الوحدة الثالثة

كثيرات الحدود

Polynomials

مشروع الوحدة: المنحنيات بالتصميم

1 **مقدمة المشروع:** يمكن اعتبار المنحنى المرسوم في الشكل أدناه لدالة كثيرة الحدود. تعد هذه الحقيقة محور تصميم السيارة الحديثة. حيث يقوم المصمم أولًا بتصميم أشكال النماذج وفق مقياس معين، يوضح التصميم الأشياء الصغيرة مثل مقابض الأبواب. وعندما تكتمل عملية النمذجة، يتحول كل منحنى في التصميم إلى معادلة تضبط على الحاسوب بواسطة المصمم ويمكن إجراء بعض التعديلات الطفيفة على المعادلة. عندما ينتهي التصميم تستخدم هذه المعلومات لصنع القوالب اللازمة لإنتاج السيارة.

2 **الهدف:** البحث عن تصميم سيارة أو أي شيء آخر له أجزاء منحنية، والرسم على ورقة رسم بياني منحنى الشيء الذي اخترت البحث عنه.

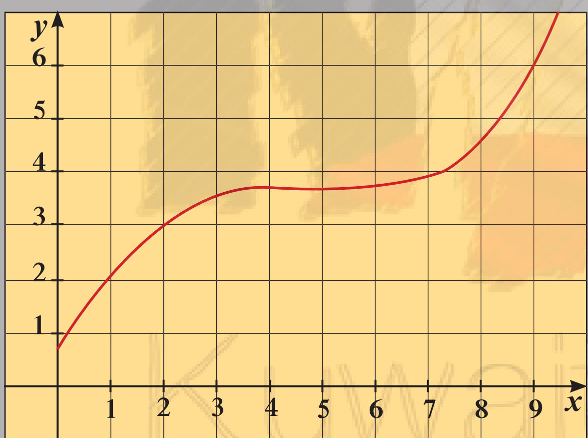
3 **اللوازم:** أوراق رسم، شبكة مربعات، آلة حاسبة بيانية، حاسوب.

4 **أسئلة حول التطبيق:**

نمذج غطاء محرك سيارة جديدة بالمعادلة:

$$y = 0.00143x^4 + 0.00166x^3 - 0.236x^2 + 1.53x + 0.739 \quad , \quad x > 0$$

بيان هذه المعادلة مبين إلى اليسار.



a لنفرض أنك مصمم السيارة، ارسم منحنى تراه مناسبًا أكثر لغطاء المحرك.

b ميّز 4 نقاط على المنحنى واكتب إحداثياتها.

c أوجد المعادلة التكعيبية المتوافقة مع هذه النقاط.

استخدم المعادلة: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

d اختر قسمًا آخر منحنيًا من السيارة ثم اكتب معادلة تنمذج هذا القسم.

5 **التقرير:** ضعْ تقريرًا مفصلًا حول تنفيذ المشروع مستفيدًا من دروس الوحدة.

نفذ ملصقًا لعرض تصميمك ورسومك البيانية التي استخدمتها.

دروس الوحدة

دوال القوى ومعكوساتها	الدوال الحدودية	العوامل الخطية لكثيرات الحدود	قسمة كثيرات الحدود	حل معادلات كثيرات الحدود
3–1	3–2	3–3	3–4	3–5

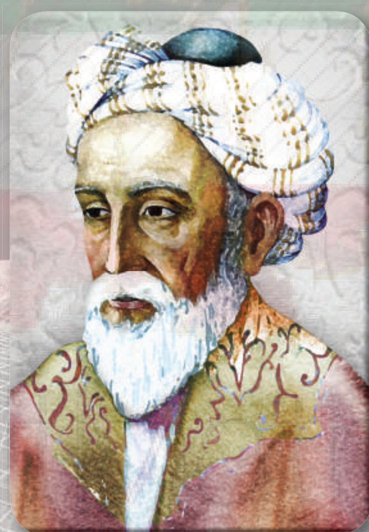
الوحدة الثالثة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كتابة دوال خطية ورسمها بيانيًّا.
- تعلمت حل أنظمة معادلات أو متباينات خطية وحلها جبريًّا وبيانيًّا.
- تعلمت حل معادلات تربيعية.
- تعلمت رسم معادلات تربيعية بيانيًّا.
- تعلمت حل متباينات تربيعية في متغير واحد.

ماذا سوف تتعلم؟

- استكشاف الرسوم البيانية لدوال القوى.
- استخدام القوى والجذور لحل المعادلات.
- وصف منحنيات كثيرات الحدود.
- تحليل كثيرات الحدود إلى عوامل.
- كتابة دالة كثيرة الحدود باستخدام أصفارها.
- حل معادلات كثيرات الحدود بطرق مختلفة.
- قسمة كثيرات الحدود.
- إيجاد أصفار دالة كثيرة الحدود.


عمر الخيام

المصطلحات الأساسية

دالة القوى – معكوس دالة القوى – دالة زوجية – دالة فردية – درجة دالة كثيرة الحدود– الصورة العامة – سلوك النهاية – صورة عوامل – القيمة العظمى النسبية – القيمة الصغرى النسبية – نظرية العامل – القسمة المطولة – القسمة التركيبية – نظرية الباقي – جذور – أصفار كثيرة الحدود – تحليل إلى عوامل – الأصفار النسبية الممكنة.

أضف إلى معلوماتك

عمر الخيام

هو شاعر وفيلسوف تخصص في الرياضيات.

اقترح طريقة لحل معادلات جبرية من الدرجة الثالثة تقوم على إيجاد التقاطع بين قطع مكافئ وقطع زائد.

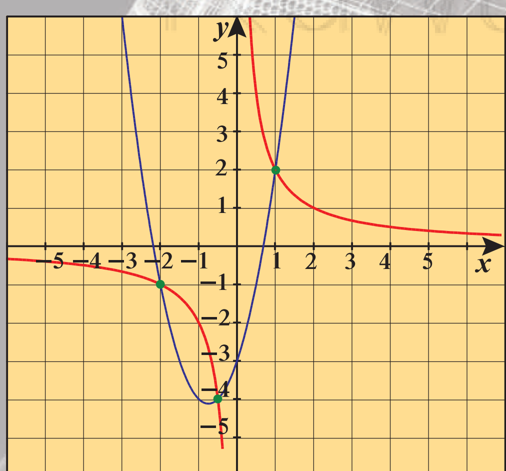
وفي عصرنا الحالي، حيث يمكن استخدام الحاسوب في وضع رسوم دقيقة لدوال القوى. أصبحت طريقة عمر الخيام من أفضل الطرق المتبعة لحل معادلات الدرجة الثالثة.

مثال على ذلك:

$$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$2x^3 + 3x^2 - 3x = 2$$

$$2x^2 + 3x - 3 = \frac{2}{x} \quad (x \neq 0)$$



3-1

دوال القوى ومعكوساتها

Power Functions and their Inverses

سوف تتعلم
- استكشاف الرسوم البيانية لدوال القوى.
- استخدام القوى والجذور لحل المعادلات.

المفردات والمصطلحات:
- دوال القوى Power Functions
- دالة فردية Odd Function
- دالة زوجية Even Function
- المجال Domain

معلومة: مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة رمزها: $\mathbb{Z}^+$

ملاحظة: $y = ax^n$ يمكن كتابتها أيضًا على الصورة: $f(x) = ax^n$

عمل تعاوني

1 استخدم آلة حاسبة لحل النظام: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^4 \end{cases}$ تحقق من كل حل.

2 يبيّن الجدول المقابل $y_1 = x^2$, $y_2 = x^4$
ما قيم x في الجدول التي تحقق $x^2 < x^4$؟
ما قيم x في الجدول التي تحقق $x^2 > x^4$؟

x	$y_1 = x^2$	$y_2 = x^4$
-1.6	2.56	6.5536
-1.2	1.44	2.0736
-0.8	0.64	0.4096
-0.4	0.16	0.0256
0	0	0
0.4	0.16	0.0256
0.8	0.64	0.4096
1.2	1.44	2.0736
1.6	2.56	6.5536

3 استخدم رسمًا بيانيًّا لإيجاد مجموعة حل كل من المتباينتين:

a $x^2 < x^4$ b $x^2 > x^4$

4 أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^6 < x^4$
ارسم بيانيًّا دالة القوى: $y = x^6$ باستخدام آلة حاسبة بيانية وتحقق من إجابتك.

استكشاف دوال القوى ومعكوساتها

Exploring Power Functions and their Inverses

الدوال مثل: $y = x^4$، $w = 0.014\,c^3$ هي دوال قوى.

تكون دوال القوى على الشكل:

$$y = ax^n,\quad a \neq 0,\quad n \in \mathbb{Z}^+$$

مثال (1) تطبيقات حياتية

تستخدم الصيغة: $w = 0.014\,c^3$ لتقدير وزن w برتقالة بالجرام (g)، بدلالة c محيط أكبر مقطع دائري فيها بالسنتيمتر (cm). قدّر وزن برتقالة محيط أكبر مقطع دائري فيها 20 cm

الحل:

$w = 0.014\,c^3$

$= 0.014\,(20)^3$ عوّض عن c بـ 20

$= 112$ g

يكون وزن البرتقالة التي يبلغ محيطها 20 cm حوالى 112 g

حاول أن تحل

1 قدّر وزن برتقالة محيط أكبرمقطع دائري فيها 22 cm باستخدام الصيغة في مثال (1).

مثال (2) علم الحيوان

الدالة $w(x) = 15.625x^3$، هي تقريب للوزن «w» بالكجم (kg) لأنثى الزرافة بدلالة طولها «x» بالمتر (m). أوجد وزن كل من إناث الزرافة التي طولها 3.268m ، 3.175m

الحل:

احسب $w(x)$ للطولين.

$w(x) = 15.625\, x^3$

$w(3.175) = 15.625 \times (3.175)^3 \approx 500\,\text{kg}$

$w(3.268) = 15.625 \times (3.268)^3 \approx 545.34\ \text{kg}$

حاول أن تحل

2 في المثال (2)، أوجد وزن زرافة طولها 3.3 m

نشاط 1

يوضح الجدول المقابل بعض القيم للدالة $y = x^3$

x	y
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

أكمل ما يلي:

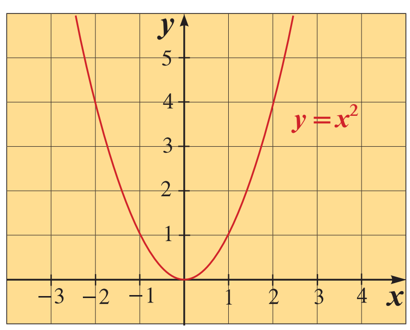
a في أي ربعين من المستوى الإحداثي تتوقع ظهور الرسم البياني لهذه الدالة؟

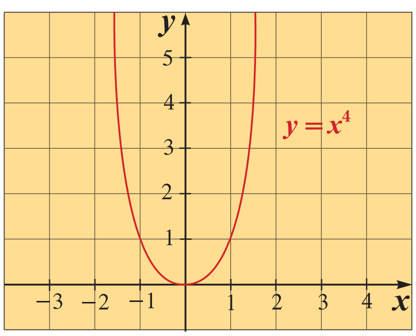
b أكمل كل زوج من النقاط التي تنتمي إلى بيان الدالة: $(4, 64)$، $(-4, \square)$، $(-0.5, -0.125)$، $(\square, 0.125)$

c لنفرض أن النقطة (a, b) تنتمي إلى بيان الدالة: $y = x^3$، فأي من النقاط التالية سوف تنتمي أيضًا إلى بيان هذه الدالة؟

1 $(a, -b)$ 2 $(-a, b)$ 3 $(-a, -b)$ 4 $(2a, 3b)$

مما سبق ومن فقرة «عمل تعاوني» لاحظنا أن بيان الدوال ذات الأسس الزوجية مثل: $y = x^4$، $y = x^2$ كما في الشكلين أدناه.



