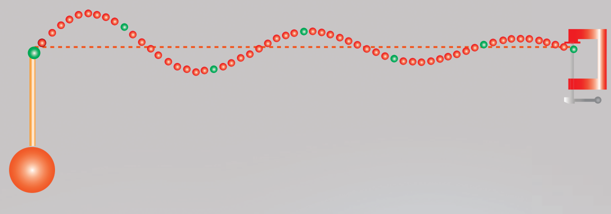
الوحدة التاسعة

تطبيقات على حساب المثلثات

Applications of Trigonometry

مشروع الوحدة: الموجات الصوتية



1 **مقدمة المشروع:** أنت تسمع في الإذاعات عن تردد الموجات الصوتية وقياساتها وكيف تصل إلى مسامعك من خلال موجات متتالية لها قوانين ووحدات قياس معروفة.

2 **الهدف:** قياس بعض الموجات البسيطة.

3 **اللوازم:** ورق رسم بياني — آلة حاسبة علمية.

4 **أسئلة حول التطبيق:** نربط خيطًا مطاطيًّا من طرفيه بوتدين ثابتين. إذا ضغطنا على الخيط عموديًّا في نقطة، ثم تركناه نلاحظ أنه يهتز محدثًا موجات صوتية متتالية وخفيفة. لنفرض أنه لا يوجد أي احتكاك أو صدى، يمكن نمذجة هذه الموجات بالمعادلة:

$y = y_m \sin(kx - wt)$، حيث: y_m هي السعة بالأمتار (m)؛ k و w هما كميتان ثابتتان؛ t هو الزمن؛ x هي المسافة من أحد طرفي الخيط إلى نقطة الضغط.

يتأثر تردد الموجة الصوتية بالمسافة x وبالزمن t، لذلك للموجة حركتان أفقية وعمودية عبر الزمن. لنأخذ المعادلة:

$$y = 0.00421 \sin(68.3x - 2.68t)$$

a ما سعة الموجة y_m؟ وما الثابت w بالراديان في الثانية؟

b إنّ تردد الموجات الصوتية هو عدد الاهتزازات في الثانية ويعطى بالقانون: $f = \frac{w}{2\pi}$ ووحدته هرتز Hertz.
أوجد تردد الموجة أعلاه.

c طول الموجة الصوتية λ هو أقصر مسافة تتكرر فيها الموجة في فترة زمنية محددة t. يعطى طول الموجة بالقانون: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.
فما طول الموجة أعلاه؟

d مثّل بيان الدالة إذا كانت $x = 1\,\text{m}$

e تتردد موجتان معًا على الخيط نفسه. وينمذج تردد الموجتين معًا بالمعادلة:
$y = y_1 + y_2$، حيث: $y_1 = y_m \sin(kx - wt)$، $y_2 = y_m \sin(kx - wt + \varphi)$، حيث φ تمثّل الفرق بين الموجتين بإزاحة أفقية ثابتة.
مستخدمًا المتطابقات المثلثية اكتب: $y = y_1 + y_2$ كناتج ضرب. [إرشاد: $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$]

f أوجد y_1 ، y_2 ثم y في حالة: $y_m = 0.0045\text{ m}$ ، $\varphi = 2.5\text{ radians}$ ، $\lambda = 0.09\text{ m}$ ، $f = 2.3\text{ hertz}$.
مثّل بيان كل من y_1، y_2، y في نظام إحداثي واحد، علمًا أن $x = 1\,\text{m}$.

5 **التقرير:** اكتب تقريرًا مفصلًا يبيّن خطوات العمل التي قمت بها وأشر إلى المتطابقات المثلثية التي استعنت بها.
أرفق تقريرك بالتمثيلات البيانية الملونة.

دروس الوحدة

المتطابقات المثلثية	إثبات صحة متطابقات مثلثية	حل معادلات مثلثية	متطابقات المجموع والفرق	متطابقات ضعف الزاوية ونصفها
9 – 1	9 – 2	9 – 3	9 – 4	9 – 5

الوحدة التاسعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت تحديد الدوال المثلثية.
- تعلمت التمثيلات البيانية لدوال: الجيب، جيب التمام، الظل.
- تعلمت القيم المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- تعلمت مجال ودورة وسعة الدوال المثلثية: الجيب، جيب التمام، الظل.

ماذا سوف تتعلم؟

- استخدام المتطابقات الأساسية في تبسيط المقادير المثلثية وتحليلها.
- إثبات صحة المتطابقات جبريًّا وبيانيًّا.
- حل المعادلات المثلثية جبريًّا وبيانيًّا.
- متطابقات مجموع زاويتين.
- متطابقات الفرق بين زاويتين.
- متطابقات ضعف الزاوية.
- متطابقات نصف الزاوية.

المصطلحات الأساسية

المتطابقات المثلثية الأساسية – متطابقات المقلوب – متطابقات الظل وظل التمام – متطابقات فيثاغورث – متطابقات الدوال المثلثية الزوجية أو الفردية – متطابقة الدوال المتكافئة – متطابقات المجموع والفرق – متطابقات الضعف والنصف.

أضف إلى معلوماتك

احتل علم المثلثات مكانة مرموقة في الرياضيات عند العلماء العرب والمسلمين.

وقد شكل نقطة وصل بين الرياضيات وعلم الفلك. فأطلق أولئك العلماء عليه اسم «علم النسب».

وساعد كثيرًا من خلال المسائل المتعلقة به على تطوير «الحساب التقريبي».

من الأسباب الرئيسة التي دفعت العلماء المسلمين إلى حساب المثلثات، وبصورة خاصة المثلثات الكروية، هي ضرورة إكمال حسابات النجوم والفلك والشمس وتحديد جهة القبلة لتأدية الصلاة، أي تحديد اتجاه مدينة مكة المكرمة بالنسبة إلى كل مدينة أو قرية.

9–1

المتطابقات المثلثية

The Trigonometric Identities

دعنا نفكر ونتناقش

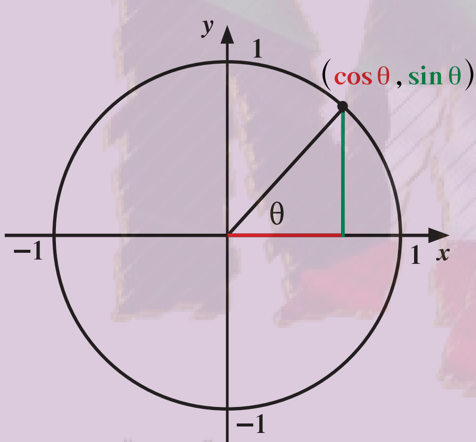
المتطابقة هي معادلة تمثل عبارة صحيحة لجميع قيم المتغير ما عدا القيم التي يكون فيها أي طرف من طرفي المعادلة غير معرّف.

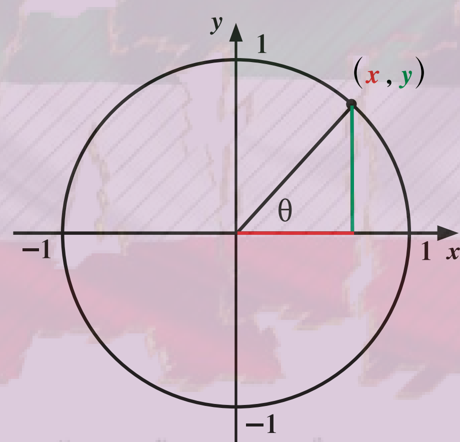
المتطابقة المثلثية هي متطابقة تتضمن تعبيرًا مثلثيًّا.

