الوحدة الثالثة

تطبيقات على الاشتقاق

Applications on Differentiation

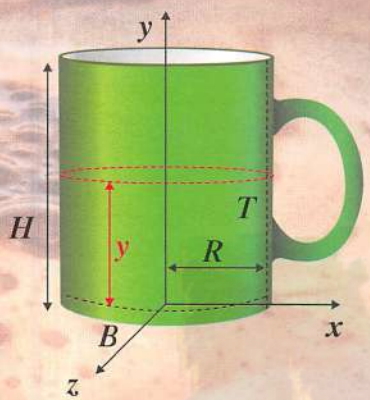
مشروع الوحدة:

1 مقدمة المشروع: فرضًا أنه لا يوجد مكان مخصص في إحدى السيارات لوضع كوب يحتوي على القهوة، وسوف يوضع بجانب مقعد السائق أثناء القيادة. أظهرت التجربة أن الكوب قابل للانسكاب عندما يكون مليئًا بالكامل. ويصبح أكثر ثباتًا كلما تناقصت منه القهوة.

2 الهدف: تحديد أقصى ارتفاع لكمية القهوة كي لا تنسكب من الكوب أثناء قيادة السيارة.

3 اللوازم: ورق رسم بياني – آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط.

4 أسئلة حول التطبيق:



يبيّن الرسم المقابل أن جزءًا من الكوب يحتوي على القهوة. سوف نفترض أن الكوب يكون أكثر ثباتًا عندما تكون نقطة الارتكاز المشتركة للكوب وكمية القهوة هي في أدنى ارتفاع. نقطة ارتكاز المجسم الأسطواني هي نقطته المركزية الهندسية حيث إن إحداثها الصادي $\bar{y}$ يمكن أن يعطى بالقاعدة:

$$\bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

إذا علمت أن: $m_1 = \pi\delta(R+T)^2 B$ (كتلة قاعدة الكوب) , $y_1 = -\frac{B}{2}$ (الإحداثي الصادي لنقطة ارتكاز القاعدة).

$m_2 = \pi\delta(R+T)^2 H - \pi\delta R^2 H$ (كتلة جوانب الكوب) , $y_2 = \frac{H}{2}$ (الإحداثي الصادي لنقطة ارتكاز جوانب الكوب).

$m_3 = \pi\delta R^2 y$ (كتلة القهوة في الكوب) , $y_3 = \frac{y}{2}$ (الإحداثي الصادي لنقطة ارتكاز القهوة).

a احسب قيم m_1 , m_2 , m_3 بدلالة B و y و H و T و R (إرشاد: $m = \delta V$ حيث δ كثافة مشتركة للقهوة والمادّة المصنوع منها الكوب).

b أوجد $\bar{y}$ بدلالة B و y و H و T و R.

c إذا كان: $H = 8\text{ cm}, R = 3\text{ cm}, T = 0.5\text{ cm}, B = 1\text{ cm}$

أثبت أن: $f(y) = \bar{y} = \frac{21.75 + y^2}{8.5 + 2y}$; $0 \leqslant y \leqslant 8$

d أثبت أنّ مشتقّة $f(y)$ هي: $f'(y) = \frac{2y^2 + 17y - 43.5}{(2y + 8.5)^2}$

y =	ارتفاع مستوى القهوة في الكوب (cm)
H =	ارتفاع الكوب (cm)
B =	سماكة القاعدة (cm)
R =	نصف قطر الدائرة الداخلية من الكوب (cm)
T =	سماكة الجوانب (cm)
$R + T$ =	نصف قطر الدائرة الخارجية من الكوب (cm)

5 ما القيمة المحلية الصغرى؟ فسّر.

6 التقرير: اكتب تقريرًا يبيّن نتائج بحثك. أشر إلى كيفية الاستفادة من مفاهيم التفاضل في عملك.

دعّم التقرير بالرسوم البيانية وبعرض على جهاز الإسقاط. طبّق ما توصلت إليه على كوبك المفضل في احتساء القهوة.

دروس الوحدة

القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال	تزايد وتناقص الدوال	ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f	رسم بيان دوال كثيرات الحدود	تطبيقات على القيم القصوى
3–1	3–2	3–3	3–4	3–5

الوحدة الثالثة

أين أنت الآن؟ (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت الدالة التربيعية: القيمة الصغرى والقيمة العظمى.
- تعرفت الرسوم البيانية لبعض الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- مثلت النمو الأسيّ والتضاؤل الأسيّ.
- تعرفت الرسوم البيانية للدوال المثلثية.
- تعرفت الاشتقاق وقواعده.

ماذا سوف تتعلم؟

- إيجاد القيم القصوى المطلقة والقيم القصوى المحلية.
- تطبيق نظرية القيمة المتوسطة.
- تحديد تزايد وتناقص الدوال.
- اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية.
- تحديد تقعر منحنى الدالة.
- تحديد نقاط الانعطاف.
- اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية.
- رسم بيان دوال كثيرات الحدود.
- تطبيقات على القيم القصوى.

المصطلحات الأساسية

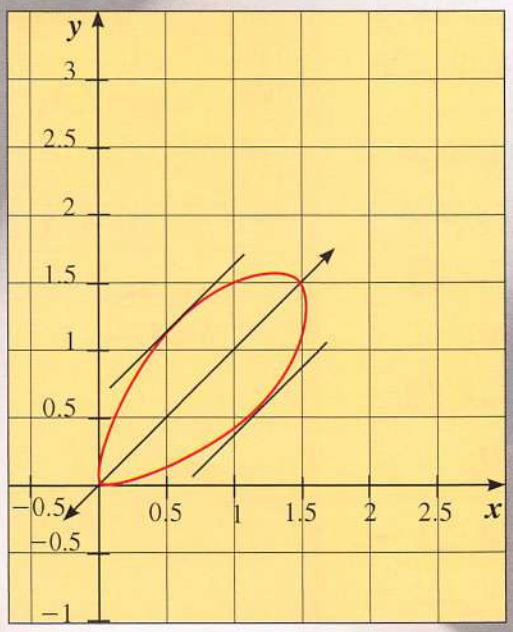
قيم قصوى مطلقة — قيمة عظمى مطلقة — قيمة صغرى مطلقة — نقطة طرفية — نقطة داخلية — قيمة قصوى محلية — نقطة حرجة — نظرية القيمة المتوسطة — الدوال المتزايدة — الدوال المتناقصة — الدالة المطّردة — اختبار المشتقة الأولى — التقعر — نقاط الانعطاف — اختبار المشتقة الثانية — كثيرات الحدود.

أضف إلى معلوماتك

«إذا كنت أجرؤ القول فإن مسألة تحديد خط المماس هي المسألة الأكثر فائدة وبالعموم هي أكثر ما أود معرفته».

ديكارت (1596 – 1650)

أدت الأبحاث التي قام بها العلماء في القرن السابع عشر في مختلف المجالات: علم الميكانيك والفلك والبصريات، إلى طرح مسائل المماس وحلها. منها: تحديد خط المماس في نقطة معينة، وتحديد النقطة على المنحنى حيث المماس مواز لمستقيم معين. للشكل أدناه محور تناظر. طوّر ديكارت طريقة تسمح بتحديد النقاط حيث المماس مواز لهذا المحور.



القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال

Extreme Values of Functions

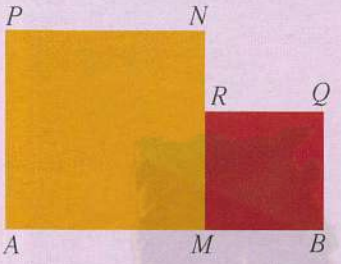
سوف تتعلم
- القيم القصوى المطلقة.
- القيم القصوى المحلية.
- إيجاد القيم القصوى.

المفردات والمصطلحات
- قيمة قصوى
Extreme Value
- قيمة قصوى مطلقة
Absolute Extreme Value
- قيمة عظمى مطلقة
Absolute Maximum Value
- قيمة صغرى مطلقة
Absolute Minimum Value
- قيمة قصوى محلية
Local Extreme Value
- نقطة حرجة
Critical Point

دعنا نفكر ونتناقش

في الشكل المقابل $AMNP$; $MBQR$ مربعان فيهما $AB = 6\text{ cm}$ ، $M \in \overline{AB}$ ، $AM = x$.

نريد معرفة موقع M بحيث يكون مجموع مساحتي المربعين أصغر ما يمكن.



1 أوجد مساحة كلّ من المربعين.

2 a ماذا تمثل $S(x) = 2x^2 - 12x + 36$؟

b أكمل الجدول:

x	0	1	2	3	4	5	6
$S(x)$							

c لأي قيمة للمتغير x في الجدول تكون قيمة $S(x)$ الأصغر؟

3 a أثبت أن $S(x) - S(3) \geqslant 0$ لكل قيم x على الفترة $(0 , 6)$.

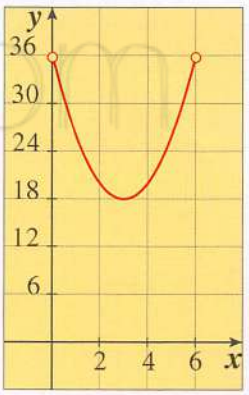
b استنتج موقع M.

القيم القصوى Extreme Values

الشكل (1) يمثل بيان الدالة S من «دعنا نفكر ونتناقش».

ويتضح أن للدالة S قيمة صغرى عند $x = 3$ وتسمى أيضًا **قيمة قصوى** وفي هذه الحالة $S(x) \geq S(3)$ لكل x تنتمي إلى مجال S.

في هذا الدرس سنتعرف على القيم القصوى والتي يمكن أن تكون القيمة الأصغر أو القيمة الأكبر للدالة مستعينين بدارسة إشارة مشتقة الدالة.