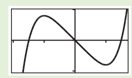


وهذا يمثل الشكل العام للدوال التي على الصورة $y = ax^n$ حيث n عددًا زوجيًّا موجبًا، $a \neq 0$.

الربط بالتكنولوجيا:

استخدام الآلة الحاسبة البيانية

• في أعلى الشاشة اضغط على



يظهر على الشاشة

$y_1 = \square$

$y_2 = \square$

$y_3 = \square$

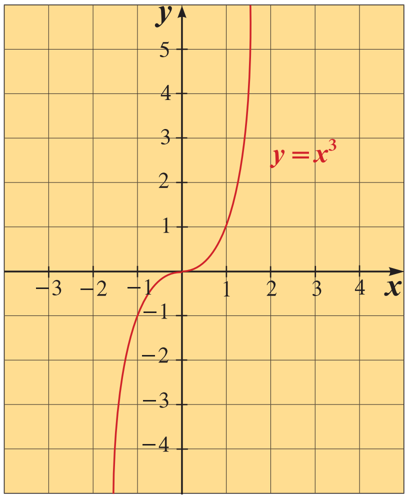
$y_4 = \square$

(يمكن رسم بيانات عدة دوال معًا) فمثلاً للحصول على بيان الدالة: $y = x^4$

• اضغط على المربع قرب y1 فتظهر علامة ✓ داخله

• اضغط على x ثم ^ يليه 4 ثم =

كذلك لاحظنا من "نشاط 1" أن بيان الدوال ذات الأسس الفردية مثل $y = x^3$ كما في الشكل:



وهذا يمثل الشكل العام للدوال التي على الصورة **$y = ax^n$ حيث n عددًا فرديًّا موجبًا، $a \neq 0$.**

الدوال الزوجية والدوال الفردية Even Functions and Odd Functions

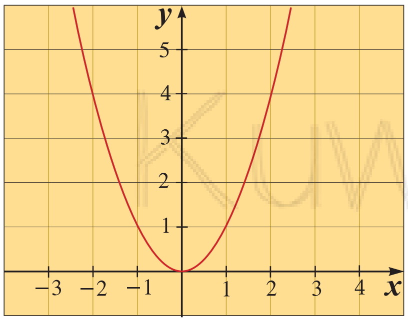
تعريف

تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D دالة زوجية إذا وفقط إذا كان:

1. $\forall x \in D \ , \ -x \in D$
2. $f(-x) = f(x)$

في مستوى الإحداثيات، المحور الصادي هو محور تماثل (تناظر) لبيان كل دالة زوجية.

فمثلًا: $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 , h(x) = x^4$ ، هما دالتان زوجيتان مجال كل منهما $\mathbb{R}$.



وذلك لأن: $\forall x \in \mathbb{R}$ ، $-x \in \mathbb{R}$

فإن: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

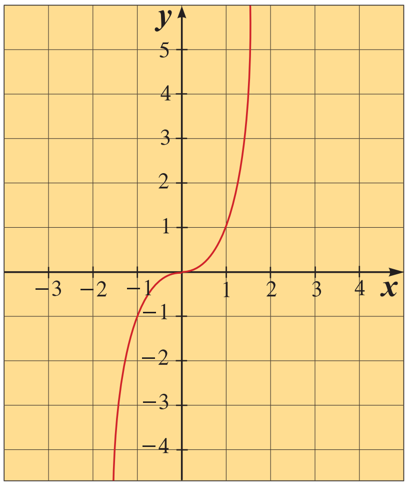
وكذلك: $h(-x) = (-x)^4 = x^4 = h(x)$

تعريف

تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D دالة فردية

إذا وفقط إذا كان:

1. $\forall x \in D \ , \ -x \in D$
2. $f(-x) = -f(x)$



في مستوى الإحداثيات نقطة الأصل هي نقطة تماثل (تناظر) لبيان كل دالة فردية.

فمثلًا: $\forall x \in \mathbb{R}$ ، الدالة: $f(x) = x^3$ هي دالة فردية.

وذلك لأن: $\forall x \in \mathbb{R} \ , \ -x \in \mathbb{R}$

فإن: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

معلومة

يكون لبيان دالة نقطة تماثل (مركز تناظر) إذا دار بيان الدالة بزاوية قياسها $180°$ حول هذه النقطة وانطبق على نفسه.

ملاحظة:

توجد دوال ليست زوجية وليست فردية.

مثال (3)

بيّن ما إذا كانت كل دالة مما يلي زوجية أو فردية أو ليست زوجية وليست فردية.

a $f(x) = 2x^7$

b $y = -x^8$

c $y = (x+2)^2$

d $h(x) = 4$

الحل:

a $f(x) = 2x^7$

$f(-x) = 2(-x)^7 = -2x^7 = -f(x) \qquad \forall x\,,\ -x \in \mathbb{R}$

∴ الدالة فردية لأن : $f(-x) = -f(x)$

b $y = -x^8$

بفرض أن $y = g(x)$

$g(-x) = -(-x)^8 = -x^8 = g(x) \qquad \forall x\,,\ -x \in \mathbb{R}$

∴ الدالة زوجية لأن: $g(-x) = g(x)$

c $y = (x+2)^2$

بفرض أن $y = v(x)$

$v(-x) = (-x+2)^2 \neq (x+2)^2 \qquad \forall x\,,\ -x \in \mathbb{R}$

∴ الدالة ليست زوجية: $v(-x) \neq v(x)$

$v(-x) \neq -(x+2)^2$

∴ الدالة ليست فردية $v(-x) \neq -v(x)$

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

d $h(x) = 4$

$h(-x) = 4 = h(x) \qquad \forall x\,,\ -x \in \mathbb{R}$

∴ الدالة زوجية لأن: $h(-x) = h(x)$

حاول أن تحل

3 بيّن ما إذا كانت كل دالة مما يلي زوجية أو فردية أو ليست زوجية وليست فردية.

a $f_1(x) = x^5$

b $f_2(x) = x$

c $f_3(x) = 2x^4$

d $f_4(x) = (x+3)^3$

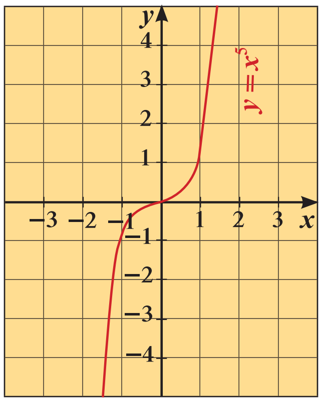
تذكر:

إذا لم يذكر المجال تكون الدالة معرّفة على مجالها.

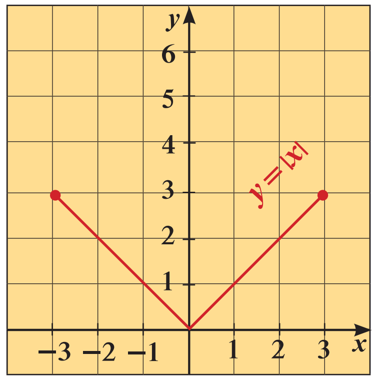
مثال (4)

الأشكال التالية تمثل دوال. صف تماثل كل دالة ثم وضّح هل هي زوجية أم فردية أم ليست زوجية وليست فردية.

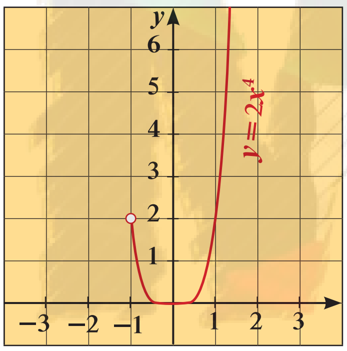
a $y = x^5, \quad x \in \mathbb{R}$



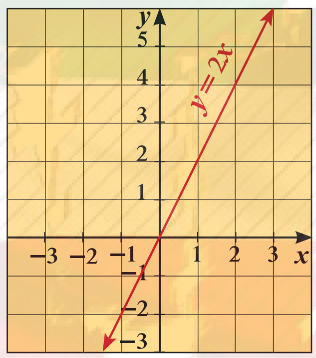
b $y = |x|, \quad x \in [-3, 3]$



c $y = 2x^4, \quad x \in (-1, \infty)$



d $y = 2x, \quad x \in \mathbb{R}$



الحل:

a ∵ نقطة الأصل هي نقطة تماثل (تناظر) ∴ الدالة فردية

b ∵ المحور الصادي هو محور تماثل (تناظر) ∴ الدالة زوجية

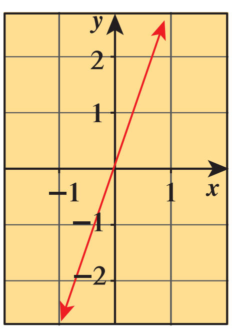
c ∵ ليس لها نقطة تناظر ولا محور تناظر ∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

d ∵ نقطة الأصل هي نقطة تماثل (تناظر) ∴ الدالة فردية

حاول أن تحل

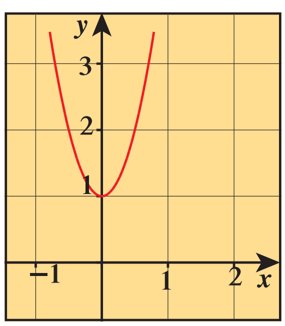
4 الأشكال التالية تمثل دوال. صف تماثل كل دالة ثم وضّح هل هي فردية أم زوجية أم ليست فردية وليست زوجية.

a



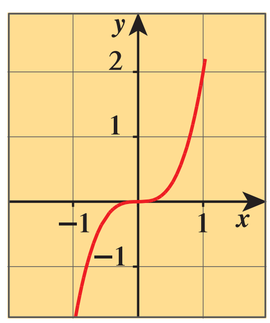
$y = 3x$

b



$y = 4x^2 + 1$

c

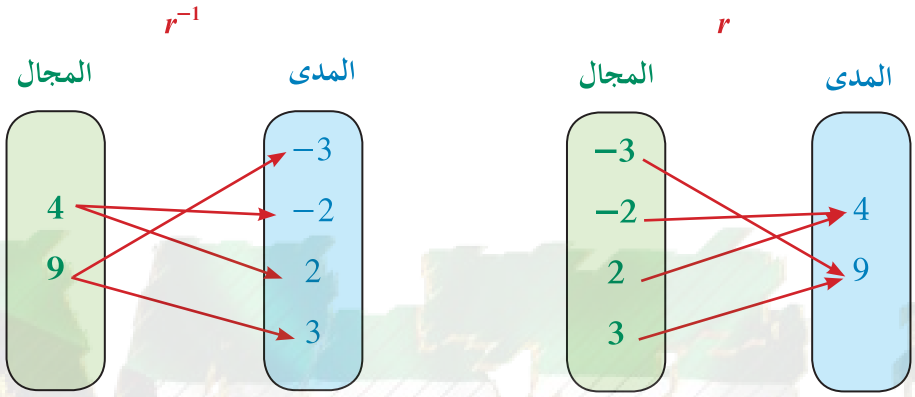


$y = 2x^3$

معكوس العلاقة (r^{-1}) Inverse Relation (r^{-1})

تعرّفت في الوحدة الثانية على معكوس العلاقة. ونذكر بالنقاط التالية:

- إذا كانت علاقة r تربط عنصرًا a من المجال بعنصر b من المدى، فمعكوس العلاقة يربط العنصر b بالعنصر a.
- إذا كان (a, b) عنصرًا من العلاقة r فإن (b, a) هو عنصر من معكوس العلاقة r^{-1}.
- مجال معكوس العلاقة (r^{-1}) هو مدى العلاقة r.
- المستقيم الذي معادلته: $y = x$ هو خط تناظر بين النقاط التي تمثل العلاقة r والنقاط التي تمثل معكوسها.