باستخدام نظرية فيثاغورث ودائرة الوحدة، يمكن أن نكتب: $x^2+y^2=1$

إذا عوّضنا عن x بـ $\cos\theta$ وعن y بـ $\sin\theta$ نحصل على $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ لكل قيم θ.

المعادلة: $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ هي من متطابقات فيثاغورث.





تستخدم المتطابقات المثلثية الأساسية لتحويل المقادير المثلثية إلى شكل أبسط.

المتطابقات المثلثية الأساسية Trigonometric Identities

- متطابقات القسمة (الظل وظل التمام) Quotient Identities (Tangent and Cotangent)

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

- متطابقات المقلوب Reciprocal Identities

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

- متطابقات فيثاغورث Pythagorian Identities

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \quad , \quad 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta \quad , \quad 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$$

سوف تتعلم
- المتطابقات المثلثية الأساسية.
- تبسيط المقادير المثلثية.
- تحليل المقادير المثلثية.

المفردات والمصطلحات:
- متطابقة Identity
- متطابقة فيثاغورث Pythagorian Identity
- متطابقات مثلثية Trigonometric Identities
- تبسيط Simplify
- تحليل Analysing

ملاحظة:
سنعتبر المقام لا يساوي صفرًا في جميع المقادير الكسرية.

مثال (1)

بسّط المقدار: $\sin\theta - \sin^3\theta$

الحل:

$\sin\theta$ عامل مشترك

$$\sin\theta - \sin^3\theta = \sin\theta(1 - \sin^2\theta)$$

متطابقة فيثاغورث

$$= \sin\theta\cos^2\theta$$

حاول أن تحل

1 بسّط المقادير التالية:

a $3\cos^2\theta + 3\sin^2\theta$

b $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta$

مثال (2)

بسّط التعبير المثلثي التالي: $\csc\theta\tan\theta$

الحل:

استخدم متطابقتي المقلوب وناتج القسمة

$$\csc\theta\tan\theta = \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

اضرب

$$= \frac{\cancel{\sin\theta}^{1}}{\cancel{\sin\theta}_{1}\cos\theta}$$

بسّط

$$= \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \sec\theta$$

حاول أن تحل

2 بسّط التعبير المثلثي التالي: $\sec\theta\cot\theta$

تستخدم المتطابقات المثلثية لتبسيط مقادير تتضمن كسورًا.

مثال (3)

بسّط: $\frac{\cos x}{1 - \sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}$

الحل:

أوجد مقامًا مشتركًا

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cos x}{(1 - \sin x)\cos x} - \frac{\sin x(1 - \sin x)}{\cos x(1 - \sin x)}$$

اطرح البسط

$$= \frac{\cos^2 x - (\sin x)(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)\cos x}$$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin x + \sin^2 x}{(1 - \sin x)\cos x}$$

$$= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)\cos x}$$ متطابقة فيثاغورث

$$= \frac{1}{\cos x}$$

$$= \sec x$$ متطابقة المقلوب

حاول أن تحل

3 بسّط المقادير التالية:

a $\cos^2 x(1 + \tan^2 x)$

b $\frac{1 - \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x}$

إن إحدى طرق تبسيط المقادير المثلثية هي تحويلها إلى دالة جيب ودالة جيب التمام.

مثال (4)

بسّط المقدار: $\sin x \tan x - \sec x$

الحل:

$$\sin x \tan x - \sec x = \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}$$ متطابقتا القسمة والمقلوب

$$= \frac{\sin^2 x - 1}{\cos x}$$

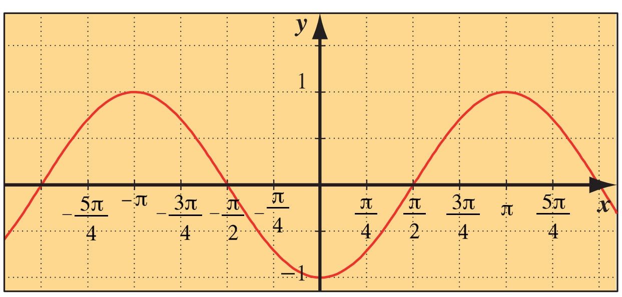
$$= \frac{-\cos^2 x}{\cos x}$$ متطابقة فيثاغورث

$$= -\cos x$$

حاول أن تحل

4 بسّط المقدار: $\tan x \cot x - \sin^2 x$

يمكننا أن نتحقق من نتيجة مثال (4) بيانيًّا وذلك بتمثيل بيان الدالة $y_1 = \sin x \tan x - \sec x$ وكذلك تمثيل بيان الدالة $y_2 = -\cos x$ في المستوى الإحداثي نفسه وسنلاحظ أن التمثيلين البيانيين للدالتين منطبقان (يمكن استخدام الآلة الحاسبة البيانية).

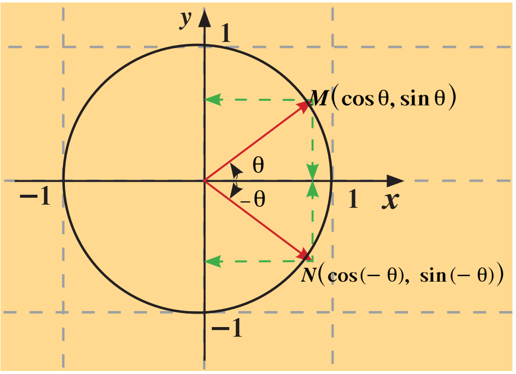


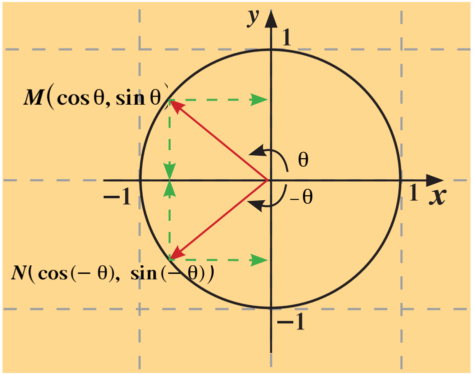
متطابقات الدوال المثلثية الزوجية أو الفردية

Even–Odd Trigonomertric Identities

تعلمت سابقًا أن دالة الجيب دالة فردية ودالة جيب التمام دالة زوجية.

بدراسة الأشكال التالية أكمل الجدول التالي:





الدالة	نوعها	المتطابقة
دالة الجيب	دالة فردية	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
دالة جيب التمام	دالة زوجية	$\cos(-\theta) = \cos\theta$
دالة الظل	دالة	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
دالة قاطع التمام	دالة	$\csc(-\theta) =$ ....
دالة القاطع	دالة	$\sec(-\theta) =$ ....
دالة ظل التمام	دالة	$\cot(-\theta) =$ ....

تذكر:

تكون الدالة $y = f(x)$ والتي مجالها D بشرط $\forall x \in D$:

(1) دالة زوجية إذا وفقط إذا كان: $f(-x) = f(x)$

(2) دالة فردية إذا وفقط إذا كان: $f(-x) = -f(x)$

مثال (5)

بسّط المقدار التالي: $\dfrac{\sin^2(-\theta) - \cos^2(-\theta)}{\sin(-\theta) - \cos(-\theta)}$

الحل:

$$\frac{\sin^2(-\theta) - \cos^2(-\theta)}{\sin(-\theta) - \cos(-\theta)} = \frac{(-\sin\theta)^2 - (\cos\theta)^2}{-\sin\theta - \cos\theta}$$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta \,,\, \cos(-\theta) = \cos\theta$

$$= \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{-(\sin\theta + \cos\theta)}$$

$$= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)\cancelto{1}{(\sin\theta + \cos\theta)}}{-\cancelto{1}{(\sin\theta + \cos\theta)}}$$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$= -\sin\theta + \cos\theta$$

حاول أن تحل

5 بسّط المقدار التالي: $\dfrac{\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta)}{\sec(-\theta)}$

تحليل المقادير المثلثية Factorising Trigonometric Expressions

يمكن تحليل المقادير المثلثية وذلك بكتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة.