شكل (1)
بيان الدالة S

تعريف (1): القيم القصوى المطلقة

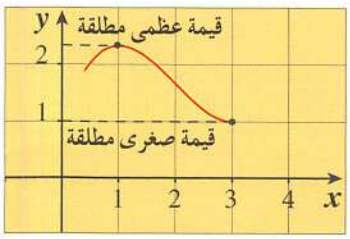
إذا كانت f دالّة مجالها D، $c \in D$، فإن $f(c)$ تسمى:

a **قيمة عظمى مطلقة للدالة f على D عندما:**

$$f(c) \geqslant f(x) \quad , \quad \forall x \in D_f$$

b **قيمة صغرى مطلقة للدالة f على D عندما:**

$$f(c) \leqslant f(x) \quad , \quad \forall x \in D_f$$



شكل (2)

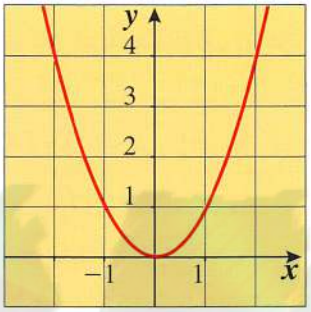
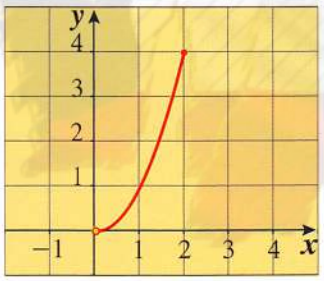
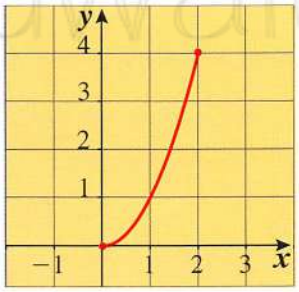
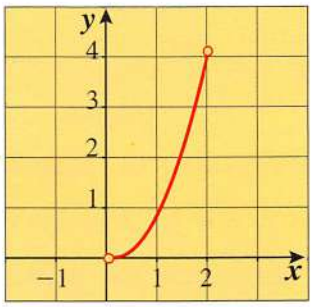
- القيم العظمى المطلقة والقيم الصغرى المطلقة تسمّى القيم **القصوى المطلقة**.
- تسمى القيم القصوى المطلقة **بالقيم القصوى** أي أننا نكتفي بالقول قيمة عظمى أو قيمة صغرى. قد يكون للدالة قيم قصوى مختلفة وذلك بحسب مجالها.

مثال (1)

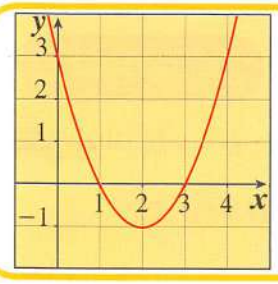
لتكن الدالة: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2$ ، أوجد إن أمكن القيم القصوى للدالة f مع رسم بيانها عندما:

a $D = (-\infty, \infty)$ b $D = (0, 2]$ c $D = [0, 2]$ d $D = (0, 2)$

الحل:

	بيان الدالة: $f(x) = x^2$	المجال D	القيم القصوى المطلقة للدالة f على D
a	$y = x^2$ 	$(-\infty, \infty)$	لا توجد قيمة عظمى مطلقة. توجد قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x = 0$
b	$y = x^2$ 	$(0, 2]$	توجد قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x = 2$ لا توجد قيمة صغرى مطلقة.
c	$y = x^2$ 	$[0, 2]$	توجد قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x = 2$ قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x = 0$
d	$y = x^2$ 	$(0, 2)$	لا توجد قيم قصوى مطلقة.

حاول أن تحل



1 الشكل يمثّل بيان $y = x^2 - 4x + 3$. أوجد القيم القصوى للدالة على المجالات التالية:

a $(-\infty, \infty)$ b $[2,3]$ c $(1,3)$ d $[3,4)$

يتّضح مما سبق أنّ الدالّة قد **لا تكون لها** قيمة عظمى أو قيمة صغرى. وهذا لا يحدث مع الدوالّ المتصلة على فترات مغلقة.

نظريّة (1): نظرية القيمة القصوى

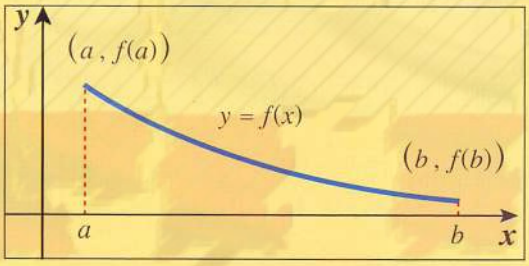
إذا كانت f دالّة متصلة على فترة مغلقة $[a, b]$ فإن f تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.

ملاحظة: لتكن الدالة f معرفة على $[a,b]$ ، $c \in (a,b)$ فإننا نسمي:

1 $(b, f(b))$ ، $(a, f(a))$ **نقاط طرفية.**

2 $(c, f(c))$ **نقطة داخلية.**

الأشكال التالية تمثّل بعض الحالات لقيم عظمى وقيم صغرى لدوال متّصلة على فترات مغلقة $[a,b]$:

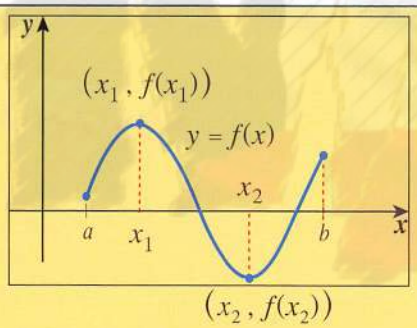


شكل (4)

للدالة قيمة عظمى $f(a)$ عند $x = a$

وللدالة قيمة صغرى $f(b)$ عند $x = b$

وهذه القيم عند نقاط طرفية

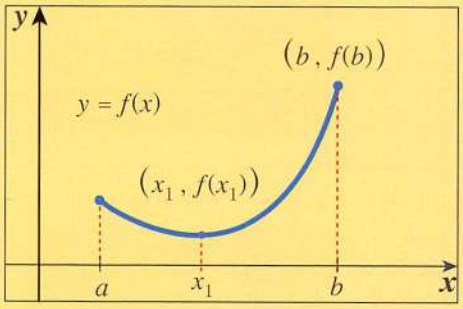


شكل (3)

للدالة قيمة عظمى $f(x_1)$ عند $x = x_1$

وللدالة قيمة صغرى $f(x_2)$ عند $x = x_2$

وهذه القيم عند نقاط داخلية



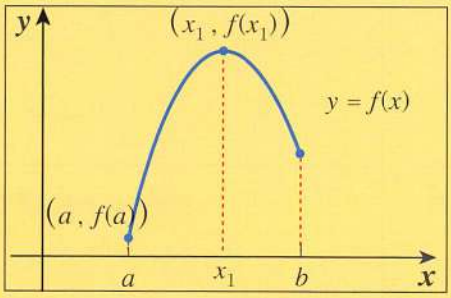
شكل (6)

للدالة قيمة عظمى $f(b)$ عند $x = b$

وللدالة قيمة صغرى $f(x_1)$ عند $x = x_1$

القيمة العظمى عند نقطة طرفية

والقيمة الصغرى عند نقطة داخلية.



شكل (5)

للدالة قيمة عظمى $f(x_1)$ عند $x = x_1$

وللدالة قيمة صغرى $f(a)$ عند $x = a$

القيمة العظمى عند نقطة داخلية

والقيمة الصغرى عند نقطة طرفية.

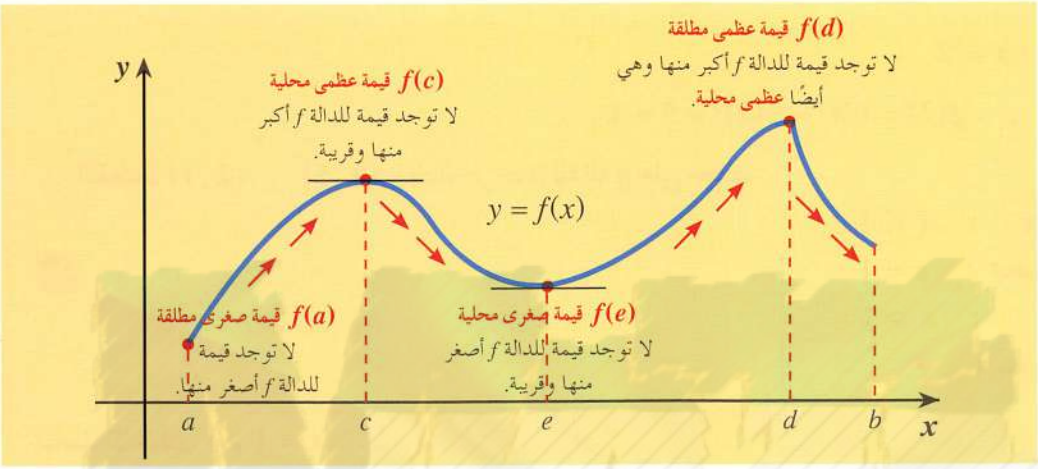
القيم القصوى المحلية Local Extreme Values

تعريف (2): القيم القصوى المحليّة

لتكن $(c , f(c))$ نقطة داخلية للدالة f، D فترة مفتوحة تحوي c، تكون $f(c)$:

a قيمة عظمى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D$, $f(c) \geqslant f(x)$

b قيمة صغرى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D$, $f(c) \leqslant f(x)$



شكل (7)

يبيّن الشكل (7) رسمًا بيانيًّا له أربع نقاط حيث الدالّة عندها **قيم قصوى** على مجالها $[a , b]$.

تقع **القيمة الصغرى المطلقة** للدالّة عند a وهي $f(a)$، في حين أنّ قيمة الدالّة عند e أصغر من أي قيمة قريبة منها سواء من جهة اليمين أو اليسار ولذلك تسمى **قيمة صغرى محلية**.

