرض 2 m، فما ارتفاع الجبل؟

الحل:



$$\theta = 180^\circ - 47^\circ = 133^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - (133^\circ + 35^\circ) = 12^\circ$$

باستخدام قانون الجيب في المثلث المنفرج الزاوية:

$$\frac{\sin\alpha}{900} = \frac{\sin\theta}{c}$$

$$\Longrightarrow c = \frac{900 \times \sin\theta}{\sin\alpha}$$

$$c = \frac{900 \times \sin 133^\circ}{\sin 12^\circ}$$

$$c \approx 3\ 165.86$$

في المثلث القائم الزاوية الأكبر:

$$\sin 35^\circ = \frac{b}{c}$$

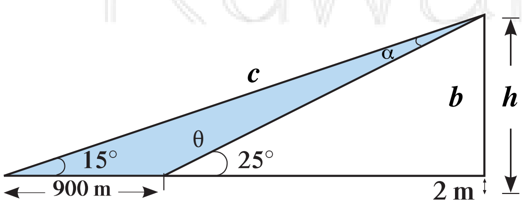
$$b = c \times \sin 35^\circ = 3165.86 \times \sin 35^\circ$$

$$b \approx 1815.86 \approx 1816$$

$$h = b + 2 = 1816 + 2 = 1818$$

يبلغ ارتفاع الجبل عن سطح البحر حوالى 1818 m

حاول أن تحل



4 في المثال (4)، أوجد ارتفاع الجبل إذا كان قياس الزاويتين 25° , 15°

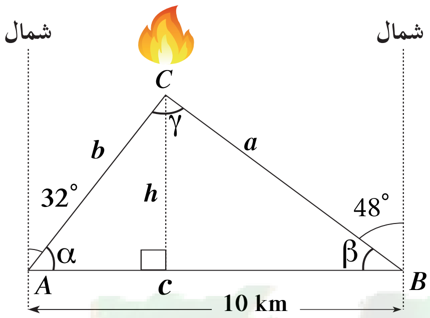
مثال (5) **تطبيقات حياتية**

رأى حارس الغابة عند موقع الحراسة A حريقاً في اتجاه $32°$ شرق الشمال.

في حين رأى حارس آخر في موقع الحراسة B على بعد $10\ km$ شرق الموقع A الحريق نفسه في اتجاه $48°$ غرب الشمال.

أوجد المسافة بين كل حارس وموقع الحريق.

الحل:



نمذج

لتكن C هي موقع الحريق.

$\alpha = 58°$ ، $\beta = 42°$

وتحتاج إلى حساب b, a في المثلث ABC

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$$

$$= 180 - (58° + 42°) = 80°$$

قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 58°}{a} = \frac{\sin 80°}{10} \quad , \quad \frac{\sin 42°}{b} = \frac{\sin 80°}{10}$$

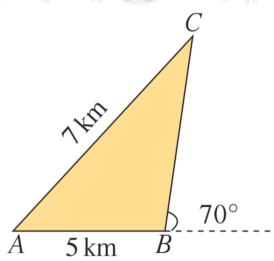
$$a = \frac{10\sin 58°}{\sin 80°} \implies a \approx 8.611\ km \quad , \quad b \approx \frac{10\sin 42°}{\sin 80°} \Rightarrow b \approx 6.794\ km$$

يبعد موقع الحريق حوالي $6.79\ km$ عن موقع الحراسة A وحوالي $8.61\ km$ عن موقع الحراسة B

حاول أن تحل

5 يمثل الشكل المقابل مسار اليخوت في أحد السباقات انطلاقاً من النقطة A إلى النقطة B ثم النقطة C ثم إلى النقطة A

أوجد مسافة السباق.



8–4

قانون جيب التمام

Law of Cosine

سوف تتعلم

- قانون جيب التمام.
- استخدام قانون جيب التمام في حل المثلث.
- إيجاد مساحة مثلث.

