الوحدة الثانية

الاشتقاق

The Derivatives

مشروع الوحدة: تأثير الضغط على الغطّاس

1 مقدمة المشروع: يساعد جهاز التنفّس الذي يستخدم في الغطس، علماء البحار على استكشاف أعماق المياه إلى أبعد حدود ممكنة، بالإضافة إلى كون الغطس أيضًا رياضة شعبيّة. ولكن، للغطس بأمان، يتوجّب على الغطّاسين فهم ضغط الماء في الأعماق لأنّه يصبح خطيرًا إذا تخطّى 12 m.

تسمح أجهزة التنفس الحديثة للغطّاسين بالبقاء لأوقات طويلة تحت الماء. ولكن عمق الغطس ومدّته يبقيان محدودين ويتأثّران في الضغط الذي يسمح جسم الإنسان بتحمّله. سوف تستخدم الرياضيّات لاكتشاف الأمان في كيفيّة استخدام أجهزة التنفّس للغطس ثمّ سوف تصمّم ملصقًا عن هذا الجهاز.

2 الهدف: إيجاد العلاقة بين معدّل الهواء الذي يستخدمه الغطّاس وعدّة عوامل مثل: العمق، سعة رئتيه، عمر الغطّاس...

3 اللوازم: ورق رسم بياني – آلة حاسبة – حاسوب.

4 أسئلة حول التطبيق:

تعطيك أجهزة التنفّس للغطس كمّيّة الضغط تحت الماء. عند سطح الماء يكون ضغط الهواء واحدًا (ضغط جوّيّ) $(P = 1\text{ atm})$. يتزايد الضغط كلّما غطسنا أكثر تحت الماء.

وحدة قياس الضغط $P(\text{atm})$ تتغيّر مع العمق d (بالمتر) بحسب المعادلة: $P = \frac{d}{13} + 1$. ومن المعروف، بحسب قانون بويل، أنّ حجم الهواء V يتغيّر عكسيًّا مع الضغط P أي أنّ $V = \frac{12}{P}$ حيث V تقاس بالكوارت (qt).

a أوجد الضغط على سطح الماء.

b أوجد الضغط على عمق 5 m، من ثمّ أوجد حجم الهواء في رئتيه.

c ارسم جدولًا تبيّن فيه تغيّر الضغط وحجم الهواء نسبة للضغط $(d < 20\text{ m})$.

d اصنع رسمًا بيانيًّا تبيّن فيه تغيّر حجم الرئة نسبة إلى العمق.

5 التقرير: أجر بحثًا عن متوسط حجم الرئة لعدة أعمار، من ثمّ اكتب تقريرًا مفصّلًا تبيّن فيه متوسط العمق الذي يستطيع النزول إليه كل غطاس بحسب عمره.

دروس الوحدة

الوحدة الثانية

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت نهاية دالة عند نقطة معينة.
- تعلمت اللانهاية لدالة.
- تعلمت الاتصال لدالة عند نقطة وعلى فترة.
- تعرفت نقاط عدم الاتصال (الانفصال) لدالة.
- تعلمت كيفية التخلص من نقاط الانفصال إذا أمكن ذلك.

ماذا سوف تتعلم؟

- إدراك مفهوم التغيّر في الدالة، ومتوسّط معدّل التغيّر، و معدّل التغيّر.
- حساب السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية.
- إيجاد معادلات خط المماس والخط العمودي على المماس عند نقطة معطاة على منحنى الدالة.
- إيجاد الميل والمشتقات باستخدام تعريف المشتقّة.
- إيجاد المشتقة من جهة واحدة.
- التعرف على العلاقة بين الاتصال عند نقطة وقابلية الاشتقاق.
- التمييز بين الركن والناب والمماس الرأسي وعدم الاتصال.
- التعرف على العلاقة بين الاشتقاق والاتصال.
- إيجاد مشتقات الدوال ومن ضمنها مشتقات الرتب العليا.
- استخدام قواعد الاشتقاق للدوال المثلثيّة.
- إيجاد مشتقة دالة الدالة باستخدام قاعدة السلسلة.
- إيجاد الاشتقاق الضمني وتطبيقه.

المصطلحات الأساسية

مشتقة دالة — رمز المشتقة f'، $\frac{dy}{dx}$ — $\frac{d}{dx}(f(x))$ — معدل التغيّر — متوسط معدل التغير — السرعة المتوسطة — السرعة اللحظية — ميل المماس — معادلة المماس — معادلة الخط العمودي (الناظم) — رسم بياني — قابلية الاشتقاق— الاشتقاق — ركن — ناب — مماس رأسي — قواعد الاشتقاق — قاعدة السلسلة — اشتقاق الدوال المثلثية — اشتقاق من رتب عليا — اشتقاق ضمني.

أضف إلى معلوماتك

يعتبر التفاضل **Differentiation** أحد الفروع المهمة في الرياضيات حيث هو مفاضلة دالة عند نقطة معينة أي مقياس لمقدار تغير متغير بالنسبة إلى متغير آخر. من المتعارف عليه أن اكتشاف علم التفاضل يعود إلى نيوتن Newton (1642–1727) ولايبنتز Leibniz (1646–1716) حيث أصدرا بشكل منفصل حوالى سنة 1685 منشورات مفصلة عن هذا العلم.

اسحق نيوتن Isaac Newton
(1642–1727)
ساهم نيوتن في دراسة متسلسلات القوى ونظرية ذات الحدين ووضع طريقة نيوتن لتقريب جذور الدوال إضافة إلى تأسيسه لحساب التفاضل والتكامل.

لايبنتز Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646–1716)
ينسب إليه رمز التفاضل ∂x ورمز التكامل
$\int_{t=x_0}^{x} f(t).\partial t$

2-1

معدلات التغير وخطوط المماس

Rates of Change and Tangent Lines

سوف تتعلم

- إدراك مفهوم التغيّر في الدالة ومعدل التغير ومتوسط معدل التغيّر.
- حساب السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية.
- إيجاد ميل مماس منحنى الدالة عند نقطة.
- إيجاد معدل التغير للدالة.

المفردات والمصطلحات:

- معدل التغيير Rate of Change
- السرعة المتوسطة Average Velocity
- السرعة اللحظية Instantaneous Velocity
- الميل Slope
- المماس Tangent
- العمودي Normal

دعنا نفكر ونتناقش

أظهرت التجارب أن المسافة التي يقطعها جسيم سقط سقوطًا حرًّا من السكون نحو سطح الأرض تعطى بالعلاقة: $d(t) = 4.9t^2$ حيث d المسافة بالمتر (m)، t الزمن بالثواني (s) (قانون جاليليو).

فإذا سقط جسيمًا سقوطًا حرًّا من مرتفع، أوجد بعد مرور ثانيتين من السقوط:

(a) التغير في الزمن.

(b) التغير في المسافة.

(c) السرعة المتوسطة $\overline{v}$: $\overline{v} = \dfrac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}}$

السرعة المتوسّطة والسرعة اللحظية Average and Instantaneous Velocity

نوجد **السرعة المتوسطة** $\overline{v}$ لجسم متحرّك، في فترة زمنيّة ما، بقسمة التغير في المسافة (Δd) على التغير في الزمن (Δt).

وعليه تكون وحدة السرعة المتوسّطة عبارة عن وحدة المسافة مقسومة على وحدة الزمن؛ أي كيلومتر/ساعة (km/h) أو متر/ثانية (m/s) أو أيّ وحدات أخرى موجودة في المسألة قيد الدراسة.

وفي حالات كثيرة سواء أكان في مجال العلوم أم في الحياة اليوميّة لا تمدّنا السرعة المتوسطة لجسم متحرّك بالمعلومات ذات الأهمية القصوى فمثلًا: إذا ارتطمت سيّارة بحائط خرسانيّ فإنّ ما سيحدّد الآثار المترتبة على الحادث ليس مقدار السرعة المتوسطة التي تقاد بها السيّارة من نقطة بدء الحركة حتّى نقطة الارتطام بل مقدار السرعة عند لحظة الارتطام: **السرعة اللحظيّة**. وكذلك بالنسبة إلى «الرادار» فإن السرعة التي تُضبط بها السيّارة هي السرعة اللحظيّة للسيّارة.

معلومة:

$\Delta t = t_2 - t_1$

أي أن $t_2 = t_1 + \Delta t$

بوضع $\Delta t = h$

$\therefore\ t_2 = t_1 + h$

وعليه:

$f(t_2) - f(t_1)$

$= f(t_1 + h) - f(t_1)$

مثال توضيحي

تسقط كرة من علو 50 m، وفق المعادلة $d(t) = 4.9t^2$، حيث d المسافة التي تقطعها الكرة بالأمتار (m)، t الزمن بالثواني (s).

(a) ما السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية من الثانية الأولى إلى الثانية الثالثة؟

(b) أوجد سرعة الكرة عند اللحظة $t = 3$

الحل:

a $\because \; d(t) = 4.9t^2$

في الثانية الأولى، المسافة التي قطعتها الكرة هي: $d_1 = d(1) = 4.9(1)^2 = 4.9$

في الثانية الثالثة، المسافة التي قطعتها الكرة هي: $d_2 = d(3) = 4.9(3)^2 = 44.1$

السرعة المتوسطة بين الثانية الأولى والثالثة هي: $\bar{v} = \dfrac{\Delta d}{\Delta t} = \dfrac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$

$$\bar{v} = \frac{44.1 - 4.9}{3 - 1} = \frac{39.2}{2} = 19.6$$

السرعة المتوسطة لسقوط الكرة هي: 19.6 m/s

b يمكننا حساب السرعة المتوسّطة للجسم على الفترة الزمنية من اللحظة $t_1 = 3$ إلى اللحظة $t_2 = 3 + h$، حيث $\Delta t = h$ هو الفارق الزمني بين اللحظتين

تمثل السرعة المتوسطة على الفترة الزمنية $[3 , 3 + h]$ التي مدتها $\Delta t = h$

ولا نستطيع استخدام تلك القاعدة لحساب السرعة بالضبط عند اللحظة $t = 3$ أي $h = 0$ لأنه لا يمكن القسمة على صفر.

وعلى ذلك فإنّه يمكننا أخذ فكرة جيّدة لما يحدث عند $t = 3$ وذلك بحساب قيمة الصيغة التي حصلنا عليها بجعل h تقترب من الصفر، وإذا فعلنا ذلك فإنّنا نجد نمطًا واضحًا كما في الجدول، يظهر هذا النمط أنّ السرعة المتوسّطة تقترب من القيمة 29.4 m/s عندما تقترب h من الصفر، مما يسمح بالقول إن السرعة اللحظية للكرة عند $t = 3$ تساوي 29.4 m/s

السرعة المتوسطة على الفترة $\dfrac{\Delta d}{\Delta t}$ (m/s)	مدّة الفترة الزمنيّة h بالثانية
34.3	1
29.89	0.1
29.449	0.01
29.4049	0.001
29.40049	0.0001

أكّد جبريًّا:

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{4.9(3+h)^2 - 4.9(3)^2}{h}$$

نفك البسط في المعادلة ونبسّط:

$$= \frac{4.9(9 + 6h + h^2) - 44.1}{h}$$

$$= \frac{29.4h + 4.9h^2}{h} = \frac{h(29.4 + 4.9h)}{h}$$

$$= 29.4 + 4.9h \quad , \quad h \neq 0$$

لقيم h الموجبة الصغيرة جدًّا السرعة المتوسّطة تساوي $29.4 + 4.9h \text{(m/s)}$

وتكون $4.9h$ صغيرة جدًّا أي قريبة من الصفر.

ونعبّر عن ذلك كالتالي:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta d}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} (29.4 + 4.9h)$$

$$= 29.4$$

ملاحظة:

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h}$$

الربط بالحياة:

السقوط الحر

عندما تسقط الأجسام سقوطًا حرًّا في مكان ما، على افتراض أنه فارغ من الهواء، فإنها تصل جميعها إلى سطح الأرض في فترة زمنية مشتركة وإن اختلفت كتلها. من ناحية ثانية إذا سقطت هذه الأجسام في مكان ما يملؤه الهواء فالوضع يختلف تمامًا إذ نجد أن حجرًا صغيرًا يصل إلى سطح الأرض في زمن أقل من ورقة علمًا أنهما سقطا في اللحظة نفسها.