يرتفع المنحنى ناحية اليسار وينخفض ناحية اليمين حول النقطة c، محدثًا **قيمة عظمى محليّة** قدرها $f(c)$ في حين أن الدالّة لها **قيمة عظمى مطلقة** عند d.

نقاط المجال الداخليّة التي تكون المشتقة عندها تساوي الصفر أو المشتقة عندها ليست موجودة. سنطلق عليها تسمية خاصة كما في التعريف التالي:

معلومة:
الدالة الثابتة على الفترة $[a , b]$ لها قيمة قصوى مطلقة واحدة فقط.
أي أن القيمة العظمى تساوي القيمة الصغرى.

تعريف (3): النقطة الحرجة Critical Point

النقطة الداخليّة للدالّة f $(c , f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

ملاحظة: يسمى العدد c العدد الحرج.

تذكر:
تكون $f'(c)$ غير موجودة إذا كان للدالة f عند c ركن أو ناب أو مماس رأسي.

مثال (2)

أوجد النقاط الحرجة لكلّ من الدوال المتصلة التالية:

a $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

b $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad x < 1 \\ 3x - 1 & , \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

الحل:

a g دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 3x^2 - 6x$$

نضع $g'(x) = 0$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad , \quad x = 2$$

$$g(0) = 5 \quad , \quad g(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 5 = 1$$

$\therefore$ النقطتان $(2,1)$, $(0,5)$ نقطتان حرجتان للدالة g على مجالها

b

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : \quad x < 1 \\ \text{تبحث} & : \quad x = 1 \\ 3 & : \quad x > 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 3(1) - 1 = 2$$

نبحث الاشتقاق عند $x = 1$

إن وجدت

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^2 + 1 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 + 1 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\cancel{h}^{1}(2+h)}{\cancel{h}_{1}}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} (2+h) = 2$$

$$\therefore \ f'_-(1) = 2$$

إن وجدت

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{3(1+h) - 1 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{3 + 3h - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{3\cancel{h}^{1}}{\cancel{h}_{1}}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} 3 = 3$$

$$\therefore \ f'_+(1) = 3$$

$$\because \ f'_-(1) \neq f'_+(1)$$

$\therefore$ $f'(1)$ ليست موجودة.

$\therefore$ النقطة $(1,2)$ نقطة حرجة.

$$f'(x) = 3 \quad , \quad x > 1$$
$$\therefore \forall x \in (1\ ,\ \infty) \Longrightarrow f'(x) \neq 0$$

$\therefore$ لا توجد نقاط حرجة على هذه الفترة.

$$f'(x) = 2x \quad : \quad x < 1$$
$$2x = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad \in (-\infty\ ,\ 1)$$

للدالة نقطة حرجة عند $x = 0$

$$f(0) = (0)^2 + 1 = 1$$

$\therefore$ النقطة $(0,1)$ نقطة حرجة.

حاول أن تحل

2 أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال المتصلة التالية:

a $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$ b $f(x) = |x - 5|$

تذكر:
إذا كانت الدالة f لها مشتقة عند نقطة فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.

وبالعودة إلى الشكل (7) السابق نجد أن النقاط الحرجة تكون عند $x = e$, $x = c$ لأن المشتقة عند كل منهما تساوي الصفر (لماذا؟)

وكذلك توجد نقطة حرجة عند $x = d$ لأن المشتقة عندها ليست موجودة (لماذا؟)

نظريّة (2): القيم القصوى المحليّة (Fermat's Theorem)

إذا كانت للدالّة f قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محليّة عند $x = c$ فإنّ $(c\ ,\ f(c))$ نقطة حرجة.

إذا كانت $(c\ ,\ f(c))$ نقطة حرجة للدالة f فليس بالضرورة أن تكون $f(c)$ قيمة قصوى محلية

فمثلًا الدالة $f(x) = x^3$ لها نقطة حرجة عند $x = 0$ ولكن $f(0)$ ليست قيمة قصوى محلية.

خطوات إيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة f المتصلة على الفترة $[a\ ,b]$

تعلمت كيفية إيجاد النقاط القصوى المطلقة للدالة f من خلال التمثيل البياني لها وتطبيق تعريف (1) عليها.

والآن سنعرض خطوات إيجادها جبريًّا على $[a\ ,b]$:

1 إيجاد قيم الدالة عند النقاط الطرفية: $x = a$, $x = b$

2 إيجاد النقاط الحرجة للدالة f في الفترة $(a\ ,b)$ إن وجدت.

3 أكبر قيمة للدالة في الخطوتين 2 , 1 هي قيمة عظمى مطلقة في $[a\ ,b]$ وأصغر قيمة للدالة هي قيمة صغرى مطلقة في $[a\ ,b]$.

مثال (3)

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة المتصلة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[0, 3]$.

الحل:

$\because$ الدالة f متصلة على $[0, 3]$.

$\therefore$ الدالة f لها قيمة عظمى مطلقة ولها قيمة صغرى مطلقة في الفترة $[0, 3]$.

نوجد قيم الدالة عند النقاط الطرفية $x = 3$ ، $x = 0$

$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 1 = 1$

$f(3) = (3)^3 - 3(3) + 1 = 19$

$f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

نضع $f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3$

$x^2 = 1$

$\therefore\ x = 1 \quad , \quad 1 \in (0, 3)$

$x = -1 \quad , \quad -1 \notin (0, 3)$

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$

$\therefore$ $(1\ ,\ -1)$ نقطة حرجة.

x	0	1	3
$f(x)$	1	-1	19

من الجدول:

أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[0, 3]$ هي 19

$\therefore$ 19 قيمة عظمى مطلقة.

أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[0, 3]$ هي -1

$\therefore$ -1 قيمة صغرى مطلقة.

حاول أن تحل

3 أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2, 1]$.

مثال (4)

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2, 3]$

الحل:

$\because$ الدالة f متصلة على $[-2, 3]$.

$\therefore$ الدالة f لها قيمة عظمى مطلقة ولها قيمة صغرى مطلقة على الفترة $[-2, 3]$.

نوجد قيم الدالة عند $x = 3$, $x = -2$

$$f(-2) = (-2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-2)^2} = \sqrt[3]{4}$$

$$\approx 1.587$$

$$f(3) = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$$

$$\approx 2.08$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

لاحظ أن $f'(x) \neq 0$ ولكن

عند $x = 0$ المشتقة ليست موجودة، $f(0) = 0$

$\therefore$ $(0, 0)$ نقطة حرجة.

x	-2	0	3
$f(x)$	1.587	0	2.08

من الجدول:

أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[-2, 3]$ هي $3^{\frac{2}{3}}$

$\therefore$ $3^{\frac{2}{3}}$ قيمة عظمى مطلقة.

أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[-2, 3]$ هي 0

$\therefore$ 0 قيمة صغرى مطلقة.

حاول أن تحل

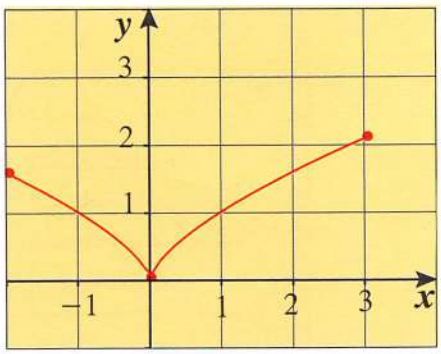
4 أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1, 3]$

الشكل (8) يوضّح التمثيل البياني للدالة f في مثال (4).

نلاحظ أن:

f لها قيمة عظمى مطلقة 2.08 تقريبًا عند $x = 3$

ولها قيمة صغرى مطلقة هي صفر عند $x = 0$



شكل (8)

مثال (5)

لتكن f : $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5 \ , \ a \ , \ b \in \mathbb{R}$

وكان للدالة قيمة قصوى محلية عند كلّ من: $x = 1 \ , \ x = \frac{1}{3}$

أوجد قيمة كل من الثابتين $a \ , \ b$

الحل: $\because$ f دالة كثيرة حدود

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$\because$ للدالة قيم قصوى محلية عند $x = 1 \ , \ x = \frac{1}{3}$

$\therefore$ توجد نقاط حرجة للدالة عندهما وبالتالي:

$$f'(1) = 0 \ , \ f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

نحصل على المعادلتين الآنيتين:

$$\begin{cases} 3(1)^2 + 2a(1) + b = 0 \\ 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2a\left(\frac{1}{3}\right) + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ \frac{2}{3}a + b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$a = -2 \ , \ b = 1$ استخدم الآلة الحاسبة العلمية لإيجاد الحل

حاول أن تحل

5 لتكن f : $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1 \ , \ a, b \in \mathbb{R}$

وكان للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من: $x = -1 \ , \ x = 2$

أوجد قيمة كل من الثابتين $a \ , \ b$

الربط بالتكنولوجيا:

خطوات الحل المستخدمة لحل معادلتين آنيتين بمتغيرين بالحاسبة.

اضغط المفتاح Mode

يظهر على الشاشة 8 خيارات لبرامج مستخدمة، اختر البرنامج: 5:EQN

فيظهر على الشاشة 4 صيغ لمعادلات:

اختر الصيغة:

$1: a_n x + b_n y = c_n$

فيظهر على الشاشة المصفوفة:

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\begin{bmatrix} a\square & b\square & c\square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

اكتب كلًّا من المعادلتين على الشكل التالي:

$ax + by = c$

املأ المربعات في السطر الأول بمعامل x يليه = ثم معامل y يليه = ثم قيمة c يليه = .

كرر العملية في السطر الثاني.

اضغط الآن على المفتاح = تظهر قيمة x (المجهول الأول)

اضغط ثانية على المفتاح = تظهر قيمة y (المجهول الثاني)

ملاحظة:

يمكنك كذلك حل المعادلتين الآنيتين باستخدام طريقة الحذف أو طريقة التعويض.