المفردات والمصطلحات:

- قانون جيب التمام

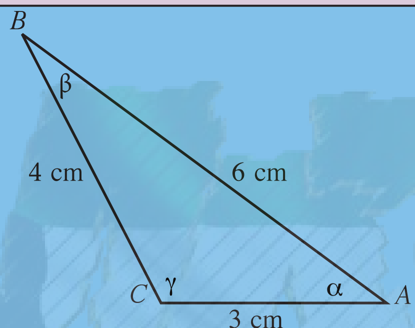
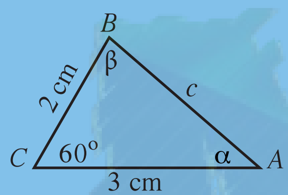
Law of Cosine

دعنا نفكر ونتناقش

يمكننا حل المثلث بمعرفة ثلاثة من عناصره الستة (3 زوايا، 3 أضلاع) باستثناء الحالة (3 زوايا).

استخدمنا في بعض تلك الحالات قانون الجيب.

هل يمكنك حل المثلثين التاليين باستخدام قانون الجيب؟

الشكل		
طبّق قانون الجيب		

قانون جيب التمام

في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أن:

هناك حالات أخرى لا يمكن استخدام قانون الجيب فيها مثل:

- إذا علم طولا ضلعين وقياس الزاوية بينهما (ض. ز. ض)
- إذا علم أطوال الأضلاع الثلاثة (ض. ض. ض)

في حالات كهذه نستخدم قانونًا آخر هو قانون جيب التمام والذي يعرف أيضًا باسم قانون الكاشي.

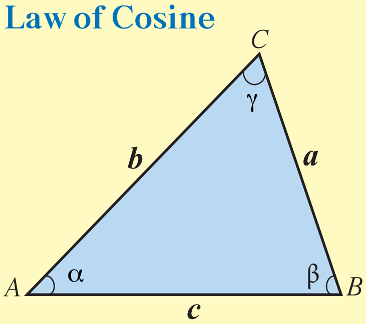
قانون جيب التمام — **Law of Cosine**

في ΔABC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



معلومة:

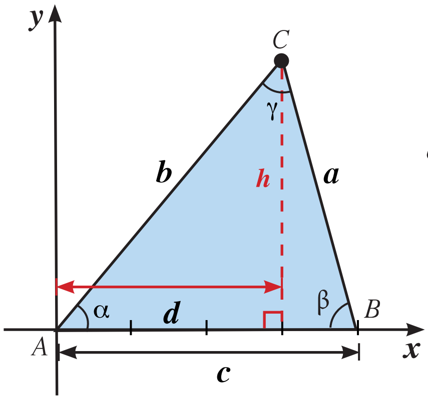
غياث الدين بن مسعود بن محمد الكاشي (توفي سنة 1436) من المفكرين البارزين في الإسلام.

اشتهر بالرياضيات والفلك، ويقال إنه أول من ابتكر الكسور العشرية.

البرهان:

سوف نثبت أن: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

نضع ΔABC في مستوى الإحداثيات حيث الزاوية A في الوضع القياسي، والرأس B على الاتجاه الموجب لمحور السينات.



$\cos\alpha = \frac{d}{b}$, $\sin\alpha = \frac{h}{b}$

بتطبيق نظرية فيثاغورث

$d = b\cos\alpha$, $h = b\sin\alpha$

$$a^2 = |c-d|^2 + h^2$$
$$= (c - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2$$
$$= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha$$
$$= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$$\therefore\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

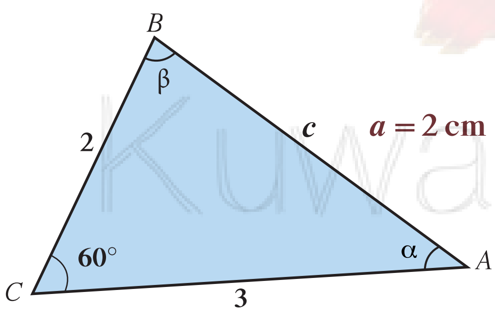
وبالمثل يمكن إثبات المعادلتين الأخريين بوضع الزاوية B ثم الزاوية C في الوضع القياسي كما سبق.