مثال (6)

اكتب $1 + \cos x - \sin^2 x$ في صورة ناتج ضرب عوامل.

الحل:

بسبب عدم إمكانية التحليل نستبدل $\sin^2 x$ بـ $1 - \cos^2 x$

متطابقة فيثاغورث

$$1 + \cos x - \sin^2 x = 1 + \cos x - (1 - \cos^2 x)$$
$$= 1 + \cos x - 1 + \cos^2 x$$
$$= \cos x + \cos^2 x$$
$$= \cos x(1 + \cos x)$$

حاول أن تحل

6 اكتب $\sin^4 x - \sin^2 x$ في صورة ناتج ضرب عوامل.

مثال (7)

حلّل المقدار: $\sec^2 x + \tan x - 3$

الحل:

نستبدل $\sec^2 x$ بـ $(1 + \tan^2 x)$ ليكون المقدار بدلالة دالة مثلثية واحدة.

$$\sec^2 x + \tan x - 3 = 1 + \tan^2 x + \tan x - 3$$

بسّط
$$= \tan^2 x + \tan x - 2$$

حلّل
$$= (\tan x - 1)(\tan x + 2)$$

حاول أن تحل

7 حلّل المقدار: $\sin^2 x - \frac{5}{4}\sin x + \frac{3}{8}$

9-2

إثبات صحة متطابقات مثلثية

Confirming Trigonometric Identities

سوف تتعلم

- تبيان ما إذا كانت المعادلة تمثل متطابقة.
- إثبات صحة المتطابقات جبريًّا.

المفردات والمصطلحات:

- إثبات متطابقة Confirming an Identity
- دمج الحدود Associate Terms
- ضرب العوامل Multiplying Factors
- فصل الحدود Separating Terms
- التحليل Analysing

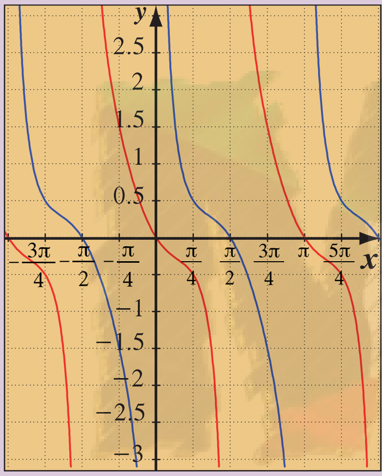
دعنا نفكر ونتناقش

لإثبات أن معادلة ما هي متطابقة، عليك إثبات أن طرفي المعادلة متساويان لكل قيم المتغير.

فمثلًا: هل المعادلة: $\sin^2 x - \tan x = -\cos^2 x + \cot x$ هي متطابقة؟

للتحقق من ذلك، يمكن تمثيل الدالتين التاليتين بيانيًّا. (باستخدام الآلة الحاسبة البيانية)

$y_1 = \sin^2 x - \tan x$ ، $y_2 = -\cos^2 x + \cot x$



$y_1 = \sin^2 x - \tan x$

$y_2 = -\cos^2 x + \cot x$

بالنظر إلى الشكل نجد أن البيانين غير منطبقين.

أي أن الطرفين غير متساويين، لذلك فإن المعادلة ليست متطابقة.

أحيانًا يكون من السهل إثبات أن الدالتين غير متساويتين جبريًّا، فمثلًا:

قيم y_1, y_2 عند $x = 0$ هي:

$y_1(0) = 0$ ولكن $y_2(0)$ غير معرّفة.

لذلك فالدالتان غير متساويتين والمعادلة ليست متطابقة.

إثبات صحة متطابقة Confirming an Identity

لإثبات أن معادلة ما هي متطابقة نحتاج إلى محاولة إثبات أن طرفي المعادلة متساويان عند كل قيم المتغير نفسها. من خلال استخدام إحدى الإستراتيجيات التالية:

1. تبسيط الطرف الأيمن بصورة الطرف الأيسر أو العكس.
2. تبسيط كلًّا من الطرفين على حدة حتى يتطابق ناتج تبسيطهما.

ويتم تبسيط كل طرف باستخدام إحدى الطرق التالية:

- دمج الحدود
- فصل الحدود
- ضرب العوامل
- التحليل
- استخدام متطابقات معلومة
- تبسيط الكسور
- التحويل إلى الجيب وجيب التمام

مثال (1)

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta$

الحل:

نبسط الطرف الأيسر إلى صورة الطرف الأيمن

ضرب العوامل

$$\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

متطابقة فيثاغورث

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$$

متطابقة القسمة

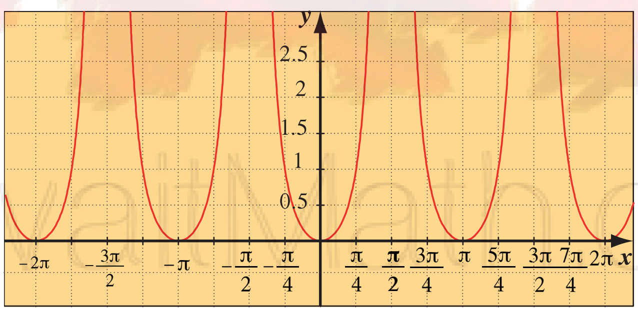
$$= \tan^2\theta$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

حاول أن تحل

1 أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$

يمكننا أن نتحقق من صحة المتطابقة في مثال (1) بيانيًّا وذلك بتمثيل كلّ من طرفي المعادلة في نفس المستوى الإحداثي كما في الشكل أدناه. سنلاحظ أن المنحنيين متطبقان وبالتالي المعادلة تمثل متطابقة (يمكنك استخدام الآلة الحاسبة البيانية).



$y_2 = \dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta}$

$y_2 = \tan^2\theta$

مثال (2)

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{1}{\sec x+1} + \dfrac{1}{\sec x-1} = 2\cot x\csc x$

الحل:

نبسط الطرف الأيمن إلى صورة الطرف الأيسر

أوجد مقامًا مشتركًا

$$\frac{1}{\sec x-1} + \frac{1}{\sec x+1} = \frac{(\sec x+1)+(\sec x-1)}{(\sec x-1)(\sec x+1)}$$

بسّط

$$= \frac{2\sec x}{\sec^2 x-1}$$

$= \dfrac{2\sec x}{\tan^2 x}$ — متطابقة فيثاغورث

$= 2\sec x \cot^2 x$ — استخدم متطابقة المقلوب

$= \dfrac{2}{\cos x} \cdot \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ — بسّط

$= \dfrac{2\cos x}{\sin x} \cdot \dfrac{1}{\sin x}$

$= 2\cot x \csc x$

$\therefore$ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

حاول أن تحل

2 أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} - \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4\tan x \cdot \sec x$

بالتعويض بأي قيمة من قيم المتغير x تصبح المتطابقة في المثال (2) عبارة صحيحة والجدول أدناه يوضح ذلك لبعض قيم الدالتين:

$$y_1 = 2\cot x \csc x$$

$$y_2 = \frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1}$$

x(radians)	y_1	y_2
−3	−99.4225	−99.4225
−2	−1.0066	−1.0066
−1	1.5261	1.5261
0	error	error
1	1.5261	1.5261
2	−1.0066	−1.0066
3	−99.4225	−99.4225

أحيانًا يمكن تحويل الكسر إلى صورة أخرى بضرب كل من البسط والمقام في نفس العامل.