تزايد وتناقص الدوال

Increasing and Decreasing Functions

سوف تتعلم

- نظرية القيمة المتوسطة.
- تزايد وتناقص الدوال.
- الدوال المطردة.
- الدالة الثابتة.

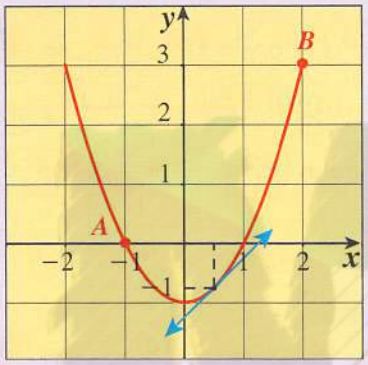
المفردات والمصطلحات

- نظرية القيمة المتوسطة Mean Value Theorem
- الدوال المتزايدة Increasing Functions
- الدوال المتناقصة Decreasing Functions
- الدالة المطّردة Monotonic Function

دعنا نفكر ونتناقش

إذا كانت $f(x) = x^2 - 1$ فأجب عمّا يلي:

1. ارسم المستقيم المار بالنقطتين $A(-1, f(-1))$, $B(2, f(2))$ ثم أوجد الميل $m(\overleftrightarrow{AB})$.
2. هل الدالة f متصلة على $[-1, 2]$؟ وهل f قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1, 2)$؟
3. أوجد ميل المماس لمنحنى f عند $x = \frac{1}{2}$ (لاحظ أن $\frac{1}{2} \in (-1, 2)$)
4. استنتج العلاقة بين 3 , 1 .



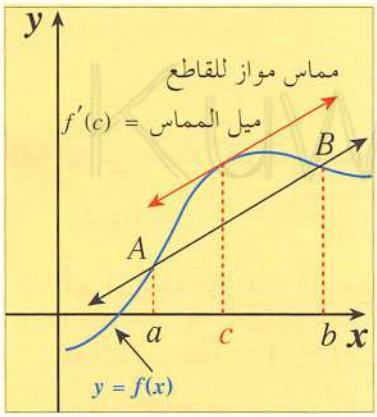
نظريّة القيمة المتوسّطة Mean Value Theorem

تربط نظريّة القيمة المتوسّطة بين متوسّط معدل تغيّر دالّة على فترة ما، ومعدّل التغيّر للدالّة عند نقطة تنتمي إلى هذه الفترة.

تكمن نتائجها القويّة في صميم بعض التطبيقات الكثيرة الأهميّة في علم حساب التفاضل والتكامل.

تقول النظريّة إنّه في مكان ما بين نقطتين A , B على منحنى دالة قابلة للاشتقاق، يوجد **على الأقل** خطّ مماسّ واحد يوازي قاطع المنحنى $\overleftrightarrow{AB}$ (كما في الشكل (1)).

$$m(\overleftrightarrow{AB}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



شكل (1)

معلومة:

إن تسارع سيارة من سكون لتقطع مسافة 120 m يستغرق 8 s يبلغ معدل سرعة السيارة خلال هذه الفترة الزمنية

$\frac{120}{8} = 15$ m/s

أي 54 km/h

تفيد نظرية القيمة المتوسطة أنه خلال انطلاق السيارة وفي نقطة ما محددة على المسار يجب أن يشير عداد السرعة إلى 54 km/h

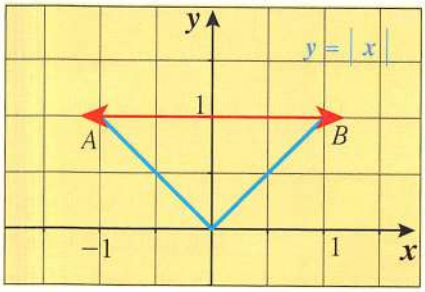
نظريّة (3): نظريّة القيمة المتوسّطة

إذا كانت f دالة:

1. متّصلة على الفترة $[a, b]$
2. قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b)

فإنّه يوجد على الأقل $c \in (a, b)$ بحيث $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

شروط نظرية القيمة المتوسطة كافية وليست لازمة، أي أنه إذا توفرت الشروط فبالتأكيد يوجد c الذي تنبئ به النظرية وعدم تحقق أحد الشرطين لا يعني بالضرورة عدم وجود c والملاحظات التالية توضح ذلك.



شكل (2)

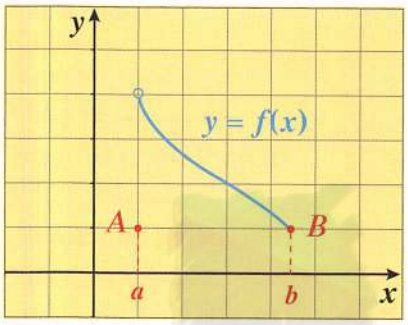
ملاحظات:

1 إذا لم يتحقق أحد شرطي النظرية (3) فإنه **قد لا يكون** لبيان الدالة مماسّ مواز للقاطع $\overleftrightarrow{AB}$.

فمثلًا، $f(x) = |x|$ دالة متصلة على الفترة $[-1 , 1]$

وقابلة للاشتقاق عند كل x تنتمي إلى $(-1,1)$ باستثناء عند $x = 0$.

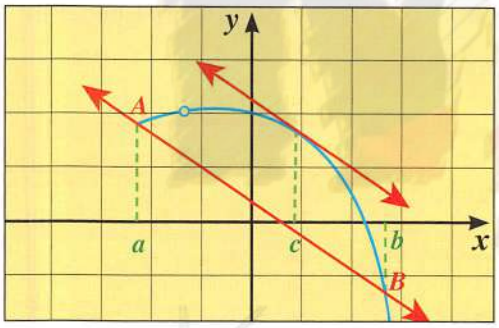
بيان الدالة ليس له مماسّ يوازي $\overleftrightarrow{AB}$ (شكل 2).



شكل (3)

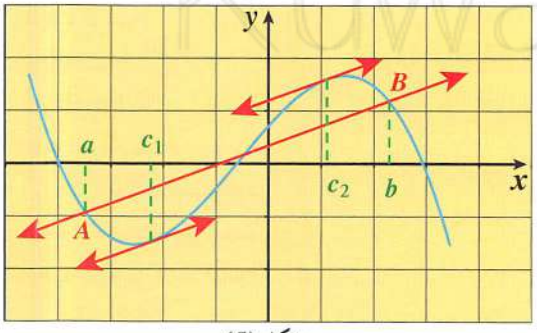
2 يبيّن شكل (3) بيان دالّة f قابلة للاشتقاق عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b) ومتّصلة على الفترة $[a , b)$.

ولكن لا يوجد مماس يوازي $\overleftrightarrow{AB}$.



شكل (4)

3 بيان الدالة في الشكل (4) يبيّن نقطة انفصال وبالرغم من عدم توفر شرط من شروط نظرية القيمة المتوسطة إلّا أنه يوجد مماس للمنحنى عند c يوازي $\overleftrightarrow{AB}$.



شكل (5)

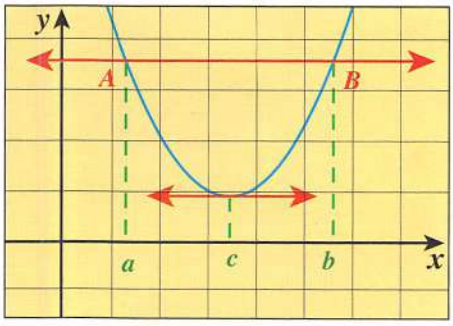
4 يمكن إيجاد أكثر من نقطة واحدة بحيث

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad , \quad c \in (a , b)$$

أي أن المماس عند كل من النقاط

$(c_1 , f(c_1)) \ , \ (c_2 , f(c_2))$

يوازي $\overleftrightarrow{AB}$ كما في الشكل (5).



شكل (6)

5 في نظرية القيمة المتوسطة إذا كان $f(a) = f(b)$ فإن $f'(c) = 0$ أي أن المماس للمنحنى عند c يوازي القاطع ويوازي محور السينات أي أن المماس أفقي كما في الشكل (6).

مثال (1)

بيّن أن الدالّة f : $f(x) = x^2$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

الحل:

الدّالة f : $f(x) = x^2$ دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على الفترة $[0, 2]$، وقابلة للاشتقاق على $(0, 2)$.

$\therefore$ شروط نظريّة القيمة المتوسّطة محققة على الفترة $[0, 2]$.

$\therefore$ يوجد على الأقل $c \in (0, 2)$ بحيث:

نظرية القيمة المتوسطة

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

$$\because \ f(0) = (0)^2 = 0 \ , \ f(2) = 2^2 = 4$$

$$f'(x) = 2x \ , \ f'(c) = 2c$$

$$\therefore \ 2c = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

$$2c = \frac{4 - 0}{2 - 0}$$

$$2c = 2$$

$$c = 1 \in (0, 2)$$

التفسير:

يوجد مماس لمنحنى الدالّة f عند $x = 1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(2, 4)$, $(0, 0)$

حاول أن تحل

1 بيّن أن الدالّة $f(x) = x^2 + 2x$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسّطة على الفترة $[-3, 1]$،
ثم أوجد قيمة c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

مثال (2)

بيّن أن الدالّة f : $f(x) = x^3 + 1$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 3]$،
ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

الحل:

الدالّة f دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متّصلة على الفترة $[-3, 3]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(-3, 3)$.

$\therefore$ شروط نظريّة القيمة المتوسّطة محققة على الفترة $[-3, 3]$.