استخدام قانون جيب التمام Using the Law of Cosine

يسمح قانون جيب التمام بحل مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

مثال (1)

حل ΔABC حيث: $a = 2\text{ cm}$, $b = 3\text{ cm}$, $\gamma = 60^\circ$



الحل:

يجب إيجاد β, α, c

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$= 4 + 9 - 12\cos 60^\circ$$
$$= 13 - 12 \times \frac{1}{2}$$
$$= 7$$
$$c = \sqrt{7}\text{ cm}$$

لإيجاد قياسي الزاويتين α , β يمكن استخدام قانون الجيب ولكن قانون جيب التمام يسمح بالتمييز بين الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

معلومة:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{9+7-4}{2\times 3\times \sqrt{7}}$$
$$= \frac{12}{6\sqrt{7}}$$
$$\alpha \approx 40.9^\circ$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{4+7-9}{4\sqrt{7}} = \frac{2}{4\sqrt{7}}$$
$$\beta \approx 79.1^\circ$$

حاول أن تحل

1 حل ΔABC حيث: $a = 11\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, $\gamma = 20^\circ$

يسمح قانون جيب التمام أيضًا بحل مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة.

مثال (2)

حل ΔABC حيث: $a = 4\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$

الحل:

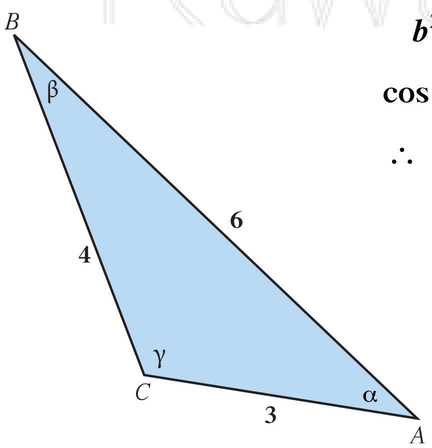
يتوجب علينا إيجاد قياسات الزوايا الثلاث في ΔABC

نستخدم قانون جيب التمام:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{9+36-16}{2\times 3\times 6} = \frac{29}{36}$$
$$\therefore\ \alpha \approx 36.4^\circ$$

كذلك:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{16+36-9}{2\times 4\times 6} = \frac{43}{48}$$
$$\therefore\ \beta \approx 26.4^\circ$$
$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$
$$\gamma \approx 180^\circ - 36.4^\circ - 26.4^\circ$$
$$\approx 117.2^\circ$$



حاول أن تحل

2 في ΔABC حيث: $a = 9\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$

أوجد قياس الزاوية الأكبر.

تذكر:

إذا كانت $\cos\theta = k$

فإن: $\theta = \cos^{-1}(k)$

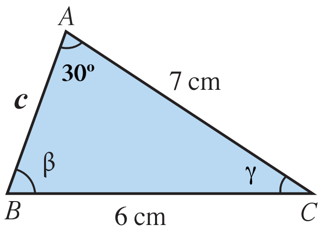
تذكر:

في أي مثلث يكون الضلع الأكبر طولًا مقابلًا للزاوية الأكبر قياسًا والعكس صحيح.

يقدم قانون جيب التمام مدخلًا بديلًا للحالة (ض. ض. ز) والتي يكون معلوم فيها طولا ضلعي مثلث وقياس زاوية ليست محصورة بينهما. ولإيجاد طول الضلع الثالث وباستخدام قانون جيب التمام نحصل على معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية) ويكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الموجبة لهذه المعادلة.

مثال (3)

حل ΔABC حيث: $a = 6\text{ cm}\ ,\ b = 7\text{ cm}\ ,\ \alpha = 30^\circ$



الحل:

علينا إيجاد c, β, γ

حل جبريًّا:

قانون جيب التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$6^2 = 7^2 + c^2 - 2(7)c\cos 30^\circ$$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$0 = c^2 - 7\sqrt{3}\,c + 13$$

قانون المعادلة التربيعية

$$c = \frac{7\sqrt{3} \pm \sqrt{(-7\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 13}}{2}$$

$c \approx 10.935$ أو $c \approx 1.188$

كل قيمة موجبة لـ c تقابل مثلثًا واحدًا.