مثال (3)

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\cos x}{1-\sin x} = \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

الحل:

نبدأ بالطرف الأيسر ونصل إلى صورة الطرف الأيمن

ضرب كل من البسط والمقام في $(1+\sin x)$

$\dfrac{\cos x}{1-\sin x} = \dfrac{\cos x}{1-\sin x} \times \dfrac{1+\sin x}{1+\sin x}$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$= \dfrac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$

$$= \frac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}$$ متطابقة فيثاغورث

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x}$$ اختصار العامل المشترك

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

حاول أن تحل

3 أثبت صحة المتطابقة: $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = (\csc x - \cot x)^2$

مثال (4)

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$

الحل:

نبسّط الطرف الأيسر:

متطابقة فيثاغورث $$\frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = \frac{\csc^2\theta - 1}{1+\csc\theta}$$

حلّل $$= \frac{(\csc\theta - 1)(\csc\theta + 1)}{1+\csc\theta}$$

بسّط $$= \csc\theta - 1$$

نبسّط الطرف الأيمن:

اكتب بدلالة $\sin\theta$، $\cos\theta$ $$(\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

خاصية التوزيع $$= \frac{1}{\sin\theta} - 1$$

متطابقة المقلوب $$= \csc\theta - 1$$

∵ كلا الطرفين يكافئ $\csc\theta - 1$

$$\therefore \frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$$

حاول أن تحل

4 أثبت أن: $\frac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x \tan^2 x$

مثال (5)

أثبت صحة المتطابقة: $\sin^2 x \cos^5 x = (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x)\cos x$

الحل:

نبدأ بفك الطرف الأيسر لاستخدام متطابقة فيثاغورث.

$\cos^5 x = \cos^4 x \cos x$ $$\sin^2 x \cos^5 x = \sin^2 x \cos^4 x \cos x$$

$= (\sin^2 x)(1 - \sin^2 x)^2 \cos x$ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= (\sin^2 x)(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\cos x$

$= (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x)\cos x$

حاول أن تحل

5 أثبت صحة المتطابقة: $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

إرشاد: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

9–3

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

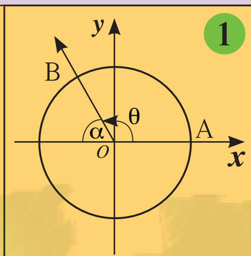
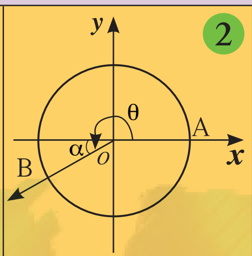
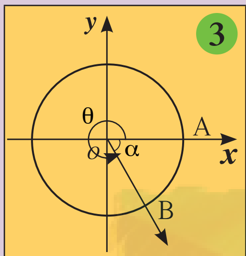
سوف تتعلم
- حل معادلات مثلثية.
- دور الدالة الدورية في عمليات حل المعادلات.

المفردات والمصطلحات:
- معادلة مثلثية Trigonometric Equation
- دالة دورية Periodic Function
- العامل الصفري Zero Factor
- مضاعفات الزاوية Multiples of an Angle

دعنا نفكر ونتناقش

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة $\theta = (\overline{OA}, \overline{OB})$ في الوضع القياسي، هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.

لتكن α زاوية الإسناد حيث $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$، أكمل الجدول التالي:

	1	2	3
الشكل			
الربع من المستوى الإحداثي	θ تقع في الربع ...	θ تقع في الربع ...	θ تقع في الربع ...
زاوية الإسناد	$\alpha = ...$	$\alpha = ...$	$\alpha = 2\pi - \theta$
الزاوية في الوضع القياسي	$\theta = ...$	$\theta = ...$	$\theta = 2\pi - \alpha$

معلومة:
إذا كانت θ تقع في الربع الأول، فإن زاوية الإسناد α تساوي θ

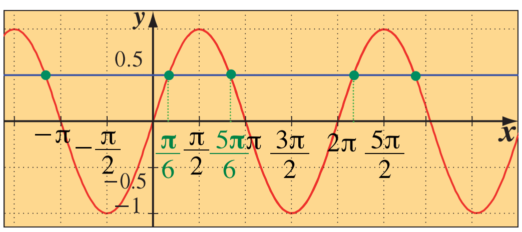
الدوال الجيبية هي دوال دورية. يمكن لخط مستقيم أفقي (مثل محور السينات) أن يتقاطع مع منحناها في عدد غير منتهٍ من النقاط. نوجد عادة حلول المعادلة المثلثية على فترة دورة واحدة، ثم نستنتج باقي قيم الحلول بإضافة دورة الدالة.

مثال توضيحي

حل المعادلة: $\sin x = \frac{1}{2}$

الحل:

$y_1 = \sin x\,,\ y_2 = \frac{1}{2}$



يوضح الشكل السابق أن التمثيلين البيانيان للدالتين:

$y_1 = \sin x$ و $y_2 = \frac{1}{2}$ يتقاطعان في عدة نقاط.

هذا يعني أن للمعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ عدة حلول وهي الإحداثي السيني لنقطة التقاطع.

(وهذا ما نتوقعه عندما تكون الدالة المثلثية مساوية لعدد ثابت ينتمي إلى مداها).

الدالة المثلثية $y = \sin x$ دالة دورية.

دورتها $= 2\pi$

$\therefore$ في حالة المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ يوجد حلّان على الفترة $[0, 2\pi)$ وهي تمثل دورة واحدة

والحلّان هما: $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ، $x = \frac{\pi}{6}$

ونستنتج الحلول الأخرى بإضافة مضاعفات 2π لكل من هاتين القيمتين.

يمكن كتابة هذه الحلول غير المنتهية على الشكل:

$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ، $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

حيث k تنتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة $(k \in \mathbb{Z})$.

تذكر:

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(\pi - \theta)$ تقع في الربع الثاني ويكون:

$\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$

وحل المعادلة:

$\sin x = \sin\theta$

هو: $x = \theta + 2k\pi$

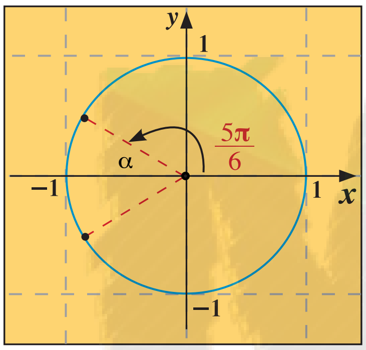
أو $x = (\pi - \theta) + 2k\pi$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

مثال (1)

حل المعادلة: $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

الحل:



$$2\cos x + \sqrt{3} = 0$$

$$2\cos x = -\sqrt{3}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$$\therefore \cos\alpha = |\cos x|$$

$$= \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\because \cos x < 0$$

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث

عندما x تقع في الربع الثاني: $x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi ,\quad k \in \mathbb{Z}$

$$\therefore x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

وعندما x تقع في الربع الثالث: $x = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi ,\quad k \in \mathbb{Z}$

$$= \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$، حيث $k \in \mathbb{Z}$

تذكر:

إذا كانت θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(-\theta)$ تقع في الربع الرابع ويكون:

$\cos\theta = \cos(-\theta)$

وحل المعادلة:

$\cos x = \cos\theta$

هو: $x = \theta + 2k\pi$

أو $x = -\theta + 2k\pi$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل

1 حل المعادلة: $\sqrt{2}\cos x = 1$

نحتاج أحيانًا إلى حل معادلات مثلثية على فترات معينة.