بعض العلاقات تعتبر دوال لذلك إذا كان لدينا دالة فيمكننا إيجاد معكوسها مع ملاحظة أنه ليس بالضرورة أن يكون المعكوس دالة.

مثال (5)

أوجد معكوس الدالة: $y = 2x^4$

الحل:

لاحظ أن $y \geq 0$ — $y = 2x^4$

اعكس المتغيرين x , y — $x = 2y^4$

حل بالنسبة إلى المتغير y — $\frac{x}{2} = y^4$

أوجد الجذر الرابع لكل من الطرفين — $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = (y^4)^{\frac{1}{4}} \Longrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = |y| \ , \ x \geqslant 0$

$\pm\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = y$

معكوس $y = 2x^4$ هو $y = \pm\sqrt[4]{\frac{x}{2}}$

حاول أن تحل

5 أوجد معكوس الدالة: $y = 5x^3$

مثال (6)

أوجد معكوس الدالة: $f(x) = \sqrt{x+2}$

الحل: $f(x) = \sqrt{x+2} \quad , \quad x \geqslant -2$

أعد كتابة الدالة باستخدام y: $y = \sqrt{x+2}$

اعكس المتغيرين x , y: $x = \sqrt{y+2}$

ربّع طرفي المعادلة: $x^2 = y+2$

حل في y: $y = x^2 - 2$

$\therefore$ معكوس الدالة $f(x) = \sqrt{x+2}$ هو

$f^{-1}(x) = x^2 - 2 \quad , \quad x \geqslant 0$

حاول أن تحل

6 أوجد معكوس الدالة: $f(x) = \sqrt{x-4}$

معلومة:

يرمز لمعكوس الدالة f بالرمز f^{-1}

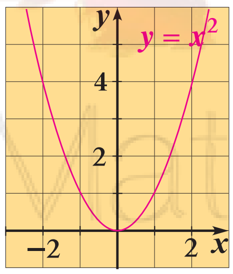
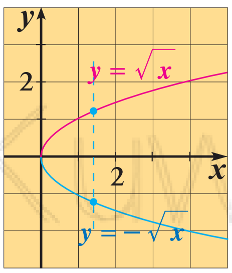
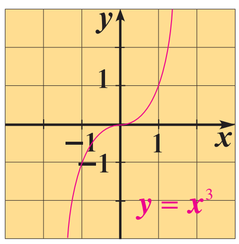
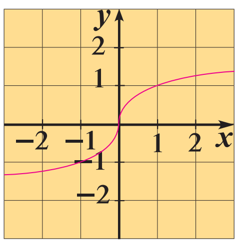
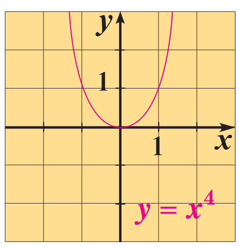
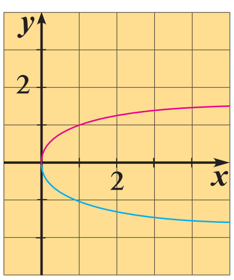
معلومة:

- إذا كانت النقطة (a, b) تقع على بيان دالة ما فإن (b, a) تقع على بيان معكوسها.
- عندما يقطع مستقيم رأسي المنحنى في موضعين فهذا المنحنى لا يمثل دالة.

تدريب

تفحص بدقة الرسوم البيانية لدوال القوى ومعكوساتها ثم أكمل الجدول.

لاحظ العلاقة بين مدى الدالة ومجال معكوسها.

دوال القوى	بيان الدالة	المعكوس	بيان المعكوس	ملاحظات
$y = x^2$		$y = \pm\sqrt{x}$		المعكوس ليس دالة
$y = x^3$		....		....
$y = x^4$		....		....

الدوال الحدودية

Polynomial Functions

سوف تتعلم

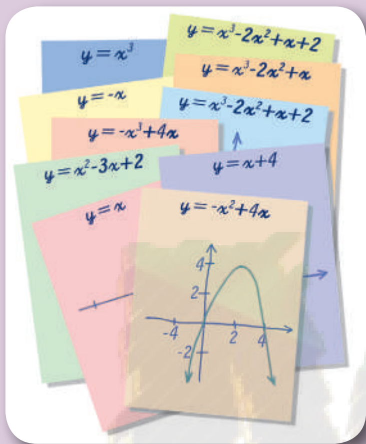
- وصف منحنيات كثيرات الحدود.
- نمذجة بيانات باستخدام دوال كثيرات الحدود.
- وصف سلوك النهاية لدوال كثيرات الحدود.

المفردات والمصطلحات:

- المعامل الرئيسي Leading Coefficient
- حد تكعيبي Cubic Term
- حد تربيعي Quadratic Term
- حد خطي Linear Term
- حد ثابت Constant Term
- درجة Degree
- الصورة العامة General Form
- سلوك النهاية End Behavior
- حدودية أو كثيرة حدود Polynomial

عمل تعاوني

1 اعمل في مجموعات. كل مجموعة تحتاج إلى آلة حاسبة بيانية وعشر بطاقات ورقية. ارسم بيانيًا كل دالة مكتوبة جهة اليسار وخطط كل رسم على بطاقة منفصلة. عنون كل رسم بمعادلته.



2 صنّف الرسوم البيانية في مجموعات تبعًا لأشكالها.

3 فيمَ تتشابه الرسوم البيانية للمعادلات الخطية؟

4 فيمَ تتشابه الرسوم البيانية للمعادلات التربيعية؟

5 فيمَ تتشابه الرسوم البيانية للمعادلات المتبقية؟ وفيمَ تختلف؟

6 a قدر الجزء (الأجزاء) المقطوع من محور السينات لكل رسم بياني واكتبه على البطاقة الخاصة به.

b ماذا تلاحظ بالنسبة إلى عدد الأجزاء المقطوعة من محور السينات في كل رسم بياني وأكبر أس يوجد في معادلته؟

عندما تجمع دوال قوى وثوابت أو تطرحها فإنك تحصل على **دالة حدودية (دالة كثيرة الحدود)**.

تعريف الدالة الحدودية (كثيرة الحدود)

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث n عدد صحيح غير سالب.

$a_n\ ,\ a_{n-1}\ ,\ a_{n-2}\ \dots,\ a_0$ أعدادًا حقيقية

الدوال في «عمل تعاوني» كلها دوال كثيرات الحدود مثل الدالة $P(x)$ التالية:

دالة كثيرة حدود

$$P(x) = \boxed{2}x^3 - 5x^2 - 2x - 5$$

المعامل الرئيسي — حد تكعيبي — حد تربيعي — حد خطي — حد ثابت

يحدد الأس في كل حد **درجة** الحد. الحدود في كثيرة الحدود الموضحة أعلاه مرتبة تنازليًّا بحسب درجاتها. هذا الترتيب يسمى **بالصورة العامة**. وفي الصورة العامة تجمع كل الحدود المتشابهة. يمكنك أن تصف أو تصنف كثيرة الحدود في الصورة العامة بعدد الحدود التي تحتويها أو **بأعلى درجة لها**.

الحدودية	الدرجة	الاسم باستخدام الدرجة	عدد الحدود	الاسم باستخدام عدد الحدود
6	الصفرية	ثابتة	1	أحادية
$x + 3$	الأولى	خطية	2	ثنائية
$3x^2 + 5x - 2$	الثانية	تربيعية	3	ثلاثية
$2x^3 - 5x^2$	الثالثة	تكعيبية	2	ثنائية
$-x^4 + x^3 - 1$	الرابعة	ذات القوة الرابعة	3	ثلاثية

ملاحظة:

إذا كانت الدالة الحدودية من الدرجة n فإن لها على الأكثر $(n + 1)$ حدًّا.

مثال (1)

اكتب كل كثيرة حدود بالصورة العامة ثم صنفها تبعًا للدرجة وعدد الحدود.

(a) $-7x + 5x^4$ (b) $5x^3 - (4x^2 + 5x^3) + 2x^2$ (c) $(2l - 5)(l^2 - 1)$

الحل:

(a) $-7x + 5x^4 = 5x^4 - 7x$

الحد الذي له أكبر درجة هو $5x^4$

∴ حدودية من الدرجة الرابعة.

لها حدان ∴ ثنائية.

(b) $5x^3 - (4x^2 + 5x^3) + 2x^2$

$= 5x^3 - 4x^2 - 5x^3 + 2x^2$

$= -2x^2$

الحد الذي له أكبر درجة هو $-2x^2$

∴ حدودية من الدرجة الثانية.

لها حد واحد ∴ أحادية.

(c) $(2l - 5)(l^2 - 1)$

$= 2l^3 - 2l - 5l^2 + 5$

$= 2l^3 - 5l^2 - 2l + 5$

الحد الذي له أكبر درجة هو $2l^3$

∴ حدودية من الدرجة الثالثة.

لها أربعة حدود ∴ رباعية.

حاول أن تحل

1 اكتب كل كثيرة حدود بالصورة العامة ثم صنفها تبعاً للدرجة وعدد الحدود.

a $4x - 6x + 5$ b $3x^3 + x^2 - (4x + 2x^3)$ c $6 - 2x^5$

معلومة: يبلغ وزن أونصة الذهب once (oz). أي حوالي 28.349 g. 28.35 g.

لقد استخدمت سابقًا الخطوط المستقيمة والمنحنيات لتمثيل البيانات.

يمكنك أحيانًا إحكام تمثيل البيانات باستخدام كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة أو أكثر.

نشاط إثرائي (الربط بالحياة)

يبيّن الجدول أدناه إنتاج العالم من الذهب لعدة سنوات. أوجد كثيرة حدود من الدرجة الرابعة لنمذجة البيانات، ثم استخدمها لتقدير الإنتاج العالمي من الذهب سنة 1988.

السنة	1975	1980	1985	1990	1995	2000
الإنتاج مليون أونصة	38.5	39.2	49.3	70.2	71.6	82.6

ملاحظة: يجب اختيار آلة حاسبة لها هذه الخاصية وتتغير طريقة البرمجة من آلة إلى أخرى.

الحل:

استخدم آلة حاسبة بيانية.

أدخل البيانات. ليكن 0 يمثل 1975.

استخدم نموذجًا من الدرجة الرابعة.

ارسم بيانيًّا نموذج كثيرة الحدود:

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + ... + a_0$$

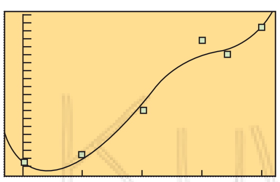
$$a_4 = 9.0333333 \times 10^{-4}$$

$$a_3 = -0.0519296296$$

$$a_2 = 0.9590277778$$

$$a_1 = -3.898753421$$

$$a_0 = 38.85753968$$



يظهر على شاشة الآلة الحاسبة

ملاحظة: يمثل العدد 13 سنة 1988.