ولذلك لدينا مثلثان. نوجد $\cos\beta$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

في المثلث الأول

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$c \approx 10.935$

$$\cos\beta_1 = \frac{6^2 + (10.935)^2 - 7^2}{2(6)(10.935)}$$

$$\cos\beta_1 \approx 0.812$$

$$\beta_1 = 35.685^\circ$$

$$\gamma_1 = 180^\circ - [\alpha + \beta_1]$$

$$\approx 114.314^\circ$$

في المثلث الثاني

$c \approx 1.188$

$$\cos\beta_2 = \frac{6^2 + (1.188)^2 - 7^2}{2(6)(1.188)}$$

$$\cos\beta_2 \approx -0.812$$

$$\beta_2 \approx 144.292^\circ$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - [\alpha + \beta_2]$$

$$\approx 5.7080^\circ$$

ملاحظة: يمكن استخدام قانون الجيب في حل المثال (3) كحل آخر.

حاول أن تحل

3 حل ΔABC حيث: $a = 5\text{ cm}\ ,\ b = 6.5\text{ cm}\ ,\ \alpha = 25^\circ$

معلومة:

يمكن حل أي مثلث معلوم فيه ضلعين وزاوية ليست محصورة بينهما باستخدام قانون الجيب أو جيب التمام.

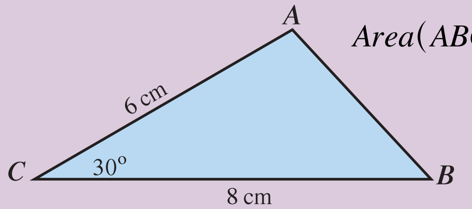
8–5

مساحة المثلث

Area of Triangle

دعنا نفكر ونتناقش

تعلمت سابقًا أنه يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما كما يلي:



$$Area(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$
$$= \frac{1}{2}ac\sin\beta$$
$$= \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

استخدم ما تعلمته لإيجاد مساحة المثلث ABC حيث إن:

$a = 8\text{ cm}$, $b = 6\text{ cm}$, $\gamma = 30°$ وذلك بطريقتين مختلفتين.

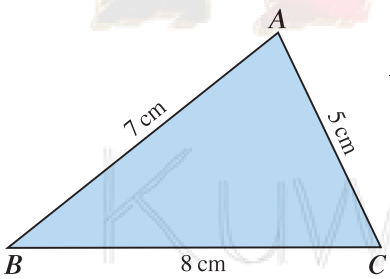
مثال (1)

أوجد مساحة المثلث ABC حيث $c = 7\text{ cm}$ ، $b = 5\text{ cm}$ ، $a = 8\text{ cm}$

الحل:

ليكن α قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين $\overline{AC}$, $\overline{AB}$

باستخدام قانون جيب التمام يمكننا إيجاد $\cos\alpha$:



$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\alpha = \frac{25 + 49 - 64}{2 \times 5 \times 7} = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$$

$$\because \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\therefore \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

في كل مثلث، جيب الزاوية هو موجب

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

سوف تتعلم

- إيجاد مساحة المثلث باستخدام جيب إحدى زواياه.
- إيجاد مساحة مثلث باستخدام قاعدة هيرون.

المفردات والمصطلحات:

- مساحة المثلث
Area of Triangle
- قاعدة هيرون
Heron's Formula

معلومة:

في المثلث الثلاثيني الستيني طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها $30°$ يساوي نصف طول الوتر.

نوجد مساحة المثلث ABC باستخدام:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\text{Area} = 10\sqrt{3} \approx 17.32$$

تبلغ مساحة المثلث ABC حوالي $17.32\ \text{cm}^2$

حل آخر:

$$\therefore \alpha \approx 81.78^\circ$$

$$\therefore \text{Area} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \sin(81.78)$$

$$\text{Area} \approx 17.32\ \text{cm}^2$$

حاول أن تحل

1 أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $c = 8\ \text{cm}$, $b = 6\ \text{cm}$, $a = 5\ \text{cm}$

قاعدة هيرون Heron's Formula

يمكننا أيضًا إيجاد مساحة مثلث بمعرفة أطوال أضلاعه الثلاثة بالقاعدة التالية:

قاعدة هيرون

تعطى مساحة مثلث ABC أطوال أضلاعه a, b, c بالقاعدة:

$$\text{Area}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث: $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \text{semiperimeter}$ (نصف محيط المثلث)

ملاحظة:

يمكن أخذ أي ضلعين في المثلث وإيجاد قياس الزاوية المحصورة بينهما، ومن ثم إيجاد مساحة المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

معلومة:

هيرون الاسكندري عالم رياضيات ومخترع، عاش في الاسكندرية في العصر البطلمي. كتب عن قياس الأشكال الهندسية، واشتهر بدراساته في علم الميكانيكا.

