الوحدة الثامنة

الاحتمال

Probability

مشروع الوحدة: أهمية استخدام علم الاحتمالات المستند على إحصاءات سابقة للوصول إلى استنتاجات مفيدة.

1 **مقدمة المشروع:** في إحدى رحلات الخطوط الجوية التي يتم خلالها استخدام طائرة تتسع لِـ 213 راكبًا، تقوم الشركة ببيع أكثر من 213 بطاقة لأنه معروف من رحلات سابقة أن بعض الركاب ممن سبق أن حجزوا بطاقات سفر قد يتخلفون عن الرحلة.

2 **الهدف:** تهتم الشركة بأن يكون عدد الركاب في الرحلة مساويًا لعدد المقاعد المتوفرة على الطائرة أي 213 مقعدًا، لأنّه إذا وجدت مقاعد فارغة على الطائرة خلال الرحلة فإن المردود المادي للرحلة سيتناقص، أما إذا كان عدد الركاب أكبر من عدد المقاعد فإن الشركة ستقوم بدفع تعويض مادي لكل راكب لم يتوفر له مقعد على متن الطائرة وهذا أيضًا سينقص من المردود المادي للرحلة.

3 **اللوازم:** آلة حاسبة — حاسوب.

4 **أسئلة حول التطبيق:**

بناءً على إحصاءات سابقة فإن احتمال تخلف راكب واحد عن رحلة جوية هو 0.0975

a أثبت أن عدد البطاقات المباعة للرحلة يجب أن يكون 236 بطاقة حتى يتأمن وجود 213 راكبًا عند انطلاق الرحلة.

b إذا باعت الشركة 240 بطاقة أي 4 بطاقات أكثر مما يلزم لتأمين 213 راكبًا.
أوجد احتمال وجود راكب إضافي لا مقعد له على متن الطائرة.

c إذا كانت الشركة تدفع 200 دينار لكل راكب حجز بطاقة ولم يجد مقعدًا على متن الطائرة للرحلة.
فأوجد احتمال أن تدفع الشركة 1 000 دينار تعويضًا للركاب الذين لم يجدوا لهم مقاعد على متن الطائرة إذا كانت الشركة قد باعت 246 بطاقة.

5 **التقرير:** ضع تقريرًا مفصّلًا حول المشروع واعرض استخدام خصائص الاحتمال والتوقع في تنفيذه.

دروس الوحدة

المتغيرات العشوائية المتقطعة	المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)
8–1	8–2

الوحدة الثامنة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- استخدمت مبدأ العد والتباديل والتوافيق لعد الطرق الممكنة لإجراء عملية ما.
- تعرفت التجربة العشوائية وفضاء العينة.
- عيّنت احتمالات بعض الأحداث والأحداث المتنافية ومتمم الحدث والأحداث المستقلة.

ماذا سوف تتعلم؟

- تعرف المتغيرات العشوائية المتقطعة والمتصلة.
- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع التراكمي لمتغيّر عشوائي متقطع.
- إيجاد دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي متصل.

المصطلحات الأساسية

المتغيّر العشوائي المتقطع – التوزيع الاحتمالي – دالة التوزيع الاحتمالي – بيان دالة التوزيع الاحتمالي – توقع المتغيّرات العشوائية المتقطعة – تباين المتغيّرات العشوائية المتقطعة – الانحراف المعياري للمتغيّرات العشوائية المتقطعة – دالة التوزيع التراكمي لمتغيّر عشوائي متقطع – بيان دالة التوزيع التراكمي لمتغيّر عشوائي متقطع – توزيع ذات الحدين – التوقع والتباين والانحراف المعياري لتوزيع ذات الحدين – تجربة برنولي – المتغيّر العشوائي المتصل (المستمر) – التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المستمر – دالة كثافة الاحتمال – التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتغيّر عشوائي مستمر – التوزيع الاحتمالي الطبيعي – حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي – التوقع والتباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم.

أضف إلى معلوماتك

عمل كل من مؤسسي حساب الاحتمالات (كاردانو Cardano، باسكال Pascal، فيرما Fermat، برنولي Bernoulli) على تطوير هذا الحساب وذلك من خلال تجارب نواتجها قابلة للعد.

وبعد ذلك تركز الاهتمام على متغيرات عشوائية يمكن أن تأخذ عددًا لا نهائيًّا من القيم أو كل القيم على فترة من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

بليز باسكال Blaise Pascal
(1623–1662)

بيير دي فيرما Pierre de Fermat
(1665–1601)

8-1

المتغيرات العشوائية المتقطعة
Discrete Random Variables

سوف تتعلم

- المتغيّر العشوائي المتقطع والتوزيع الاحتمالي.
- توزيع ذات الحدين وتجربة برنولي.
- وسط التوزيع الاحتمالي.
- دالة التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع التراكمي.

المفردات والمصطلحات:

- المتغيّر العشوائي Random Variable
- التوزيع الاحتمالي Distribution Probability
- متغيّر عشوائي متقطع Discrete Random Variable
- توزيع ذات الحدين Binomial Probability Distribution
- وسط التوزيع الاحتمالي Mean of a Probability Distribution
- تباين التوزيع الاحتمالي Variance of a Probability Distribution
- دالة التوزيع الاحتمالي Probability Distribution Function
- دالة التوزيع التراكمي Cumulative Distribution Function

دعنا نفكر ونتناقش

عند إلقاء حجري نرد منتظمين وملاحظة الوجه العلوي.

الحجر الأول مرقم كما يلي:

وجهان مرقمان 0، وجهان مرقمان 1، وجهان مرقمان 2.

الحجر الثاني مرقم كما يلي:

ثلاثة أوجه مرقمة 0، ثلاثة أوجه مرقمة 1.

ليكن E: مجموع العددين الظاهرين على الوجه العلوي.

الحجر الأول (أفقيًا) — الحجر الثاني (رأسيًا)

+	0	0	1	1	2	2
0	0	0	1	1	2	2
0	0	0	1	1	2	2
0	0	0	1	1	2	2
1	1	1	2	2	3	3
1	1	1	2	2	3	3
1	1	1	2	2	3	3

1. بيّن أن النتائج الممكنة هي: $0 , 1 , 2 , 3$
2. a مستخدمًا الجدول المقابل، أوجد احتمال كل من النتائج التالية:

$P(E = 0)$

$P(E = 1)$

$P(E = 2)$

b استنتج احتمال $P(E = 3)$

3. a إذا كنا نهتم بناتج ضرب العددين الظاهرين على الوجه العلوي، فما النتائج الممكنة؟

b أوجد احتمال كل من النتائج الممكنة.

مقدّمة Introduction

في ما سبق درسنا بعض مفاهيم التجارب العشوائية والاحتمال. ونحن نعلم أن فضاء العيّنة هو مجموعة نواتج التجربة العشوائية والتي غالبًا ما تكون صفات أو مسميات يصعب التعامل معها رياضيًّا.

لذا يقوم الباحث بإقران هذه النواتج الوصفية للتجربة العشوائية بقيم عددية حقيقية تسمى **بالمتغير العشوائي** والذي تتغير قيمته بتغير نتيجة التجربة العشوائية.

فعلى سبيل المثال عند إلقاء قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين فإن فضاء العينة يكون كالتالي:

$$S = \{(H , H) , (H , T) , (T , H) , (T , T)\}$$

ملاحظة:

عندما نقول قطعة نقود نعني أنها قطعة نقود منتظمة واحتمال ظهور الصورة (H) يساوي احتمال ظهور الكتابة (T).

فمثلًا إذا اقتصرت ملاحظتنا على **عدد الصور** التي ظهرت في كل عنصر من عناصر فضاء العينة S والتي هي كالتالي: 2، 1، 1، 0 على الترتيب نكون قد أقرنّا كل عنصر من عناصر فضاء العينة بعدد حقيقي كما هو موضّح في الجدول التالي:

عدد الصور في كل عنصر	عناصر فضاء العينة S
2	$(H\,,H)$
1	$(H\,,T)$
1	$(T\,,H)$
0	$(T\,,T)$

وسوف نرمز للمتغير العشوائي بالرمز X وعليه فإن مدى X هو: $\{0,1,2\}$

المتغيّر العشوائي Random Variable

تعريف: المتغير العشوائي Random Variable

هو دالة مجالها فضاء العينة لتجربة عشوائية S ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$ ومداها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$

حيث $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$

(X هو المتغير العشوائي لتجربة عشوائية، S فضاء العينة، $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية).

في المثال السابق نلاحظ ما يلي:

1. مجال المتغير العشوائي X هو: $S = \{(H\,,H)\;,\;(H\,,T)\;,\;(T\,,H)\;,\;(T\,,T)\}$
2. المجال المقابل للمتغير العشوائي هو $\mathbb{R}$.
3. المدى للمتغير العشوائي X هو: $\{0\;,\;1\;,\;2\}$ ويرمز له بالرمز $X(S)$

يوجد عدة أنواع من المتغيرات العشوائية، سوف تدرس نوعين فقط منها وهما:

1. المتغيرات العشوائية **المتقطعة** (المنفصلة).
2. المتغيرات العشوائية **المتصلة** (المستمرة).

وسوف نستخدم X ، Y ، ... كرمز للمتغيرات العشوائية و x ، y ... لقيم هذه المتغيرات.

المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة) Discrete Random Variables

كما ذكرنا سابقًا أن المتغيرات العشوائية تنقسم إلى عدة أنواع منها متغيرات عشوائية متقطعة (منفصلة) ومتغيرات عشوائية متصلة (مستمرة) وسنتناول كل منهما بالتفصيل:

تعريف: المتغير العشوائي المتقطع Discrete Random Variable

يكون المتغير العشوائي X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له (المدى) $X(S)$ هي مجموعة متقطعة أي قابلة للعد، من الأعداد الحقيقية سواء أكانت منتهية أم غير منتهية.

مثال (1)

في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية، ثم حدّد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا.

a المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصور.

b المتغير العشوائي Y الذي يمثل مربع عدد الصور.

c المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الصور مطروحًا منه عدد الكتابات.

الحل:

a $S = \{(H,H) , (H,T) , (T,H) , (T,T)\}$

عناصر مدى المتغير العشوائي X	عناصر فضاء العينة S
2	(H,H)
1	(H,T)
1	(T,H)
0	(T,T)

$\therefore$ مدى المتغيّر العشوائي: $X(S) = \{0 , 1 , 2\}$

نوع المتغير العشوائي X: متقطع

b

عناصر مدى المتغير العشوائي Y	عناصر فضاء العينة S
$(2)^2 = 4$	(H,H)
$(1)^2 = 1$	(H,T)
$(1)^2 = 1$	(T,H)
$(0)^2 = 0$	(T,T)

$\therefore$ مدى المتغيّر العشوائي: $Y(S) = \{0 , 1 , 4\}$

نوع المتغير العشوائي Y: متقطع

c

عناصر مدى المتغير العشوائي Z	عناصر فضاء العينة S
$2 - 0 = 2$	(H,H)
$1 - 1 = 0$	(H,T)
$1 - 1 = 0$	(T,H)
$0 - 2 = -2$	(T,T)

$\therefore$ مدى المتغيّر العشوائي: $Z(S) = \{-2 , 0 , 2\}$

نوع المتغير العشوائي Z: متقطع

حاول أن تحل

1 في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدّد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا.

a المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الكتابات.

b المتغير العشوائي Y الذي يمثل مكعب عدد الكتابات.

c المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الكتابات مطروحًا منه 2.

التوزيع الاحتمالي Probability Distribution

تعلمنا سابقًا أن المتغير العشوائي المتقطع هو دالة مداها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ قابلة للعد. ونبحث الآن في احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة المناظر لكل عنصر من عناصر المدى.

تعريف: دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه $\{x_1 , x_2 , x_3 , ...\}$

فإن دالة التوزيع الاحتمالي f تعرّف كالتالي:

$$f(x_i) = P(X = x_i) \quad , \quad i = 1,2,3,....$$

ويمكن تمثيلها بالجدول التالي:

x_i	x_1	x_2	.....
$f(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	.....

أي أن مجموعة النقاط في المستوى الإحداثي التي تمثل الأزواج المرتبة $(x_i \ , \ P(x_i))$

تسمى **دالة التوزيع الاحتمالي** Probability Distribution Function.

مثال (2)

في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة، المتغير العشوائي X يعبّر عن:

الجذر التربيعي للعدد الظاهر على الوجه العلوي عندما يكون الجذر التربيعي عددًا كليًّا والصفر لغير ذلك.

فأوجد:

a فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة (S): $f(x_i) = P(X = x_i)$

d دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

تذكر:

$P(A) = \frac{A \text{ عدد عناصر}}{S \text{ عدد عناصر}}$

الحل:

a فضاء العينة: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

عدد عناصر فضاء العينة: $n(S) = 6$

b

عناصر مدى المتغير العشوائي X	عناصر فضاء العينة S
1	1
0	2
0	3
2	4
0	5
0	6

$\therefore$ مدى المتغيّر العشوائي: $X = \{0, 1, 2\}$

c $\because \; f(x_i) = P(X = x_i)$

$\therefore \; f(0) = P(X = 0) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$f(1) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$

$f(2) = P(X = 2) = \frac{1}{6}$

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

حاول أن تحل

2 عند رمي حجر نرد مرة واحدة، إذا كان المتغير العشوائي X يعبّر عن:

«مربع العدد الظاهر مطروحًا منه 1 عندما يكون العدد الظاهر أصغر من 4 ، و -1 لغير ذلك».

فأوجد:

a فضاء العينة S وعدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة S.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

لاحظ في مثال (2) أن: $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$

مثال (3)

عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي X يعبّر عن «عدد الكتابات».

فأوجد ما يلي:

a فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

الحل:

a فضاء العينة:

$$S = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

$$n(S) = 8$$

b

عناصر فضاء العينة S	عدد الكتابات في كل عنصر
(H,H,H)	0
(H,H,T)	1
(H,T,H)	1
(T,H,H)	1
(H,T,T)	2
(T,H,T)	2
(T,T,H)	2
(T,T,T)	3

∴ مدى المتغيّر العشوائي: $X = \{0, 1, 2, 3\}$

c

$$P(X=0) = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{8}$$

d دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

تذكر:

في تجربة عشوائية، عند رمي قطعة نقود m من المرّات فإن عدد عناصر فضاء العينة $n(S) = 2^m$

معلومة:

كانت الروبية الهندية العملة المتداولة في دولة الكويت وذلك لفترة تزيد عن مئة وعشرين عامًا، وفي 17 مايو 1961 انتهى تعامل دولة الكويت بهذه العملة بناءً على قاعدة التسوية مع المصرف المركزي الهندي التالية:

1 000 روبية = 75 دينارًا كويتيًا.

أي 1 روبية = 75 فلسًا

أو 13.33 روبية تعادل دينارًا واحدًا.

حاول أن تحل

3 عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن «عدد الصور»، فأوجد ما يلي:

a فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

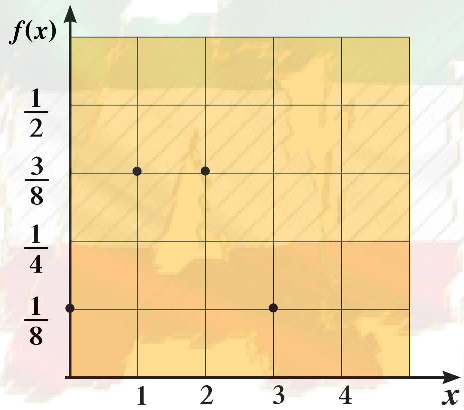
c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

لاحظ في مثال (3) أن: $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

بيان دالة التوزيع الاحتمالي Graph of Probability Distribution Function

دالة التوزيع الاحتمالي هي مجموعة نقاط المستوى التي تمثل الأزواج المرتبة $(x_i, f(x_i))$ وبالتالي فإن بيان دالة التوزيع الاحتمالي عبارة عن نقاط يمكن تمثيلها في المستوى الإحداثي، والشكل التالي يبيّن تمثيل الدالة في مثال 3.



ملاحظة هامة:

دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X تحقق الشرطين:

1 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$

2 $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots=1$

مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي f تساوي الواحد الصحيح.

مثال (4)

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	-2	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.1	k	0.2

فأوجد قيمة k.

الحل:

$\because$ مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي f تساوي الواحد الصحيح

$$\therefore \quad f(-2)+f(1)+f(2)+f(3)=1$$

$$0.3+0.1+k+0.2=1$$

$$k=1-0.6$$

$$k=0.4$$

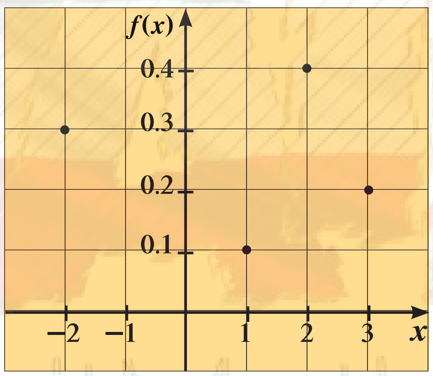
حاول أن تحل

4 إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.35	0.15	0.1	0.2	k

فأوجد قيمة k.

الشكل التالي يمثّل دالة التوزيع الاحتمالي في مثال **4**.



لاحظ أن قيم المتغير العشوائي X يمكن أن تكون سالبة.

مثال (5)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه هو: $\{-2,-1,0,1\}$

وكان $f(1)=0.2$, $f(-2)=f(-1)=0.3$

أوجد $f(0)$، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

الحل:

$$\because \quad f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)=1$$

$$\therefore \quad 0.3+0.3+f(0)+0.2=1$$

$$f(0)=1-0.8$$

$$=0.2$$

∴ دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0.3	0.3	0.2	0.2

حاول أن تحل

5 إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: $\{0, 1, 2, 3\}$

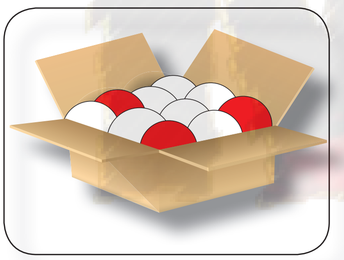
وكان: $f(0) = 0.1 \ , \ f(1) = 0.6 \ , \ f(2) = 0.15$

فأوجد $f(3)$، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

مثال (6)

صندوق يحتوي على 10 كرات متماثلة منها 7 كرات بيضاء و3 كرات حمراء. سحبت أربع كرات عشوائيًّا معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي X يمثّل عدد الكرات الحمراء.