المعادلة: $f(x) = 0.0009033x^4 - 0.05193x^3 + 0.959x^2 - 3.899x + 38.86$

هي نموذج تقديري من الدرجة الرابعة.

لتقدير قيمة إنتاج الذهب سنة 1988 نستخدم جدول القيم.

$f(13) \approx 61.96$

استنادًا لهذا النموذج، يقدر إنتاج الذهب سنة 1988 بحوالى 62 مليون أونصة.

• استخدم كثيرة الحدود في هذا النشاط لتقدير إنتاج الذهب سنة 1997.

جدول القيم

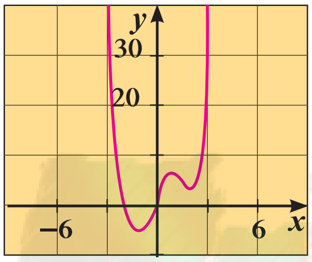
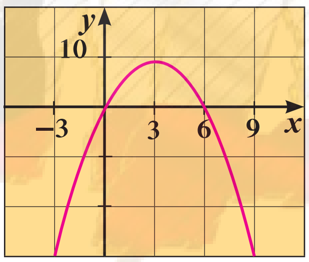
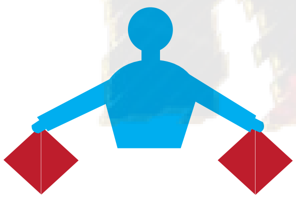
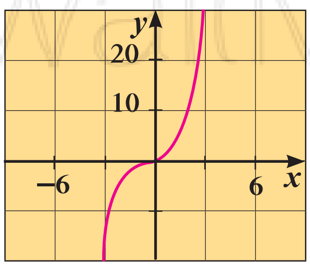
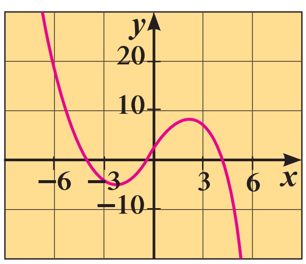
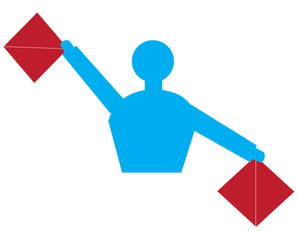
x	y
8	46.157
9	49.519
10	52.875
11	56.12
12	59.168
13	61.959

سلوك النهاية End Behavior

سلوك النهاية لمنحنى دالة يصف امتداد طرفيه الأيمن والأيسر، وتوجد أربعة نماذج لسلوك النهاية لكثيرة حدود وهي لأعلى ولأعلى، لأسفل ولأسفل، لأعلى ولأسفل، لأسفل ولأعلى.

وهذا نظام لإعطاء الإشارات بواسطة علمين يوضح النماذج الأربعة لسلوك النهاية.

لكل دالة كثيرة حدود مبينة أدناه يعين سلوك النهاية بواسطة الحد الذي له أعلى درجة في كثيرة الحدود.

الدرجة زوجي أم فردي	سلوك النهاية	المعامل الرئيسي موجب، سالب	الدالة وبيانها	نظام الإشارات
الرابعة زوجي	(↖ ، ↗)	1 عدد موجب	 $y = x^4 - 3x^3 + 5x$	
الثانية زوجي	(↙ ، ↘)	-1 عدد سالب	 $y = -x^2 + 6x$	
الثالثة فردي	(↙ ، ↗)	1 عدد موجب	 $y = x^3$	
الثالثة فردي	(↖ ، ↘)	-0.3 عدد سالب	 $y = -0.3x^3 + 4x + 2$	

مثال (2)

وضّح سلوك النهاية لبيان كل دالة كثيرة الحدود.

a $y = 4x^3 - 3x$

b $f(x) = -2x^4 + 8x^3 - 8x^2$

c $g(x) = x^2 - 4x + 3$

d $h(x) = -x^3 + 2x + 2$

الحل:

a المعامل الرئيسي 4 (عدد موجب)

∴ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأعلى.

∵ كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة (فردي).

∴ سلوك النهاية جهة اليسار معاكس لسلوك النهاية جهة اليمين أي لأسفل.

∴ سلوك النهاية هو (↗، ↙).

b المعامل الرئيسي 2− (عدد سالب)

∴ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأسفل.

∵ كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة (زوجي).

∴ سلوك النهاية جهة اليسار هو نفسه سلوك النهاية جهة اليمين أي لأسفل.

∴ سلوك النهاية هو (↘، ↙).

c المعامل الرئيسي 1 (عدد موجب)

∴ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأعلى.

∵ كثيرة الحدود من الدرجة الثانية (زوجي).

∴ سلوك النهاية جهة اليسار هو نفسه سلوك النهاية جهة اليمين أي لأعلى.

∴ سلوك النهاية هو (↗، ↖).

d المعامل الرئيسي 1− (عدد سالب)

∴ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأسفل.

∵ كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة (فردي).

∴ سلوك النهاية جهة اليسار معاكس لسلوك النهاية جهة اليمين أي لأعلى.

∴ سلوك النهاية هو (↘، ↖).

حاول أن تحل

2 وضّح سلوك النهاية لبيان كل دالة كثيرة الحدود.

a $y = -x^3 + 2x^2 + 6$

b $y = 4x^4 - 3x$

c $f(x) = 2x^3 - x$

d $h(x) = x - x^4$

3-3

العوامل الخطية لكثيرات الحدود

Linear Factors of Polynomials

سوف تتعلم

- تحليل كثيرة الحدود إلى عوامل.
- كتابة دالة كثيرة الحدود باستخدام أصفارها.
- الربط بين الأصفار والعوامل.

المفردات والمصطلحات:

- القيمة العظمى Maximum Value
- عوامل دالة حدودية Factors of a Polynomial Function
- أصفار دالة حدودية Zeros of a Polynomial Function
- نظرية العامل Factor Theorem

دعنا نفكر ونتناقش

كثيرة الحدود في صورة عوامل

من المفيد أحياناً التعامل مع كثيرات الحدود في صورة عوامل.

فمثلاً عوامل كثيرة الحدود: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ هي:

$(x-1)$, $(x+2)$,$(x-3)$

1 كيف يمكنك التحقق من أن: $(x-3)$, $(x+2)$, $(x-1)$، هي عوامل لكثيرة الحدود: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$؟

2 ما العلاقة بين كل حد ثابت لعوامل كثيرة الحدود وعوامل الحد الثابت 6؟

عندما نحلل كثيرة الحدود إلى عوامل خطية فلا يمكن القيام بتحليلات أخرى لإيجاد عوامل إضافية.

معلومة:

عندما نقول عوامل العدد فإننا نعني بها العوامل الموجبة والعوامل السالبة لهذا العدد.

فمثلاً: عوامل العدد 6 هي:

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

مثال (1)

اكتب التعبير: $(x+1)(x+2)(x+5)$ في شكل كثيرة حدود في الصورة العامة.

الحل:

اضرب $(x+2)$، $(x+5)$ $\qquad (x+1)(x+2)(x+5) = (x+1)(x^2+5x+2x+10)$

بسّط $\qquad = (x+1)(x^2+7x+10)$

اضرب $\qquad = x^3+7x^2+10x+x^2+7x+10$

بسّط $\qquad = x^3+8x^2+17x+10$

الصورة العامة للتعبير $(x+1)(x+2)(x+5)$ هي $x^3+8x^2+17x+10$

حاول أن تحل

1 اكتب التعبير: $(x+1)(x+1)(x-2)$ في شكل كثيرة حدود في الصورة العامة.

مثال (2)

حلّل كثيرة الحدود: $2x^3 + 10x^2 + 12x$ إلى عوامل ثم تحقق.

الحل:

$2x$ عامل مشترك — $2x^3 + 10x^2 + 12x = 2x(x^2 + 5x + 6)$

حلّل $x^2 + 5x + 6$ إلى عوامل — $= 2x(x+2)(x+3)$

اضرب $(x+2)$, $(x+3)$ — تحقق: $2x(x+2)(x+3) = 2x(x^2 + 5x + 6)$

✓ — $= 2x^3 + 10x^2 + 12x$

حاول أن تحل

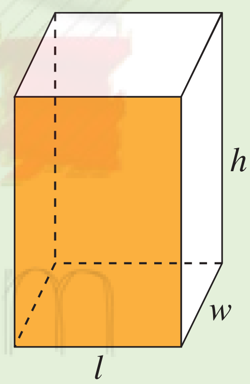
2 حلّل كثيرة الحدود: $12x^3 - 12x^2 + 3x$ إلى عوامل، ثم تحقق.

يمكنك استخدام دوال كثيرات الحدود لحل مسائل حياتية.

اعتبر الدالة التالية للحجم: ح = الطول × العرض × العمق (الارتفاع)

$$V = l \cdot w \cdot h$$

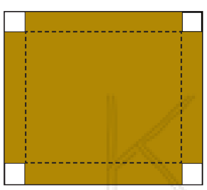
واعتبر كل من هذه الأبعاد هو عامل خطي للدالة كثيرة الحدود.

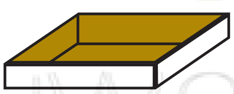


الطول Length l
العرض Width w
الارتفاع Height h

مثال (3) تطبيقات حياتية

نريد صنع علبة دون غطاء من قطعة كرتون مربعة الشكل طول ضلعها 3 dm لذلك نقطع من كل زاوية قطعة مربعة طول ضلعها x dm، ثم بالطي واللصق نحصل على العلبة.





a كوِّن الدالة التي تربط حجم العلبة (V)، بـ (x)

b صف المجال الواقعي للدالة.

الحل:

a إذا اقتطعنا مربعًا من كل زاوية، يصبح طول ضلع القطعة $(3 - 2x)$،

وتصبح أبعادها: $x\,,\ (3-2x)\,,\ (3-2x)$

العلاقة: الحجم = الطول × العرض × الارتفاع — $V = l \cdot w \cdot h$

عوّض — $V = (3-2x)(3-2x)x$

بسّط — $V = 4x^3 - 12x^2 + 9x$

∴ دالة الحجم بدلالة x هي:

$$V(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$$

b $\because x \quad , \quad (3-2x)$ أبعادًا للعلبة

$\therefore\ 3 - 2x > 0 \quad , \quad x > 0$

$\therefore\ x < 1.5 \quad , \quad x > 0$

وبذلك يكون المجال الواقعي: $(0\,,\ 1.5)$

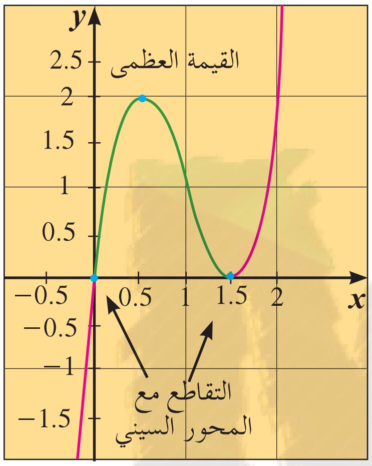
حاول أن تحل

3 قطعة خشب على شكل شبه مكعب طولها 12 cm وعرضها 8 cm وسماكتها $x\text{ cm}$. اقتطع من إحدى زواياها مكعب طول حرفه $x\text{ cm}$

a كوّن الدالة التي تربط حجم قطعة الخشب المتبقي بـ x

b صف المجال الواقعي للدالة.