مثال (2)

أوجد مساحة سطح مثلث أطوال أضلاعه: $7\ \text{cm}$, $5\ \text{cm}$, $8\ \text{cm}$

الحل:

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(8+5+7) = 10$$

باستخدام قاعدة هيرون

$$\begin{aligned}\text{Area} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\ &= \sqrt{10(10-8)(10-5)(10-7)} = \sqrt{10(2)(5)(3)}\\ &= 10\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\text{Area} \approx 17.32$$

مساحة سطح المثلث تساوي $10\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ أي حوالي $17.32\ \text{cm}^2$

حاول أن تحل

2 أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 4\ \text{cm}$, $b = 4\ \text{cm}$, $c = 3\ \text{cm}$

مثال (3)

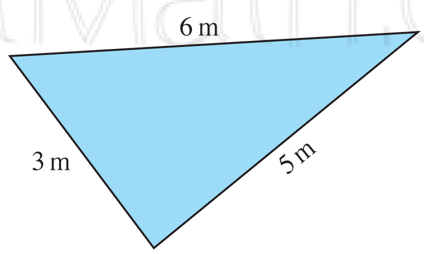
في أحد سباقات المراكب الشراعية وضعت اللجنة المنظمة شرطًا ألا تتعدى مساحة شراع المركب $7.5\ \text{m}^2$.

إذا كان شراع أحد المراكب على شكل مثلث أبعاده: $6\ \text{m}$, $5\ \text{m}$, $3\ \text{m}$

فهل يسمح له بالمشاركة في السباق؟

الحل:

محيط المثلث يساوي:



$$3+5+6 = 14\ \text{m}$$

$$\therefore\ s = \frac{14}{2} = 7\ \text{m}$$

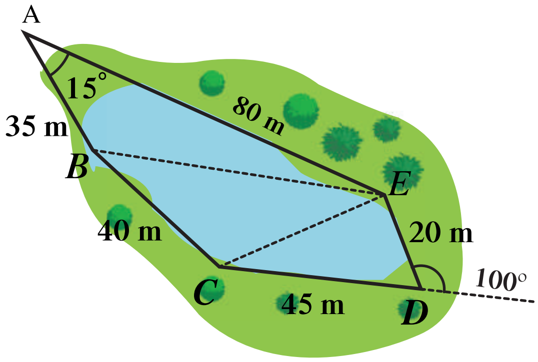
باستخدام قاعدة هيرون:

$$\begin{aligned}\text{Area} &= \sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)}\\ &= \sqrt{7\times4\times2\times1}\\ &= \sqrt{56}\\ &\approx 7.48\ \text{m}^2\end{aligned}$$

تبلغ مساحة الشراع حوالي $7.48\ \text{m}^2$ وبالتالي يسمح له بالمشاركة.

حاول أن تحل

3 في مثال (3)، هل يسمح لمركب شراعه على شكل مثلث أبعاده $6\ \text{m}$, $4\ \text{m}$, $4\ \text{m}$ بالاشتراك في السباق؟



المطلوب:

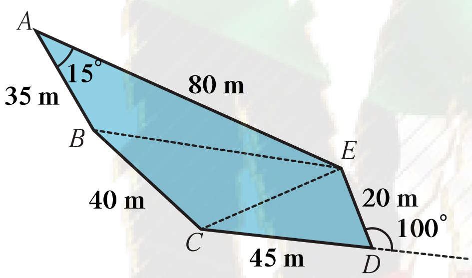
مستخدمًا معطيات الشكل المقابل أوجد مجموع مساحات المثلثات الثلاثة لتقدير مساحة البحيرة.