مثال (2)

حل المعادلة: $4\sin\theta + 1 = \sin\theta$، حيث $0 \le \theta < 2\pi$

الحل:

$4\sin\theta + 1 = \sin\theta$

فصل المتغير $4\sin\theta - \sin\theta = -1$

بسّط $3\sin\theta = -1$

$\sin\theta = -\frac{1}{3}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\therefore \sin\alpha = |\sin\theta| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.34 \text{ radians}$$

$\because \sin\theta < 0 \quad \therefore$ θ تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع

عندما θ تقع في الربع الثالث

$$\therefore \theta \approx \pi + 0.34$$
$$\approx 3.4816 \quad , \quad 3.4816 \in [0, 2\pi)$$

عندما θ تقع في الربع الرابع

$$\therefore \theta \approx 2\pi - 0.34$$
$$\approx 5.9432 \quad , \quad 5.9432 \in [0, 2\pi)$$

حل المعادلة: $\theta \approx 5.9432$ أو $\theta \approx 3.4816$

حاول أن تحل

2 حل المعادلة: $5\sin\theta - 3 = \sin\theta$

يكون لبعض المعادلات المثلثية حلولًا دقيقة لأنها تحتوي على زوايا خاصة.

مثال (3)

حل المعادلة: $\tan x = \sqrt{3}$

الحل:

$\tan x = \sqrt{3}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x.

$$\therefore \tan\alpha = |\tan x| = |\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

ملاحظة:

إذا كانت حلول المعادلات المثلثية ليست من الزوايا الخاصة فإنه يمكن إيجادها بمساعدة التكنولوجيا.

انتبه!

$2\pi \approx 6.2832$

تذكر:

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(\pi + \theta)$ تقع في الربع الثالث ويكون:

$\tan\theta = \tan(\pi + \theta)$

وحل المعادلة:

$\tan x = \tan\theta$

هو: $x = \theta + k\pi$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\because\ \tan x > 0$ $\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث

ولكن الدالة $\tan x$ هي دالة دورية ودورتها π

فيكون: $\tan(\pi + x) = \tan x$

ومنه يكون حل المعادلة: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل

3 حل المعادلة: $\tan x = 1$

عند حل معادلة مثلثية جبريًّا يمكن البدء بكتابتها على الشكل $d(x) = 0$ وتحليلها، ثم استخدام خاصية العامل الصفري.

مثال (4)

حل المعادلة: $2\cos\theta \sin\theta = -\sin\theta$

الحل:

$2\cos\theta \sin\theta = -\sin\theta$

$2\cos\theta\sin\theta + \sin\theta = 0$

تحليل إلى عوامل

$\sin\theta(2\cos\theta + 1) = 0$

خاصية الضرب في الصفر

$\sin\theta = 0$ أو $2\cos\theta + 1 = 0$

$\sin\theta = 0$ أو $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$\therefore\ \cos\alpha = |\cos\theta|$

$= \left|-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right|$

$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\because\ \cos\theta < 0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث.

عندما تقع θ في الربع الثاني:

$\theta = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

$= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

أو

$\sin\theta = 0$

$\therefore$ θ زاوية ربعية

$\therefore\ \theta = 0$ أو $\theta = \pi$

$\therefore\ \theta = 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

عندما θ تقع في الربع الثالث

$\therefore\ \theta = \pi + \alpha + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

$= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

حل المعادلة: $\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi$ أو $\theta = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل

4 حل المعادلة: $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

مثال (5)

حل المعادلة: $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$

الحل:

المعادلة: $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$ هي معادلة تربيعية في $\sin x$

بالتحليل:

$(2\sin x - 1)(2\sin x - 3) = 0$

$2\sin x - 1 = 0$ أو $2\sin x - 3 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$ أو $\sin x = \frac{3}{2}$

أو

$\sin x = \frac{3}{2}$

$\because\ y = \sin x$ مداها $[-1, 1]$

$\frac{3}{2} \notin [-1, 1]$

$\therefore\ \sin x = \frac{3}{2}$ ليس لها حل

$\sin x = \frac{1}{2}$

نأخذ $\sin x = \frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x.

$\therefore\ \sin\alpha = |\sin x|$

$= \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{6}$

$\because\ \sin x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني.

عندما x تقع في الربع الأول

$\therefore\ x = \alpha + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

عندما x تقع في الربع الثاني

$\therefore\ x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

$= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

حل المعادلة: $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل

5 حل المعادلة: $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

ملاحظة: يمكنك حل مثال (5) باستخدام قانون حل المعادلة التربيعية.

معادلات تحتوي على مضاعفات الزوايا Equations Involving Multiples of Angles

يقال للمعادلة: $2\cos 3x = \sqrt{2}$ أنها **معادلة مضاعفات الزاوية**، لأن الزاوية في هذه المعادلة $3x$، وهي من مضاعفات x.

مثال (6)

حل المعادلة: $2\cos 3x = \sqrt{2}$ حيث $0 \le x < \pi$

الحل:

$\because\ 0 \leqslant x < \pi$

$\therefore\ 0 \leqslant 3x < 3\pi$

$\therefore$ $3x$ تقع في دورة ونصف الدورة

$2\cos 3x = \sqrt{2} \implies \cos 3x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

نفرض أن α زاوية الإسناد للزاوية $3x$

$\therefore\ \cos\alpha = |\cos 3x|$

$= \left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

$\because\ \cos 3x > 0 \quad \therefore$ $3x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

عندما $3x$ تقع في الربع الأول

$$\therefore\ 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \implies x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi\ , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}\ ,\ \frac{\pi}{12} \in [0,\pi)$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}\ ,\ \frac{3\pi}{4} \in [0,\pi)$$

$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{17\pi}{12}\ ,\ \frac{17\pi}{12} \notin [0,\pi)$$

عندما $3x$ تقع في الربع الرابع

$$\therefore\ 3x = 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \implies 3x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\ , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{7\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{15\pi}{12}\ ,\ \frac{15\pi}{12} \notin [0,\pi)$$

حل المعادلة: $x = \dfrac{7\pi}{12}\ ,\ x = \dfrac{3\pi}{4}\ ,\ x = \dfrac{\pi}{12}$

حاول أن تحل

6 حل المعادلة: $4\cos 2x = 2$ حيث $0° \le x < 360°$

مثال إثرائي

حل المعادلة: $2\sin^2 2x = 1$

الحل:

$$2\sin^2 2x = 1$$
$$\sin^2 2x = \frac{1}{2}$$
$\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ أو $\sin 2x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin 2x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ أو $\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

نفرض أن α_2 هي زاوية الإسناد للزاوية $2x$

$$\therefore\ \sin\alpha_2 = |\sin 2x|$$
$$= \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\therefore\ \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$$

$\because\ \sin 2x < 0\ \ \therefore$ $2x$ تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع

عندما $2x$ تقع في الربع الثالث

$$\therefore\ 2x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$2x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$
$$x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$$

عندما $2x$ تقع في الربع الرابع

$$\therefore\ 2x = 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$2x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$
$$x = \frac{7\pi}{8} + k\pi$$

نفرض أن α_1 هي زاوية الإسناد للزاوية $2x$

$$\therefore\ \sin\alpha_1 = |\sin 2x|$$
$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\therefore\ \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$$

$\because\ \sin 2x > 0\ \ \therefore$ $2x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني

عندما $2x$ تقع في الربع الأول

$$\therefore\ 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{\pi}{8} + k\pi$$

عندما $2x$ تقع في الربع الثاني

$$\therefore\ 2x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$
$$x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$$

حل المعادلة: $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi,\ \ x = \frac{3\pi}{8} + k\pi\ ,\ x = \frac{\pi}{8} + k\pi\ ,$

$x = \frac{7\pi}{8} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

تدريب إثرائي

حل المعادلة: $4\cos^2 2x = 1$

مثال (7) **تطبيقات**

لعبة مربوطة بنابض شد إلى الأسفل ثم أفلت من سكون.