وفي هذه الحالة نقول إنّ نهاية السرعة المتوسّطة هي 29.4 عندما تقترب h من الصفر ولا تساويه ونقول إنّها السرعة اللحظية عند اللحظة $t = 3$.

ومنه تكون السرعة اللحظية 29.4 m/s

وعمومًا لو فرضنا أن جسيم يتحرك في خط مستقيم خلال فترة زمنية صغيرة جدًّا مقدارها h

فإنه عندما $t = t_1$ يكون الجسيم عند الموقع $d(t_1)$

وعندما $t = t_1 + h$ يكون الموقع هو $d(t_1 + h)$

وعليه فإن السرعة المتوسطة للجسيم خلال تلك الفترة تكون:

$$\bar{v} = \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h}$$

وعندما تؤول h إلى الصفر نحصل على السرعة اللحظية.

ويمكن أن نعرف السرعة اللحظية v عند الزمن t_1 كالتالي:

$$v = \lim_{h \to 0} \bar{v} = \lim_{h \to 0} \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h}$$

بشرط أن تكون النهاية موجودة.

متوسّط معدّل التغيّر وميل المماس

Average Rate of Change and Tangent Slope

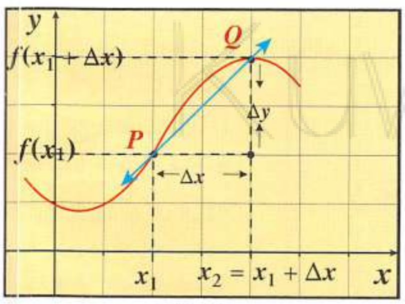
إذا كان لدينا دالة: $y = f(x)$

فإذا طرأ تغير قدره Δx على قيمة المتغير المستقل x

فإنه يتبع ذلك تغير قدره Δy على قيمة المتغير التابع y ويكون:

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$= f(x_2) - f(x_1)$$



شكل (1)

ويكون **متوسط معدل** التغير للدالة y:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

وفي الشكل (1) $\overleftrightarrow{PQ}$ قاطع للمنحنى،

ميل القاطع: $m(\overleftrightarrow{PQ}) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

والآن، ماذا يحدث لميل القاطع عندما تقترب Q من P بإطراد؟

معلومة:

عادة ما يرغب علماء الأحياء في معرفة المعدّلات التي تنمو فيها الكائنات الموضوعة تحت الملاحظة في شروط مخبريّة.

يبيّن الشكل أدناه كيفية تكاثر مجموعة من ذباب الفاكهة خلال التجارب المخبريّة في فترة مدّتها 50 يومًا وذلك على فترات زمنية منتظمة، وبتحديد النقاط يمكن رسم المنحنى المبيّن الذي يمرّ بهذه النقاط. استخدم النقطتين $P(23, 150)$, $Q(45, 340)$ في الشكل لحساب متوسّط معدل التغيّر وميل القاطع $\overleftrightarrow{PQ}$. ماذا تلاحظ؟

الحل:

بفرض عدد الذباب $= N$،

وعدد الأيام $= t$.

يوجد 150 ذبابة في اليوم 23، 340 ذبابة في اليوم 45 متوسّط معدل التغيّر في عدد الذباب هو:

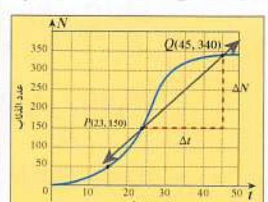
$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{340 - 150}{45 - 23}$$

$$= \frac{190}{22}$$

(ذبابة/يوم)

$$\therefore \quad \frac{\Delta N}{\Delta t} \approx 8.6$$

أي حوالى 9 ذبابات كل يوم.



نمو ذباب الفاكهة تحت الشروط المخبرية لمجتمع الذباب

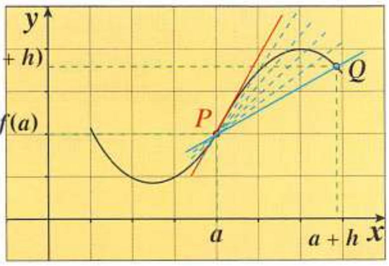
الحل الذي وجده العالم الرياضي بيير فيرمات Pierre de Fermat سنة 1629 والذي ما زلنا نستخدمه حتّى الآن يزودنا بطريقة لتحديد المماسّات واستنتاج صيغ لميل المماس عند نقطة على منحنى الدالة ومعدّلات التغيّر:

1 يمكننا حساب ميل القاطع للمنحنى $y = f(x)$ المار بالنقطتين

$$P(a, f(a)) \quad , \quad Q(a+h \ , \ f(a+h))$$

الموجودتين على المنحنى حيث $h = \Delta x$

والميل يساوي $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.



2 نجد قيمة نهاية ميل القاطع إن وجدت عندما تقترب Q من P على المنحنى أي أن h تقترب من الصفر.

3 **نحدّد ميل المماس للمنحنى عند النقطة $P(a , f(a))$ بالقيمة m إن وجد:**

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

معدل التغير لدالة f عند النقطة $P(a , f(a))$ إن وجد هو:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

المستقيم العمودي على منحنى عند نقطة تنتمي إلى المنحنى هو المستقيم العمودي على مماس المنحنى عند تلك النقطة **ويسمى الناظم.**

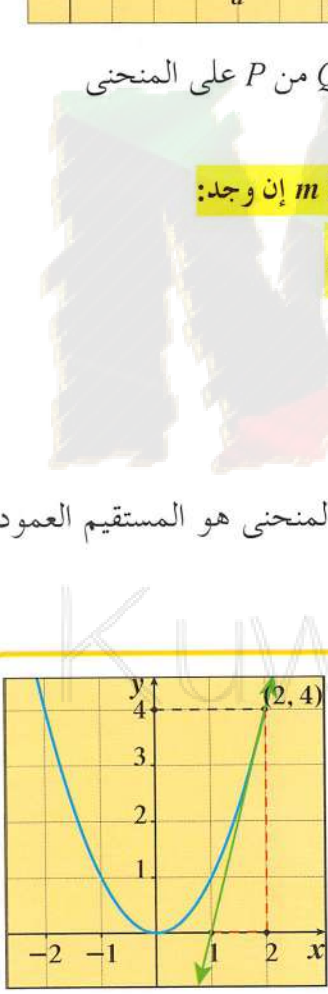
مثال (1)

أوجد ميل المماسّ للقطع المكافئ $y = x^2$ عند النقطة $P(2, 4)$.

الحل:

نبدأ بميل القاطع للمنحنى بين النقطة $P(2, 4)$ ونقطة قريبة منها $Q(2+h \ , \ (2+h)^2)$ على المنحنى.

نكتب ميل القاطع ونوجد النهاية للميل عندما تقترب Q من P على المنحنى.



رسم توضيحي
ميل المماسّ للقطع المكافئ $y = x^2$
عند $P(2 , 4)$: هو 4

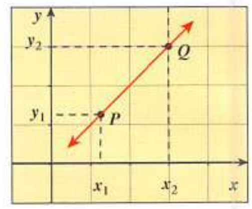
تذكر:

ميل المستقيم المار بالنقطتين: $P(x_1 , y_1)$, $Q(x_2 , y_2)$

يساوي: $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

حيث $x_1 \neq x_2$

ويُمكن أن نعبر عنه بالصيغة $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.



معلومة:

بيير فيرمات
Pierre de Fermat
(1601−1665)

عالم رياضيات فرنسي عرف بنظريته الشهيرة (نظرية فيرمات): لا توجد أعداد صحيحة موجبة x , y , z تحقق المعادلة $x^n + y^n = z^n$ حيث n عدد صحيح موجب أكبر من 2.

يفرض أن:

$$y = f(x)$$

ميل القاطع عند $(2, 4)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 4}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 4h}{h}$$

$$= h + 4 \quad , \quad h \neq 0$$

نهاية ميل القاطع عندما تقترب Q من P على المنحنى هي:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} (h + 4) = 4$$

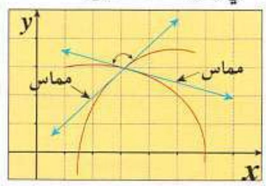
على ذلك يكون ميل المماسّ للقطع المكافئ عند P يساوي 4

حاول أن تحل

1 أوجد ميل المماس للقطع المكافئ $y = (x-2)^2 + 2$ عند النقطة $A(1, 3)$

معلومة:
ميل منحنى عند نقطة يعني ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة إن وجد.

معلومة:
في الهندسة، الزاوية التي يصنعها مماسان على منحنين عند نقطة تقاطعهما هي زاوية المنحنين.



المشتقة

The Derivative

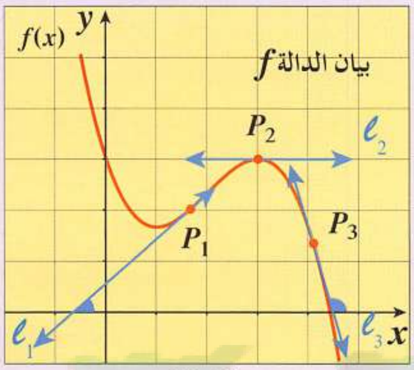
سوف تتعلم

- إيجاد الميل والمشتقات باستخدام تعريف المشتقة.
- إيجاد مشتقة الدالة عند نقطة.
- إيجاد المشتقة من جهة واحدة.
- العلاقة بين الاتصال عند نقطة أو على فترة وقابلية الاشتقاق.
- تحديد حالات عدم وجود المشتقة عند نقطة.

المفردات والمصطلحات:

- المشتقة عند نقطة Derivative at a Point
- مشتقة دالة Derivative of a Function
- مشتقة من جهة واحدة One−Sided Derivative
- التفاضل Differentiability
- نقطة ركن Corner Point
- نقطة ناب Cusp Point
- مماس رأسي Vertical Tangent
- عدم اتصال Discontinuity

دعنا نفكّر ونتناقش



شكل (1)

تعلمت فيما سبق أنه إذا كان ℓ مستقيمًا يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن ميل المستقيم: $m = \tan\theta$

الشكل (1) يمثّل بيان الدالة f.

ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 مماسات لمنحنى f عند النقاط P_1 , P_2 , P_3 على الترتيب.

1. ميل المستقيم ℓ_1 (المماس لمنحنى الدالة f عند P_1) أكبر من الصفر. لماذا؟
2. ميل المماس ℓ_2 لمنحنى f عند P_2 يساوي صفرًا. لماذا؟
3. ميل المماس ℓ_3 لمنحنى f عند P_3 أصغر من الصفر. لماذا؟
4. إذا أمكن رسم مماسات عند نقاط مختلفة على المنحنى، فهل ميل المنحنى عند كل نقطة من هذه النقاط يكون قيمة ثابتة أم متغيرة؟

تعريف المشتقّة Definition of Derivative

تعلّمت أنّ ميل منحنى الدالة f عند نقطة إحداثيها السينيّ $x = a$ هو:

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

في حال وجود هذه النهاية فإنّها تسمّى مشتقّة الدّالة f عند a

تعريف: المشتقّة عند نقطة Derivative at a Point

مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

شرط وجود النهاية.