فأوجد ما يلي:



a عدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

الحل:

a عدد عناصر فضاء العينة (S): $n(S) = {}_{10}C_4 = 210$

b عدد الكرات الحمراء التي يمكن سحبها كالتالي:

لدينا 4 حالات:

- أن تكون كل الكرات المسحوبة بيضاء.

∴ عدد الكرات الحمراء المسحوبة = صفر ⟵ $X = 0$

- أن تكون الكرات المسحوبة منها 3 كرات بيضاء وواحدة حمراء ⟵ $X = 1$
- أن تكون الكرات المسحوبة منها 2 كرة بيضاء و2 كرة حمراء ⟵ $X = 2$
- أن تكون الكرات المسحوبة منها 1 كرة بيضاء و3 كرات حمراء ⟵ $X = 3$

∴ مدى المتغير العشوائي X هو: $\{0, 1, 2, 3\}$

c

$$P(X = 0) = \frac{{}_7C_4 \times {}_3C_0}{{}_{10}C_4} = \frac{35}{210}$$

$$P(X = 1) = \frac{{}_7C_3 \times {}_3C_1}{{}_{10}C_4} = \frac{105}{210}$$

$$P(X = 2) = \frac{{}_7C_2 \times {}_3C_2}{{}_{10}C_4} = \frac{63}{210}$$

$$P(X = 3) = \frac{{}_7C_1 \times {}_3C_3}{{}_{10}C_4} = \frac{7}{210}$$

تذكر:

إذا كان

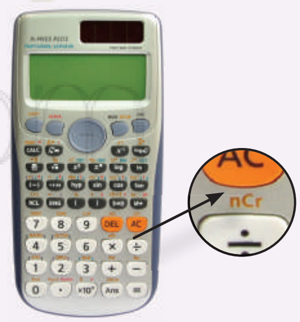
$n, r \in \mathbb{Z}^+ , n \geqslant r$

1 ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)...$
$...(n-r+1)$

${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

2 ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$

${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$



d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2	3	المجموع
$f(x)$	$\frac{35}{210}$	$\frac{105}{210}$	$\frac{63}{210}$	$\frac{7}{210}$	1

حاول أن تحل

6 صندوق يحتوي على 10 كرات متماثلة منها 7 كرات بيضاء و3 كرات حمراء. سحبت عشوائيًّا 3 كرات معًا من الصندوق.

إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات البيضاء،

فأوجد ما يلي:

a عدد عناصر فضاء العينة (S).

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

التوقع (الوسط) والتباين للمتغيرات العشوائية المتقطعة

Expectation and Variance for Discrete Random Variables

التوقع (الوسط) للمتغير العشوائي المتقطع X هو أحد مقاييس النزعة المركزية ويرمز له بالرمز μ.

وهو القيمة التي تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع، و**التباين** (σ^2) هو القيمة التي تقيس تشتت قيم المتغير العشوائي المتقطع عن قيمته المتوسطة، وبالتالي فإن التوقع والتباين يلخصان أهم صفات المتغيرات العشوائية وسوف ندرس كلًّا من التوقع والتباين لكل من المتغيرات العشوائية المتقطعة.

أولًا: التوقع (الوسط) للمتغير العشوائي المتقطع Expectation for Discrete Random Variable

تعريف:

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f،

مدى X: $X(S) = \{x_1 , x_2 , x_3 ,....\}$

فإن التوقع (μ) للمتغير العشوائي X يعطى بالصيغة التالية:

$$\mu = \Sigma\, x_i\, f(x_i)$$

أي أن:

$$\mu = x_1\, f(x_1) + x_2\, f(x_2) + x_3\, f(x_3) + ...$$

مثال (7)

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X هي:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{35}$

فأوجد التوقع μ للمتغير العشوائي X.

الحل:

$$\mu = \sum x_i\, f(x_i)$$
$$= 1 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{2}{7} + 3 \times \frac{6}{35} + 4 \times \frac{3}{35} + 5 \times \frac{1}{35}$$
$$= 2$$

حاول أن تحل

7 إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X هي:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

فأوجد التوقع μ للمتغير العشوائي X.

التباين للمتغير العشوائي المتقطع Variance for Discrete Random Variable

تعريف:

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f فإن التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة:

التباين: $\sigma^2 = \Sigma\left(x_i^2\, f(x_i)\right) - \mu^2$ حيث μ هو التوقع

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ (الجذر التربيعي الموجب للتباين)

مثال (8)

يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.43	0.29	0.17	0.09	0.02

فأوجد:

a التوقع (μ).

b التباين (σ^2).

c الانحراف المعياري (σ).

الحل:

a التوقع (μ):

$$\mu = \sum x_i f(x_i)$$
$$= 1 \times 0.43 + 2 \times 0.29 + 3 \times 0.17 + 4 \times 0.09 + 5 \times 0.02$$
$$= 1.98$$

b التباين (σ^2):

$$\sigma^2 = \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2$$
$$= 1 \times 0.43 + 4 \times 0.29 + 9 \times 0.17 + 16 \times 0.09 + 25 \times 0.02 - (1.98)^2 = 5.06 - 3.92$$
$$= 1.1396$$

c الانحراف المعياري:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
$$= \sqrt{1.1396}$$
$$\approx 1.0675$$

حاول أن تحل

8 يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي متقطع X.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.2	0.1	0.3	0.1	0.3

فأوجد:

a التوقع (μ).

b التباين (σ^2).

c الانحراف المعياري(σ).

دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي متقطع

Cumulative Distribution Function for a Discrete Random Variable

درسنا بالتفصيل دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X .
وبيّنا أن دالة التوزيع الاحتمالي f تحقق الشرطين:

1. $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$
2. $\sum f(x_i) = 1$

ونتعرض الآن لدالة أخرى للمتغير العشوائي المتقطع X وهي دالة التوزيع التراكمي.

تعريف:

دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a

أي أن: $F(a) = P(X \leqslant a)$

لاحظ أن مجال دالة التوزيع التراكمي F هو $\mathbb{R}$ وأن المجال المقابل يساوي المدى $[0,1]$

مثال (9)

الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	3	4	5
$f(x)$	0.5	0.3	0.2

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X.
فأوجد: $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(4.5)$, $F(5)$, $F(7)$

الحل:

$$F(2) = P(X \leqslant 2) = 0$$

$$\begin{aligned} F(3) &= P(X \leqslant 3) = P(X < 3) + P(X = 3) \\ &= 0 + 0.5 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(4) &= P(X \leqslant 4) \\ &= P(X < 4) + P(X = 4) \\ &= P(3) + P(4) \\ &= 0.5 + 0.3 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

تذكر:
نرمز لدالة التوزيع الاحتمالي بالرمز f.
ونرمز لدالة التوزيع التراكمي بالرمز F.

$$F(4.5) = P(X \leqslant 4.5)$$
$$= P(X < 4.5) + P(X = 4.5)$$
$$= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 4.5)$$
$$= 0.5 + 0.3 + 0$$
$$= 0.8$$

$$F(5) = P(X \leqslant 5)$$
$$= P(X < 5) + P(X = 5)$$
$$= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$
$$= 0.5 + 0.3 + 0.2$$
$$= 1$$

$$F(7) = P(X \leqslant 7)$$
$$= P(X < 7) + P(X = 7)$$
$$= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 7)$$
$$= 0.5 + 0.3 + 0.2 + 0$$
$$= 1$$

حاول أن تحل

9 الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.43	0.29	0.17	0.09	0.02

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X.

فأوجد: $F(0)$, $F(1)$, $F(3.5)$, $F(4)$, $F(5)$, $F(8)$

بيان دالة التوزيع التراكمي Graph of Cumulative Distribution Function

دالة التوزيع التراكمي هي دالة مجالها $\mathbb{R}$ ومجالها المقابل = المدى = $[0,1]$ وبالتالي فإن بيانها عبارة عن شعاعين وقطع مستقيمة.