$\therefore$ يوجد على الأقل $c \in (-3, 3)$ بحيث:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)}$$

$$\because \ f(-3) = (-3)^3 + 1 = -26 \quad , \quad f(3) = 3^3 + 1 = 28$$

$$f'(x) = 3x^2 \quad , \quad f'(c) = 3c^2$$

$$\therefore\ 3c^2 = \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)}$$

$$3c^2 = \frac{28 - (-26)}{3 + 3} = \frac{54}{6} = 9$$

$$c^2 = \frac{9}{3} = 3$$

$$c = \sqrt{3} \in (-3, 3) \quad , \quad c = -\sqrt{3} \in (-3, 3)$$

التفسير:

يوجد مماسان لمنحنى الدالة f عند: $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$

والمماسان يوازيان القاطع المار بالنقطتين: $(-3\ ,\ -26)$, $(3\ ,\ 28)$

حاول أن تحل

2 بيّن أن الدالّة f: $f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 4]$، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

تزايد وتناقص الدوال Increasing and Decreasing Functions

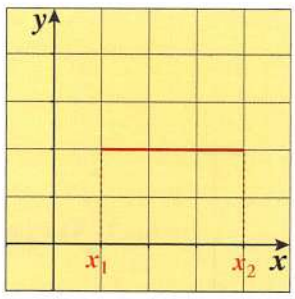
تعريف (4): تزايد وتناقص الدوال

لتكن f دالّة معرّفة على الفترة I. نقول إن:

1 f دالّة متزايدة على I إذا كان: $\forall x_1\ ,\ x_2 \in I \quad , \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

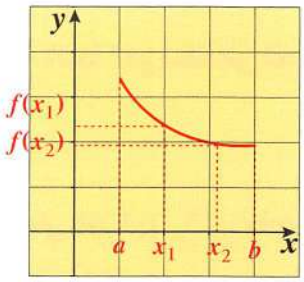
2 f دالّة متناقصة على I إذا كان: $\forall x_1\ ,\ x_2 \in I \quad , \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ملاحظة: تكون الدالة f ثابتة على الفترة I عندما: $\forall x_1\ ,\ x_2 \in I\ ,\ f(x_1) = f(x_2)$



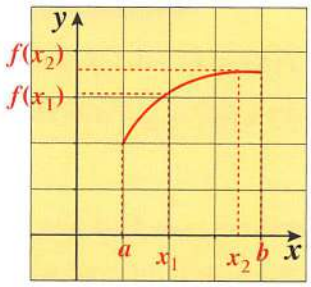
شكل (9)

دالة ثابتة



شكل (8)

دالة متناقصة



شكل (7)

دالة متزايدة

الدالّة المطّردة Monotonic Function

الدالّة التي تكون دائمًا متزايدة على فترة أو دائمًا متناقصة على فترة، يقال عنها إنّها دالّة مطّردة على هذه الفترة.

تمكّننا نظرية القيمة المتوسطة من تحديد أين تتزايد الدوال وأين تتناقص بالضبط.
الدوالّ التي مشتقّاتها موجبة تكون دوالّ متزايدة، والدوالّ التي مشتقّاتها سالبة تكون دوالّ متناقصة.
ويتضح ذلك من خلال النظرية التالية:

نظرية (4): الدوالّ المتزايدة والدوالّ المتناقصة والدوال الثابتة

لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق على (a , b).

1. **إذا كانت $f'(x) > 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ f تتزايد على (a , b).**
2. **إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ f تتناقص على (a , b).**
3. **إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ الدالة f ثابتة على (a , b).**

مثال (3)

أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = x^2 - 5x + 6$

الحل:

الدالة f كثيرة حدود فهي متصلة على $\mathbb{R}$

نوجد مشتقة الدالة f : $f'(x) = 2x - 5$

نضع $f'(x) = 0$

$2x - 5 = 0 \Longrightarrow x = \frac{5}{2}$

نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'

الفترات	$\left(-\infty , \frac{5}{2}\right)$	$\left(\frac{5}{2} , \infty\right)$
إشارة f'	$- -$	$+ +$
سلوك الدالة f	↘	↗

من الجدول:

f متناقصة على الفترة $\left(-\infty , \frac{5}{2}\right)$

f متزايدة على الفترة $\left(\frac{5}{2} , \infty\right)$

حاول أن تحل

3. أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

مثال (4)

لتكن f: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

حدّد الفترات حيث تكون f متزايدة والفترات حيث تكون f متناقصة.

الحل:

الدالة f كثيرة حدود فهي متصلة على $\mathbb{R}$

نوجد أولًا مشتقة الدالة:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

نضع $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$3(x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1 \quad , \quad x = 3$$

نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'

$-\infty$ $\quad -1 \quad$ 3 $\quad \infty$

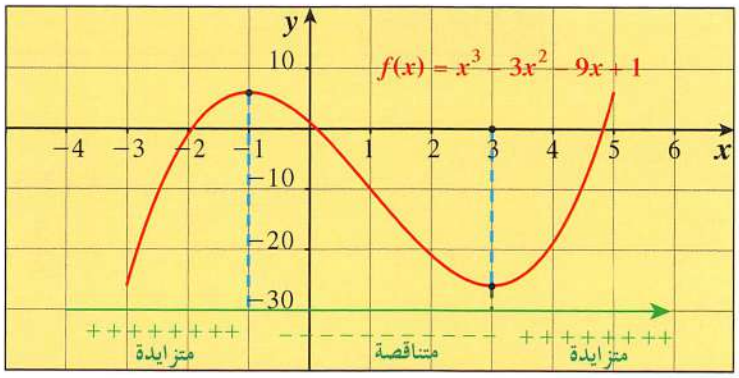
الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
إشارة f'	$++$	$--$	$++$
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

من الجدول: الدالة f متزايدة على كلّ من الفترة $(-\infty, -1)$ والفترة $(3, \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-1, 3)$

حاول أن تحل

4 إذا كانت f : $f(x) = x^3 - 6x$. حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f.

الشكل (10) يمثّل بيان الدالة f في مثال (4) السابق.



شكل (10)

بيان الدالة يوضّح فترات التزايد وفترات التناقص.

مثال (5)

إذا كانت f الدالة: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة.

الحل:

الدالة f حدودية نسبية فهي متصلة لكل x حيث $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

نوجد مشتقة الدالة

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - 1(x)^2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

نضع $f'(x) = 0$

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0$$

$$\Longrightarrow x = 0 \quad , \quad x = 2$$

نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'

$-\infty$ 0 1 2 ∞

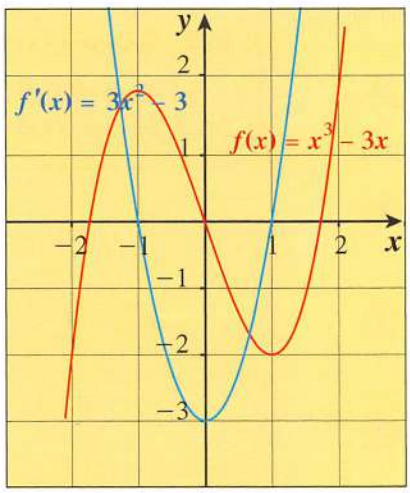
الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$		$(1, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	+	−	غير معرفة	−	+
سلوك الدالة f	↗	↘		↘	↗

من الجدول f متزايدة على كل من الفترة $(-\infty, 0)$ والفترة $(2, \infty)$ ومتناقصة على كل من الفترة $(0, 1)$ والفترة $(1, 2)$

حاول أن تحل

5 حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

نشاط



الشكل المقابل يوضّح بيان الدالة f وبيان مشتقتها f'

أكمل ما يلي:

في الفترة $(-\infty, -1)$ الدالة f متزايدة ومنحنى الدالة f' يقع أعلى محور السينات أي أن $f'(x)$ موجبة $\forall x \in (-\infty, -1)$

في الفترة $(-1, 1)$ الدالة f ..... ومنحنى الدالة f' يقع .....

أي أن .....

في الفترة $(1, \infty)$ الدالة f ..... ومنحنى الدالة f' يقع .....

أي أن .....

ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

Connecting f' and f'' with the Graph of f

سوف تتعلم

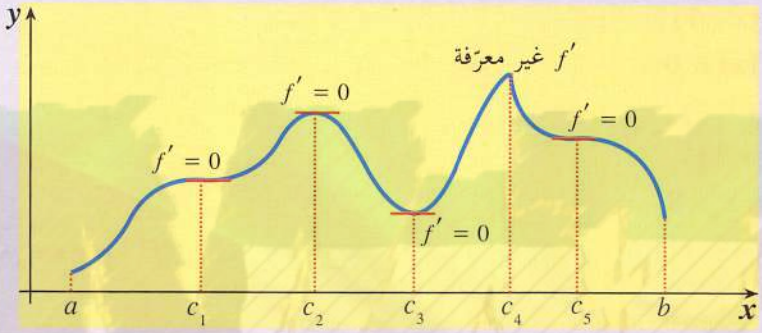
- اختبار المشتقة الأولى لتحديد القيم القصوى المحلية.
- تحديد تقعر منحنى الدالة باستخدام المشتقة الثانية أو الرسم البياني.
- تحديد نقاط الانعطاف بدراسة المشتقة الثانية.
- اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية.