من التعريف السابق يمكننا القول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x = a$ إذا كانت النهاية موجودة ويرمز لذلك بالرمز:

$$f'(a) \quad \text{أو} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

أما إذا كانت النهاية غير موجودة عند $x = a$ نقول إن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = a$ (غير موجودة $f'(a)$)

مثال (1)

باستخدام التعريف، أوجد مشتقة الدالة f : $f(x)=2x^2+1$ عند $x=1$

الحل:

(إن وجدت) $$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$x=1 \Longrightarrow a=1 \quad , \quad f(1)=2(1)^2+1=3$$

$$\therefore \; f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)^2+1-3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2+4h+2h^2+1-3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4h+2h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}^{1}(4+2h)}{\cancel{h}_{1}}=\lim_{h\to 0}(4+2h)$$

$$=4+0=4$$

$\therefore$ مشتقة الدالة f عند $x=1$ هي: $f'(1)=4$

حاول أن تحل

1 باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x)=3x^2$ عند $x=-2$

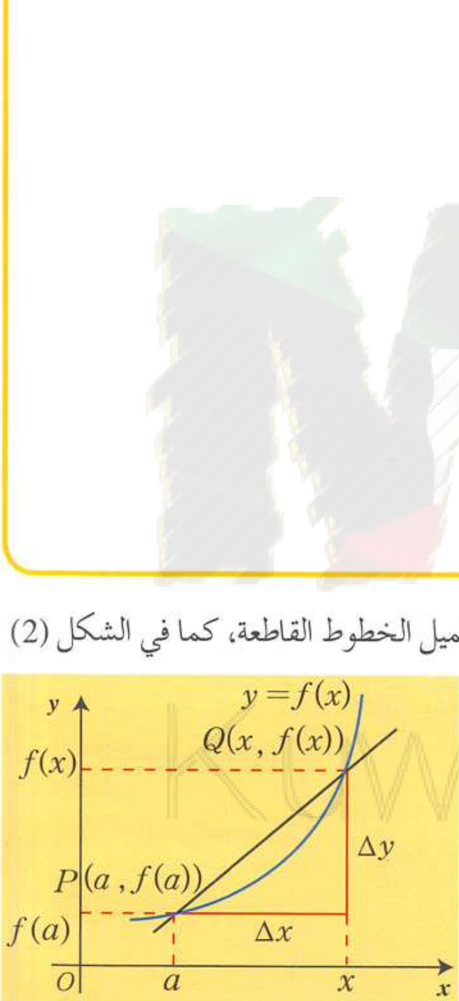
نحصل على مشتقة $f(x)$ عند $x=a$ بأخذ النهاية عندما تقترب h من الصفر $(h\to 0)$ لميل الخطوط القاطعة، كما في الشكل (2)

تعريف (بديل): المشتقّة عند نقطة

مشتقّة دالّة f عند $x=a$ هي :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

شرط وجود النهاية.



شكل (2)

ميل الخط القاطع $\overleftrightarrow{PQ}$ هو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ملاحظة: التعريف البديل للمشتقة هو صورة أخرى لتعريف المشتقة.

مثال (2)

باستخدام التعريف البديل. أوجد مشتقة الدالة f : $f(x)=\sqrt{x}$ عند $x=a$ حيث $a>0$

الحل:

عند النقطة $x=a$ ، (إن وجدت) $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$$

اضرب البسط والمقام بالمرافق $(\sqrt{x}+\sqrt{a})$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\cancel{(x-a)}^{1}}{\cancel{(x-a)}_{1}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

يمكننا الآن إيجاد النهاية

$$= \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

حاول أن تحل

2 أوجد مشتقة الدالة f : $f(x)=\frac{1}{x}$ عند $b \neq 0$, $x=b$

المشتقّة من جهة واحدة One–Sided Derivative

مشتقة الدالة f من اليمين يرمز لها بالرمز $f'_+(a)$ وهي:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

ومشتقة الدالة f من اليسار يرمز لها بالرمز $f'_-(a)$ وهي:

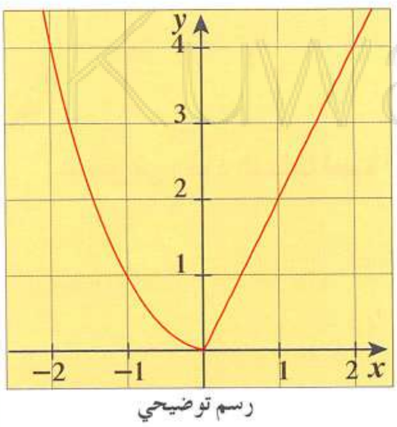
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

إن الدالة لها مشتقة عند نقطة إذا وفقط إذا كانت المشتقتان لجهة اليمين ولجهة اليسار موجودتين ومتساويتين عند تلك النقطة.

مثال (3)

بيّن أن الدالة التالية لها مشتقّة لجهة اليمين ومشتقّة لجهة اليسار عند $x=0$، لكن ليس لها مشتقّة عند $x=0$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & : \quad x\le 0 \\ 2x & : \quad x>0 \end{cases}$$



رسم توضيحي

الحل:

نتحقّق من وجود المشتقّة لجهة اليمين:

(إن وجدت) $$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(0+h)-0^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 2 = 2 \qquad (1)$$

نتحقّق من وجود المشتقّة لجهة اليسار:

(إن وجدت) $$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{(0+h)^2-0^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} h = 0 \qquad (2)$$

من (1) , (2) $$f'_-(0) \neq f'_+(0)$$

$\therefore$ $f'(0)$ ليست موجودة أي أن الدالّة ليس لها مشتقّة عند $x = 0$

حاول أن تحل

3 لتكن f : $f(x) = |x-2| = |2-x|$ ، ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x = 2$.

مثال (4)

لتكن الدالة f:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} & : \quad x \le 1 \\ \sqrt{x} & : \quad x > 1 \end{cases}$$

بيّن أن للدالة f مشتقة لجهة اليمين مساوية للمشتقة لجهة اليسار عند $x = 1$.

الحل:

نتحقّق من وجود المشتقّة لجهة اليسار:

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \qquad \text{(إن وجدت)}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{1}{4}(1+h)^2 + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{1}{4}(1 + 2h + h^2) + \frac{3}{4} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{1}{4} + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + \frac{3}{4} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\overset{1}{\cancel{h}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}h\right)}{\underset{1}{\cancel{h}}}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}h\right) = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

نتحقّق من وجود المشتقّة لجهة اليمين:

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \qquad \text{(إن وجدت)}$$

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$$

ضرب البسط والمقام بمرافق البسط

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \times \frac{\sqrt{1+h} + 1}{\sqrt{1+h} + 1}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{(\sqrt{1+h} - 1) \cdot (\sqrt{1+h} + 1)}{h \cdot (\sqrt{1+h} + 1)}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1 + h - 1}{h(\sqrt{1+h} + 1)}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\overset{1}{\cancel{h}}}{\underset{1}{\cancel{h}}(\sqrt{1+h} + 1)}$$

$$\because \lim_{h\to 0^+}(1+h)=1 \quad , \quad 1>0$$

$$\therefore \lim_{h\to 0^+}\sqrt{1+h}=\sqrt{\lim_{h\to 0^+}(1+h)}=\sqrt{1}=1$$

$$\lim_{h\to 0^+}(\sqrt{1+h}+1)=1+1=2 \quad , \quad 2\neq 0$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}=\frac{\lim\limits_{h\to 0^+}1}{\lim\limits_{h\to 0^+}(\sqrt{1+h}+1)}=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

من $(1),(2)$ $\qquad f'_-(1)=f'_+(1)$

وبالتالي الدالّة f لها مشتقة لجهة اليمين عند $x=1$ مساوية للمشتقة لجهة اليسار.

حاول أن تحل

4 لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & : \quad x\leq -1\\[4pt] \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2} & : \quad x>-1\end{cases}$$

بيّن أن للدالة f مشتقّة لجهة اليمين مساوية للمشتقّة لجهّة اليسار عند $x=-1$.

ملاحظات:

- إذا كانت الدالة $y=f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل x : $x\in(a,b)$، فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a,b).
- إذا كانت الدالة $y=f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل x: $x\in(-\infty,\infty)$ فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ مثل كثيرة الحدود.
- إذا وضعنا x بدلًا من a في تعريف المشتقة عند النقطة نحصل على $f'(x)$ حيث $\boxed{f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}}$
ويمكن أن نرمز للمشتقة بأحد الرموز التالية: y' , $f'(x)$, $\dfrac{d}{dx}(f(x))$, $\dfrac{dy}{dx}$
- لأيّ دالة f تكون f' دالة أخرى مجالها مكوّن من جميع قيم x التي يكون للدالة مشتقة عندها أي $(D_{f'}\subseteq D_f)$ أي أن f' دالة مستخلصة من f.

مثال (5)

لتكن $f(x)=x^3$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة إن وجدت.

الحل:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{إن وجدت}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3x\,h^2+h^3-x^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}^{1}(3x^2+3xh+h^2)}{{}_{1}\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2)$$
$$= 3x^2$$
$$\therefore \ f'(x) = 3x^2$$

حاول أن تحل

5 لتكن $f(x) = x^2 + 2$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

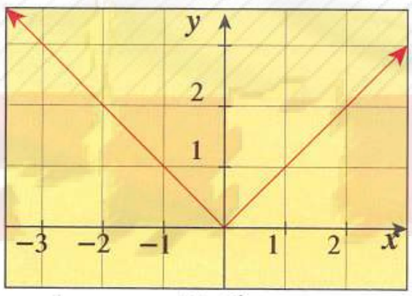
متى تكون $f'(a)$ غير موجودة؟

الدالة f لن يكون لها مشتقّة عند نقطة $P(a, f(a))$ إذا كانت $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ غير موجودة.

وتوضّح الأشكال التالية أربع حالات تكون فيها هذه النهاية غير موجودة:

a **ركنًا (Corner):** تكون المشتقّتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين.

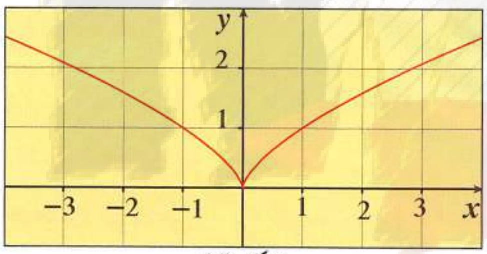
مثال: $f(x) = |x|$



شكل (3)

يوجد ركن عند $x = 0$ ، $f'(0)$ غير موجودة

b **نابًا (Cusp):** يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها. مثال: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

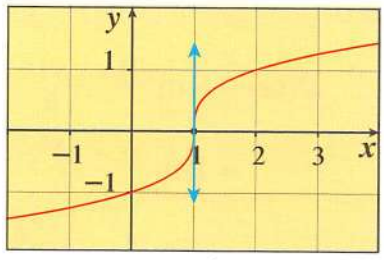


شكل (4)

يوجد ناب عند $x = 0$ ، $f'(0)$ غير موجودة ويوجد مماس رأسي عندها

c **مماسًا رأسيًا:** يكون المماس للمنحنى عند نقطة محددة رأسيًا.

مثال: $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

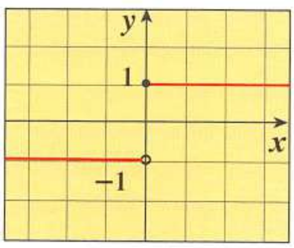


شكل (5)

يوجد مماس رأسي عند $x = 1$ ، $f'(1)$ غير موجودة

d **عدم اتصال:** تكون المشتقّة من جهة واحدة أو كلّ من الجهتين غير موجودة. مثال:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$



شكل (6)

يوجد عدم اتصال عند $x = 0$ ، $f'(0)$ غير موجودة

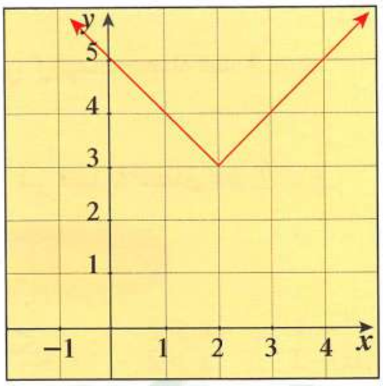
سوف نثبت بعد ذلك، نظرية تقول بأنه ينبغي أن تكون الدالة متصلة عند $x = a$ كشرط لدراسة قابلية الاشتقاق عند $x = a$.