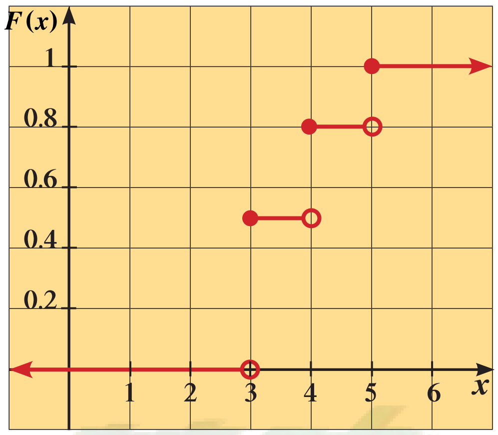
في مثال **9** السابق نضع جدول التوزيع التراكمي:

x	3	4	5
$F(x)$	0.5	0.8	1

∴ دالة التوزيع التراكمي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 3 \\ 0.5 & : \quad 3 \leqslant x < 4 \\ 0.8 & : \quad 4 \leqslant x < 5 \\ 1 & : \quad x \geqslant 5 \end{cases}$$

وبيانها:



بعض خواص دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X:

1. $P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - F(a)$
2. $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$
3. $P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b)$
   $= P(a < X < b)$
   $= P(a \leqslant X \leqslant b)$

مثال (10)

الجدول التالي يبيّن بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	5
$F(x)$	0.15	0.2	0.6	1

أوجد:

a. $P(1 < X \leqslant 3)$
b. $P(2 \leqslant X < 5)$
c. $P(X > 2)$

الحل:

a $P(1 < X \leq 3) = F(3) - F(1)$

$= 0.6 - 0.15$

$= 0.45$

b $P(2 \leqslant X < 5) = F(5) - F(2)$

$= 1 - 0.2$

$= 0.8$

c $P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2)$

$= 1 - F(2)$

$= 1 - 0.2$

$= 0.8$

حاول أن تحل

10 يبيّن الجدول التالي بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	4
$F(x)$	0.25	0.40	0.65	1

أوجد:

a $P(2 < X < 4)$

b $P(X > 3)$

توزيع ذات الحدين Binomial Distribution

نعلم من خلال دراستنا أن بعض التجارب العشوائية يكون لها ناتجان أو عدة نواتج يمكن اختزالها إلى ناتجين فقط أي أن فضاء العينة يصبح محتويًا على عنصرين فمثلاً:

- عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة يكون الناتج إما صورة أو كتابة.
- عند تأدية الطالب اختبارًا في مادة ما تكون النتيجة إما نجاح أو رسوب.
- عند دخول شخص اختبار الحصول على رخصة القيادة تكون النتيجة نجاح أو رسوب.

وهكذا فإننا قيد دراسة التجارب التي يكون لها ناتجان فقط وهي ما يسمى **بتجربة ذات الحدين**.
والتي تتبع دالة التوزيع الاحتمالي المتقطع.

تعريف: تجربة ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة عشوائية تحقق الشروط التالية:

1 تتكوّن التجربة من عدد n من المحاولات المستقلة والمتماثلة.
(المحاولات المستقلة تعني أن نتيجة كل محاولة لا تؤثر ولا تتأثر بنتائج المحاولات الأخرى).

2 كل محاولة يكون لها ناتجان فقط مثل (نجاح أو فشل).

3 احتمال الحصول على أحد الناتجين يكون ثابتًا من تجربة إلى أخرى. وسوف نرمز لهذا الاحتمال بالرمز P.
وتسمى كل محاولة من محاولات التجربة بمحاولة برنولي Bernoulli.

فمثلًا إذا أجريت تجربة برنولي عدد n من المرات وكان احتمال النجاح في المحاولة الواحدة P وكان X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات النجاح في كل المحاولات فإن احتمال النجاح في x من المحاولات يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(X=x)=f(x)={}_nC_x \cdot P^x \cdot (1-P)^{n-x} \quad , \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

حيث n عدد المحاولات

مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X = \{0,1,2,\dots,n\}$

x عدد مرات النجاح في n من المحاولات

P احتمال النجاح

$(1-P)$ احتمال الفشل

يسمى توزيع المتغير العشوائي X بتوزيع ذي الحدين للمعلمتين n , P.

مثال (11)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا ذو حدين ومعلمتيه هما: $n=7$, $P=0.1$. فأوجد:

a $P(X=0)$

b $P(1<X\leqslant 3)$

الحل:

a $\because\ P(X=x)=f(x)={}_nC_x\, P^x\,(1-P)^{n-x}$

$\because\ n=7\ ,\ P=0.1$

$\therefore\ P(X=0)=f(0)={}_7C_0\times(0.1)^0\times(0.9)^7$

$P(X=0)\approx 0.4783$

حل آخر:

$$P(X=0)=f(0)$$

$\because\ n=7\ ,\ P=0.1\ ,\ X=0$

نبحث في جدول الاحتمالات في توزيع ذات الحدين صفحة (172) عن قيمة $f(0)$ (لأنها دالة توزيع احتمالي متقطع) فنجد أن:

$$f(0)=0.478$$

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
2	0	0.902	0.810	0.640	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.040	0.010	0.002
	1	0.095	0.180	0.320	0.420	0.480	0.500	0.480	0.420	0.320	0.180	0.095
	2	0.002	0.010	0.040	0.090	0.160	0.250	0.360	0.0490	0.0640	0.0810	0.0902
7	0	0.698	0.478	0.210	0.082	0.028	0.008	0.002				
	1	0.257	0.372	0.367	0.247	0.131	0.055	0.017	0.004			
	2	0.041	0.124	0.275	0.318	0.261	0.164	0.077	0.025			
	3	0.004	0.023	0.115	0.227	0.290	0.273	0.194	0.097	0.004		
	4		0.003	0.029	0.097	0.194	0.273	0.290	0.227	0.029	0.003	
	5			0.004	0.025	0.077	0.164	0.261	0.318	0.115	0.023	0.004
	6				0.004	0.017	0.055	0.131	0.247	0.275	0.124	0.041
	7					0.002	0.008	0.028	0.082	0.367	0.372	0.257
										0.210	0.478	0.698

b

$$P(1<X\leqslant 3)=P(X=2)+P(X=3)$$
$$=f(2)+f(3)$$
$$f(2)={}_7C_2\times(0.1)^2\times(0.9)^5\Longrightarrow f(2)\approx 0.1240$$
$$f(3)={}_7C_3\times(0.1)^3\times(0.9)^4\Longrightarrow f(3)\approx 0.0230$$
$$P(1<X\leqslant 3)\approx 0.1240+0.0230\Longrightarrow P(1<X\leqslant 3)\approx 0.1470$$

حل آخر:

$$P(1<X\leqslant 3)=P(X=2)+P(X=3)$$
$$=f(2)+f(3)$$

$\because\ n=7\ ,\ P=0.1$

نبحث في الجدول نفسه

عندما: $x=2\longrightarrow f(2)=0.1240$

عندما: $x=3\longrightarrow f(3)=0.0230$

$$\therefore\ P(X\leqslant 3)=f(2)+f(3)$$
$$=0.1240+0.0230=0.1470$$

حاول أن تحل

11 إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا ذو حدين ومعلمتيه هما:

$n = 6$ ، $P = 0.6$ فأوجد:

a $P(X = 1)$

b $P(2 < X \leqslant 4)$

التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين Expectation and Variance for Binomial Distribution

درسنا كيفية إيجاد التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتقطع والآن نتعرّض لإيجاد التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين.

التوقع: $\mu = nP$

التباين: $\sigma^2 = nP(1 - P)$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{nP(1 - P)}$

مثال (12)

ينتج مصنع سيارات 200 سيارة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة 0.01

فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد.

الحل:

عدد السيارات المصنعة في اليوم الواحد $n = 200$

نسبة إنتاج السيارات المعيبة في اليوم الواحد $P = 0.01$

التوقع: $\mu = nP = 200(0.01) = 2$

التباين: $\sigma^2 = nP(1 - P) = 200(0.01)(0.99) = 1.98$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{1.98}$

≈ 1.4071

حاول أن تحل

12 ينتج مصنع سيارات 350 سيارة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة 0.02

فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد.

مثال (13)

في تجربة إلقاء قطعة نقود 5 مرات. أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي X هو ظهور صورة.

الحل:

ظهور الصورة: X ، $n = 5$

P هو احتمال ظهور صورة

$$P = \frac{1}{2} \quad , \quad 1 - P = \frac{1}{2}$$

التوقع:

$$\mu = nP$$

$$= 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

التباين:

$$\sigma^2 = nP(1 - P)$$

$$= 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{4}$$

$$= 1.25$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma = \sqrt{nP(1 - P)} = \sqrt{1.25}$$

$$\approx 1.1180$$

حاول أن تحل

13 في تجربة إلقاء قطعة نقود 8 مرات. أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي X هو ظهور كتابة.

8–2

المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)
Continuous Random Variables

سوف تتعلم

- المتغيّر العشوائي المتصل.
- التوزيع الاحتمالي المتصل.
- التوزيع الاحتمالي المنتظم.
- التوزيع الاحتمالي الطبيعي.

المفردات والمصطلحات:

- متغيّر عشوائي متصل Continuous Random Variable
- توزيع احتمالي متصل Continuous Probability Distribution
- توزيع احتمالي منتظم Regular Probability Distribution
- توزيع احتمالي طبيعي Natural Probability Distribution

دعنا نفكر ونتناقش

a حدّد المتغير العشوائي المتقطع والمتغير العشوائي غير المتقطع فيما يلي:

1 عدد الأهداف في مباريات كرة القدم.

2 عدد الأولاد والبنات في الأسرة.

3 أطوال مجموعة من طلاب المرحلة الثانوية.

4 الحرارة القصوى في منطقة معينة.

b ما الفرق بين المدى للمتغير العشوائي المتقطع والغير المتقطع؟

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» تبيّن لنا أن مدى المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل) X هو مجموعة قيم متقطعة قابلة للعد والمدى للمتغير العشوائي غير المتقطع هو مجموعة قيم غير قابلة للعد ويسمى هذا النوع من المتغير العشوائي بـ «**المتغير العشوائي المتصل**».