الشكل المقابل يمثل بيان الدالة: $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$ من مثال (3)



ونلاحظ أن:

$x = 1.5$ هو صفر مكرر و $x = 0$ هو صفر بسيط

الأجزاء المقطوعة من محور السينات تسمى **أصفار الدالة**، لأن قيمة الدالة تساوي صفرًا عند هذه الأجزاء.

نستنتج أن القيمة العظمى للدالة على المجال $(0, 1.5)$ هي 2 عندما تكون $x = 0.5$.

أي أن القيمة العظمى لحجم العلبة هي 2 dm^3 عندما يكون ارتفاع العلبة 0.5 dm وطول ضلع القاعدة المربعة:

$3 - 2 \times (0.5) = 2\text{ dm}$

عوامل وأصفار دالة كثيرة الحدود

Factors and Zeros of a Polynomial Function

إذا كانت دالة كثيرة الحدود في صورة العوامل، فإنه بإمكانك استخدام خاصية الضرب في الصفر لإيجاد القيم التي تجعل الدالة تساوي صفرًا.

مراجعة سريعة:

تنص خاصية الضرب في الصفر على أنه عندما يساوي ناتج الضرب صفرًا، فإن أحد العوامل على الأقل يجب أن يساوي صفرًا.

مثال (4)

أوجد أصفار $y = (x-2)(x+1)(x+3)$ ،

ثم ارسم بيانًا تقريبيًا للدالة مراعيًا سلوك نهاية الدالة.

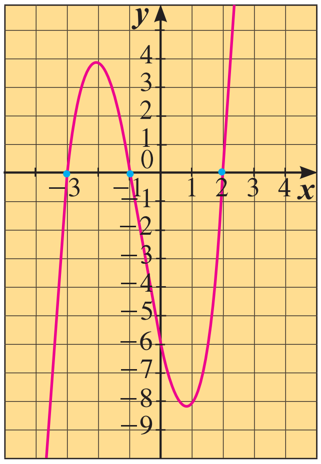
الحل:

باستخدام خاصية الضرب في الصفر، أوجد صفرًا لكل عامل خطي.

$x - 2 = 0$ أو $x + 1 = 0$ أو $x + 3 = 0$

$x = 2$ $\quad$ $x = -1$ $\quad$ $x = -3$

$\therefore$ أصفار الدالة هي: $2, -1, -3$



$y = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$

لرسم بيان تقريبي للدالة:

أصفار الدالة هي: $2, -1, -3$

سلوك النهاية:

$\because$ المعامل الرئيسي موجب (لماذا؟)

$\therefore$ سلوك النهاية جهة اليمين لأعلى

$\because$ الحدودية من الدرجة الثالثة (لماذا؟)

$\therefore$ سلوك النهاية جهة اليسار معاكس

لسلوك النهاية جهة اليمين (لأسفل).

$\therefore$ سلوك النهاية ($\nearrow$، $\swarrow$).

نكوّن الجدول:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-18	0	4	0	-6	-8	0	24

حاول أن تحل

4 أوجد أصفار الدالة $y = (x - 7)(x - 5)(3 - x)$،

ثم ارسم بيانًا تقريبيًّا للدالة مراعيًا سلوك نهاية الدالة.

معلومة:
كلما أوجدنا نقاطًا أكثر تنتمي إلى بيان الدالة يكون الرسم أكثر دقة.

يمكنك عكس هذه العمليات وكتابة العوامل الخطية عندما تعلم أصفار الدالة.

تسمى هذه العلاقة **بنظرية العامل**.

نظرية العامل

المقدار $(x - a)$ هو عامل خطي لكثيرة الحدود $\Longleftrightarrow$ a صفر من أصفار كثيرة الحدود.

معلومة:
الرمز $\Longleftrightarrow$ يقرأ إذا وفقط إذا

ويعني أنه إذا كان $(x - a)$ عاملًا خطيًّا لكثيرة الحدود فإن a صفر من أصفار دالة كثيرة الحدود والعكس صحيح.

فمثلًا $(x - 5)$ عامل خطي لكثيرة الحدود $\Longleftrightarrow$ 5 صفر لها.

أي أنه إذا كان $(x - 5)$ عاملًا خطيًّا لكثيرة الحدود فإن 5 صفر لها والعكس صحيح.

وكذلك $(x + 3)$ عاملًا خطيًّا لكثيرة الحدود $\Longleftrightarrow$ -3 صفر لها.

مثال (5)

اكتب دالة كثيرة حدود حيث أصفارها: 3 , 3 , -2 في الصورة العامة.

الحل:

$\because$ أصفار الدالة هي:

$$-2 \quad , \quad 3 \quad , \quad 3$$

$\therefore$ عوامل كثيرة الحدود هي: $(x-3), (x-3), (x-(-2))$

$$f(x) = (x+2)(x-3)(x-3)$$

اضرب $(x-3)(x-3)$

$$= (x+2)(x^2-6x+9)$$

خاصية التوزيع

$$= x(x^2-6x+9) + 2(x^2-6x+9)$$

$$= x^3 - 6x^2 + 9x + 2x^2 - 12x + 18$$

بسّط

$$= x^3 - 4x^2 - 3x + 18$$

$\therefore$ الدالة هي:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$$

حاول أن تحل

5 a اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث أصفارها: 1 , -2 , -4

b اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث أصفارها: 0 , -2 , -4

c اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث 3 صفر مكرر مرتين و -1 صفر بسيط.

d التفكير الناقد: اشرح لماذا الصفر عند 0 في b يعطي أكثر من إمكانية واحدة للإجابة.

e هل كل دالة من الدوال التي حصلت عليها من b , a وحيدة؟ فسر إجابتك.

معلومة: عندما يكرر عامل خطي في كثيرة الحدود، فإن صفر الدالة يكرر أيضًا ويسمى في هذه الحالة «صفر مكرر».

نلاحظ مما سبق أن لنظرية العامل أربعة مفاهيم مرتبطة بكثيرة الحدود.

وهذه الأفكار متكافئة، بمعنى أنك إذا علمت إحداها، فسوف تعلم الكل.

1 $(x = +1)$ حل للمعادلة: $x^2 + 3x - 4 = 0$

2 $(+1)$ جزء مقطوع من محور السينات لمنحنى الدالة: $y = x^2 + 3x - 4$

3 $(+1)$ صفر من أصفار الدالة: $y = x^2 + 3x - 4$

4 $(x-1)$ عامل من عوامل كثيرة حدود: $x^2 + 3x - 4$

3-4

قسمة كثيرات الحدود

Dividing Polynomials

سوف تتعلم

- قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة المطولة.
- قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة التركيبية.
- ايجاد الباقي باستخدام نظرية الباقي.

المفردات والمصطلحات:

- القسمة المطولة Long Division
- القسمة التركيبية Synthetic Division
- نظرية الباقي Remainder Theorem
- المقسوم Dividend
- المقسوم عليه Divisor
- ناتج القسمة Quotient
- باقي القسمة Remainder

دعنا نفكر ونتناقش

يمكن استخدام قسمة كثيرات الحدود للمساعدة على إيجاد أصفار دالة كثيرة الحدود.
واعلم أن قسمة كثيرات الحدود مشابهة لقسمة الأعداد.

تذكر أنه عندما يكون الباقي صفرًا، فإن المقسوم عليه وناتج القسمة هما من عوامل المقسوم.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 8\overline{)\;56} \\ \underline{56} \\ 0 \end{array}$$

فمثلًا: $7 = 8 \div 56$ ونلاحظ أن 8 , 7 من عوامل 56

أما إذا كان الباقي لا يساوي صفرًا، فإن المقسوم عليه وناتج القسمة لا يكونا من عوامل المقسوم.

ناتج القسمة

المقسوم عليه

$$\begin{array}{r} 8 \\ 5\overline{)\;42} \\ \underline{40} \\ 2 \end{array}$$

المقسوم

باقي القسمة

فمثلًا: $8 = 5 \div 42$ والباقي 2

ونلاحظ أن 5، 8 ليسا من عوامل 42

بالتالي، تسمح القسمة بمعرفة ما إذا كان عدد من عوامل عدد آخر.
وهذا أيضًا صحيح بالنسبة إلى قسمة كثيرات الحدود.

إذا قسمت كثيرة حدود على أحد عواملها تحصل على عامل آخر.
وعندما يكون باقي القسمة صفرًا تكون قد حوّلت كثيرة الحدود إلى عوامل.

$$\begin{array}{r} 2x \\ x\overline{)\;2x^2} \\ \underline{2x^2} \\ 0 \end{array}$$

فمثلًا: $2x^2 \div x = 2x$

ونلاحظ أن $2x$, x من عوامل $2x^2$

القسمة المطولة Long Division

عند قسمة كثيرة حدود على أخرى اتبع الخطوات المستخدمة في قسمة الأعداد الكلية.

مثال (1)

اقسم:

a x^2+6x+8 على $(x+4)$

b $x^2+3x-12$ على $(x-2)$

الحل:

نوجد الناتج باستخدام القسمة المطولة.

a اقسم: $\frac{x^2}{x} = x$

اضرب: $x(x+4) = x^2 + 4x$

اطرح: $(x^2+6x) - (x^2+4x) = 2x$

أنزل $+8$

اقسم: $\frac{2x}{x} = 2$

اضرب: $2(x+4) = 2x + 8$

الباقي صفر

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+2 \\ \hline
x+4 & x^2+6x+8 \\
 & \underline{-x^2 - 4x} \\
 & \quad 2x+8 \\
 & \quad \underline{-2x-8} \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$

$\therefore$ ناتج القسمة $(x+2)$ والباقي صفر.

تحقق من النتيجة :

$$(x+2)(x+4) = x^2 + 4x + 2x + 8$$
$$= x^2 + 6x + 8$$

b اقسم: $\frac{x^2}{x} = x$

اضرب: $x(x-2) = x^2 - 2x$

اطرح: $(x^2+3x) - (x^2-2x) = 5x$

أنزل -12

اقسم: $\frac{5x}{x} = 5$

اضرب: $5(x-2) = 5x - 10$

اطرح: $(5x-12) - (5x-10) = -2$

الباقي -2

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+5 \\ \hline
x-2 & x^2+3x-12 \\
 & \underline{-x^2 + 2x} \\
 & \quad 5x-12 \\
 & \quad \underline{-5x+10} \\
 & \qquad -2
\end{array}
$$

$\therefore$ ناتج القسمة $(x+5)$ والباقي -2

تحقق من النتيجة:

$$(x+5)(x-2) + (-2) = x^2 - 2x + 5x - 10 - 2$$
$$= x^2 + 3x - 12$$

حاول أن تحل

1 اقسم:

a $x+2 \overline{)\, x^2 + 5x + 6}$

b $x-8 \overline{)\, 2x^2 - 19x + 24}$

يمكنك استخدام قسمة كثيرات الحدود المطولة لإيجاد عوامل كثيرة الحدود.