وسوف تمدنا هذه النظرية بطريقة سريعة وسهلة للتحقق من أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = a$

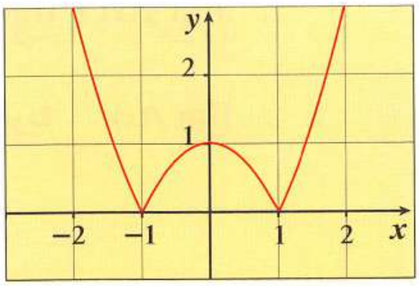
تدريب

أوجد كل النقاط في مجال الدالة حيث تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق في كل مما يلي:

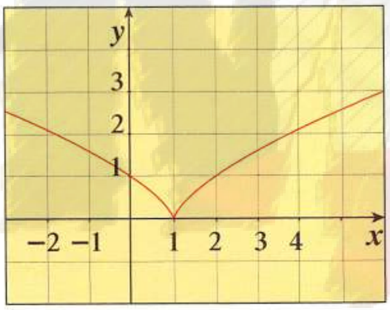
a $f(x) = |x - 2| + 3$



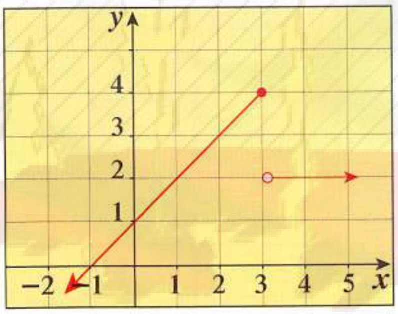
b $f(x) = |x^2 - 1|$



c $f(x) = (x - 1)^{\frac{2}{3}}$



d $f(x) = \begin{cases} 2 : x > 3 \\ x + 1 : x \leq 3 \end{cases}$



معلومة:

$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & : & x \leq -1 \\ 1 - x^2 & : & -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & : & x \geqslant 1 \end{cases}$

الاشتقاق والاتصال Differentiability and Continuity

نبدأ هذا الجزء بإلقاء نظرة على الطرائق العاديّة التي يمكن أن تفشل في أن تكون فيها للدالّة مشتقّة عند نقطة.

كأحد الأمثلة، قد أظهرنا بيانيًّا أنّ عدم اتصال الدالة عند نقطة يسبّب عدم وجود مشتقّة للدالة عند هذه النقطة.

وعليه **إذا كانت الدالة f ليست متصلة عند نقطة $(a \ , \ f(a))$ فإنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.**

مثال (6)

لتكن f : $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x < 2 \\ 2x - 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$.

الحل:

نبحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

$$f(2) = 2(2) - 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = (2)^2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x - 1) = 2(2) - 1 = 3$$

$$\because \lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

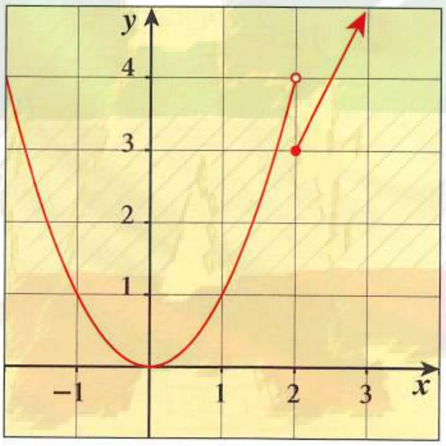
وبالتالي f ليست متصلة عند $x = 2$

$\therefore \lim_{x \to 2} f(x)$ غير موجودة

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 2$.

حاول أن تحل

6 لتكن f : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & : \quad x \leq 2 \\ 3x - 2 & : \quad x > 2 \end{cases}$ ، ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$.



شكل (7)

الشكل (7) يمثل بيان الدالة في مثال (6).

وفي الحقيقة أنّ الاتصال شرط جوهريّ لإمكانيّة وجود المشتقّة، والنظرية التالية تبين العلاقة بين الاشتقاق والاتصال.

نظريّة الاشتقاق والاتصال

إذا كانت الدّالة f لها مشتقّة عند نقطة، فإنّها تكون متّصلة عند هذه النقطة.

البرهان:

لتكن النقطة $(a\ ,\ f(a))$ تنتمي لبيان الدالة f

علينا أن نبيّن أنّ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ أو مكافئًا لذلك أنّ: $\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = 0$

باستخدام قاعدة حاصل ضرب النهايات (وملاحظة أنّ $x - a \neq 0$)،

نستطيع أن نكتب:

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \left[(x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right]$$

$$= \lim_{x \to a} (x - a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$= 0 \cdot f'(a)$ حيث $f'(a)$ موجودة

$$= 0$$

معكوس النظريّة ليس صحيحًا دائمًا كما رأينا سابقًا:
فالدالّة المتّصلة قد يكون لها ركن أو ناب أو مماسّ رأسيّ، ومن ثمّ لا تكون قابلة للاشتقاق عند نقطة معيّنة.

مثال (7)

لتكن f :
$$f(x)=\begin{cases}6x-1 & : \quad x>\frac{1}{2}\\ 2x+1 & : \quad x\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}$$

بيّن أن الدالة f متّصلة عند $x=\frac{1}{2}$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندها.

الحل:

لنبحث اتصال الدالة f عند $x=\frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)+1=2$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}(6x-1)=6\left(\frac{1}{2}\right)-1=2$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}(2x+1)=2\left(\frac{1}{2}\right)+1=2$$

$$\because \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=2$$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=\frac{1}{2}$

نبحث اشتقاق الدالة f عند $x=\frac{1}{2}$

$$f'_+\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}$$ إن وجدت

$$f'_+\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{6x-1-2}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{6\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}^{1}}{\cancel{x-\frac{1}{2}}_{1}}=6$$

$$f'_-\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}$$ إن وجدت

$$f'_-\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{2x+1-2}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{2\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}^{1}}{\cancel{x-\frac{1}{2}}_{1}}=2$$

$$\therefore f'_-\left(\frac{1}{2}\right)\neq f'_+\left(\frac{1}{2}\right)$$

أي أن f متصلة عند $x=\frac{1}{2}$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند $x=\frac{1}{2}$

حاول أن تحل

7 لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases}-x-1 : x>\frac{-1}{3}\\ 5x+1 : x\leqslant\frac{-1}{3}\end{cases}$$

بيّن أنّ الدالة f متصلة وغير قابلة للاشتقاق عند $x=-\frac{1}{3}$

مثال (8)

لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & : \ x\leqslant 2 \\ -x^2+7x-10 & : \ x>2 \end{cases}$

بيّن أن الدالة f متّصلة عند $x=2$ وادرس قابلية الاشتقاق عندها.

الحل:

لنبحث اتصال الدالة f عند $x=2$

$$f(2)=(2)^2-(2)-2=0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-x-2)=4-2-2=0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(-x^2+7x-10)=-4+14-10=0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=2$

ندرس قابلية الاشتقاق عند $x=2$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-x-2-0}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x+1)\cancel{(x-2)}^{1}}{\cancel{x-2}_{1}}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}(x+1)=2+1=3$$

$$\therefore\ f'_-(2)=3$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+7x-10-0}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{-\cancel{(x-2)}^{1}(x-5)}{\cancel{x-2}_{1}}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}-(x-5)=-(2-5)=3$$

$$\therefore\ f'_+(2)=3$$

$$f'_+(2)=f'_-(2)=3$$

$\therefore$ الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x=2$ و $f'(2)=3$.

أي أن f متصلة عند $x=2$ وقابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

حاول أن تحل

8 ادرس اتصال الدالة f عند $x=1$ وقابلية اشتقاقها عند هذه النقطة حيث:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+1} & : \ x\leqslant 1 \\ 2x-1 & : \ x>1 \end{cases}$$

معلومة:
يستخدم علماء الفضاء الاشتقاق في دراسة سرعة دوران الأقمار الاصطناعية على مجالها.

مثال (9)

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x+5 & : \ x \leqslant 3 \\ x^2-1 & : \ x > 3 \end{cases}$

أوجد إن أمكن $f'(3)$

الحل:

$$f'_-(3) = \lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$ (إن وجدت)

$$f'_-(3) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x+5-8}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

$$\therefore\ f'_-(3) = 1$$

$$f'_+(3) = \lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$ (إن وجدت)

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-1-8}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-9}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{\cancel{(x-3)}^{1}(x+3)}{\cancel{x-3}_{1}}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} (x+3) = 6$$

$$\therefore\ f'_+(3) = 6$$

$$\because\ f'_-(3) \neq f'_+(3)$$

$\therefore\ f'(3)$ غير موجودة

حاول أن تحل

9 لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2+x & : \ x \leqslant -1 \\ x^2-x-2 & : \ x > -1 \end{cases}$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$.

قواعد الاشتقاق

Rules of Derivative

سوف تتعلم

مشتقّات دوال

- القوى الصحيحة الموجبة.
- الضرب في عدد ثابت.
- الجمع والطرح.
- الضرب والقسمة.
- القوى الصحيحة السالبة للمتغيّر x.
- إيجاد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند نقطة على منحنى دالة.
- قابلية الاشتقاق على فترة.

المفردات والمصطلحات:

- قاعدة Rule
- مشتقة ثابت Derivative of a Constant
- مشتقة قوى صحيحة موجبة Derivative of Postive Integer Powers
- مشتقة قوى صحيحة سالبة Derivative of Negative Integer Powers
- مشتقة الضرب بعدد ثابت Derivative of the Constant Multiple
- مشتقة الجمع والطرح Derivative of the Sum and the Difference
- مشتقة الضرب والقسمة Derivative of the Product and the Quotient

دعنا نفكّر ونتناقش

أوجد مشتقات الدوال التالية بالنسبة إلى x مستخدمًا تعريف المشتقة.

1. $g(x) = 7$
2. $f(x) = \frac{x}{3}$
3. $u(x) = -\frac{2}{x}$
4. $v(x) = x^4$

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أن إيجاد مشتقة الدالة بالتعريف تحتاج إلى مهارات وعمليات حسابية مطولة والقواعد التالية تساعدك في إيجاد مشتقة بعض الدوال دون استخدام تعريف المشتقة وذلك لدوال قابلة للاشتقاق.

قاعدة (1): مشتقة دالة ثابتة Derivative of a Constant Function

إذا كانت $f(x) = k$ حيث k عدد ثابت فإن $f'(x) = 0$ لجميع قيم x الحقيقية.

يمكننا القول بأن مشتقة أيّ دالّة ثابتة تساوي صفرًا.

البرهان:

إذا كانت $f(x) = k$ حيث k ثابت، فإنّ:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\therefore\ f'(x) = 0$$

تدريب (1)

أوجد مشتقّة $f(x)$ في الحالات التالية:

a. $f(x) = 5$
b. $f(x) = e^2$
c. $f(x) = \pi^{15}$

قاعدة (2): مشتقة الدالة $f(x) = x$

Derivative of the Function $f(x) = x$

إذا كانت $f(x) = x$ فإن $f'(x) = 1$

لجميع قيم x الحقيقية

البرهان:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

$$\therefore\ f'(x)=1$$

قاعدة (3): قاعدة القوى للأسس الصحيحة الموجبة للمتغيّر x

Power Rule for Positive Integer Powers of x

إذا كان $f(x)=x^n$ حيث n عدد صحيح موجب $n\neq 1$ فإنّ:

$$\frac{d}{dx}(x^n)=n\,x^{n-1}$$

أي أن: $f'(x)=nx^{n-1}$

تدريب (2)

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

(a) $f(x)=x^4$ (b) $g(x)=x^{10}$ (c) $h(x)=x^{12}$

قاعدة (4): قاعدة الضرب بعدد ثابت **The Constant Multiple Rule**

إذا كانت f دالة في x قابلة للاشتقاق وكان k عددًا ثابتًا فإنّ:

$$\frac{d}{dx}(kf(x))=k\frac{d}{dx}f(x)$$

أي أن: $(kf(x))'=kf'(x)$

البرهان:

$$\frac{d}{dx}(kf(x))=\lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{k(f(x+h)-f(x))}{h}$$

$$=k\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=k\frac{d}{dx}(f(x))$$

توضّح القاعدة (4) بأنّه

مشتقة ضرب دالة قابلة للاشتقاق في ثابت هو مشتقة هذه الدالة مضروبة في الثابت.