تنمذج المعادلة : $h = -10\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$، ارتفاع اللعبة بالسنتيمترات (cm) أعلى أو أدنى من مستوى الاتزان كدالة في الزمن t بالثواني.

متى تكون اللعبة لأول مرة أعلى من مستوى السكون بـ 5 cm؟

الحل:

$$h = -10\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$$

عوّض عن h بـ 5

$$5 = -10\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$$

$$-\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$$

نفرض α زاوية الإسناد

$$\cos\alpha = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \cos\frac{2\pi}{3}t < 0$$

$\therefore$ الزاوية تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث

$$\therefore \frac{2\pi}{3}t = \frac{2\pi}{3} \quad \text{أو} \quad \frac{2\pi}{3}t = \frac{4\pi}{3}$$

$$\therefore \quad t = 1 \quad \text{أو} \quad t = 2$$

تكون اللعبة لأول مرة أعلى من مستوى السكون بـ 5 cm بعد ثانية واحدة.

حاول أن تحل

7 في المثال (7)، متى تكون اللعبة لثاني مرة أدنى من مستوى الاتزان بـ 5 cm؟

تذكر:

إذا كان: $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

فإن: $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

9-4

متطابقات المجموع والفرق

Sum and Difference Identities

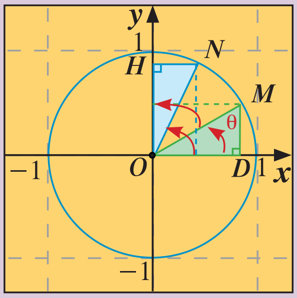
سوف تتعلم

- جيب مجموع زاويتين أو الفرق بينهما.
- جيب تمام مجموع زاويتين أو الفرق بينهما.
- متطابقة الدوال المتكافئة.

المفردات والمصطلحات:

- جيب مجموع زاويتين
Sine of Sum of Two Angles
- جيب الفرق بين زاويتين
Sine of Difference of Two Angles
- جيب تمام مجموع زاويتين
Cosine of Sum of Two Angles
- جيب تمام الفرق بين زاويتين
Cosine of Difference of Two Angles
- دوال متكافئة
Cofunctions

عمل تعاوني



في الشكل المقابل، $m(D\widehat{O}M) = \theta, m(D\widehat{O}N) = \frac{\pi}{2} - \theta$

a ما قياس $(N\widehat{O}H)$؟

b أثبت تطابق المثلثين: ODM, ONH.

c أكمل: $OD = \dots\ ,\ MD = \dots$

d أكمل: $N\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \dots\dots\right) \quad , \quad M(\dots\ ,\ \sin\theta)$

ثم أكمل: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\dots \quad , \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\dots$

(**إرشاد:** استفد من الفقرة (c)).

متطابقات الدوال المتكافئة Cofunction Identities

تربط متطابقات الدوال المتكافئة بين الدوال المثلثية الأساسية والدوال المكافئة لها (الجيب وجيب التمام، الظل وظل التمام، القاطع وقاطع التمام).

متطابقات الدوال المتكافئة

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$$

مثال (1)

أثبت أن: $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$

الحل:

$$b - a = -(a - b) \qquad \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \qquad = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \qquad = -\cos\theta$$

حاول أن تحل

1 أثبت أن: $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$

مثال (2)

أثبت أن: $\csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\sec\theta$

الحل:

$b-a=-(a-b)$

$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

$$\csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\csc\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$$
$$=\frac{1}{\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]}$$
$$=\frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$
$$=\frac{-1}{\cos\theta}$$
$$=-\sec\theta$$

حاول أن تحل

2 أثبت أن: $\sec\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\csc\theta$

متطابقات المجموع والفرق Sum and Difference Identities

تعلمت أن ناتج الضرب الداخلي لمتجهين غير صفريين: $\vec{A}=<x_A, y_A>$, $\vec{B}=<x_B, y_B>$

يمكن إيجاده بإحدى العلاقتين التاليتين:

1 $\vec{A}\cdot\vec{B}=x_A x_B+y_A y_B$

2 $\vec{A}\cdot\vec{B}=\|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\cos\theta$

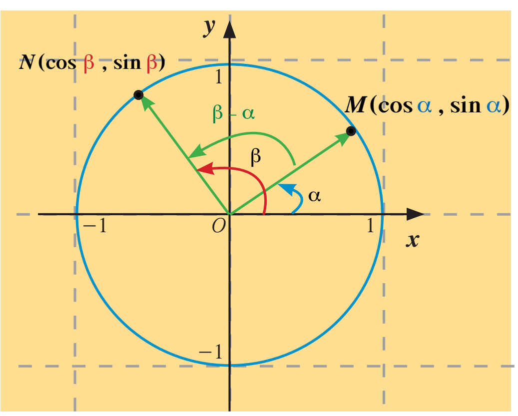
حيث θ هي الزاوية المحددة بالمتجهين.

في الشكل أدناه، سوف نستخدم الضرب الداخلي لمتجهين لإيجاد متطابقة $\cos(\beta-\alpha)$

$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}=<\cos\beta, \sin\beta>\cdot<\cos\alpha, \sin\alpha>=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$ **(1)**

أيضًا

$$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}=\|\overrightarrow{ON}\|\times\|\overrightarrow{OM}\|\times\cos(\beta-\alpha)$$
$$=1\times1\times\cos(\beta-\alpha)=\cos(\beta-\alpha)$$
$$\therefore\ \overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}=\cos(\beta-\alpha)$$ **(2)**



من (1), (2):

$$\therefore\ \cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$

لإيجاد: $\cos(\beta+\alpha)$

$\because\ \beta+\alpha=\beta-(-\alpha)$

$\therefore\ \cos(\beta+\alpha)=\cos[\beta-(-\alpha)]$

$=\cos\beta\cos(-\alpha)+\sin\beta\sin(-\alpha)$

$=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta(-\sin\alpha)$

$\therefore\ \cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$

نستطيع كتابة $\sin(\beta+\alpha)$ على الشكل $\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\beta+\alpha)\right]$

$$\sin(\beta+\alpha)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\beta+\alpha)\right]$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta-\alpha\right)$$
$$=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\alpha\right]$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\cos\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\sin\alpha$$

$\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$

ومنها

$$\sin(\beta-\alpha)=\sin[(\beta+(-\alpha)]$$
$$=\sin\beta\cos(-\alpha)+\cos\beta\sin(-\alpha)$$

$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$

بكتابة $\tan(\beta+\alpha)=\dfrac{\sin(\beta+\alpha)}{\cos(\beta+\alpha)}$ نحصل على:

$$\tan(\beta+\alpha)=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$

كذلك

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

متطابقات المجموع والفرق

$$\cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$$
$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$
$$\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$
$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$
$$\tan(\beta+\alpha)=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$
$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

مثال (3)

أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة كلًّا مما يلي:

a $\cos 15°$ b $\sin 105°$ c $\tan 75°$

الحل:

a $\cos 15°=\cos(60°-45°)$ متطابقة الفرق

$$=\cos 60°\cos 45°+\sin 60°\sin 45°$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

b $\sin 105°$

$\because \quad 105° = 60° + 45°$

$\therefore \sin 105° = \sin(60° + 45°)$

$$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

c $\tan 75°$

$\because \quad 75° = 45° + 30°$

$\therefore \quad \tan 75° = \tan(45° + 30°)$

$$= \frac{\tan 45° + \tan 30°}{1 - \tan 45° \tan 30°}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= 2 + \sqrt{3}$$