مثال (2)

تحقق ما إذا كان $(x+4)$ عامل من عوامل كل كثيرة حدود باستخدام القسمة المطولة

a x^3+3x^2-6x-7

b x^3+64

الحل:

a

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad x^2-x-2 \\
\hline
x+4 & x^3+3x^2-6x-7 \\
 & \underline{\mp x^3 \mp 4x^2} \\
 & \qquad -x^2-6x \\
 & \qquad \underline{\pm x^2 \pm 4x} \\
 & \qquad\qquad -2x-7 \\
 & \qquad\qquad \underline{\pm 2x \pm 8} \\
 & \qquad\qquad\qquad 1
\end{array}$$

$\because$ الباقي $0 \neq$

$\therefore$ $(x+4)$ ليس من عوامل (x^3+3x^2-6x-7)

b

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad x^2-4x+16 \\
\hline
x+4 & x^3+\qquad\qquad 64 \\
 & \underline{\mp x^3 \mp 4x^2} \\
 & \qquad -4x^2 \\
 & \qquad \underline{\pm 4x^2 \pm 16x} \\
 & \qquad\qquad 16x+64 \\
 & \qquad\qquad \underline{-16x+64} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$\because$ الباقي $= 0$

$\therefore$ $(x+4)$ هو عامل من عوامل x^3+64

حاول أن تحل

2 تحقق ما إذا كان كل مقسوم عليه هو من عوامل المقسوم.

a $(x^3+4x^2+x-6)\div(x+2)$

b $(x^3-x+1)\div(x+1)$

معلومة:

إذا كان المقسوم كثيرة حدود من الدرجة n والمقسوم عليه من الدرجة الأولى فإن ناتج القسمة من الدرجة $(n-1)$ حيث $n \geq 1$

ملاحظة:

$x^3+64 =$

$x^3+0x^2+0x+64$

استخدام القسمة التركيبية Using Synthetic Division

عندما نقسم على عامل خطي على الصورة $(x-a)$ يمكننا استخدام عمليات مختصرة تعرف **بالقسمة التركيبية**، وفيها تهمل كل المتغيرات والأسس من المقسوم واستخدام صفر العامل الخطي a، ويتم إجراء عملية الجمع بدلًا من الطرح خلال العمليات والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال توضيحي

استخدم القسمة التركيبية لقسمة:

$x^3 - 13x + 12$ على $(x+4)$

الحل:

خطوة 1:

ضع المقسوم بالصورة العامة ثم اكتب جميع معاملات كثيرة الحدود واستخدم الصفر مكان الحدود الناقصة.

حدد صفر المقسوم عليه.

أدخل $0x^2$	$x+4$	$x^3 +$	$0x^2$	$-13x$	$+12$
اكتب معاملات المقسوم وصفر المقسوم عليه	-4	1	0	-13	12

خطوة 2: أنزل أول معامل.

أنزل العدد 1	-4	1	0	-13	12
بذلك يبدأ ناتج القسمة			$\square$	$\square$	$\square$
		1	$\square$	$\square$	$\square$

خطوة 3: اضرب المعامل الأول في (-4)

اكتب الناتج تحت المعامل التالي (0) واجمع.

اضرب 1 في -4	-4	1	0	-13	12
اكتب الناتج تحت 0	$\times$		-4	$\square$	$\square$
اجمع 0، -4		1	-4	$\square$	$\square$

خطوة 4: اضرب ناتج الجمع (-4) في (-4)

اكتب الناتج تحت المعامل التالي (-13) واجمع.

اضرب -4 في -4	-4	1	0	-13	12
اكتب الناتج تحت -13	$\times$		-4	16	$\square$
اجمع -13، 16		1	-4	3	$\square$

معلومة:

عند كتابة كثيرة الحدود بالصورة العامة مرتبة تصاعديًّا أو تنازليًّا يمكن إضافة الحد الناقص على أن يكون معامله صفرًا مثلًا:

$x^3 + x - 3$

تكتب: $x^3 + 0x^2 + x - 3$

معلومة :

الأعداد الناتجة من عملية القسمة التركيبية هي معاملات لكثيرة حدود في الصورة العامة.

خطوة 5: اضرب ناتج الجمع (3) في (-4)

اكتب الناتج تحت المعامل التالي (الحد الثابت 12) واجمع.

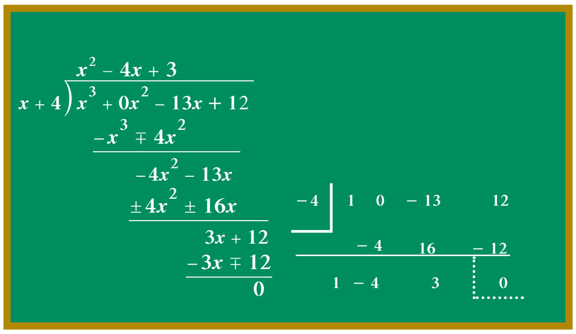
اضرب 3 في -4

اكتب الناتج تحت 12

اجمع 12 , -12

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & 0 & -13 & 12 \\ & & -4 & 16 & -12 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

x^2	$-4x$	$+3$	الباقي
1	-4	3	0



ناتج القسمة: $x^2 - 4x + 3$

ناتج القسمة من الدرجة الثانية. (لماذا؟)

مثال (3)

استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ على $(x + 2)$ ثم أوجد باقي العوامل.

الحل:

لتحديد صفر المقسوم عليه اعكس إشارة الحد الثابت في $(x + 2)$ فيصبح -2

اكتب جميع معاملات كثيرة الحدود.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -3 & -6 & 8 \\ & & -2 & 10 & -8 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array}$$

x^2	$-5x$	$+4$	الباقي
1	-5	4	0

ناتج القسمة: $x^2 - 5x + 4$ والباقي صفر:

نحلل: $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$

$\therefore$ باقي العوامل هي: $(x - 4)$, $(x - 1)$

حاول أن تحل

3 a استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ على $(x + 2)$

b استخدم الإجابة في a لتحليل $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ إلى عوامل.

مثال (4)

استخدم القسمة التركيبية لقسمة x^3+2x^2+x-5 على $(x+3)$

الحل:

اعكس إشارة الحد الثابت في المقسوم عليه فتصبح -3

اكتب جميع معاملات كثيرة الحدود.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 2 & 1 & -5 \\ & & -3 & 3 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & 4 & \boxed{-17} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & x^2 & -x & +4 & \text{الباقي} \end{array}$$

ناتج القسمة: x^2-x+4، الباقي -17

حاول أن تحل

4 استخدم القسمة التركيبية لقسمة x^3+4x^2+x-6 على $(x+1)$

مثال (5)

يعطى حجم أحد الحجارة الضخمة قرب قلعة بعلبك بالعلاقة:

$$V = x^3+21x^2+56x+36$$

a إذا كان $(x+2)\text{m}$ أحد أبعاد هذا الحجر.
فأوجد البعدين الآخرين.

b إذا كان أكبر أبعاد هذا الحجر يساوي $21\ \text{m}$
فأوجد البعدين الآخرين.

تعتبر قلعة بعلبك في لبنان من أهم الآثار في العالم العربي

الحل:

a نستخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3+21x^2+56x+36$ على $(x+2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 21 & 56 & 36 \\ & & -2 & -38 & -36 \\ \hline & 1 & 19 & 18 & \boxed{0} \end{array}$$

ناتج القسمة: $x^2+19x+18$ والباقي صفر

بالتحليل: $x^2+19x+18=(x+1)(x+18)$

$\therefore$ البعدان الآخران هما $(x+1)$، $(x+18)$ بالأمتار (m)

b ∵ أكبر الأبعاد يساوي 21 m

$\therefore\ x + 18 = 21$

$x = 3$

وبالتعويض في البعدين الآخرين:

$x + 1 = 3 + 1 = 4$

$x + 2 = 3 + 2 = 5$

بعدا الحجر الآخران هما: 4 m، 5 m

حاول أن تحل

5 في مثال (5) هل يمكن أن يكون $(x + 3)$ أحد أبعاد هذا الحجر؟ فسّر.

مثال (6)

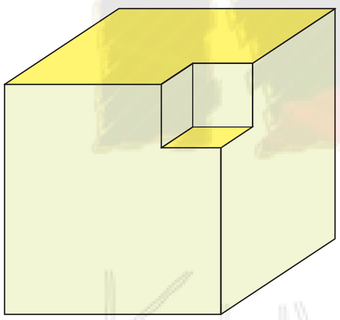
يبيّن الشكل المقابل منحوتة على شكل شبه مكعب وقد اقتطع مكعب من إحدى زواياه.

أبعاد شبه المكعب قبل اقتطاع المكعب هي:

$h = 2x + 7\ ,\ w = x + 5\ ,\ l = x + 8$

وطول ضلع المكعب المقتطع x (الأبعاد بالـ cm)

وأصبح حجم المنحوتة يساوي $762\ cm^3$



a أثبت أن $x = 2$ هي القيمة الوحيدة المقبولة.

b أوجد أبعاد شبه المكعب.

الحل:

a حجم شبه المكعب $V_1 = (x+8)(x+5)(2x+7)$

حجم المكعب المقتطع $V_2 = x^3$

حجم المنحوتة $V = V_1 - V_2 = (x+8)(x+5)(2x+7) - x^3$

نكتب المعادلة $(x+8)(x+5)(2x+7) - x^3 = 762$

بالتبسيط $x^3 + 33x^2 + 171x = 482$

بالتعويض عن x بـ 2: $(2^3) + 33(2)^2 + 171(2) \stackrel{?}{=} 482$

$482 = 482$

∴ $x = 2$ قيمة مقبولة.

للتحقق من أن $x = 2$ هي القيمة الوحيدة المقبولة:

نقسم $x^3 + 33x^2 + 171x - 482$ على $(x - 2)$

للحصول على قيم x المتبقية نستخدم القسمة التركيبية.

2	1	33	171	−482
		2	70	482
	1	35	241	0

ناتج القسمة: $q(x) = x^2 + 35x + 241$

باستخدام الآلة الحاسبة، جذرا المعادلة التربيعية $x^2 + 35x + 241 = 0$ هما: $x_1 \approx -9.42$, $x_2 \approx -25.58$

وهما يعطيان قيمًا سالبة لطول المكعب.

$\therefore$ القيمتان مرفوضتان.

b بالتعويض عن x بـ 2 نحصل على: $l = 10$ cm , $w = 7$ cm , $h = 11$ cm

حاول أن تحل

6 مبنى على شكل شبه مكعب، يعطى حجمه بالعلاقة: $V = x^3 + 4x^2 - x - 4$ إذا كان:

a $(x + 4)$ أحد أبعاد المبنى. فأوجد البعدين الآخرين.

b أصغر أبعاد المبنى يساوي 10 m فأوجد البعدين الآخرين.

مثال توضيحي

لتكن: $f(x) = x^2 - 2x - 8$

a أوجد ناتج قسمة $f(x)$ على $(x-4)$ ثم أوجد $f(+4)$

b أوجد ناتج قسمة $f(x)$ على $(x+1)$ ثم أوجد $f(-1)$

نلاحظ أن $f(x)$ تقبل القسمة على $(x-4)$

أي أن $(x-4)$ أحد عواملها

$\therefore$ 4 أحد أصفارها

أي أن $f(4) = 0$

بينما $f(x)$ لا تقبل القسمة على $(x+1)$

أي أن $(x+1)$ ليس من عواملها

$\therefore$ (-1) ليس من أصفارها.

لأن $f(-1) = -5$ لا يساوي الصفر وهو باقي القسمة.

نظرية الباقي

إذا قسمت كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ على $(x-a)$ حيث a ثابت، فإن باقي القسمة هو $f(a)$

مثال (7)

باستخدام نظرية الباقي أوجد باقي قسمة

$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4x + 12$ على $(x+4)$

ثم تحقق باستخدام القسمة التركيبية.