تعريف: المتغير العشوائي المتصل **Continuous Random Variable**

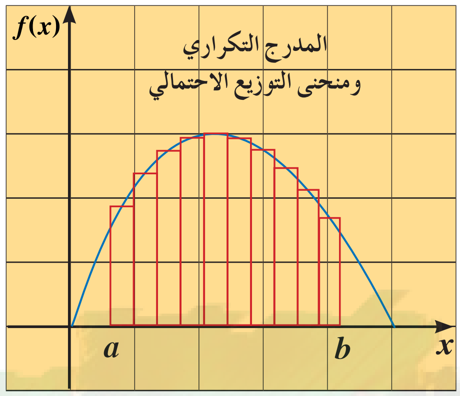
هو المتغير التي تكون مجموعة القيم الممكنة له عبارة عن فترة من الأعداد الحقيقية أي أن مدى المتغير العشوائي المتصل $X = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$ وهي مجموعة غير قابلة للعد.

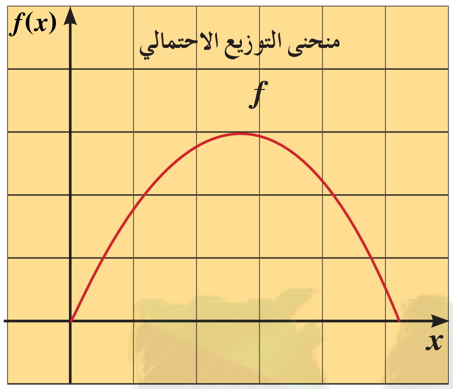
أمثلة عن المتغيرات العشوائية المتصلة:

- كتلة مجموعة طلاب بالكيلوجرام أعمارهم من (15–20) سنة.
- درجة حرارة جسم الإنسان خلال يوم كامل.
- المسافة المقطوعة لسيارة خلال وحدة الزمن.
- كمية الحليب التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر.

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل (المستمر) Probability Distribution for a Continuous Random Variable

يمكن تمثيل بيانات المتغير العشوائي الكمي المستمر على شكل مدرج تكراري نسبي. فنجد أن شكل هذا المدرج هو أقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل. وكلما صغر طول الفئة حصلنا على رسم أدق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المستمر كما في الشكل التالي:





والمساحة تحت منحنى التوزيع الاحتمالي هي عبارة عن مجموع الاحتمالات الكلية للمتغير العشوائي المتصل X، ولذلك فإن هذه المساحة **تساوي الواحد الصحيح**.

نسمي الدالة $f(x)$ **بدالة كثافة الاحتمال** للمتغير العشوائي المتصل (المستمر).

خواص دالة كثافة الاحتمال $f(x)$

1. $f(x)$ هي دالة متصلة على مجالها.
2. $f(x) \geqslant 0$ لكل قيم x التي تنتمي لمجال الدالة.
3. قيمة المساحة المحددة بمنحنى الدالة $f(x)$ ومحور السينات تساوي الواحد الصحيح.
4. يمكن إيجاد الاحتمال $P(a \leq X \leq b)$ بحساب المساحة تحت المنحنى f بين القيمة a, b من الشكل السابق.
5. تنعدم المساحة المظللة في الشكل السابق إذا كان $a = b$
   أي أنه لأي متغير عشوائي متصل فإن: $P(X = a) = 0$

ملاحظة:
مساحة المنطقة تحت المنحنى لا تتأثر بنوع الفترة.

مثال (1)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

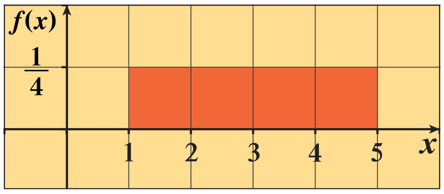
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & : 1 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

a) $P(1 < X \leqslant 5)$
b) $P(X < 3)$
c) $P(X \geqslant 1.5)$
d) $P(X = 2)$

الحل:

a نرسم بيان الدالة f

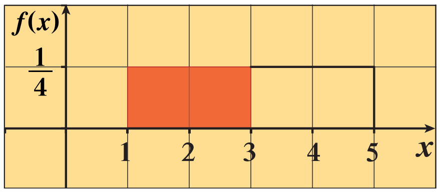


مساحة المنطقة المظللة (المنطقة المستطيلة): $P(1 < X \leqslant 5)$

$$= (5-1) \times \frac{1}{4}$$

$$= 4 \times \frac{1}{4} = 1$$

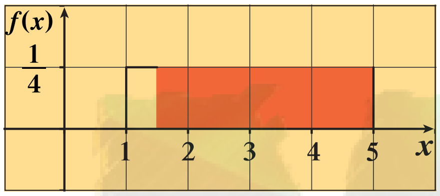
b مساحة المنطقة المظللة: $P(X < 3)$



$$= (3-1) \times \frac{1}{4}$$

$$= 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

c مساحة المنطقة المظللة: $P(X \geqslant 1.5)$



$$= (5-1.5) \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{7}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$$

d $P(X = 2) = 0$ (خاصية 5)

حاول أن تحل

1 إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا، فدالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & : -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

a $P(X < 2)$ **b** $P(-1 < X < 1)$ **c** $P(-1.5 < X < 2.5)$ **d** $P(X = 0)$

مثال (2)

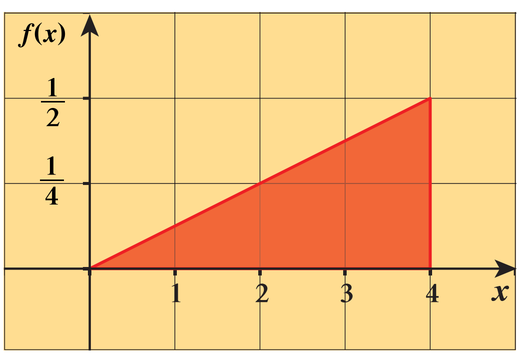
إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & : 0 < x \leqslant 4 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

a $P(0 \leqslant X \leqslant 4)$ **b** $P(X \leqslant 2)$ **c** $P(X > 2)$

الحل:



a مساحة المنطقة المظللة $= P(0 \leqslant X \leqslant 4)$

مساحة المنطقة المثلثية: $\frac{1}{2} \times 4 \times \frac{1}{2} = 1$

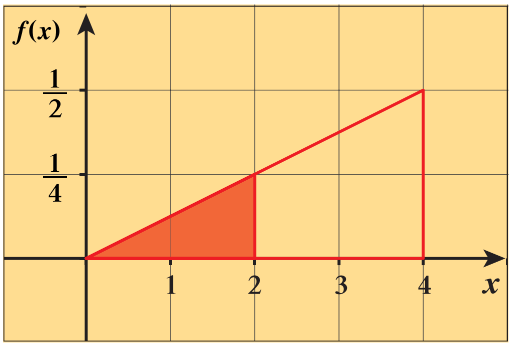
b مساحة المنطقة المظللة $= P(X \leqslant 2)$

مساحة المنطقة المثلثية: $\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

c مساحة المنطقة غير المظللة من المثلث: $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$

$$= 1 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$



حاول أن تحل

2 إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا، ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & : 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

a $P(X < 1)$ b $P(X \geqslant 1)$ c $P(X = 1)$

التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتغير عشوائي متصل (مستمر)

Regular Probability Distribution for a Random Continuous Variable

تعريف:

دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الاحتمالي المنتظم على $[a, b]$ هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

– التوقع (الوسط) للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو: $\mu = \frac{a+b}{2}$

– التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

مثال (3)

لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

a أثبت أن الدالة هي دالة كثافة احتمال.

b أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

c أوجد $P(1 < X \leqslant 3)$

d أوجد التوقع والتباين للدالة f.

الحل:

a لإثبات أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال يجب إثبات أن

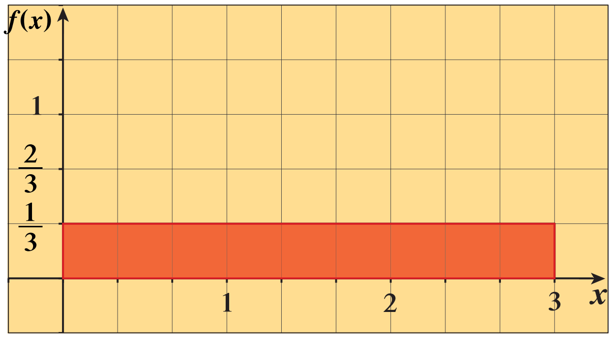
المساحة تحت المنحنى تساوي 1:

المساحة تحت المنحنى من الشكل هي

مساحة المنطقة المستطيلة = الطول × العرض

$$= 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

$\therefore$ الدالة f هي دالة كثافة احتمال.



b لإثبات أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون الدالة على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$\because \quad a = 0 \;,\; b = 3 \Longrightarrow b - a = 3 - 0 = 3$$

$$\therefore \quad \frac{1}{b-a} = \frac{1}{3}$$

وبالتالي:

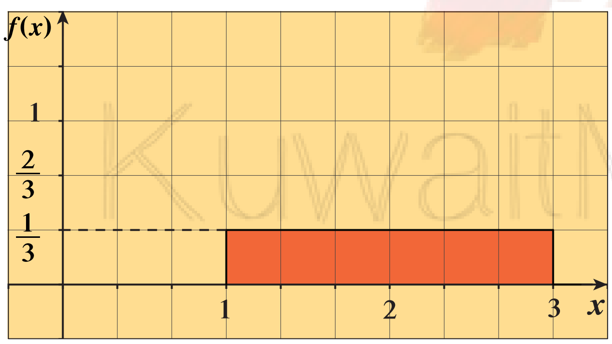
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

أي أن f هي دالة تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

c مساحة المنطقة المظللة:

$$P(1 \leqslant X \leqslant 3)$$

$$= 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



d التوقع:

$$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$$

التباين:

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

حاول أن تحل

3 لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

a أثبت أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال.