المفردات والمصطلحات

- قيمة قصوى محلية Local Extrema
- اختبار المشتقة الأولى First Derivative Test
- نقطة طرفية End Point
- التقعر Concavity
- نقاط الانعطاف Points of Inflection
- اختبار المشتقة الثانية Second Derivative Test

دعنا نفكر ونتناقش

انظر إلى بيان الدالة في الشكل أدناه، ثمّ ضع علامة (✓) لكل فقرة مناسبة في الجدول أدناه:



الفترة (المجال)	قيمة صغرى مطلقة	قيمة عظمى مطلقة	قيمة صغرى محلية	قيمة عظمى محلية	تزايد في فترة	تناقص في فترة
$[a, c_2]$						
$[c_1, c_3)$						
$[c_2, c_3)$						
$[c_3, c_5)$						
$[c_1, c_4]$						
$[c_5, b]$						

ملاحظة:

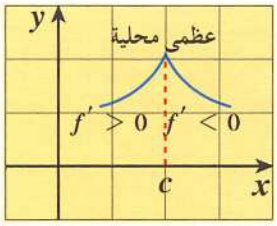
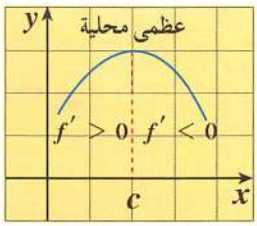
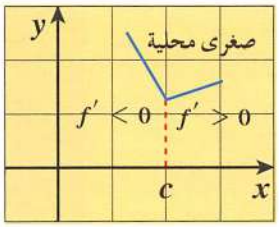
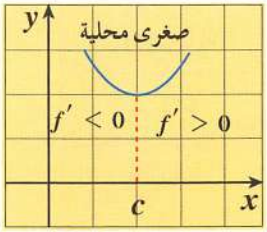
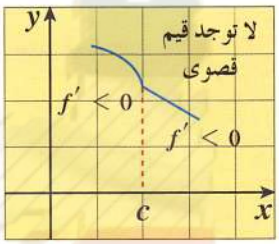
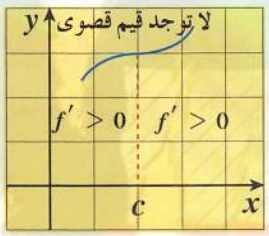
- $f' > 0$ تعني أن قيم $f'(x)$ موجبة لكل قيم x
- $f' < 0$ تعني أن قيم $f'(x)$ سالبة لكل قيم x

نظريّة (5): اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحليّة

لتكن f دالّة متّصلة على مجالها وكانت $(c, f(c))$ نقطة حرجة.

1. إذا كانت إشارة المشتقّة f' تتغيّر من الموجب إلى السالب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c.
2. إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة صغرى محلّية عند c.
3. إذا لم تتغيّر إشارة f' عند $x = c$ ، فإن f لا يكون لها قيمة قصوى محلّية عند c.

الأشكال التالية توضح بيان دالة f وتوضح نظرية (5) من خلالها.

1	 b $f'(c)$ غير موجودة	 a $f'(c) = 0$
2	 b $f'(c)$ غير موجودة	 a $f'(c) = 0$
3	 b $f'(c)$ غير موجودة	 a $f'(c) = 0$

شكل (1)

هنا نبيّن كيف نطبّق اختبار المشتقّة الأولى لإيجاد القيم القصوى المحليّة لدالّة.

والأعداد الحرجة لدالّة f تجزّئ محور السينات إلى فترات تكون فيها f' موجبة أو سالبة. نحدّد إشارة f' على كلّ فترة بإيجاد قيمة f' لقيمة واحدة x على الفترة، ثم نطبّق نظريّة (5) كما في المثالين (1) و(2) التاليين:

مثال (1)

لتكن الدالّة f : $f(x) = x^3 - 12x - 5$

أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالّة.

b الفترات التي تكون الدالّة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحليّة.

الحل:

a $\because$ f دالة كثيرة حدود.

$\therefore$ f متّصلة وقابلة للاشتقاق عند كل x : $x \in \mathbb{R}$،

نوجد النقاط الحرجة فقط عند أصفار مشتقّة الدالّة f'.

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

نضع: $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow 3(x-2)(x+2) = 0$$

$$x = -2 \quad , \quad x = 2$$

∴ النقاط الحرجة هي:

$$(-2, f(-2)) = (-2, 11)$$

$$(2, f(2)) = (2, -21)$$

b نكوّن الجدول لدراسة إشارة f' :

$-\infty$ $\quad -2 \quad$ 2 $\quad \infty$

الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	$+++$	$---$	$+++$
سلوك الدالّة f	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗

نلاحظ من الجدول: الدالّة متزايدة على الفترة $(-\infty, -2)$ والفترة $(2, \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-2, 2)$.

c نستطيع أن نلاحظ من الجدول أنّه توجد قيمة عظمى محليّة عند $x = -2$، وقيمة صغرى محليّة عند $x = 2$.

القيمة العظمى المحليّة هي $f(-2) = 11$، والقيمة الصغرى المحليّة هي $f(2) = -21$.

حاول أن تحل

1 لتكن الدالّة f : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالة.

b الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحلية.

مثال (2)

لتكن الدالّة f : $f(x) = x - 3 + \dfrac{4}{x-1}$

فأوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالّة.

b الفترات التي تكون عليها الدالّة f متزايدة وتلك التي تكون عليها متناقصة.

c القيم القصوى المحليّة.

الحل:

a ∵ f مجموع دالتين إحداهما كثيرة حدود والأخرى حدودية نسبية

∴ مجال الدالة f هو $\mathbb{R} - \{1\}$

∴ f متّصلة وقابلة للاشتقاق على كل من الفترتين من مجالها $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x-1-2)(x-1+2)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

نضع $f'(x) = 0$

$$\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2} = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3 \quad , \quad x = -1$$

∴ النقاط الحرجة هي $(3, f(3)) = (3, 2)$

$(-1, f(-1)) = (-1, -6)$

b نكوّن الجدول لدراسة إشارة f' :

	$-\infty$	-1	1	3	∞
الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$		$(1, 3)$	$(3, \infty)$
إشارة f'	$+++$	$---$		$---$	$+++$
سلوك الدالّة f	متزايدة ↗	متناقصة ↘	غير معرّفة	متناقصة ↘	متزايدة ↗

نلاحظ من الجدول أنّ الدالّة متزايدة على كل من الفترتين $(3, \infty)$, $(-\infty, -1)$

ومتناقصة على كل من الفترتين $(1, 3)$, $(-1, 1)$

c توجد قيمة عظمى محليّة عند $x = -1$ وقيمة صغرى محليّة عند $x = 3$

القيمة العظمى المحليّة هي: $f(-1) = -6$ والقيمة الصغرى المحليّة هي: $f(3) = 2$

حاول أن تحل

2 لتكن الدالّة g : $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة.

b الفترات التي تكون الدالّة g متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحليّة.

Concavity

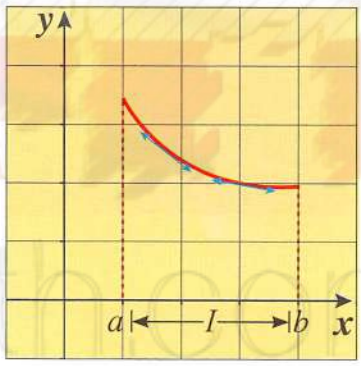
التقعر

يبيّن الشكل المقابل أن الدالّة f : $f(x) = x^3$ تتزايد مع تزايد قيم x،
ولكن جزئي المنحنى المعرّفين على كل من الفترتين $(-\infty, 0)$، $(0, \infty)$
ينعطفان بشكل مختلف.
إذا أمعنا النظر في المنحنى والمماسّات وتفحصناها بدقة من اليسار إلى اليمين
نلاحظ أن المنحنى يقع أسفل المماسات على الفترة $(-\infty, 0)$
ويقع أعلى المماسات على الفترة $(0, \infty)$.
يمكننا القول إن منحنى الدالة f **مقعّر للأسفل** على الفترة $(-\infty, 0)$
و**مقعر للأعلى** على الفترة $(0, \infty)$.

تعريف (5): التقعّر

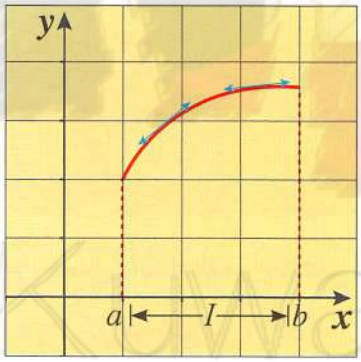
إذا وقع منحنى الدالة أعلى جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعرًا لأعلى على I.
وإذا وقع منحنى الدالة أسفل جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعرًا لأسفل على I.

الشكلان التاليان يوضّحان التقعر:



شكل (1)

في الفترة (a , b) نلاحظ أن:
جميع نقاط المنحنى (ما عدا نقاط التماس)
تقع أعلى المماسات.
لذلك نقول **المنحنى مقعر لأعلى.**



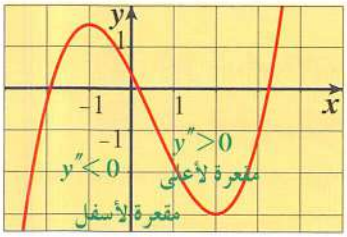
شكل (2)

في الفترة (a , b) نلاحظ أن:
جميع نقاط المنحنى (ما عدا نقاط التماس)
تقع أسفل المماسات.
لذلك نقول **المنحنى مقعر لأسفل.**

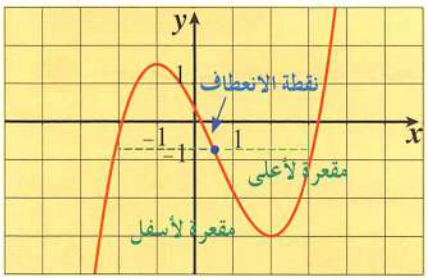
اختبار التقعّر

a **إذا كانت $\forall x \in I$, $f''(x) > 0$ فإن منحنى الدالة f مقعرًا لأعلى على I**
.

b **إذا كانت $\forall x \in I$, $f''(x) < 0$ فإن منحنى الدالة f مقعرًا لأسفل على I.**



نقطة الانعطاف Point of Inflection



تعريف (6): نقطة الانعطاف

تسمّى النقطة $(c\ ,\ f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا كانت f دالّة متّصلة عند c، ومنحنى الدالة f يغيّر تقعّره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

إذا كانت $(c\ ,\ f(c))$ نقطة انعطاف لبيان الدالة f فإن $f''(c) = 0$ أو $f''(c)$ غير موجودة.