الحل:

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4x + 12$$

استخدم نظرية الباقي

$$f(-4) = (-4)^4 - 5(-4)^2 + 4(-4) + 12$$
$$= 256 - 80 - 16 + 12$$
$$= 172$$

$\therefore$ باقي القسمة $= 172$

وللتحقق من صحة الإجابة نستخدم القسمة التركيبية.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-4 & 1 & 0 & -5 & 4 & 12 \\
 & & -4 & 16 & -44 & 160 \\
\hline
 & 1 & -4 & 11 & -40 & \boxed{172}
\end{array}$$

الباقي

حاول أن تحل

7 استخدم نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $f(x) = 2x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 60$ على $(x+1)$، ثم تحقق من صحة الإجابة باستخدام القسمة التركيبية.

حل معادلات كثيرات الحدود

Solving Polynomial Equations

سوف تتعلم

- حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل.
- حل معادلات كثيرات الحدود بيانيًا.

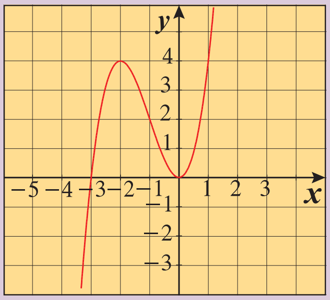
المفردات والمصطلحات:

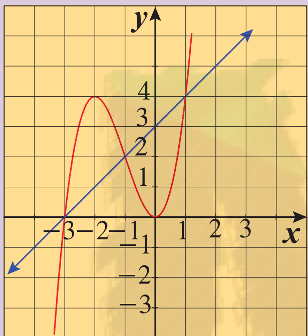
- أصفار نسبية ممكنة Possible Rational Zeros
- المعامل الرئيسي Leading Coefficient
- عامل مشترك Common Factor
- تحليل بالتقسيم Factorising by Division

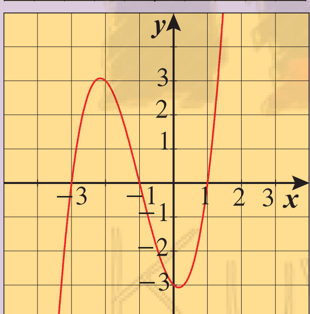
الربط بالتكنولوجيا:

يمكنك حل معادلات كثيرة الحدود بواسطة آلة حاسبة بيانية وباستخدام TABLE أو TRACE ثم CALC و ZOOM . وسوف تساعدك الاختيارات المتاحة بالآلة على إيجاد الحلول.

دعنا نفكر ونتناقش







a يبيّن الشكل المقابل بيان الدالة: $f(x) = x^3 + 3x^2$

مثّل بيانيًّا $g(x) = x + 3$ على الشبكة البيانية نفسها.

ثم استخدم الرسم لإيجاد مجموعة حل المعادلة:

$$x^3 + 3x^2 = x + 3$$

بيانيًّا هناك 3 نقاط تقاطع.

الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع:

$$-3\ ,\ -1\ ,\ 1$$

$\therefore$ للمعادلة $x^3 + 3x^2 = x + 3$ ثلاثة حلول:

$$x = -3,\ x = -1,\ x = 1$$

$\therefore$ مجموعة الحل: $\{-3, -1, 1\}$

b يمثّل الشكل المقابل بيان الدالة:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$$

استخدم الشكل لإيجاد مجموعة حل المعادلة:

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

c قارن بين مجموعتي الحل في **b** , **a** . فسّر.

حل المعادلات بالتحليل Solving Equations by Factorising

عندما تحلل كثيرة الحدود، فإنك تحول شكلها من مجموع (أو فرق) حدود إلى ناتج ضرب عوامل كما هو موضح بالجدول.

الصورة بالتحليل (العوامل)	الصورة العامة
$(x + 2)(x - 6)$	$x^2 - 4x - 12$
$3x\,(x - 2)\,(x + 2)$	$3x^3 - 12x$
$(3x + 2)(x + 1)$	$3x^2 + 5x + 2$
$(x + 1)(x + 2)(x + 3)$	$x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

يمكنك حل بعض معادلات كثيرات الحدود بالتحليل واستخدام خاصية الضرب في الصفر أو نظرية العامل.

مثال (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$ بالتحليل ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

$3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$

$3x(x^2 + 2x - 3) = 0$ حلّل بإخراج العامل المشترك الأعلى: $3x$

$3x(x+3)(x-1) = 0$ حلّل $x^2 + 2x - 3$

$x = 0, \quad x = -3, \quad x = 1$ استخدم نظرية العامل

مجموعة الحل $= \{1, -3, 0\}$

تحقق:

$3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$	$3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$	$3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$
$3(1)^3 + 6(1)^2 - 9(1) \stackrel{?}{=} 0$	$3(-3)^3 + 6(-3)^2 - 9(-3) \stackrel{?}{=} 0$	$3(0)^3 + 6(0)^2 - 9(0) \stackrel{?}{=} 0$
$3 + 6 - 9 \stackrel{?}{=} 0$	$-81 + 54 + 27 \stackrel{?}{=} 0$	
$0 = 0$ ✔	$0 = 0$ ✔	$0 = 0$ ✔

حاول أن تحل

1 a أوجد مجموعة حل المعادلة: $4x^3 - 16x^2 - 20x = 0$ بالتحليل. ثم تحقق من صحة الحل.

b تفكير ناقد: صف طريقتين يمكنك بهما حل المعادلة: $2x^3 + 10x^2 + 8x = 0$ أي طريقة تفضل؟ ولماذا؟

لا يتوجب عليك أحيانًا تحليل معادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة تحليلًا كاملًا لحلها. فمتى أوجدت عاملًا يمكنك استخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية.

مثال (2)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2x^3 - 4x^2 = 10x$

الحل:

$2x^3 - 4x^2 = 10x$

$2x^3 - 4x^2 - 10x = 0$ اجعل أحد الطرفين مساويًا للصفر

$2x(x^2 - 2x - 5) = 0$ حلّل

$2x = 0$ أو $x^2 - 2x - 5 = 0$ استخدم خاصية الضرب في الصفر

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ استخدم القانون العام لتحديد جذور المعادلة: $x^2 - 2x - 5 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$

$= \dfrac{2 \pm \sqrt{24}}{2}$

$= \dfrac{2 \pm 2\sqrt{6}}{2}$

$= 1 \pm \sqrt{6}$

مجموعة الحل $= \{0, \; 1 + \sqrt{6}, \; 1 - \sqrt{6}\}$

حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي:

a $2x^3 = 3x - 5x^2$

b $x^3 - x^2 - 3x = 0$

يمكن حل بعض معادلات كثيرات الحدود باستخدام التحليل بطريقة التقسيم حيث يمكن تقسيم الحدود بطريقة تساعدنا على تحويل كثيرة الحدود إلى حاصل ضرب عوامل.

مثال (3)

أوجد مجموعة حل المعادلة:

a $x^3 + 3x^2 = x + 3$

b $x^3 - 3x = 6 - 2x^2$

الحل:

a $x^3 + 3x^2 = x + 3$

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ اجعل أحد الطرفين يساوي الصفر

$(x^3 + 3x^2) + (-x - 3) = 0$

$x^2(x + 3) - (x + 3) = 0$ حلّل بالتقسيم

$(x + 3)(x^2 - 1) = 0$ خذ العامل المشترك $(x + 3)$

$(x + 3)(x + 1)(x - 1) = 0$ حلّل

$x - 1 = 0$ أو $x + 1 = 0$ أو $x + 3 = 0$ استخدم خاصية الصفر

$x = 1$ $x = -1$ $x = -3$

مجموعة الحل = $\{-3, 1, -1\}$

b $x^3 - 3x = 6 - 2x^2$

$x^3 - 3x - 6 + 2x^2 = 0$ اجعل أحد الطرفين يساوي الصفر

$(x^3 - 3x) + (-6 + 2x^2) = 0$ خاصية التجميع

$x(x^2 - 3) + 2(x^2 - 3) = 0$ حلّل

$(x^2 - 3)(x + 2) = 0$ $(x^2 - 3)$ خذ العامل المشترك

$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 2) = 0$ حلّل

$x = \sqrt{3}$ أو $x = -\sqrt{3}$ أو $x = -2$

∴ مجموعة حل المعادلة = $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -2\}$

حاول أن تحل

3 أوجد مجموعة حل المعادلة: $x^3 + 2x^2 - 4x = 8$

تطبيقات حياتية «إثرائي»

يمكن كتابة أبعاد قفص على شكل شبه مكعب لنقل قطة سيامية كما يلي:

الطول $(l = x + 7)$ العمق $(h = x)$

العرض $(w = x + 1)$ بالسنتيمتر (cm).

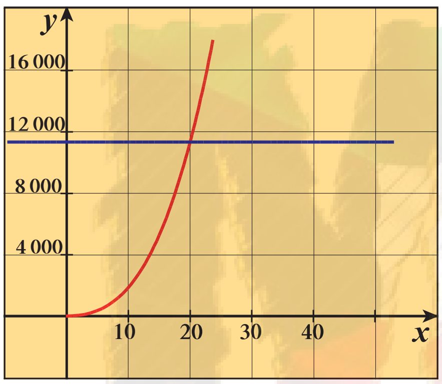
أوجد أبعاد القفص إذا كان حجمه $11340\ \text{cm}^3$

الحل:

اكتب المعادلة $\quad V = l \cdot w \cdot h$

عوّض $\quad 11\,340 = (x+7)(x+1)(x)$

ارسم بيانيًّا:



$y_1 = 11\,340,\ \ y_2 = (x+7)(x+1)(x)$

استخدم اختيار التقاطع من الخاصية CALC.

عندما $x = 20\ ,\ y = 11\,340$

$\therefore\ x + 7 = 27\ ,\ x + 1 = 21$

أبعاد القفص هي: $27\ \text{cm}\ ,\ 21\ \text{cm}\ ,\ 20\ \text{cm}$

الأصفار النسبية الممكنة Possible Rational Zeros

نظرية

بفرض أن: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\ ;\ a_n \neq 0$

حيث $a_n , a_{n-1} , \dots , a_0$ أعداد صحيحة فتكون مجموعة الأصفار النسبية الممكنة لِـ $f(x)$ هي:

$\left\{\dfrac{a}{b}\right.$: a عامل من عوامل الحد الثابت a_0، b عامل من عوامل المعامل الرئيسي $\left.a_n\right\}$

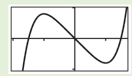
تظهر أهمية هذه النظرية إذا أردنا معرفة أصفار حدودية ولا يمكننا استخدام طريقة التحليل أو التقسيم.

يمكننا تخمين الأصفار النسبية الممكنة باستخدام النظرية ثم نتحقق من هذه الأصفار باستخدام نظرية الباقي.

الربط بالتكنولوجيا:

استخدام الآلة الحاسبة البيانية

• في أعلى الشاشة اضغط على



يظهر على الشاشة:

$y_1 = \square$
$y_2 = \square$
$y_3 = \square$
$\vdots$

لتنشيط y_1 اضغط على المربع إلى يسارها فتظهر في داخله علامة ✓ ثم اكتب في المربع إلى يمين y_1:

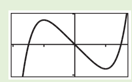
$(x+7)(x)(x+1)$

نشط y_2 بالطريقة نفسها ثم اكتب قرب y_2:

$11\,340$

ثم اضغط على EXE يظهر على الشاشة بيان كل من الدالتين.