الحل:

- نبدأ بالمثلث ABE:

$$\text{Area}(ABE) = \frac{1}{2} \times AB \times AE \times \sin 15° = \frac{1}{2} \times 35 \times 80 \times \sin 15°$$

$$\therefore \ \text{Area}(ABE) \approx 362.347 \text{ m}^2$$



- BE

نستخدم قانون جيب التمام

$$(BE)^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB \times AE \times \cos 15°$$
$$= 35^2 + 80^2 - 2 \times 35 \times 80 \times \cos 15°$$
$$\approx 2215.815$$
$$BE \approx \sqrt{2215.815} \approx 47.07 \text{ m}$$

- ننتقل إلى المثلث CDE:

$$\text{Area}(CDE) = \frac{1}{2} \times DC \times DE \times \sin(180° - 100°) = \frac{1}{2} \times 45 \times 20 \times \cos 80°$$

$$\therefore \ \text{Area}(CDE) \approx 443.163 \text{ m}^2$$

- EC

نستخدم قانون جيب التمام

$$(EC)^2 = DC^2 + DE^2 - 2 \times DC \times DE \times \sin 80° = 45^2 + 20^2 - 2 \times 45 \times 20 \times \cos 80°$$

$$\therefore \ (EC)^2 \approx 2112.433 \text{ m}^2$$

$$EC \approx \sqrt{2112.433} \approx 45.961 \text{ m}$$

- ننتقل إلى المثلث BCE:

نستخدم قاعدة هيرون

$$\text{Area}(BCE) = \sqrt{s(s-c)(s-b)(s-e)}$$

حيث: $s \approx 66.515 \text{ m}$

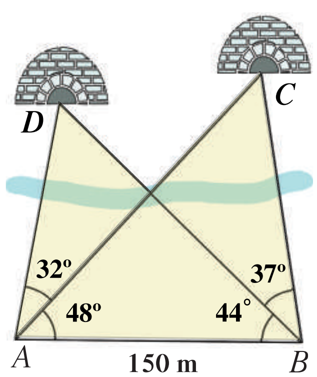
بالتعويض نحصل على: $\text{Area}(BCE) = 839.603 \text{ m}^2$