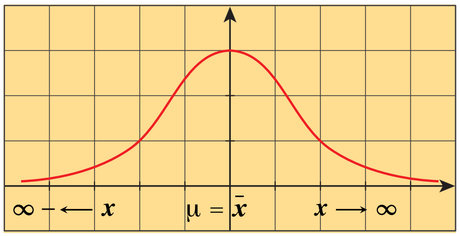
b أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

c أوجد: $P(2 < X \leqslant 3)$

d أوجد التوقع والتباين للدالة f .

التوزيع الاحتمالي الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$ Natural Probability Distribution $N(\mu , \sigma^2)$

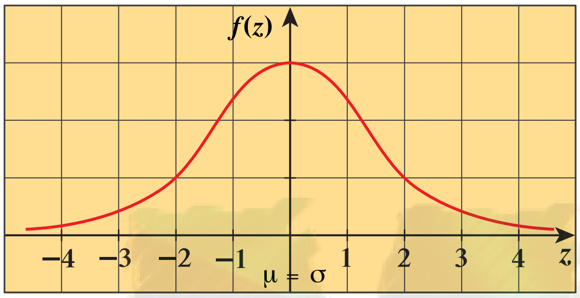
يعتبر التوزيع الاحتمالي الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة وقد سبق أن درسنا منحنى التوزيع الطبيعي وخواصه والتي منها:



منحنى التوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$

- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.
- يكون بيان المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره $(x = \mu)$.
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى $-\infty$ وإلى ∞ (لا يقطع محور السينات).
- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح (وحدة مساحة).
- المستقيم الرأسي $\mu = \bar{x}$ يقسم المساحة تحت المنحنى إلى قطعتين متماثلتين مساحة كل منهما تساوي نصف (نصف وحدة مساحة).

التوزيع الطبيعي المعياري $N(0 , 1)$



منحنى التوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$

إذا كان المتوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي $\mu = 0$ والانحراف المعياري $\sigma = 1$ يسمى التوزيع الطبيعي **بالتوزيع الطبيعي المعياري**.

الشكل المرسوم يمثل بيان منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

نعلم أن منحنى التوزيع الطبيعي يتحدد بكل من التوقع μ والتباين لها σ^2 ونظرًا لاختلاف قيم σ^2، μ من توزيع لآخر فإننا نقوم بتحويل أي توزيع طبيعي إلى توزيع طبيعي معياري وفق التحويل $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

وتمّ وضع جداول التوزيع الطبيعي المعياري في نهاية الوحدة للتوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$.

حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$

إذا كان للمتغير العشوائي X التوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$ أي التوزيع الذي توقعه μ وتباينه σ^2 وأردنا حساب احتمالات تتعلق بالمتغير X فإننا نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري المرفق آخر الوحدة باتباع الخطوات الموضحة التالية لإيجاد $P(a \leq X \leq b)$:

1. نوجد القيمة المعيارية المناظرة للقيمة a بالتعويض في العلاقة: $z_1 = \frac{a - \mu}{\sigma}$
   والقيمة المعيارية المناظرة للقيمة b بالتعويض في العلاقة: $z_2 = \frac{b - \mu}{\sigma}$
2. نستخدم العلاقة: $P(a < X \leqslant b) = P(z_1 < z < z_2)$
3. نستخدم أحد جدولي المساحة تحت المنحنى الطبيعي (5), (4) لحساب الطرف الأيسر من العلاقة السابقة.

حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري $P(z)$

- إذا كانت $z \geqslant a$ أو $z \leqslant a$، حيث $a \geqslant 0$ نستخدم جدول z رقم (4).
- إذا كانت $z \geqslant a$ أو $z \leqslant a$، حيث $a < 0$ نستخدم جدول z رقم (5).

مثال (4)

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a $P(z \leqslant 2.18)$ b $P(z \geqslant 2.43)$ c $P(1.4 \leqslant z \leqslant 2.6)$

الحل:

a $P(z \leqslant 2.18)$

لاحظ أن: $2.18 \geqslant 0$

نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري z رقم (4) صفحة (177) الموجود في نهاية الوحدة.

$$P(z \leqslant 2.18) = 0.98537$$

b

$$\begin{aligned} P(z \geqslant 2.43) &= 1 - P(z \leqslant 2.43) \\ &= 1 - 0.99245 \\ &= 0.00755 \end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned} & P(1.4 \leqslant z \leqslant 2.6) \\ &= P(z \leqslant 2.6) - P(z \leqslant 1.4) \\ &= 0.99535 - 0.91924 \\ &= 0.07611 \end{aligned}$$

حاول أن تحل

4 إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a $P(z \leq 0.95)$ b $P(z > 0.71)$ c $P(1.45 \leqslant z \leqslant 3.26)$

مثال (5)

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a $P(z \leqslant -0.55)$ b $P(-2.2 \leqslant z \leqslant -1.6)$ c $P(-1.3 \leqslant z \leqslant 0.28)$

الحل:

a $P(z \leqslant -0.55)$

لاحظ أن: $-0.55 \leqslant 0$

نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري z رقم (5) صفحة (178).

$$P(z \leqslant -0.55) = 0.29116$$

b

$$\begin{aligned} P(-2.2 \leqslant z \leqslant -1.6) &= P(z \leqslant -1.6) - P(z \leqslant -2.2) \\ &= 0.0537 - 0.01390 \\ &= 0.03980 \end{aligned}$$

c $P(-1.3 \leqslant z \leqslant 0.28) = P(z \leqslant 0.28) - P(z \leqslant -1.3)$

لاحظ أن: $0.28 \geqslant 0$ لذا نستخدم جدول رقم (4)

وأن $-1.3 \leqslant 0$ لذا نستخدم جدول رقم (5)

$P(z \leqslant 0.28) = 0.61026$

$P(z \leqslant -1.3) = 0.09680$

$P(-1.3 \leqslant z \leqslant 0.28) = 0.61026 - 0.09680$

$= 0.51346$

حاول أن تحل

5 إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a $P(z \leq -0.12)$

b $P(-3.2 \leq z \leq -0.1)$

c $P(-5.26 \leq z \leq 0.69)$

يتبع الراتب السنوي لموظفي شركة كبيرة التوزيع الطبيعي $N(50\,000\ ,\ 400\,000\,000)$

a أوجد التوقع والتباين.

b ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم أقلّ من 000 40 دينار كويتي؟

c ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم بين 000 45 وَ 000 65 دينار كويتي؟

d ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم أكثر من 000 70 دينار كويتي؟

الحل:

a التوزيع الطبيعي: $N(50\,000\ ,\ 400\,000\,000)$

توقعه: $\mu = 50\,000$

تباينه: $\sigma^2 = 400\,000\,000$

b $P(x < 40\,000) = P\left(z < \frac{40\,000 - 50\,000}{\sqrt{400\,000\,000}}\right) = P\left(z < -\frac{1}{2}\right)$

باستخدام الجدول (5): $P\left(z < -\frac{1}{2}\right) = 0.30854$

$\therefore$ 30.85% من الموظفين راتبهم أقلّ من 000 40 دينار كويتي.

c
$$\begin{aligned}P(45\,000 < x < 65\,000) &= P(-0.25 < z < 0.75)\\ &= P(z < 0.75) - P(z < -0.25)\\ &= 0.77335 - 0.40129\\ &= 0.37206\end{aligned}$$

$\therefore$ 37.21% من الموظفين راتبهم بين 000 65 وَ 000 54 دينار كويتي.

d
$$\begin{aligned}P(x > 70\,000) &= 1 - P(x \le 70\,000)\\ &= 1 - P(z < 1)\\ &= 1 - 0.84134\\ &= 0.15866\end{aligned}$$

$\therefore$ 15.87% من الموظفين راتبهم أكثر من 000 70 دينار كويتي.