اختر من



«Analysis» ثم «G−Solve» ثم «Intercept» فيظهر على الشاشة

$x = 20\ ,\ y = 11\,340$

فمثلًا: لتحديد الأصفار النسبية الممكنة لِـ: $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 6$.

نتبع الخطوات التالية:

أولًا: نحدد عوامل الحد الثابت (6) وهي: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

ثانيًا: نحدد عوامل المعامل الرئيسي (2) وهي: $\pm 1, \pm 2$

ثالثًا: بتطبيق النظرية تكون الأصفار النسبية الممكنة: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$

تدريب

الأصفار النسبية الممكنة لِـ:

b $g(x) = x^3 - 27$

هي: ....

a $f(x) = x^3 + 5x - 3$

هي: ....

مثال (4)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

b $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x = 2$

a $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$

الحل:

a خطوة 1: $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$

عوامل الحد الثابت (3): $\pm 1, \pm 3$

عوامل المعامل الرئيسي (1): ± 1

$\therefore$ الأصفار النسبية الممكنة: $\pm 1, \pm 3$

خطوة 2: لتكن $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3$

$P(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 3 = 0$

$\therefore$ 1 صفر من أصفار الحدودية،

$(x - 1)$ عامل من عوامل $P(x)$

نقسم: $P(x)$ على $(x - 1)$:

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 0x + 3$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & 0 & 3 \\ & & 1 & -3 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

ناتج القسمة: $q(x) = x^2 - 3x - 3$

نحل المعادلة $x^2 - 3x - 3 = 0$ باستخدام القانون

$x_1 = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$ ، $x_2 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة = $\left\{1, \frac{3 - \sqrt{21}}{2}, \frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right\}$

معلومة:

إذا كان مجموع معاملات حدودية يساوي الصفر فإن 1 هو أحد أصفار الحدودية، $(x - 1)$ أحد عواملها.

b خطوة 1: $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$

عوامل الحد الثابت (-2) هي: $\pm 1, \pm 2$

عوامل المعامل الرئيسي (1) هي: ± 1

$\therefore$ الأصفار النسبية الممكنة هي: $\pm 1, \pm 2$

خطوة 2: لتكن $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$

$P(1) = (1)^4 - 3(1)^3 + (1)^2 + 3(1) - 2 = 0$

$\therefore$ 1 صفر من أصفار $P(x)$ ، $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$

$P(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 + (-1)^2 + 3(-1) - 2 = 0$

$\therefore$ 1 $-$ صفر من أصفار $P(x)$، $(x+1)$ عامل من عوامل $P(x)$

نقسم: $P(x)$ على $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$

نستخدم القسمة المطولة

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 3x + 2 \\
\hline
x^2 - 1 & x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 \\
 & \underline{-x^4 \qquad \pm x^2} \\
 & \quad -3x^3 + 2x^2 + 3x \\
 & \quad \underline{\pm 3x^3 \qquad \mp 3x} \\
 & \qquad 2x^2 \qquad -2 \\
 & \qquad \underline{-2x^2 \qquad \pm 2} \\
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

ناتج القسمة: $q(x) = x^2 - 3x + 2$

نحل المعادلة: $x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_1 = 1; \quad x_2 = 2$

مجموعة حل المعادلة $= \{-1, 1, 2\}$

ملاحظة:
لاحظ أن 1 هو صفر مكرر.

حاول أن تحل

4 **a** تفكير ناقد: هل يمكن حل المعادلة في المثال (4) **b** بطرق اخرى؟ وضح ذلك.

b أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

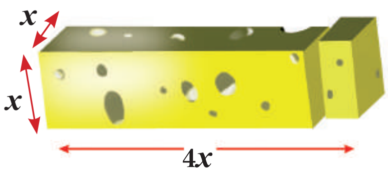
1 $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

2 $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x = 18$

المرشد لحل المسائل

اكتب دالة كثيرة الحدود تعبّر عن الحجم. ثم مثّل الدالة بيانيًا لحل المسألة.

الهندسة: أخذت قطعة من الجبنة بسماكة 2 cm من أحد قوالب الجبنة كما هو مبين في الشكل. يبلغ حجم القسم الباقي $224\ cm^3$ أوجد أبعاد قالب الجبنة الأساسي.



كيف تفكّر؟

من الشكل، يبدو أن العمق والارتفاع متساويان في كلتا القطعتين.

أستطيع طرح طول القطعة الصغيرة من طول القالب الأساسي لإيجاد الطول المتبقي.

نستخدم الآلة الحاسبة البيانية في حل المسألة

ماذا تكتب؟

الطول المتبقي $= 4x -$ طول القطعة

$= \quad 4x - 2$

من المعطى، حجم القالب المتبقي $224\ cm^3$

أستطيع كتابة علاقة، أعوّض ثم أبسّط.

حجم القالب المتبقي = الطول × العرض × الارتفاع

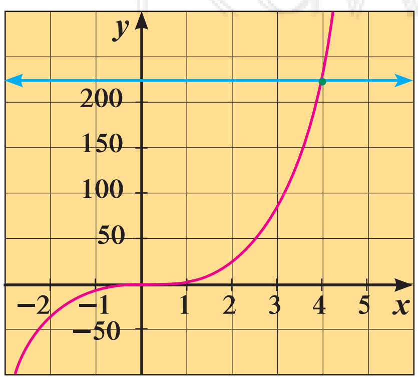
$$V = l \cdot w \cdot h$$
$$224 = (4x - 2)(x)(x)$$
$$224 = 4x^3 - 2x^2$$

المعادلة تكعيبية ويطلب إليّ حلّها بيانيًّا.

سأمثل المعادلتين وأجد التقاطع. $y_1 = 4x^3 - 2x^2$, $y_2 = 224$

سأعدل الشاشة لتتناسب مع القيمة $y = 224$

استخدم خاصية التقاطع.



$x = 4$,$y = 224$

استخدم قيمة x لإيجاد أبعاد القالب الأساسي.

العرض = الارتفاع $= x = 4$

الطول $= 4x = 4(4) = 16$

أبعاد قالب الجبنة: 4cm , 4cm , 16cm

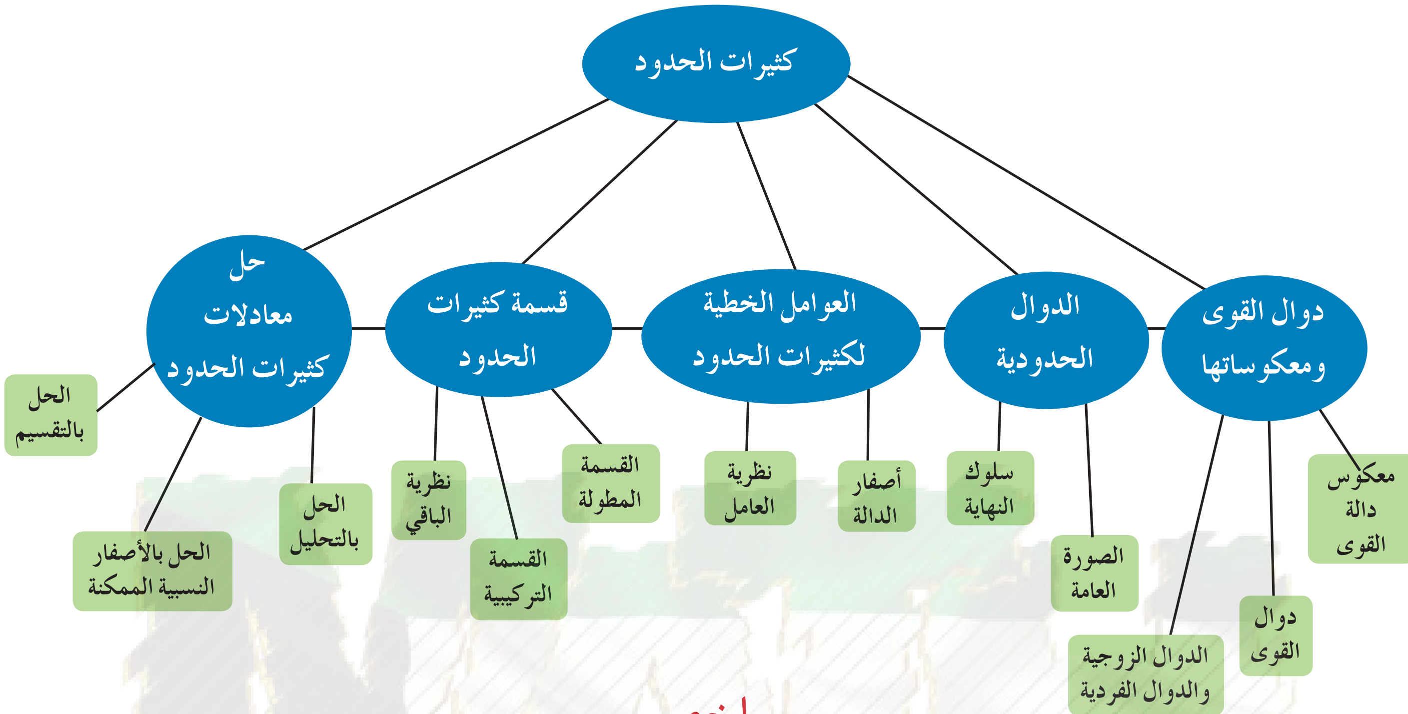
مسألة إضافية

قطعة خشبية مكعبة الشكل (طول ضلعها عدد صحيح)، قصت منها 4 قطع على شكل مكعب بسماكة $\frac{1}{2}$ cm

حجم القطعة المتبقية يساوي $7\,200\ cm^3$

أوجد طول ضلع قطعة الخشب الأساسية.

مخطط تنظيمي للوحدة الثالثة



ملخص

- تكون دالة القوى على الشكل: $y = ax^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$, $a \neq 0$
- الدالة الزوجية هي دالة مجال تعريفها D، تحقق: $f(-x) = f(x)$, $\forall x, -x \in D$ والعكس صحيح.
- في مستوى إحداثي، المحور الصادي هو محور تماثل لبيان الدوال الزوجية.
- الدالة الفردية هي دالة مجال تعريفها D، تحقق: $f(-x) = -f(x)$, $\forall x, -x \in D$ والعكس صحيح.
- نقطة الأصل هي نقطة تماثل لبيان الدوال الفردية.
- إذا كانت النقطة (a, b) تقع على بيان دالة ما فإن (b, a) تقع على بيان معكوسها.
- الدالة الحدودية $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ حيث n عدد صحيح غير سالب، $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ أعداد حقيقية.
- في الصورة العامة لدالة حدودية ترتب الحدود تنازليًّا وتجمع الحدود المتشابهة.
- يصف سلوك النهاية لرسم بياني امتداد طرفيه الأيمن والأيسر.
- القيمة العظمى هي أكبر قيمة لِـ y في فترة محددة.
- القيمة الصغرى هي أصغر قيمة لِـ y في فترة محددة.
- المقدار $(x - a)$ هو عامل خطي لكثيرة الحدود إذا وفقط إذا a صفر من أصفار كثيرة حدود.
- إذا قسمت كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ على $(x - a)$ حيث a ثابت فإن الباقي هو $f(a)$
- بفرض أن $a_n \neq 0$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ حيث $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ أعداد صحيحة فتكون مجموعة الأصفار النسبية الممكنة لِـ $f(x)$ هي:

$\{\frac{a}{b} : a$ عامل من عوامل الحد الثابت a_0، b عامل من عوامل المعامل الرئيسي $a_n\}$