القاعدتان (4) ,(3) تمكّنان من إيجاد مشتقّة أيّ حدّ جبريّ بسرعة.

مثلًا $(7x^4)'=7\,(x^4)'=28x^3$

لإيجاد مشتقّات كثيرات الحدود، نحتاج إلى إيجاد مشتقّات مجاميع وفروق حدود جبريّة.

نستطيع أن نفعل ذلك بتطبيق قاعدة الجمع والطرح.

The Sum and Difference Rule
قاعدة (5): قاعدة الجمع والطرح

إذا كانت g , f دالّتين في x قابلتين للاشتقاق، فإنّ مجموعهما والفرق بينهما يكونان قابلين للاشتقاق عند كلّ نقطة تكون عندها كلّ من g , f قابلة للاشتقاق.

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) \pm \frac{d}{dx}(g(x))$$

أي أن:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

البرهان:

(إن وجدت)

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \frac{d}{dx}(f(x))+\frac{d}{dx}(g(x))$$

وبالمثل بالنسبة إلى الفرق بين دالّتين.

مثال (1)

أوجد $\frac{dy}{dt}$ حيث $y = t^3 + 6t^2 - \frac{5}{3}t + 16$

الحل:

قاعدة الجمع والطرح

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3) + \frac{d}{dt}(6t^2) - \frac{d}{dt}\left(\frac{5}{3}t\right) + \frac{d}{dt}(16)$$

قاعدة الدالّة الثابتة وقاعدة القوى

$$= 3t^2 + 6 \times 2t - \frac{5}{3} + 0$$

$$= 3t^2 + 12t - \frac{5}{3}$$

حاول أن تحل

1 أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = 5x^3 - 4x^2 + 6$

The Product Rule
قاعدة (6): اشتقاق ضرب دالتين

ضرب دالّتين g , f في x قابلتين للاشتقاق يكون قابلًا للاشتقاق بحيث:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x)) + g(x) \cdot \frac{d}{dx}(f(x))$$

أي أن:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

البرهان:

نبدأ كالمعتاد بتطبيق التعريف:

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$ (إن وجدت)

لتغيير الكسر إلى كسر مكافئ يحتوي على الفرق بين نواتج القسمة لمشتقّات الدالتين g , f نطرح ونجمع $f(x+h)\cdot g(x)$ في البسط.

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x+h)\cdot g(x)+f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$

بالتحليل والفصل

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0} g(x)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

عندما تقترب h من الصفر فإنّ $f(x+h)$ تقترب من $f(x)$، لأنّ f تكون متّصلة عند x وقابلة للاشتقاق عند x.

الكسران يقتربان من قيم $\frac{d}{dx}g(x)$, $\frac{d}{dx}f(x)$ على الترتيب عند x، $\lim_{h\to 0} g(x) = g(x)$ لذلك:

$$\frac{d}{dx}(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)$$

يمكننا القول إن **مشتقة ضرب دالتين = الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الأولى.**

مثال (2)

أوجد $f'(x)$ إذا كان $f(x)=(x^2+1)(x^3+3)$

الحل:

لتكن: $u=x^2+1 \ , \ v=x^3+3$

بتطبيق قاعدة الضرب نجد أن:

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{d}{dx}(u\cdot v) &= u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx} \\ &= (x^2+1)(3x^2)+(x^3+3)(2x) \\ &= 3x^4+3x^2+2x^4+6x \\ &= 5x^4+3x^2+6x \end{aligned}$$

حاول أن تحل

2 **a** هل يمكنك حل مثال 2 بطريقة أخرى؟ فسّر إجابتك.

b أوجد $f'(x)$ إذا كان:

1. $f(x)=(2x+1)(3x-2)$
2. $f(x)=4x^2(x+6)$
3. $f(x)=(x^3-4)^2$

قاعدة (7): قاعدة القسمة — The Quotient Rule

لتكن $f\,,\,g$ دالتين في x قابلتين للاشتقاق حيث $g(x) \neq 0$ فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

أي أن:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

البرهان:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$ (إن وجدت)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\cdot f(x+h) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}$$

لتغيير الكسر إلى كسر مكافئ يحتوي على الفرق بين نواتج القسمة لمشتقّات الدالّتين g , f ، نطرح ونجمع $g(x)\cdot f(x)$ في البسط.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\cdot f(x+h) - g(x)\cdot f(x) + g(x)\cdot f(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)\cdot g(x)}$$

وبأخذ النهايات في البسط والمقام نحصل على قاعدة ناتج القسمة التالية:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

يمكننا القول إن: مشتقة قسمة دالتين = $\dfrac{\text{دالة المقام} \times \text{مشتقة دالة البسط} - \text{دالة البسط} \times \text{مشتقة دالة المقام}}{\text{مربع دالة المقام}}$

مثال (3)

أوجد مشتقة $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{5x^2 + 1}$

الحل:

بتطبيق قاعدة القسمة حيث: $u = x^3 - 1 \;\; , \;\; v = 5x^2 + 1$

$$f(x) = \frac{u}{v}$$

$$f'(x) = \frac{v.u' - u.v'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(5x^2+1)\cdot(3x^2) - (x^3-1)\cdot(10x)}{(5x^2+1)^2}$$

$$= \frac{15x^4 + 3x^2 - 10x^4 + 10x}{(5x^2+1)^2}$$

$$= \frac{5x^4 + 3x^2 + 10x}{(5x^2+1)^2}$$

حاول أن تحل

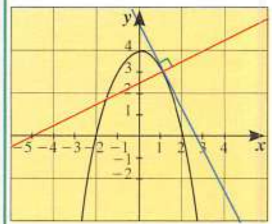
3 أوجد مشتقة $f(x) = \dfrac{4x^2 + 2x}{2x^3 + 5}$

يمكننا إيجاد ميل المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(a, f(a))$ عن طريق إيجاد المشتقة عند هذه النقطة. وتكون معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

والمستقيم العمودي (الناظم) على منحنى الدالة عند النقطة $(a, f(a))$ هو المستقيم العمودي على مماس المنحنى عند تلك النقطة ومعادلته:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

تذكر:
إذا كان مستقيمان متعامدين وليس أيًّا منهما أفقيًّا فإنّ ناتج ضرب ميليهما يساوي -1.



رسم توضيحي
العمودي متعامد مع المماس عند النقطة $(1, 3)$.

مثال (4)

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ لمنحنى الدالة f حيث $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 2}$

الحل:

نوجد أولًا مشتقة الدالة f بتطبيق قاعدة القسمة

$$f'(x) = \frac{(x^2+2)(x^3+1)' - (x^3+1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+2)(3x^2) - (x^3+1)(2x)}{(x^2+2)^2}$$

ومنه الميل: $$f'(1) = \frac{(1^2+2)(3(1)^2) - (1^3+1)(2(1))}{(1^2+2)^2} = \frac{5}{9}$$

معادلة خط المماس: $$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

$$\therefore \quad y - \frac{2}{3} = \frac{5}{9}(x - 1)$$

$$y = \frac{5}{9}x - \frac{5}{9} + \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{5}{9}x + \frac{1}{9}$$

لإيجاد معادلة الناظم عند النقطة $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ على المنحنى نستخدم المعادلة:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

ميل الناظم: $$\frac{-1}{f'(a)} = -\frac{9}{5}$$

$$y - \frac{2}{3} = -\frac{9}{5}(x - 1)$$

$$y = -\frac{9}{5}x + \frac{37}{15}$$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1, 0)$

نتيجة

إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق وكانت $g(x) \neq 0$ ، k عددًا ثابتًا فإنّ:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{k}{g(x)}\right) = \frac{-k\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$$

أي أن:

$$\left(\frac{k}{g(x)}\right)' = \frac{-k \cdot (g'(x))}{(g(x))^2}$$

البرهان:

مشتقة دالة ثابتة $\because \frac{d}{dx}(k) = 0$

وبتطبيق قاعدة القسمة

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{k}{g(x)}\right) = \frac{g(x) \times 0 - k \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$= \frac{-k \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

مثال (5)

أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$

الحل:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{-3 \times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-6x}{(x^2+1)^2}$$

حاول أن تحل

5 أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{-4}{x^2+2x+5}$

قوى x الصحيحة السالبة (الأسس الصحيحة السالبة) Negative Integer Powers of x

قاعدة اشتقاق قوى x الصحيحة السالبة هي قاعدة الاشتقاق نفسها في حالة القوى الصحيحة الموجبة كما في القاعدة (3).
لذلك نستطيع الآن أن نوسّع قاعدة القوى لتشمل القوى الصحيحة السالبة باستخدام قاعدة القسمة.

قاعدة (8): قاعدة القوى للأسس الصحيحة السالبة للمتغيّر x

Power Rule for Negative Integer Powers of x

إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا، $x \neq 0$ فإنّ:

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -n\,x^{-n-1}$$

أي أن $$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

البرهان:

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

$$= \frac{-1 \times \frac{d}{dx}(x^n)}{(x^n)^2}$$ نتيجة

$$= \frac{-1 \times (n\,x^{n-1})}{(x^n)^2}$$ قاعدة (3)

$$= \frac{-n\,x^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= -n\,x^{n-1-2n}$$

$$= -n\,x^{-n-1}$$

مثال (6)

لتكن: $y = \frac{x^2+3}{2x}$. أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

الحل:

يمكن أن نوجد المشتقّة بقاعدة القسمة، لكن من الأيسر أن نبسّط أولًا كمجموع قوّتين للمتغيّر x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2x} + \frac{3}{2x}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x^{-2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x^{-2}\right]_{x=1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

حاول أن تحل

6 لتكن: $y = \frac{3x^2+7}{8x^2}$ ، أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$

قاعدة (9)

إذا كان $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ حيث m , n عددان صحيحان مختلفان، $n \neq 0$ فإن:

$$\frac{d}{dx}(x^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

لجميع قيم x التي تكون المشتقة عندها موجودة.

أي أن $(x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n}(x)^{\frac{m}{n}-1}$

يمكن استنتاج أن: إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ تكون $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

مثال (7)

أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $x > 0$

الحل:

بتطبيق القاعدة

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$$
$$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

حاول أن تحل

7 أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$

مثال (8)

لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & : x \leqslant 1 \\ 2x+1 & : x > 1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.

أوجد $f'(x)$ إن أمكن

الحل:

مجال الدالة: $D_f = (-\infty , 1] \cup (1 , \infty) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : & x < 1 \\ \text{تبحث} & : & x = 1 \\ 2 & : & x > 1 \end{cases}$$

$$f(1) = (1)^2 + 2 = 3$$

إن وجدت

$$f'_-(1) = \lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{x^2+2-3}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{\overset{1}{\cancel{(x-1)}}\,(x+1)}{\underset{1}{\cancel{x-1}}}$$

$$= \lim_{x\to1^-} (x+1)$$

$$= 1+1 = 2 \qquad (1)$$

إن وجدت

$$f'_+(1) = \lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{2x+1-3}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{2x-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{2\overset{1}{\cancel{(x-1)}}}{\underset{1}{\cancel{x-1}}}$$

$$= \lim_{x\to1^+} 2 = 2 \qquad (2)$$

من (1) و (2)

$$f'_-(1) = f'_+(1) = 2$$

$$\therefore\quad f'(1) = 2$$

ومنه

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : \quad x<1 \\ 2 & : \quad x=1 \\ 2 & : \quad x>1 \end{cases}$$

$$\therefore\quad f'(x) = \begin{cases} 2x & : \quad x\leqslant 1 \\ 2 & : \quad x>1 \end{cases}$$

حاول أن تحل

8 أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية:

a $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : \quad x\leqslant 2 \\ 4x-3 & : \quad x>2 \end{cases}$

b $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : \quad x<1 \\ 2\sqrt{x} & : \quad x\geqslant 1 \end{cases}$

2-4

مشتقات الدوال المثلثية

Derivatives of Trigonometric Functions

سوف تتعلم

- إيجاد مشتقة دالة الجيب.
- إيجاد مشتقة دالة جيب التمام.
- إيجاد مشتقات الدوال المثلثية الأخرى.