مجموع مساحات المثلثات الثلاثة: $362.347 + 839.603 + 443.163 = 1\ 645.113$

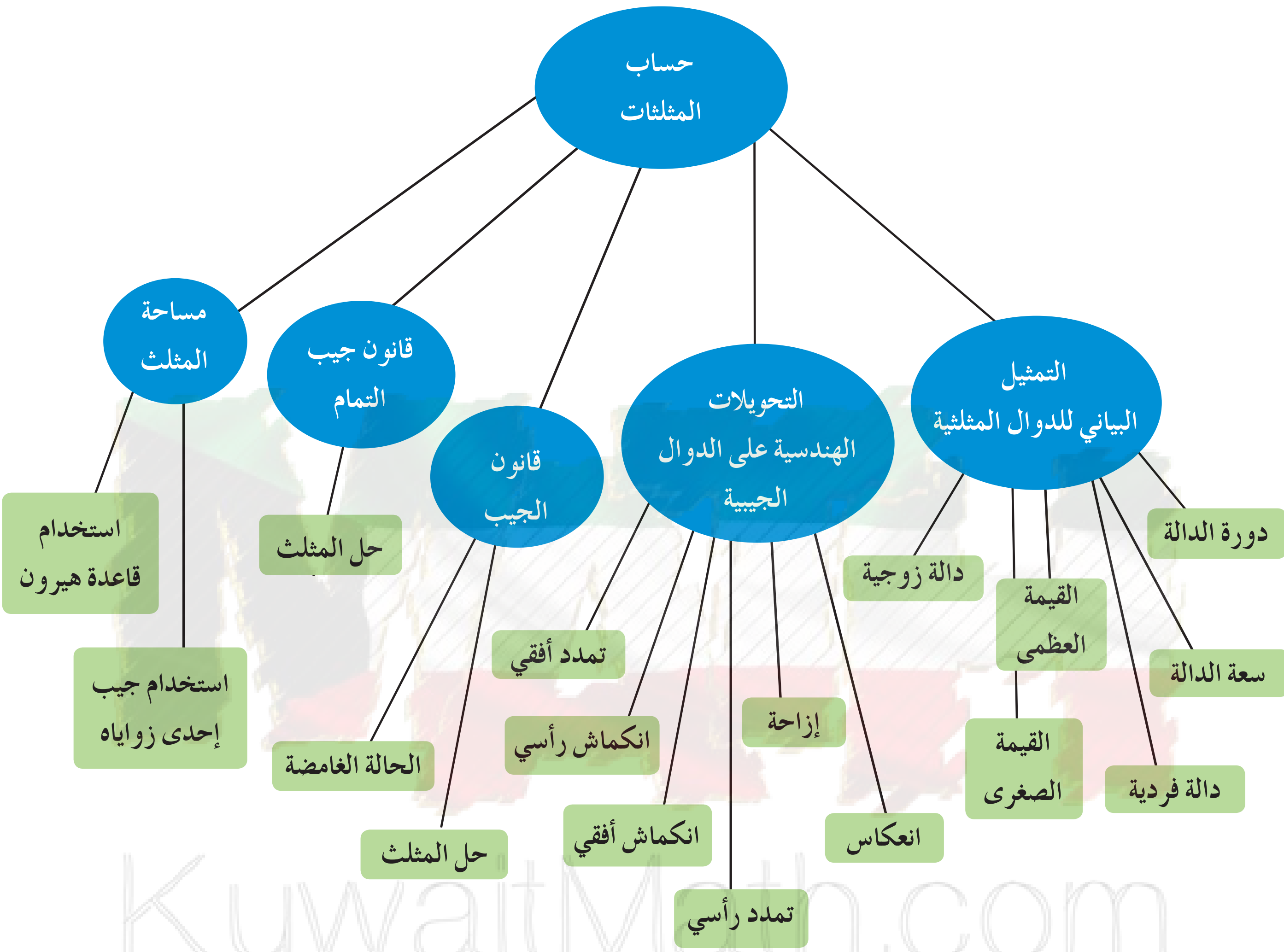
أي حوالى 1645 m^2 ومنه تساوي مساحة البحيرة حوالى 1645 m^2

مسألة إضافية

مستخدمًا معطيات الشكل المقابل، أوجد: DA, CA, DC



مخطط تنظيمي للوحدة الثامنة



ملخص

- دالة الجيب دالة دورية ذات دورة 2π. المقاطع السينية: $x = \pm n\pi$، القيمة العظمى $= 1$ عند $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ حيث n عدد صحيح. والقيمة الصغرى $= -1$ عند $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$، حيث n عدد صحيح.
- دالة جيب التمام دالة دورية ذات دورة 2π، المقاطع السينية: $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi$، القيمة العظمى $= 1$ عند $x = +2n\pi$، حيث n عدد صحيح والقيمة الصغرى $= -1$ عند $x = \pi \pm 2n\pi$، حيث n عدد صحيح.
- التحويلات: تمدد رأسي: $|a| > 1$ انكماش رأسي: $|a| < 1$
  تمدد أفقي: $\frac{1}{|b|} > 1$ انكماش أفقي: $\frac{1}{|b|} < 1$
- سعة الدالة: $f(x) = a\sin(bx - h) + k$ أو $f(x) = a\cos(bx - h) + k$ هي $|a|$
- دورة $y = a\sin(bx)$ أو $y = a\cos(bx)$ هي $\frac{2\pi}{|b|}$

- دالة الظل دالة دورية ذات دورة π، الأصفار: $x = \pm n\pi$
- دالة الجيب، دالة الظل هما دالتان فرديتان. نقطة الأصل مركز تناظر.
- دالة جيب التمام دالة زوجية. محور الصادات محور تناظر.
- قانون الجيب: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$
- قانون جيب التمام: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
- مساحة المثلث $= \frac{1}{2}ab\sin\gamma$
- قاعدة هيرون: $\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

حيث $s = \text{semiperimeter}$ (نصف محيط المثلث).