مثال (3)

أوجد فترات التقعّر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

الحل:

$\because$ f دالة كثيرة حدود

$\therefore$ f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x$$

$$f''(x) = 12x + 6$$

نضع $f''(x) = 0$

$$12x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'' :

	$-\infty$ ... $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ ... ∞
الفترات	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$
إشارة f''	$- -$	$+ +$
بيان الدالة f	$\cap$ مقعّر لأسفل	$\cup$ مقعّر لأعلى

نلاحظ من الجدول أنّ: بيان الدالّة f مقعّر لأسفل على الفترة $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

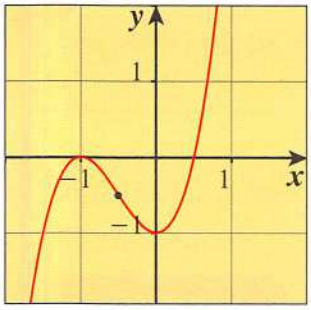
بيان الدالّة f مقعّر لأعلى على الفترة $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

لإيجاد نقطة الانعطاف: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$

النقطة $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ هي نقطة انعطاف لمنحنى f

حاول أن تحل

3 أوجد فترات التقعّر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$



نلاحظ في الشكل المقابل أن بيان الدالة f في مثال (3) **مقعّر للأسفل** على الفترة $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ و**مقعر للأعلى** على الفترة $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ وأن النقطة $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ هي نقطة انعطاف.

لدراسة حركة جسيم يتحرّك على خطّ مستقيم غالبًا ما تحتاج إلى وصف هذه الحركة من خلال دالّة الموقع (الإزاحة) ومشتقّتها (السرعة) ومشتقّتها الثانية (العجلة) في أيّ لحظة على مساره.

مثال إثرائي

يتحرّك جسيم على خطّ مستقيم أفقيّ حيث دالّة موقعه $s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5 \quad , \quad t \geq 0$

أوجد السرعة اللحظيّة للجسيم وعجلته ثم صف حركته.

الحل:

$$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5$$

السرعة اللحظيّة هي:

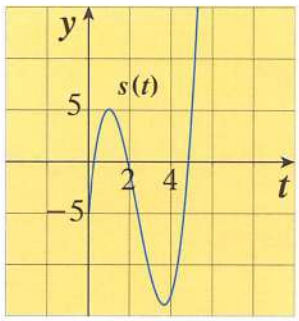
$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 28t + 22$$
$$= 2(t-1)(3t-11)$$

والعجلة هي:

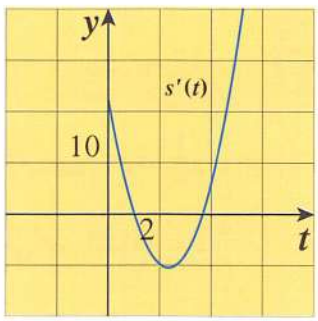
$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$
$$= 12t - 28 = 4(3t-7)$$

عندما تتزايد الدالّة $s(t)$ يتحرّك الجسيم إلى اليمين، وعندما تتناقص $s(t)$ يتحرّك الجسيم إلى اليسار.

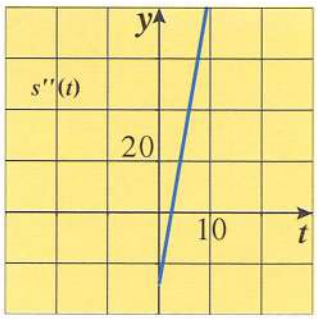
يبيّن الشكل أدناه الرسوم البيانيّة للموقع (المسافة) والسرعة اللحظيّة والعجلة للجسيم.



$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5$
$t \geq 0$



$s'(t) = 6t^2 - 28t + 22$



$s''(t) = 12t - 28$

لاحظ أن المشتقة الأولى ($v = s'$) تساوي 0 عند $t = 1$ ، $t = \frac{11}{3}$

	0	1	$\frac{11}{3}$	∞
الفترات	$(0,1)$	$\left(1,\frac{11}{3}\right)$	$\left(\frac{11}{3},\infty\right)$
$v = s'$	++	−−	++
سلوك s	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗
حركة الجسيم	يمين	يسار	يمين

يتحرّك الجسيم إلى اليمين على الفترة الزمنيّة $[0,1)$ والفترة الزمنيّة $\left(\frac{11}{3},\infty\right)$، ويتحرّك إلى اليسار على الفترة $\left(1,\frac{11}{3}\right)$

العجلة: $a(t) = s''(t) = 12t - 28 = 4(3t - 7)$

تساوي 0 عند $t = \frac{7}{3}$

	0	$\frac{7}{3}$	∞
الفترات	$\left(0,\frac{7}{3}\right)$	$\left(\frac{7}{3},\infty\right)$
إشارة $a = s''$	−−	++
بيان الدالة s	∩ مقعّر لأسفل	∪ مقعّر لأعلى

اتّجاه العجلة ناحية اليسار (العجلة سالبة) أثناء الفترة الزمنية $\left(0,\frac{7}{3}\right)$، وتكون في لحظة تساوي صفرًا عند $t = \frac{7}{3}$ واتّجاهها ناحية اليمين (العجلة موجبة بعد ذلك).

تدريب إثرائي

يتحرّك جسم معيّن على خط مستقيم أفقي حيث دالة موقعه: $f(t) = t^3 - 3t^2 + 5 \quad ; \quad t \geqslant 0$

أوجد السرعة اللحظية للجسيم وعجلته، ثم صف حركته.

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحليّة Second Derivative Test for Local Extrema

بدلًا من النظر إلى إشارة التغيّر في y' عند نقاط حرجة، يمكننا أن نستخدم أحيانًا الاختبار الآتي لتحديد وجود قيم قصوى محليّة.

نظرية (6): اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحليّة

1. إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محليّة عند $x = c$
2. إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ ، فإن f تكون لها قيمة صغرى محليّة عند $x = c$

يتطلّب منا هذا الاختبار أن نعرف f'' فقط عند العدد c نفسه وليس على فترة تشمل c.

وهذا يجعل الاختبار سهلًا للتطبيق.

الاختبار لا يصلح (يفشل) إذا كانت $f'' = 0$ أو لا يكون لها وجود.

فمثلًا: الدالة f : $f(x) = x^4$ ، مشتقتها الأولى هي: $f'(x) = 4x^3$

ومشتقتها الثانية $f''(x) = 12x^2$

عندما $f'(x) = 0 \implies x = 0$

ومنها $f''(0) = 0$

عندما يحدث ذلك نعود إلى اختبار المشتقّة الأولى للبحث عن القيم القصوى المحليّة.

في مثال (4) نطبّق اختبار المشتقّة الثانية للدالّة الموجودة في مثال (1).

مثال (4)

أوجد القيم القصوى المحليّة للدالّة: $f(x) = x^3 - 12x - 5$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$
$$= 3(x^2 - 4)$$
$$= 3(x-2)(x+2)$$

نضع: $f'(x) = 0$

ومنها $x = -2 \quad , \quad x = 2$

$$f''(x) = 6x$$

باختبار الأعداد الحرجة $x = \pm 2$ ، نجد أن:

$$f''(-2) = -12 \quad , \quad -12 < 0$$

فيكون للدالة f قيمة عظمى محليّة عند $x = -2$ وهي $f(-2) = 11$

$$f''(2) = 12 \quad , \quad 12 > 0$$

فيكون للدالة f قيمة صغرى محليّة عند $x = 2$ وهي $f(2) = -21$

حاول أن تحل

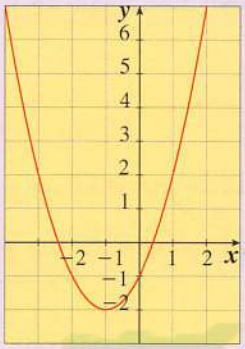
4 استخدم اختبار المشتقة الثانية لتجد القيم القصوى المحلية للدالة f: $f(x) = 4x^3 - 12x^2$

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

Graph of Polynomial Functions

سوف تتعلم
- ربط بيان f' و f .
- خطوات رسم بيان دوال كثيرات الحدود.

المفردات والمصطلحات
- بيان دوال كثيرات الحدود Graph of Polynomial Functions



دعنا نفكر ونتناقش

يبيّن الشكل المقابل بيان الدالة f : $f(x) = x^2 + 2x - 1$

1 أوجد إن أمكن:

a $f'(x)$ محدّدًا كلًّا من النقاط الحرجة وفترات التزايد وفترات التناقص للدالة f .

b $f''(x)$ محدّدًا كلًّا من نقاط الانعطاف وفترات التقعر.

2 قارن نتائج الحل في 1 مع المنحنى المرسوم.

تعلمت فيما سبق كيفية رسم منحنى تقريبي لبيان دالة كثيرة حدود معتمدًا على سلوك نهاية الدالة، وفي البنود السابقة تعلمت تحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة وتحديد النقاط الحرجة والقيم العظمى أو الصغرى، وتمّ تحديد نقاط الانعطاف والفترات التي يكون فيها منحنى الدالة مقعرًا لأعلى أو لأسفل. وسنستفيد من كل هذه المعلومات لرسم بيان دالة كثيرة الحدود رسمًا أكثر دقة.

الخطوات اللازم اتباعها في دراسة تغير الدالة كثيرة الحدود ورسم بيانها

Steps to be Followed in Drawing the Graph of a Polynomial Function

1 **عيّن مجال الدالة f.**

مجال دالة كثيرة الحدود هو $\mathbb{R}$ ولكنه يقتصر أحيانًا على فترة من $\mathbb{R}$ خاصة في المسائل الحياتية.

2 **أوجد النهايات عند الحدود المفتوحة لمجال الدالة f.**

3 **عيّن النقاط الحرجة للدالة f.**

4 **كوّن جدولًا لدراسة إشارة f' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية.**

5 **كوّن جدولًا لدراسة إشارة f'' وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت.**

6 **أوجد نقاطًا إضافية.**

تساعد هذه النقاط على رسم بيان الدالة بدقة وأهم هذه النقاط، نقاط التقاطع مع أحد المحورين إن أمكن.