المفردات والمصطلحات:

- مشتقة دالة الجيب
Derivative of the Sine Function
- مشتقة دالة جيب التمام
Derivative of the Cosine Function
- مشتقة دالة الظل
Derivative of the Tangent Function
- مشتقة دالة ظل التمام
Derivative of the Cotangent Function
- مشتقة دالة القاطع
Derivative of sec Function
- مشتقة دالة قاطع التمام
Derivative of csc Function

تذكر:
إذا كان x قياس زاوية بالراديان فإن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

دعنا نفكر ونتناقش

أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \sin x$
مستخدمًا تعريف المشتقة.

والقواعد التالية تساعدك في إيجاد مشتقة بعض الدوال المثلثية دون استخدام تعريف المشتقة.

أولًا: مشتقات الدوال الجيبية

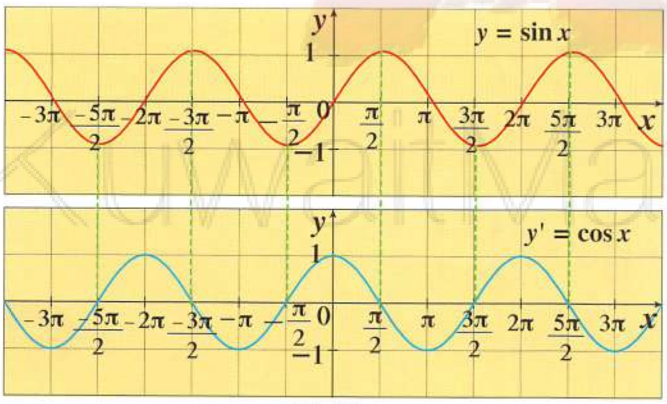
1 مشتقة دالة الجيب هي موجب دالة جيب التمام

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

2 مشتقة دالة جيب التمام هي سالب دالة الجيب

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

قواعد الاشتقاق التي تم دراستها صحيحة للدوال الجيبية.



شكل (1)

لاحظ الشكل (1):

الدالة $f(x) = \sin x$ لها مماسات أفقية عند كل من القيم $\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ وبيان الدالة $f'(x) = \cos x$ يتقاطع مع محور السينات عند هذه القيم أي أن المشتقة عندها تساوي الصفر.

مثال (1)

أوجد المشتقّات للدوال التالية:

a $y = x^2 \sin x$ **b** $u = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ **c** $f(x) = \sin^2 x$

الحل:

قاعدة الضرب

a $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d}{dx}x^2\right)\cdot \sin x + \left(\frac{d}{dx}\sin x\right)\cdot x^2$

$= 2x\sin x + x^2\cos x$

قاعدة القسمة

b $\frac{du}{dx} = \frac{(1-\sin x)\cdot\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x\cdot\frac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2}$

$= \frac{(1-\sin x)(-\sin x) - \cos x(0-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$

$= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$

$= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}$

$= \frac{1}{1-\sin x}$

c $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(\sin^2 x)$

$= \frac{d}{dx}(\sin x\cdot\sin x)$

$= \sin x\cdot\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\cdot\frac{d}{dx}(\sin x)$

$= \sin x\cdot\cos x + \sin x\cdot\cos x$

$= 2\sin x\cos x$

حاول أن تحل

1 أوجد المشتقات للدوال التالية:

a $h(x) = \cos^2 x$ b $g(x) = \frac{x}{\cos x}$ c $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

ثانيًا: مشتقات الدوال المثلثيّة الأخرى

الدالتان $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ دالّتان قابلتان للاشتقاق، لذا فإن الدوال المثلثية التالية:

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

هي أيضًا دوال قابلة للاشتقاق عند كلّ قيمة للمتغيّر x تكون معرّفة عندها وتعطى مشتقاتها بالقواعد التالية:

1 $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

2 $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

3 $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x$

4 $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x\cot x$

تذكر:

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

مثال (2)

أوجد مشتقات الدوال التالية:

a $f(x) = \tan x + \cot x$

b $g(x) = \sec x \cdot (1 + \sin x)$

c $h(x) = \csc x + \sin x \cdot \tan x$

الحل:

a $f(x) = \tan x + \cot x$

$f'(x) = \sec^2 x + (-\csc^2 x) = \sec^2 x - \csc^2 x$

b $g(x) = \sec x \cdot (1 + \sin x)$

$g'(x) = (1 + \sin x)(\sec x \cdot \tan x) + \sec x \cdot \cos x = \sec x \cdot \tan x + \sec x \cdot \tan x \cdot \sin x + 1$

c $h(x) = \csc x + \sin x \cdot \tan x$

$h'(x) = -\csc x \cdot \cot x + \tan x \cdot \cos x + \sec^2 x \cdot \sin x$

حاول أن تحل

2 أوجد مشتقات الدوال التالية:

a $f(x) = \dfrac{1 + \tan x}{\tan x}$

b $g(x) = \sec x + \csc x$

c $h(x) = \dfrac{\sec x}{\csc x}$

مثال (3)

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

الحل:

نوجد أوّلًا مشتقة الدالة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sec^2 \frac{\pi}{4} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

وعليه ميل المستقيم العمودي للمنحنى عند $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

هو $m_1 = \dfrac{-1}{m} = \dfrac{-1}{2}$

معادلة المستقيم العمودي:

$$y - 1 = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$$

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $F\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$

2–5

قاعدة السلسلة

Chain Rule

سوف تتعلم

- إيجاد مشتقة تركيب دالتين باستخدام قاعدة السلسلة.

المفردات والمصطلحات:

- قاعدة السلسلة Chain Rule
- دالة مركبة Composite Function
- قاعدة سلسلة القوى Power Chain Rule

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدوال التالية:

$$f(x) = 3x^2 + 1 \quad , \quad g(x) = x^2$$

$$h(x) = x^3 \quad , \quad q(x) = x^{10}$$

أكمل ما يلي:

a $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 + 1)$

$= (3x^2 + 1)^2 = 9x^4 + ... + ...$

$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = 36x^3 + ... + ...$

b $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = ...$

$= .... = ...$

$(h \circ f)'(x) = ...$

c $(q \circ f)(x) = ...$

هل من السهل إيجاد $(q \circ f)'$ بنفس الأسلوب السابق؟

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أنه عند إيجاد مشتقة:

$$(q \circ f)(x) = (3x^2 + 1)^{10}$$

سنجد صعوبة في فك هذا المقدار.

تساعدنا القواعد التالية على إيجاد مشتقة مثل هذه الدوال.

قاعدة السلسلة (التسلسل) Chain Rule

إذا كانت الدالّة f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$، الدالة g قابلة للاشتقاق عند x، فإن الدالة المركبّة

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

تكون قابلة للاشتقاق عند x، ويكون:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

أي يمكننا القول إن مشتقّة الدالة المركّبة $f(g(x))$ عند x هي مشتقّة الدّالة f عند $g(x)$ مضروبة في مشتقّة الدالّة g عند x.

مثال (1)

إذا كان $g(x) = x^{10}$, $f(x) = 3x^2 + 1$. فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة

a) $(f \circ g)'(x)$

b) $(g \circ f)'(-1)$

الحل: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

قاعدة السلسلة

a) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$f'(x) = 6x\,,\ \ g'(x) = 10x^9$

$f'(g(x)) = 6(x^{10}) = 6x^{10}$

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

$\therefore\ (f \circ g)'(x) = 6x^{10} \cdot 10x^9 = 60x^{19}$

حل آخر

$f \circ g(x) = f(g(x)) = 3(x^{10})^2 + 1 = 3x^{20} + 1$

$\therefore (f \circ g)'(x) = 60x^{19}$

b) $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$= 10(f(x))^9 \cdot 6x$

$= 10(3x^2+1)^9 \cdot 6x$

$(g \circ f)'(-1) = -60(4)^9$

$= -15728640$

حاول أن تحل

1 a) هل يمكنك حل مثال (1) a بطريقة أخرى؟ فسّر.

b) لتكن: $g(x) = x^{13}$, $f(x) = -2x^3 + 4$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$ ، $(g \circ f)'(0)$

مثال (2)

لتكن: $g(x) = x^2 + 1$, $(x \neq 0)$ $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$

الحل:

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$f'(x) = \dfrac{2x - (2x+1)}{x^2} = \dfrac{-1}{x^2}$, $g'(x) = 2x$

المتغير: $g(x)$

$f'(g(x)) = f'(x^2+1) = \dfrac{-1}{(x^2+1)^2}$

قاعدة السلسلة

$\therefore\ (f \circ g)'(x) = \dfrac{-1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x$

$= \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

حاول أن تحل

2 لتكن: $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة (1) $(f \circ g)'$

وضع عالم الرياضيات لاينتز (Leibniz) صورة أخرى لقاعدة السلسلة.

صورة أخرى لقاعدة السلسلة

إذا كانت $u = g(x)$, $y = f(u)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

يتم حسابها عند $u = g(x)$

مثال (3)

إذا كانت: $u = 5x^2 + 2$, $y = u^3 - 3u + 1$

فأوجد: $\dfrac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مشتقة بدلالة u

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 - 3$$

مشتقة بدلالة x

$$\frac{du}{dx} = 10x$$

قاعدة التسلسل

$$\frac{dy}{dx} = (3u^2 - 3) \times (10x)$$

تعويض

$$\frac{dy}{dx} = \left(3(5x^2 + 2)^2 - 3\right) \times (10x)$$

$$= 750x^5 + 600x^3 + 90x$$

حاول أن تحل

3 لتكن: $u = 2x^3 + x$, $y = u^2 + 4u - 3$

أوجد: $\dfrac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

الربط بالفيزياء

إذا كانت $s(t)$ دالة موقع جسم بعد t ثانية من حركته فإن سرعته اللحظية v هي:

$v = \frac{ds}{dt} = s'(t)$

مثال (4)

يتحرّك جسيم على محور السينات بحيث إن موضعه عند أيّ لحظة $t \geq 0$ يعطى بالدالّة: $S = \cos(t^2 + 1)$. أوجد السرعة اللحظية للجسيم كدالة في t.

الحل:

نعلم أن: $v = \frac{dS}{dt}$ (v هي السرعة اللحظية)

في هذه الحالة S دالّة مركّبة، حيث: $u = t^2 + 1$, $S = \cos(u)$

لدينا:

$S = \cos(u)$ $\qquad \frac{dS}{du} = -\sin(u)$

$u = t^2 + 1$ $\qquad \frac{du}{dt} = 2t$

باستخدام قاعدة السلسلة:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{dS}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ &= (-\sin(u)) \cdot 2t \\ &= (-\sin(t^2+1)) \cdot 2t \\ &= -2t \sin(t^2+1) \end{aligned}$$

ملاحظة:

$v = \frac{ds}{dt}$ تسمى أيضًا السرعة المتجهة ويمكن أن تكون موجبة أو سالبة أو صفر.

تذكر:

اقتصرت دراستنا على دوال قابلة للتركيب

حاول أن تحل

4 أوجد مشتقة $y = \sin(x^2 + x)$ بالنسبة إلى المتغيّر x .

من مثال (4) يمكن إيجاد المشتقة باستخدام القاعدة التالية:

$\frac{d}{dx}(\cos f(x)) = (-\sin f(x)) \cdot f'(x)$ ويمكن تعميمها على الدوال المثلثية الأخرى.

مثال (5)

أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \sin^3 x$ باستخدام قاعدة السلسلة.