مسألة إضافية

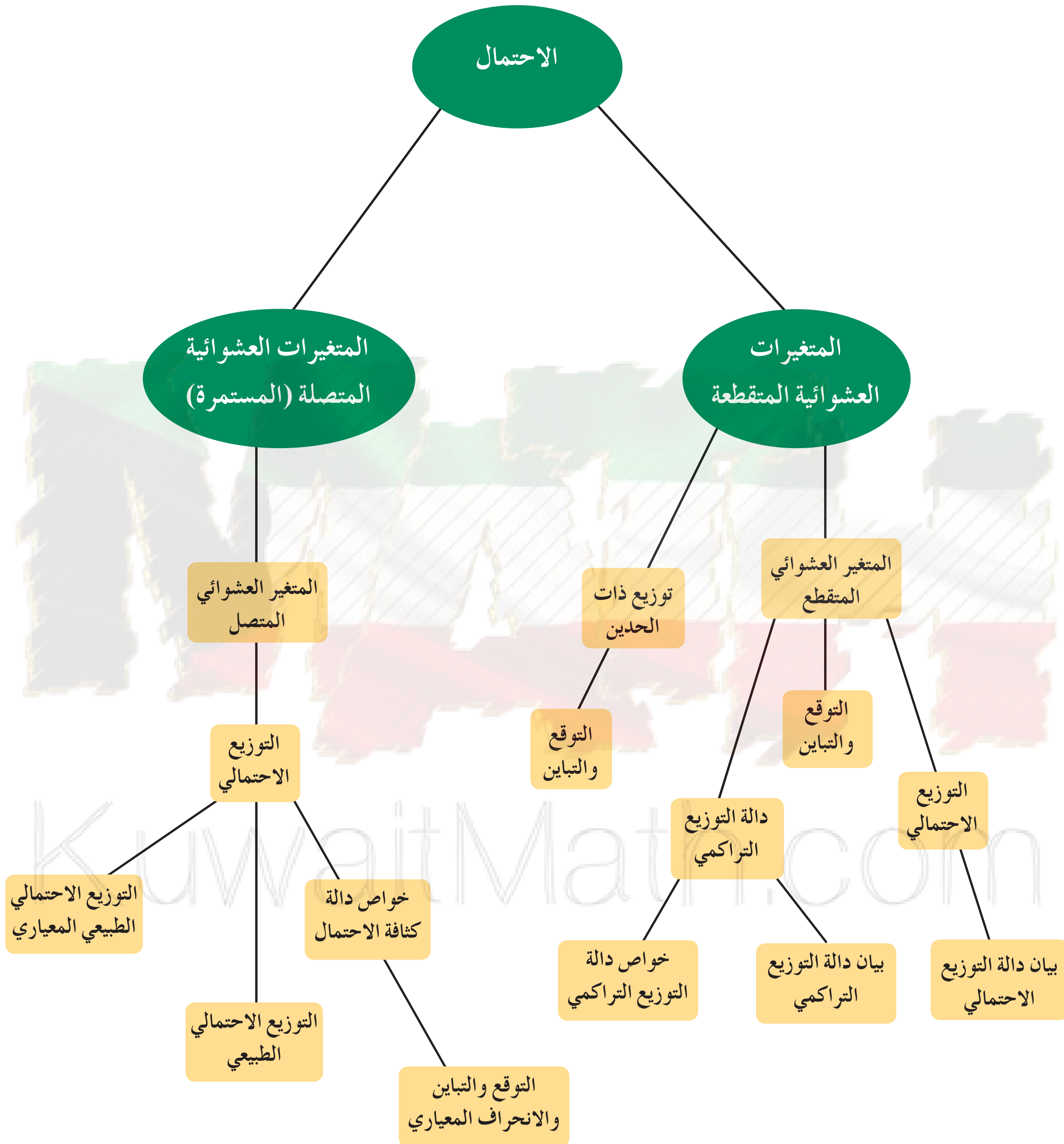
الوقت اللازم لتجميع مكونات سيارة في معمل يتبع التوزيع الطبيعي $N(20\,,4)$

a أوجد التوقع والتباين.

b ما احتمال أن يتم تجميع السيارة بأقل من 19.5 ساعة؟

c ما احتمال أن يتم تجميع السيارة بوقت يتراوح بين 20 وَ 22 ساعة؟

مخطط تنظيمي للوحدة الثامنة



ملخص

المتغيّر العشوائي: هو دالة مجالها فضاء العينة S ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$ ومداها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ حيث $X : S \to \mathbb{R}$

(X هو المتغير العشوائي، S فضاء العينة، $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية).

- يكون المتغير العشوائي X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له (المدى) $X(S)$: هي مجموعة متقطعة أي قابلة للعد، من الأعداد الحقيقية سواء أكانت منتهية أم غير منتهية.
- إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه $\{x_1 , x_2 , x_3 , ...\}$، فإن دالة التوزيع الاحتمالي f تعرّف كالتالي:

$$f(x_i) = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, 3, 4, ...$$

- دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X تحقق الشرطين:

1. $0 \le f(x) \le 1$
2. مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي f تساوي الواحد الصحيح، أي أن: $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... = 1$

- إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f،
مدى $X = \{x_1 , x_2 , x_3 , ...\}$
فإن التوقع للمتغير العشوائي X يكون:
التوقع: $\mu = \sum x_i \, f(x_i)$
أي أن: $\mu = x_1 \, f(x_1) + x_2 \, f(x_2) + x_3 \, f(x_3) + ...$

- إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f، فإن التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة:
التباين: $\sigma^2 = \sum x_i^2 \, f(x_i) - \mu^2$ حيث μ هو التوقع.
الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\text{التباين}}$

- دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a
هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a. أي أن:

1. $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$
2. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$
3. $P(a \le X < b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$

- يمكن تحويل التوزيع الطبيعي إلى توزيع طبيعي معياري باستخدام:

1. القيمة المعيارية المناظرة للقيمة a: $z_1 = \dfrac{a-\mu}{\sigma}$

2. القيمة المعيارية المناظرة للقيمة b: $z_2 = \dfrac{b-\mu}{\sigma}$

- نستخدم الجدول (4) إذا كان a أو b قيمة موجبة.
- نستخدم الجدول (5) إذا كان a أو b قيمة سالبة.
- التوقع للتوزيع الاحتمالي المنتظم: $\mu = \dfrac{a+b}{2}$
- التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم: $\sigma^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
2	0	0.902	0.810	0.640	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.040	0.010	0.002
	1	0.095	0.180	0.320	0.420	0.480	0.500	0.480	0.420	0.320	0.180	0.095
	2	0.002	0.010	0.040	0.090	0.160	0.250	0.360	0.0490	0.0640	0.0810	0.0902
3	0	0.857	0.729	0.512	0.343	0.216	0.125	0.064	0.027	0.008	0.001	
	1	0.135	0.243	0.384	0.441	0.432	0.375	0.288	0.189	0.096	0.027	0.007
	2	0.007	0.027	0.096	0.189	0.288	0.375	0.432	0.441	0.384	0.243	0.135
	3		0.001	0.008	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.512	0.729	0.857
4	0	0.815	0.656	0.410	0.240	0.130	0.062	0.026	0.008	0.002		
	1	0.171	0.292	0.410	0.412	0.346	0.250	0.154	0.076	0.026	0.004	
	2	0.014	0.049	0.154	0.265	0.346	0.375	0.346	0.265	0.154	0.049	0.014
	3		0.004	0.026	0.076	0.154	0.250	0.346	0.412	0.410	0.292	0.171
	4			0.002	0.008	0.026	0.062	0.130	0.240	0.410	0.656	0.815
5	0	0.774	0.590	0.328	0.168	0.078	0.031	0.010	0.002			
	1	0.204	0.328	0.410	0.360	0.259	0.156	0.077	0.028	0.006		
	2	0.021	0.073	0.205	0.309	0.346	0.312	0.230	0.132	0.051	0.008	0.001
	3	0.001	0.008	0.051	0.132	0.230	0.312	0.346	0.309	0.205	0.073	0.021
	4			0.006	0.028	0.077	0.156	0.259	0.360	0.410	0.328	0.204
	5				0.002	0.010	0.031	0.078	0.168	0.328	0.590	0.774
6	0	0.735	0.531	0.262	0.118	0.047	0.016	0.004	0.001			
	1	0.232	0.354	0.393	0.303	0.187	0.094	0.037	0.010	0.002		
	2	0.031	0.098	0.246	0.324	0.311	0.234	0.138	0.060	0.015	0.001	
	3	0.002	0.015	0.082	0.185	0.276	0.312	0.276	0.185	0.082	0.015	0.002
	4		0.001	0.015	0.060	0.138	0.234	0.311	0.324	0.246	0.098	0.031
	5			0.002	0.010	0.037	0.094	0.187	0.303	0.393	0.354	0.232
	6				0.001	0.004	0.016	0.047	0.118	0.262	0.531	0.735
7	0	0.698	0.478	0.210	0.082	0.028	0.008	0.002				
	1	0.257	0.372	0.367	0.247	0.131	0.055	0.017	0.004			
	2	0.041	0.124	0.275	0.318	0.261	0.164	0.077	0.025	0.004		
	3	0.004	0.023	0.115	0.227	0.290	0.273	0.194	0.097	0.029	0.003	
	4		0.003	0.029	0.097	0.194	0.273	0.290	0.227	0.115	0.023	0.004
	5			0.004	0.025	0.077	0.164	0.261	0.318	0.275	0.124	0.041
	6				0.004	0.017	0.055	0.131	0.247	0.367	0.372	0.257
	7					0.002	0.008	0.028	0.082	0.210	0.478	0.698