$\tan 45° = 1$

حاول أن تحل

3 أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة كلًّا مما يلي:

a $\sin 15°$ **b** $\cos 75°$ **c** $\tan 105°$

مثال (4)

إذا كان: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos\beta = \frac{-12}{13}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

أوجد كلًّا مما يلي:

a $\sin(\alpha+\beta)$ **b** $\cos(\alpha-\beta)$ **c** $\tan(\alpha-\beta)$

الحل:

نوجد أولًا: $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\tan\alpha$, $\tan\beta$

متطابقة فيثاغورث

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

تعويض

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$ فصل المتغير

$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$ بسّط

$\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ أو $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\because\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha > 0$

$\therefore\ \cos\alpha = \frac{3}{5}$

- $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ متطابقة فيثاغورث

$\sin^2\beta + \left(\frac{-12}{13}\right)^2 = 1$ تعويض

$\sin^2\beta = 1 - \frac{144}{169}$ فصل المتغير

$\sin^2\beta = \frac{25}{169}$ بسّط

$\sin\beta = -\frac{5}{13}$ أو $\sin\beta = \frac{5}{13}$

$\because\ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin\beta < 0$

$\therefore\ \sin\beta = \frac{-5}{13}$

- $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

- $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{-5}{13}}{\frac{-12}{13}} = \frac{5}{12}$

a $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)$

$= \frac{-48}{65} - \frac{15}{65} = -\frac{63}{65}$

b $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)$

$= \frac{-36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65}$

c $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{\frac{4}{3} - \frac{5}{12}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{12}\right)}$

$= \frac{\frac{11}{12}}{\frac{56}{36}} = \frac{33}{56}$

حاول أن تحل

4 باستخدام المعطيات من المثال (4)، أوجد كلًّا مما يلي:

a $\cos(\alpha+\beta)$ **b** $\tan(\alpha+\beta)$ **c** $\sin(\beta-\alpha)$

9-5

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

Double-Angle and Half-Angle Identities

سوف تتعلم
- متطابقات ضعف الزاوية.
- متطابقات نصف الزاوية.

المفردات والمصطلحات:
- ضعف الزاوية
Double of an Angle
- نصف الزاوية
Half of anAngle

عمل تعاوني

تعلمت في ما سبق:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

إذا كانت $\alpha=\beta$ فإن:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\alpha)$$
$$=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

وبالمثل استخدم قوانين مجموع زاويتين في إيجاد كل من:

a) $\sin 2\alpha$ b) $\tan 2\alpha$

متطابقات ضعف الزاوية Double-Angle Identities

أولًا: جيب تمام ضعف الزاوية Cosine Double-Angle

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

مثال (1)

أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية: $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta-1$

الحل:

من عمل تعاوني (1) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

من متطابقة فيثاغورث $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

نحصل على $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

في المعادلة (1) نعوّض عن $\sin^2\theta$ بـ $1-\cos^2\theta$

نحصل على $\cos 2\theta=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)$

$$=\cos^2\theta-1+\cos^2\theta$$
$$=2\cos^2\theta-1$$

حاول أن تحل

1 أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية: $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$
$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$$

مثال (2)

إذا كان $\cos x = \frac{3}{5}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد $\cos 2x$

الحل:

متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية

$$\therefore \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1$$

$$= 2 \times \frac{9}{25} - 1$$

$$= \frac{18}{25} - 1$$

$$= -\frac{7}{25}$$

حاول أن تحل

2 إذا كان $\sin x = \frac{5}{13}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد: $\cos 2x$

ثانيًا: جيب ضعف الزاوية — Sine Double–Angle

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

مثال (3)

إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، فأوجد $\sin 2\theta$.

الحل:

متطابقة فيثاغورث

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$= 1 - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad \therefore \quad \cos\theta < 0$

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

متطابقة جيب ضعف الزاوية

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = 1$$

حاول أن تحل

3 إذا كان $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، $\cos\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد $\sin 2\theta$.

ثالثًا: ظل ضعف الزاوية Tangent Double−Angle

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

مثال (4)

إذا كان: $\tan\theta = -1+\sqrt{2}$، استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

الحل:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$
$$= \frac{2(-1+\sqrt{2})}{1-(-1+\sqrt{2})^2}$$
$$= \frac{2(-1+\sqrt{2})}{1-(1+2-2\sqrt{2})}$$
$$= \frac{2(-1+\sqrt{2})}{-2+2\sqrt{2}} = \frac{2(-1+\sqrt{2})}{2(-1+\sqrt{2})} = 1$$

حاول أن تحل

4 إذا كان $\tan\theta = \sqrt{3}$، استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

مثال (5)

أثبت صحة المتطابقة: $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

الحل:

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

المقام المشترك

$$= \frac{\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

بسّط

$$= \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

متطابقة فيثاغورث

$$= \cos^2\theta-\sin^2\theta$$

متطابقة الضعف

$$= \cos 2\theta = \text{الطرف الأيسر}$$

حاول أن تحل

5 أثبت صحة المتطابقة: $2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2$

مثال (6)

أثبت صحة المتطابقة: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

الحل:

$\cos 3\theta = \cos(\theta + 2\theta) =$ الطرف الأيسر

متطابقة المجموع $= \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta$

متطابقة الضعف $= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \sin\theta(2\sin\theta\cos\theta)$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$

متطابقة فيثاغورث $= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta$

الطرف الأيمن $= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta =$

حاول أن تحل

6 أثبت صحة المتطابقة: $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

متطابقات نصف الزاوية Half–Angle Identities

يمكن استخدام متطابقة ضعف الزاوية لإيجاد متطابقات نصف الزاوية.

لتكن: $\theta = \frac{\alpha}{2}$

متطابقة ضعف الزاوية لجيب التمام $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

عوض عن θ بـ $\frac{\alpha}{2}$ $\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$

بسّط $\cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$

حل في $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ $\frac{1+\cos\alpha}{2} = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

وبالمثل $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

متطابقات نصف الزاوية

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

ملاحظة:

عند استخدام متطابقات نصف الزاوية تحتاج إلى تعيين الربع الذي تقع فيه الزاوية $\frac{\alpha}{2}$ ومن ثم تستخدم الإشارة الصحيحة + أو − للدالة المثلثية في هذا الربع.

تذكر:

الدالة	موجبة في الربع
$\sin x$	الأول والثاني
$\cos x$	الأول والرابع
$\tan x$	الأول والثالث

مثال (7)

استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\sin 15^\circ$

الحل:

$$\sin 15^\circ = \sin\left(\frac{30^\circ}{2}\right)$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}$$

خذ الجذر الموجب، لأن 15° توجد في الربع الأول

$$= +\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}$$

عوّض $\cos 30^\circ$ بـ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

حاول أن تحل

7 استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\cos 15^\circ$

مثال (8)

إذا كانت: $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ، $\sin\theta = -\frac{24}{25}$ ،

فأوجد $\sin\frac{\theta}{2}$.