الحل:

نفرض أن: $g(x) = \sin x$, $h(x) = x^3$

$$\begin{aligned} &\therefore\ f(x) = (h \circ g)(x) \\ &f'(x) = (h \circ g)'(x) \\ &\quad = h'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &\quad = 3(g(x))^2 \cdot \cos x \\ &\quad = 3\sin^2 x \cos x \end{aligned}$$

حاول أن تحل

5 أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \cos^5 x$ باستخدام قاعدة السلسلة .

قاعدة سلسلة القوى Chain Rule Powers

في كثير من الأحيان نحتاج إلى إيجاد مشتقة دالة ما على الصورة: $y = [f(x)]^n$ حيث n عدد نسبي.

لذلك نستخدم القاعدة التالية والمسماة بقاعدة سلسلة القوى:

قاعدة سلسلة القوى

إذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق على مجالها وكان n عددًا نسبيًّا فإن:

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

مثال (6)

لتكن: $y = \sqrt[5]{(x^2+3x+5)^3}$ ، أوجد: y'

الحل:

$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

$$y = \sqrt[5]{(x^2+3x+5)^3}$$
$$= (x^2+3x+5)^{\frac{3}{5}}$$
$$y' = \frac{3}{5}(x^2+3x+5)^{\frac{3}{5}-1} \cdot (2x+3)$$
$$= \frac{3}{5}(x^2+3x+5)^{-\frac{2}{5}} \cdot (2x+3)$$
$$= \frac{3(2x+3)}{5\sqrt[5]{(x^2+3x+5)^2}}$$

حاول أن تحل

6 لتكن: $y = \sqrt[4]{(2x^4-3x^2+4)^3}$ ، أوجد: y'

مثال (7)

أوجد ميل مماس المنحنى $y = \sin^5 x$ عند $x = \frac{\pi}{3}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 5\sin^4 x\,(\sin x)' = 5\sin^4 x \cdot \cos x$$

ميل المماس هو:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{45}{32}$$

حاول أن تحل

7 بيّن أن ميل أي مماس للمنحنى $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائمًا يكون موجبًا حيث $x \neq -\frac{1}{2}$

2–6

المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

Higher Order Derivatives and Implicit Differentiation

سوف تتعلم
- المشتقات العليا.
- الاشتقاق الضمني.

المفردات والمصطلحات:
- مشتقة ذات رتبة عليا Higher Order Derivative
- اشتقاق ضمني Implicit Derivative

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن: $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$

أكمل:

1 $f'(x) = \dots = g(x)$

2 $g'(x) = \dots$

هل $g'(x) = (f'(x))'$ ؟

أولًا: المشتقات ذات الرتب العليا Higher Order Derivatives

رمزنا سابقًا لمشتقة دالة على مجالها بالرمز $\frac{dy}{dx} = y'$ والآن سوف تسمى y' المشتقة من الرتبة الأولى للدالة y بدلالة المتغير x .

والمشتقة الأولى نفسها (y') يمكن أن تكون دالة قابلة للاشتقاق على مجالها بدلالة المتغير x وبالتالي يمكن كتابتها:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

وهذه تسمى المشتقة من الرتبة الثانية للدالة y بدلالة x .

والمشتقة الثانية نفسها يمكن أن تكون دالة قابلة للاشتقاق على مجالها بدلالة المتغير x وبالتالي يمكن كتابة:

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

وهذه تسمى المشتقة من الرتبة الثالثة للدالة y بدلالة المتغير x .

وبصورة عامة إذا كان n عددًا صحيحًا حيث $n > 1$ فإن مشتقة الدالة y من الرتبة n بدلالة x هي على الشكل التالي:

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}(y^{(n-1)}) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

تذكر:

(a) $y = f(x)$

(b) $\frac{dy}{dx} = y'$

ملاحظة: أحيانًا نستخدم قاعدة السلسلة مرتين أو أكثر لإيجاد مشتقة.

ملاحظة: لا يجب الخلط بين رتبة مشتقة الدالة $y^{(n)}$ و y^n من قوى y.

مثال (1)

أوجد المشتقات حتى الرتبة الرابعة للدالة $y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$ بدلالة المتغير x.

الحل:

$$y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$$

المشتقة من الرتبة الأولى $y' = \frac{dy}{dx} = 14x^6 - 8x + 3$

المشتقة من الرتبة الثانية $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 84x^5 - 8$

المشتقة من الرتبة الثالثة $y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = 420x^4$

المشتقة من الرتبة الرابعة $y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = 1680x^3$

حاول أن تحل

1 إذا كانت: $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$

فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة.

مثال (2)

إذا كانت $y = \sin x$. بيّن أن $y^{(4)} = y$.

الحل:

y دالة معرفة لكل قيم x على $\mathbb{R}$ $\quad y = \sin x$

مشتقة من الرتبة الأولى $y' = \cos x$

مشتقة من الرتبة الثانية $y'' = -\sin x$

مشتقة من الرتبة الثالثة $y''' = -\cos x$

مشتقة من الرتبة الرابعة $y^{(4)} = \sin x$

$$\therefore \quad y^{(4)} = y$$

حاول أن تحل

2 لتكن الدالة: $y = \cos x$.

بيّن أن $y^{(4)} + y'' = 0$.

مثال (3)

أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\cos x}$

الحل:

$$y = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

$$y' = \sec x \tan x$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(\sec x \tan x)$$

$$= \tan x \frac{d}{dx}\sec x + \sec x \frac{d}{dx}\tan x$$

$$= \tan x . \sec x . \tan x + \sec x . \sec^2 x$$

$$= \sec x \cdot \tan^2 x + \sec^3 x$$

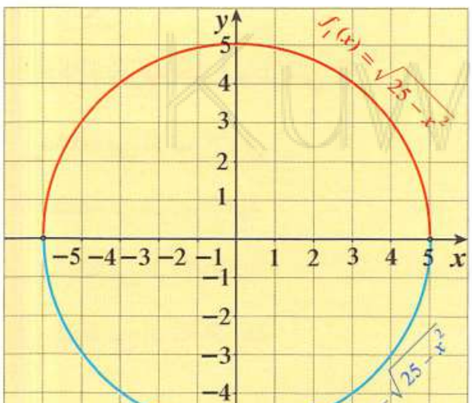
حاول أن تحل

3 أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\sin x}$

ثانيًا: الاشتقاق الضمنيّ Implicit Derivative

في دراستنا السابقة يمكننا إيجاد مشتقات بعض الدوال على الصورة $y = f(x)$ مثل:

$$y = 3x^2 - 2x + 1 \quad , \quad y = \sqrt{x^2+4} \ , \ ...$$



وبالنظر لمعادلة المنحنى $y - xy = x$

نلاحظ أنه يمكننا كتابتها **بالصورة الصريحة** $y = f(x)$ أي $y = \frac{x}{1-x}$

ومنه يمكننا إيجاد مشتقة هذه الدالة أو ميل منحنى هذه الدالة حيث $x \neq 1$.

وبالنسبة لمنحنى $x^2 + y^2 = 25$ نجد أن ميل المنحنى معرّف عند جميع نقاطه باستثناء النقطتين $(5, 0)$ و $(-5, 0)$. لماذا؟

ونجد أن المنحنى هو اتحاد منحنيي الدالتين

$y_1 = f_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ ، $y_2 = f_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ اللتين كلّ منهما قابلة للاشتقاق عند أيّ نقطة في مجالها عدا 5، 5−.

ولكن، هل يمكننا إيجاد ميل المنحنى إذا كان من غير الممكن التوصل للصورة الصريحة للحصول على الدوالّ المكوّنة لها؟

الإجابة عن هذا السؤال تتمثّل في اعتبار y دالّة قابلة للاشتقاق في x، واشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى x باستخدام قواعد الاشتقاق التي سبق تعلّمها في هذه الوحدة.

وهذا يمكّننا من إيجاد صيغة $\frac{dy}{dx}$ بدلالة x, y نحسب منها ميل المنحنى عند أيّ نقطة (x, y) على المنحنى.

تسمّى عمليّة إيجاد المشتقّة $\frac{dy}{dx}$ بهذه الطريقة الاشتقاق الضمنيّ.

مثال توضيحي

أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y^3 + 5y^2 - x^3 = 0$

الحل:

نفرض أن $y = f(x)$ وبالتعويض في المعادلة:

$$(f(x))^3 + 5(f(x))^2 - x^3 = 0$$

وباستخدام قاعدة السلسلة نوجد المشتقة فتكون كالتالي:

$$3(f(x))^2 \cdot f'(x) + 10\, f(x) \cdot f'(x) - 3x^2 = 0$$

أي أن:

$$3y^2y' + 10yy' - 3x^2 = 0$$

ومنها نحصل على y' :

$$y'(3y^2 + 10y) = 3x^2$$

$$\therefore\ y' = \frac{3x^2}{3y^2 + 10y}$$

باستخدام نفس الخطوات المتبعة في المثال التوضيحي يمكننا التوصل إلى أن:

$$(y^2)' = 2yy'$$

$$(y^3)' = 3y^2y'$$

مثال (4)

أوجد $\frac{dy}{dx} = y'$ في الحالات التالية:

a) $y^2 + xy = 7x$

b) $y = x + x^2y^5$

الحل:

a) نشتقّ طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x باعتبار أن y دالّة في x قابلة للاشتقاق، وتطبيق قاعدة السلسلة هو:

$$\left[\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1}f'(x)\right]$$

$$2yy' + 1xy' + y = 7$$

$$y'(2y + x) = 7 - y$$

$$y' = \frac{7 - y}{2y + x}$$

b) $y = x + x^2y^5$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} + \frac{d(x^2y^5)}{dx}$$

$$y' = 1 + y^5 \frac{d(x^2)}{dx} + x^2 \frac{d(y^5)}{dx}$$

$$y' = 1 + 2xy^5 + 5x^2y^4y'$$

$$y' - 5x^2y^4y' = 1 + 2xy^5$$

$$y'(1 - 5x^2y^4) = 1 + 2xy^5$$

$$y' = \frac{1 + 2xy^5}{1 - 5x^2y^4}$$

حاول أن تحل

4 لتكن: $y^2 = x^2 - 2x$ ، أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$.

وعمومًا، تتمّ عمليّة الاشتقاق الضمنيّ وفق الخطوات التالية على الترتيب:

1 اشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x .

2 تجميع الحدود التي تحتوي $\frac{dy}{dx}$ أو y' في أحد طرفي المعادلة.

3 إخراج $\frac{dy}{dx}$ أو y' كعامل مشترك.

4 كتابة المعادلة على الصورة $\frac{dy}{dx}$ أو y' بدلالة x , y .

مثال (5)

أوجد ميل المماس للمنحنى (الدائرة) الذي معادلته $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3 , -4)$.

الحل:

يمكننا إيجاد ميل المنحنى عند النقطة $(3 , -4)$ بسهولة باستخدام الاشتقاق الضمنيّ للمعادلة الأصليّة بالنسبة إلى x .