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

		P										
n	***x***	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
8	0	0.663	0.430	0.168	0.058	0.017	0.004	0.001				
	1	0.279	0.383	0.336	0.198	0.090	0.031	0.008	0.001			
	2	0.051	0.149	0.294	0.296	0.209	0.109	0.041	0.010	0.001		
	3	0.005	0.033	0.147	0.254	0.279	0.219	0.124	0.047	0.009		
	4		0.005	0.046	0.136	0.232	0.273	0.232	0.136	0.046	0.005	
	5			0.009	0.047	0.124	0.219	0.279	0.254	0.147	0.033	0.005
	6			0.001	0.010	0.041	0.109	0.209	0.296	0.294	0.149	0.051
	7				0.001	0.008	0.031	0.090	0.198	0.336	0.383	0.279
	8					0.001	0.004	0.017	0.058	0.168	0.430	0.663
9	0	0.630	0.387	0.134	0.040	0.010	0.002					
	1	0.299	0.387	0.302	0.156	0.060	0.018	0.004				
	2	0.063	0.172	0.302	0.267	0.161	0.070	0.021	0.004			
	3	0.008	0.045	0.176	0.267	0.251	0.164	0.074	0.021	0.003		
	4	0.001	0.007	0.065	0.172	0.251	0.246	0.167	0.074	0.017	0.001	
	5		0.001	0.017	0.074	0.167	0.246	0.251	0.172	0.066	0.007	0.001
	6			0.003	0.021	0.074	0.164	0.251	0.267	0.176	0.045	0.008
	7				0.004	0.021	0.070	0.161	0.267	0.302	0.172	0.063
	8					0.004	0.018	0.060	0.156	0.302	0.387	0.299
	9						0.002	0.010	0.040	0.134	0.387	0.630
10	0	0.599	0.349	0.107	0.028	0.006	0.001					
	1	0.315	0.387	0.268	0.121	0.040	0.010	0.002				
	2	0.075	0.194	0.302	0.233	0.121	0.044	0.011	0.001			
	3	0.010	0.057	0.201	0.267	0.215	0.117	0.042	0.009	0.001		
	4	0.001	0.011	0.088	0.200	0.251	0.205	0.111	0.037	0.006		
	5		0.001	0.026	0.103	0.201	0.246	0.201	0.103	0.026	0.001	
	6			0.006	0.037	0.111	0.205	0.251	0.200	0.088	0.011	0.001
	7			0.001	0.009	0.042	0.117	0.215	0.267	0.201	0.057	0.010
	8				0.001	0.011	0.044	0.121	0.233	0.302	0.194	0.075
	9					0.002	0.010	0.040	0.121	0.268	0.387	0.315
	10						0.001	0.006	0.028	0.107	0.349	0.599

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

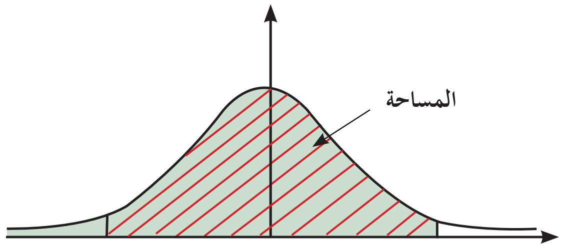
		P										
n	**x**	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
11	0	0.569	0.314	0.086	0.020	0.004						
	1	0.329	0.384	0.236	0.093	0.027	0.005	0.001				
	2	0.087	0.213	0.295	0.200	0.089	0.027	0.005	0.001			
	3	0.014	0.071	0.221	0.257	0.177	0.081	0.023	0.004			
	4	0.001	0.016	0.111	0.220	0.236	0.161	0.070	0.017	0.002		
	5		0.002	0.039	0.132	0.221	0.226	0.147	0.057	0.010		
	6			0.010	0.057	0.147	0.226	0.221	0.132	0.039	0.002	
	7			0.002	0.017	0.070	0.161	0.236	0.220	0.111	0.016	0.001
	8				0.004	0.023	0.081	0.177	0.257	0.221	0.071	0.014
	9				0.001	0.005	0.027	0.089	0.200	0.295	0.213	0.087
	10					0.001	0.005	0.027	0.093	0.236	0.384	0.329
	11							0.004	0.020	0.086	0.314	0.569
12	0	0.540	0.282	0.069	0.014	0.002						
	1	0.341	0.377	0.206	0.071	0.017	0.003					
	2	0.099	0.230	0.283	0.168	0.064	0.016	0.002				
	3	0.017	0.085	0.236	0.240	0.142	0.054	0.012	0.001			
	4	0.002	0.021	0.133	0.231	0.213	0.121	0.042	0.008	0.001		
	5		0.004	0.053	0.158	0.227	0.193	0.101	0.029	0.003		
	6			0.016	0.079	0.177	0.226	0.177	0.079	0.016		
	7			0.003	0.029	0.101	0.193	0.227	0.158	0.053	0.004	
	8			0.001	0.008	0.042	0.121	0.213	0.231	0.133	0.021	0.002
	9				0.001	0.012	0.054	0.142	0.240	0.236	0.085	0.017
	10					0.002	0.010	0.064	0.168	0.283	0.230	0.099
	11						0.003	0.017	0.071	0.206	0.377	0.341
	12							0.002	0.014	0.069	0.282	0.540

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

						P						
n	***x***	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
13	0	0.513	0.254	0.055	0.010	0.001						
	1	0.351	0.367	0.179	0.054	0.011	0.002					
	2	0.111	0.245	0.268	0.139	0.045	0.010	0.001				
	3	0.021	0.100	0.246	0.218	0.111	0.035	0.005	0.001			
	4	0.003	0.028	0.154	0.234	0.184	0.087	0.024	0.003			
	5		0.006	0.069	0.180	0.221	0.157	0.066	0.014	0.001		
	6		0.001	0.023	0.103	0.197	0.209	0.131	0.044	0.006		
	7			0.006	0.044	0.131	0.209	0.197	0.103	0.023	0.001	
	8			0.001	0.014	0.066	0.157	0.221	0.180	0.069	0.006	
	9				0.003	0.024	0.087	0.184	0.234	0.154	0.028	0.003
	10				0.001	0.006	0.035	0.111	0.218	0.246	0.100	0.021
	11					0.001	0.010	0.045	0.139	0.268	0.245	0.111
	12						0.002	0.011	0.054	0.179	0.367	0.351
	13							0.001	0.010	0.055	0.254	0.513
14	0	0.488	0.229	0.044	0.007	0.001						
	1	0.359	0.356	0.154	0.041	0.007	0.001					
	2	0.123	0.257	0.250	0.113	0.032	0.006	0.001				
	3	0.026	0.114	0.250	0.194	0.085	0.022	0.003				
	4	0.004	0.035	0.172	0.229	0.155	0.061	0.014	0.001			
	5		0.008	0.086	0.196	0.207	0.122	0.041	0.007			
	6		0.001	0.032	0.126	0.207	0.183	0.092	0.023	0.002		
	7			0.009	0.062	0.157	0.209	0.157	0.062	0.0009		
	8			0.002	0.023	0.092	0.183	0.207	0.126	0.032	0.001	
	9				0.007	0.041	0.122	0.207	0.196	0.086	0.008	
	10				0.001	0.014	0.061	0.155	0.229	0.172	0.035	0.004
	11					0.003	0.022	0.085	0.194	0.250	0.114	0.026
	12					0.001	0.006	0.032	0.113	0.250	0.257	0.123
	13						0.001	0.007	0.041	0.154	0.356	0.359
	14							0.001	0.007	0.044	0.229	0.488

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

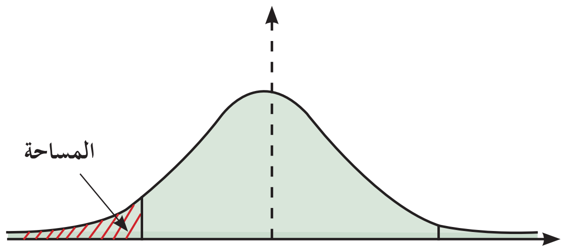
							P					
n	***x***	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
15	0	0.463	0.206	0.035	0.005							
	1	0.366	0.343	0.132	0.031	0.005						
	2	0.135	0.267	0.231	0.092	0.022	0.003					
	3	0.031	0.129	0.250	0.170	0.063	0.014	0.002				
	4	0.005	0.043	0.188	0.219	0.127	0.042	0.007	0.001			
	5	0.001	0.010	0.103	0.206	0.186	0.092	0.024	0.003			
	6		0.002	0.043	0.147	0.207	0.153	0.061	0.012	0.001		
	7			0.014	0.081	0.177	0.196	0.118	0.035	0.003		
	8			0.003	0.035	0.118	0.196	0.177	0.081	0.014		
	9			0.001	0.012	0.061	0.153	0.207	0.147	0.043	0.002	
	10				0.003	0.024	0.092	0.186	0.206	0.103	0.010	0.001
	11				0.001	0.007	0.042	0.127	0.210	0.188	0.043	0.005
	12					0.002	0.014	0.063	0.170	0.250	0.129	0.031
	13						0.003	0.022	0.092	0.231	0.267	0.135
	14							0.005	0.031	0.132	0.343	0.366
	15								0.005	0.035	0.206	0.463



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (z) لحساب قيم المساحات من اليسار

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

جدول (4)



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (z) لحساب قيم المساحات من اليسار

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
−3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
−3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
−3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
−3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
−3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
−3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
−3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
−3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
−3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
−2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
−2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
−2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
−2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
−2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
−2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
−2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
−2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
−2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
−2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
−1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
−1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
−1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
−1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
−1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
−1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
−1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
−1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
−1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
−1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
−0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
−0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
−0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
−0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
−0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
−0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
−0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
−0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
−0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
−0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414

جدول (5)