الحل:

نوجد أولاً $\cos\theta$

متطابقة فيثاغورث

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

عوّض

$$\cos^2\theta + \left(\frac{-24}{25}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2\theta = \frac{49}{625}$$

لأن θ في الربع الثالث

$$\cos\theta = \frac{-7}{25}$$

نوجد الآن $\frac{\theta}{2}$

$$\because\ 180^\circ < \theta < 270^\circ$$

ومنه $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني

$$\therefore\ 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$$

متطابقة نصف الزاوية

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

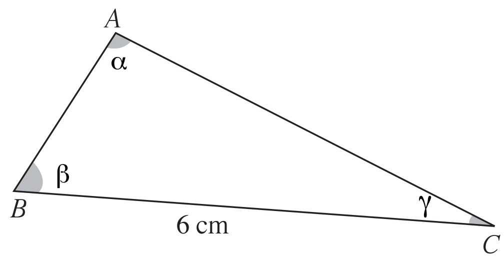
عوّض، اختر الجذر الموجب، لأن $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{-7}{25}\right)}{2}} = \frac{4}{5}$$

حاول أن تحل

8 في المثال (8)، أوجد: $\cos\frac{\theta}{2}$ ، $\tan\frac{\theta}{2}$

ABC مثلث، حيث $BC = 6\,cm$ ، $\cos\beta = \frac{3}{5}$ ، $\cos\gamma = \frac{12}{13}$.



1 a احسب $\sin\gamma$ ، $\sin\beta$

b احسب $\sin\alpha$ ، $\cos\alpha$

2 أوجد مساحة المثلث ABC.

الحل:

1 a في المثلث قيمة جيب الزاوية هي دائمًا موجبة، لأن قياسات الزوايا تنحصر بين الصفر و°180 أي في الربعين الأول والثاني حيث جيب الزاوية موجب.

متطابقة فيثاغورث

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},\quad \sin\gamma = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$$

b في المثلث مجموع قياسات الزوايا °180

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$$

$$\therefore\ \cos\alpha = \cos(180^\circ-(\beta+\gamma))$$

$$= -\cos(\beta+\gamma)$$

متطابقة المجموع

$$= -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$$

$$= -\frac{3}{5}\times\frac{12}{13} + \frac{4}{5}\times\frac{5}{13} = \frac{-16}{65}$$ ، $\cos\alpha < 0$ ، $\therefore$ α زاوية منفرجة

وبالمثل:

$$\sin\alpha = \sin(180^\circ-(\beta+\gamma))$$

$$= \sin(\beta+\gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma$$

$$= \frac{4}{5}\times\frac{12}{13} + \frac{3}{5}\times\frac{5}{13} = \frac{63}{65}$$

2 سأستخدم القاعدة:
$Area = \frac{1}{2} BA \times BC \times \sin B$.

لذلك عليّ أوّلًا إيجاد BA، سأستخدم قانون الجيب:

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$ حيث إن $AB = c$. , $\therefore \quad \frac{\frac{63}{65}}{6} = \frac{\frac{5}{13}}{c}$

$$c = \frac{5 \times 65 \times 6}{63 \times 13} = 2.38$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \text{BC} \times \text{BA} \times \sin \text{B}$$

ومنه:

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 2.38 \times \frac{4}{5}$$

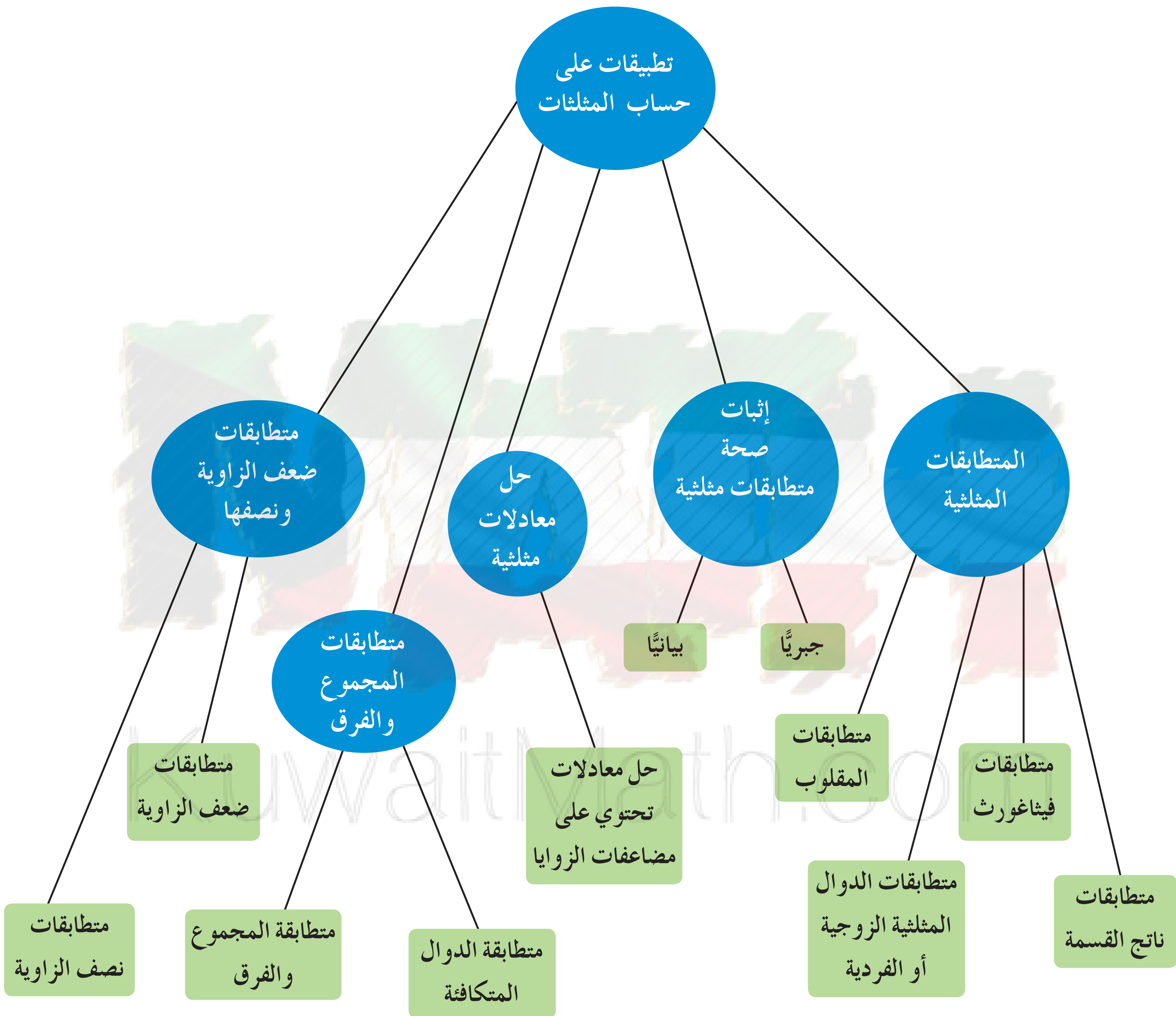
$$\therefore \quad \text{Area} = 5.712$$

$\therefore$ تبلغ مساحة المثلث حوالى $5.7\ \text{cm}^2$

مسألة إضافية

أثبت صحة المتطابقة: $\cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

مخطط تنظيمي للوحدة التاسعة



ملخص

- متطابقات ناتج القسمة: $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ، $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- متطابقات المقلوب: $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ ، $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ ، $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$
- متطابقات فيثاغورث: $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$ ، $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ ، $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
- متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية:

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cot(-\theta) = -\cot\theta \qquad \sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$

- طرق إثبات أن المعادلة متطابقة:

دمج الحدود، فصل الحدود، ضرب العوامل، التحليل، استخدام متطابقات معلومة، تبسيط الكسور، التحويل إلى الجيب وجيب التمام فقط.

- متطابقة الدوال المتكافئة:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$$

- متطابقات المجموع والفرق:

$$\cos(\beta + \alpha) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta + \alpha) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$$

$$\tan(\beta + \alpha) = \frac{\tan\beta + \tan\alpha}{1 - \tan\beta\tan\alpha}$$

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$$

- متطابقات ضعف الزاوية:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \qquad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \qquad \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

- متطابقات نصف الزاوية:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \ , \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \ , \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$