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

وبالتعويض بـ $(3 , -4)$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,-4)} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ ميل المماس $= \frac{3}{4}$

حاول أن تحل

5 أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1 , 1)$

مثال (6)

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi} \ , \ 2\pi)$

الحل:

نشتقّ طرفي المعادلة بالنسبة إلى x.

$$\frac{d}{dx}(2y) = \frac{d}{dx}(x^2 + \sin y)$$

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin y)$$

$$2\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos y)\frac{dy}{dx}$$

$$2\frac{dy}{dx} - (\cos y)\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx}(2 - \cos y) = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2 - \cos y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2\sqrt{\pi}, 2\pi)} = \frac{2(2\sqrt{\pi})}{2 - \cos(2\pi)}$$

$$= \frac{4\sqrt{\pi}}{2-1} = 4\sqrt{\pi}$$

ميل المماس للمنحنى عند النقطة $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$ هو $4\sqrt{\pi}$

حاول أن تحل

6 أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $x^2 + y^2 - 2xy = 1$ حيث $x \neq y$ عند النقطة $(2, 1)$

مثال (7)

للمنحنى الذي معادلته $2\sqrt{y} + y = x$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3 \ , \ 1)$

الحل:

الاشتقاق الضمني

$$2y^{\frac{1}{2}} + y = x$$

$$2 \cdot \frac{1}{2}(y)^{-\frac{1}{2}}y' + y' = 1$$

$$\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot y' + y' = 1$$

$$y'\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + 1\right) = 1$$

$$\therefore\ y' = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{y}} + 1}$$

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{1 + \sqrt{y}}$$

وبالتعويض بـ $(1\ ,\ 3)$

$$y' = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ ميل المماس $= \frac{1}{2}$

حاول أن تحل

7 للمنحنى الذي معادلته: $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1\ ,\ 1)$

مثال (8)

إذا كانت $y = \sqrt{1 - 2x}$ فأثبت أن: $yy'' + (y')^2 = 0$

الحل:

لتكن $y = (g \circ h)(x)$ حيث $h(x) = 1 - 2x$ ، $g(x) = \sqrt{x}$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ ,\ h'(x) = -2\ ,\ g'(h(x)) = \frac{1}{2\sqrt{1-2x}}$$

$$y' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-2x}} \times (-2)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$y'' = \frac{0 \times \sqrt{1-2x} - (-1) \times \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}}{(\sqrt{1-2x})^2}$$

$$y'' = \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-2x}}}{(\sqrt{1-2x})^2}$$

$$= \frac{-1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}}$$

$$yy'' + (y')^2 = \sqrt{1-2x} \times \frac{-1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}} + \left(\frac{-1}{\sqrt{1-2x}}\right)^2$$

$$= \frac{-1}{1-2x} + \frac{1}{1-2x} = 0$$

حاول أن تحل

8 إذا كانت $y = x \sin x$

فأثبت أن $y''' + y' + 2\sin x = 0$

مثال (9)

لتكن $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ أثبت أن: $(1+x^2)f'''(x)+6x\,f''(x)+6\,f'(x)=0$

الحل:

نوجد أولًا: $f'(x),\ f''(x)\ ,\ f'''(x)$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{v(x)\cdot u'(x)-u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(1+x^2)^2(-2)-(-2x)(2)(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4}$$

بسّط

$$f''(x)=\frac{\cancel{(1+x^2)}^{1}(6x^2-2)}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$f'''(x)=\frac{(1+x^2)^3(12x)-(6x^2-2)(3)(1+x^2)^2(2x)}{(1+x^2)^6}$$

$$=\frac{\cancel{(1+x^2)}^{1}{}^2(-24x^3+24x)}{(1+x^2)^{\cancel{6}\,4}}$$

$$=\frac{-24x^3+24x}{(1+x^2)^4}$$

$$(1+x^2)\,f'''(x)+6x\,f''(x)+6\,f'(x)$$

$$=\frac{-24x^3+24x}{(1+x^2)^3}+\frac{36x^3-12x}{(1+x^2)^3}+\frac{-12x^3-12x}{(1+x^2)^3}$$

$$=0$$

حاول أن تحل

9 لتكن $f(x)=\frac{1}{1-x}$ فأثبت أن : $f'''(x)=\frac{3!}{(1-x)^4}$

المرشد لحل المسائل

يتحرّك جسيم ويحدّد موقعه عند اللحظة $t \geq 0$ بالدّالة: $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ حيث s تقاس بالمتر (m) و t بالثواني (s).

a أوجد مسافة انتقال الجسيم في أوّل 5 s

b أوجد السرعة المتوسطة خلال 5 s

c أوجد السرعة اللحظية المتجهة عند اللحظة $t = 5$

الحل:

كيف فكّر أحمد لحل هذه المسألة:

a نوجد $s(5)$

$$s(5) = 0.6(5)^3 - 1.5(5) - 0.9 = 66.6 \text{ m}$$

المسافة التي انتقلها الجسم هي 66.6 m خلال 5 s

b لإيجاد السرعة المتوسطة خلال 5 s:

$$\frac{s(5) - s(0)}{5 - 0} = \frac{66.6 + 0.9}{5} = 13.5 \text{ m/s}$$

c نوجد دالة السرعة وهي مشتقة دالة الحركة:

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = 1.8t^2 - 1.5$$

من ثم نحسب $s'(5)$:

$$s'(5) = 1.8(5)^2 - 1.5 = 43.5 \text{ m/s}$$

مسألة إضافية

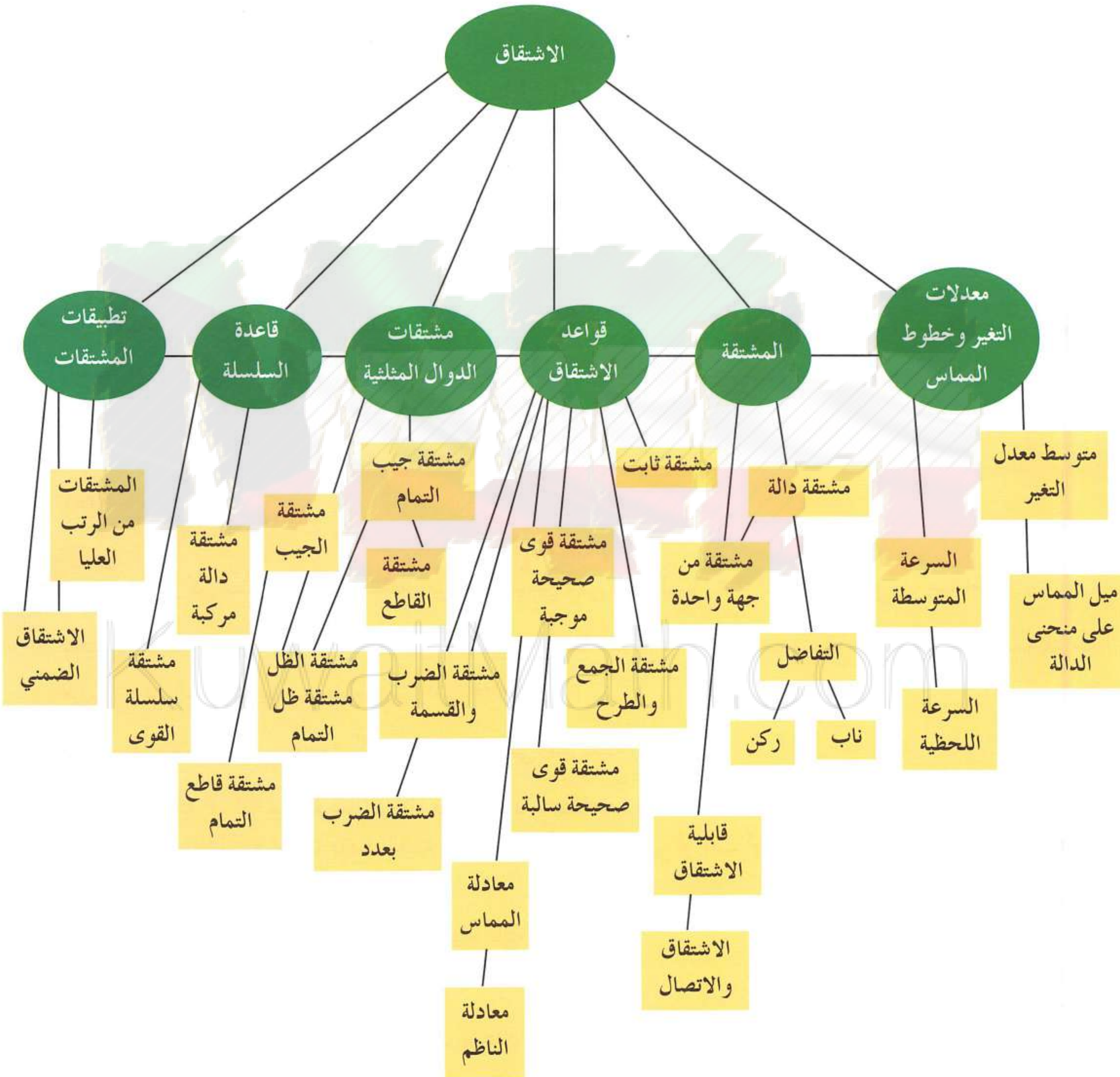
موقع جسم يتحرك مبيّن في الدالة: $s(t) = 9t^3 - 7t + 3$ وذلك بعد t ثانية حيث $t \geq 0$.

a أوجد المسافة التي قطعها الجسم بعد 3 s.

b أوجد الدالة التي تدل على سرعة الجسم بالنسبة إلى الزمن عند اللحظة t.

c أوجد السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية المتجهة عند $t = 3$.

مخطط تنظيمي للوحدة الثانية



ملخص

- يعرف متوسط معدل التغير للدالة f على فترة مغلقة $[a,b]$ بالقاعدة $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- السرعة المتوسطة بين مدتين من الزمن هي معدل التغير على هذه الفترة.
- السرعة اللحظية هي السرعة التي تعطى خلال لحظة من الزمن وتعطى بالقاعدة:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

حيث t هي اللحظة من الزمن لإيجاد السرعة اللحظية.

- معدل التغير لدالة f عند النقطة $P(a, f(a))$ إن وجد هو:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- ميل المماس لمنحنى عند نقطة محددة يعطى بالقاعدة: $m=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ حيث إن a هي الإحداثي السيني للنقطة على منحنى الدالة f حيث إن x_0 , y_0 هما إحداثيا النقطة على المنحنى، m هي ميل المماس.
- معادلة الناظم على المماس عند نقطة على منحنى تعطى بالقاعدة: $y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)$
- مشتقة الدالة f عند نقطة إحداثها السيني a تعطى بالقاعدة:

$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ أو $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ إذا وجدت.

- نحصل على ركن عندما تكون المشتقّتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين.
- نحصل على ناب عندما يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها.
- نحصل على مماس رأسي عندما يكون المماسللمنحنى عند نقطة رأسيًا.
- إذا كانت الدالة f لها مشتقة عند نقطة ، فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.
- معكوس النظرية ليس صحيحًا دائمًا، الدالة المتصلة قد يكون لها ركن أو ناب أو مماس عمودي ومن ثم لا تكون قابلة للاشتقاق عند نقطة معينة.
- إذا كان $f(x)=c$ فإن: $f'(x)=0$ حيث c قيمة ثابتة.
- إذا كانت $f(x)=x$ فإن $f'(x)=1$
- إذا كان $f(x)=x^n$ فإن: $f'(x)=nx^{n-1}$ حيث n عدد صحيح موجب أو سالب.
- $(kf(x))'=k\,f'(x)$
- $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$
- $(f(x)\cdot g(x))'=f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)$

- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- إذا كان $f(x) = \sin x$ فإن: $f'(x) = \cos x$
- إذا كان $f(x) = \cos x$ فإن: $f'(x) = -\sin x$
- إذا كان $f(x) = \tan x$ فإن: $f'(x) = \sec^2 x$
- إذا كان $f(x) = \cot x$ فإن: $f'(x) = -\csc^2 x$
- إذا كان $f(x) = \sec x$ فإن: $f'(x) = \sec x \cdot \tan x$
- إذا كان $f(x) = \csc x$ فإن: $f'(x) = -\csc x \cdot \cot x$
- إذا كانت الدالّة f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$، الدالة g قابلة للاشتقاق عند x، فإن الدالة المركبّة $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ تكون قابلة للاشتقاق عند x ، ويكون: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- إذا $y = f(u)$ حيث إن $g = u(x)$ فإن: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$
- $\frac{dy}{dx}$، $\frac{d^2y}{d^2x}$، $\frac{d^3y}{d^3x}$، ...... $\frac{d^ny}{d^nx}$ هي مشتقات الدالة y من الرتب العليا إذا وجدت في مجال تعريفها.
- في الاشتقاق الضمني نوجد مشتقة المتغير المستقل x ومشتقة المتغير التابع y ثم نوجد $\frac{dy}{dx}$.