7 **ارسم بيان الدالة f.** استخدم نتائج الخطوات السابقة في الرسم.

مثال (1)

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^3) = \infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f

f دالة كثيرة الحدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

نضع: $f'(x) = 0$

$$3(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = 1 \quad , \quad x = -1$$

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 4 = 2 \quad , \quad f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 4 = 6$$

$\therefore$ $(1,2), (-1,6)$ نقطتان حرجتان.

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'

$-\infty$ $\quad -1 \quad$ 1 $\quad \infty$

الفترات	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
إشارة f'	$+++$	$---$	$+++$
سلوك الدالّة f	متزايدة $-\infty$ ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗ ∞

الدالة متزايدة على كل من الفترة $(-\infty,-1)$ والفترة $(1,\infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-1,1)$

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'':

$-\infty$ $\quad 0 \quad$ ∞

الفترات	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
إشارة f''	$--$	$++$
التقعّر	$\cap$	$\cup$

$$f''(x) = 6x$$

نضع: $f''(x) = 0$

$$6x = 0 \quad , \quad x = 0$$

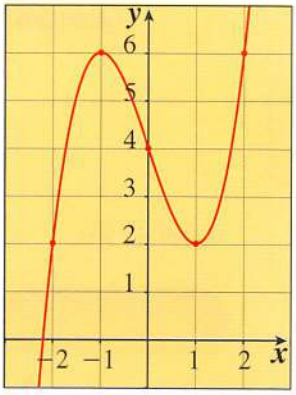
$$f(0) = 4$$

منحنى الدالة مقعّر لأسفل على الفترة $(-\infty,0)$ ومقعّر لأعلى على الفترة $(0,\infty)$

$(0,4)$ نقطة انعطاف.

نقاط إضافية

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-14	2	6	4	2	6	22
	نقطة إضافية	نقطة إضافية	نقطة عظمى محلية	نقطة انعطاف	نقطة صغرى محلية	نقطة إضافية	نقطة إضافية



بيان الدالة f:

حاول أن تحل

1 ادرس تغير الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها.

مثال (2)

ادرس تغير الدالة f: $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^3) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (-x^3) = -\infty$$

نوجد النقاط الحرجة حيث f دالة قابلة للاشتقاق على مجالها.

$$f'(x) = -3x^2$$

نضع: $f'(x) = 0$

$$-3x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$f(0) = 1 - (0)^3 = 1$$

$\therefore$ $(0,1)$ نقطة حرجة.

نكوّن جدول التغيّر لدراسة إشارة f':

الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, 0)$ والفترة $(0, \infty)$

	$-\infty$	0	∞
إشارة f'	$---$	$---$	
سلوك الدالّة f	∞ متناقصة ↘	متناقصة ↘ $-\infty$	

نكوّن جدول لدراسة إشارة f''

$$f''(x) = -6x$$

$$-6x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

منحنى الدالة مقعّر لأعلى على الفترة $(-\infty, 0)$

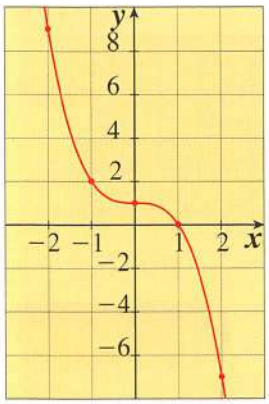
ومقعّر لأسفل على الفترة $(0, \infty)$

$(0,1)$ نقطة انعطاف.

	$-\infty$	0	∞
إشارة f''	$++$	$--$	
التقعّر	∪ تقعّر لأعلى	∩ تقعّر لأسفل	

نقاط إضافية

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	2	1	0	-7



بيان الدالة f:

حاول أن تحل

2 ادرس تغير الدالة f: $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها.

مثال (3)

ادرس تغير الدالة f: $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (3x^4) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (3x^4) = \infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f

f دالة كثيرة الحدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2$$

نضع: $f'(x) = 0$

$$12x^3 + 12x^2 = 0$$

$$12x^2(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad , \quad x = -1$$

$$f(0) = 2 \quad , \quad f(-1) = 3 - 4 + 2 = 1$$

$(-1,1), (0,2)$ نقطتان حرجتان.

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'

	$-\infty$	-1	0	∞
إشارة f'	$---$	$+++$	$+++$	
سلوك الدالّة f	∞ متناقصة ↘	متزايدة ↗	متزايدة ↗ ∞	

الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, -1)$ ومتزايدة على الفترة $(-1, 0)$ والفترة $(0, \infty)$

نكوّن جدول لدراسة إشارة f''

$$f''(x) = 36x^2 + 24x$$

نضع: $f''(x) = 0$

$$12x(3x+2) = 0$$

$$x = 0 \quad , \quad x = -\frac{2}{3}$$

$$f(0) = 2 \ , \ f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{38}{27}$$

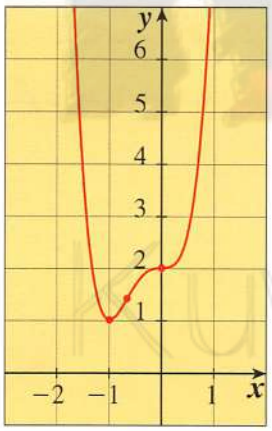
	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	0	∞
إشارة f''	$++$	$--$	$++$	
التقعّر	تقعّر لأعلى	تقعّر لأسفل	تقعّر لأعلى	

منحنى الدالة مقعّر لأعلى على كل من الفترتين $(0,\infty)$ ، $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$ ومقعّر لأسفل على الفترة $\left(-\frac{2}{3},0\right)$

النقطتان $(0,2)$ ، $\left(-\frac{2}{3},\frac{38}{27}\right)$ هما نقطتا انعطاف.

نقاط إضافية

x	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	0	1
$f(x)$	18	1	$\frac{38}{27}$	2	9



بيان الدالة f:

حاول أن تحل

3 ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^4 - 2x^2$ وارسم بيانها.

مثال (4)

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x^4) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(-x^4) = -\infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f

f دالة كثيرة الحدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$$f'(x) = -4x^3 + 4x$$

نضع:

$$f'(x) = 0$$

$$-4x^3 + 4x = 0$$

$$-4x(x^2 - 1) = 0$$

$$-4x(x-1)(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad x = -1$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = -(1)^4 + 2(1)^2 + 1 = 2$$

$$f(-1) = -(-1)^4 + 2(-1)^2 + 1 = 2$$

$\therefore$ $(-1,2)$, $(1,2)$, $(0,1)$ نقاط حرجة.

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'

	$-\infty$	-1	0	1	∞
إشارة f'	$+++$	$---$	$+++$	$---$	
سلوك الدالّة f	متزايدة $-\infty$ ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗	متناقصة ↘ $-\infty$	

$\therefore$ الدالة متزايدة على كل من الفترة $(-\infty,-1)$ والفترة $(0,1)$ والدالة متناقصة على كل من الفترة $(-1,0)$ والفترة $(1,\infty)$

نكوّن جدول لدراسة إشارة f''

$$f''(x) = -12x^2 + 4$$

نضع:

$$f''(x) = 0$$

$$-12x^2 + 4 = 0$$

$$-12\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$-12\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	∞
إشارة f''	$--$	$++$	$--$	
التقعّر	∩ تقعّر لأسفل	∪ تقعّر لأعلى	∩ تقعّر لأسفل	

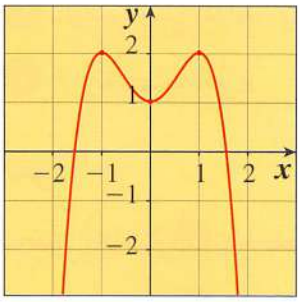
منحنى الدالة مقعّر لأسفل على كل من الفترتين $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$ ، $\left(-\infty,\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ ومقعّر لأعلى على الفترة $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

نقاط الانعطاف هي: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{14}{9}\right)$ ، $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{14}{9}\right)$

• نقاط إضافية

x	-2	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	2
$f(x)$	-7	2	$\frac{14}{9}$	1	$\frac{14}{9}$	2	7

بيان الدالة f:



حاول أن تحل

4 ادرس تغير الدالة: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$ وارسم بيانها.

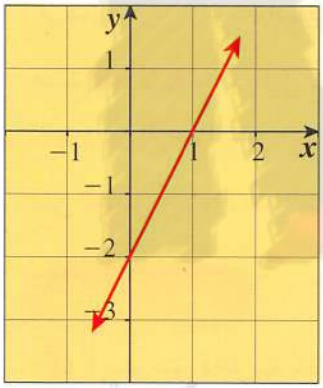
العلاقات بين بيان الدالة f' و f Relations Between the Graphs of f' and f

إن معرفة النقاط الحرجة وإشارة الدالة المشتقة f'

تسمحان بمعرفة سلوك الدالة f.

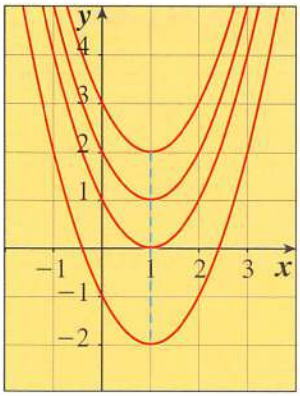
يمكن قراءة بيانات f' من رسمها البياني واستنتاج سلوك f.

فمثلًا يمثّل الشكل (1) المقابل بيان الدالة f'.



شكل (1)
بيان الدالة f'

- $(1, f(1))$ نقطة حرجة
- إشارة f' سالبة على الفترة $(-\infty, 1)$
- إشارة f' موجبة على الفترة $(1, \infty)$



نستنتج أن f متناقصة على الفترة $(-\infty, 1)$

ومتزايدة على الفترة $(1, \infty)$

ولها قيمة صغرى $f(1)$.

لكن هذا لا يسمح برسم بيان f بدقة إذ يلزمنا بعض النقاط الإضافية.

يمثّل الشكل المقابل بيانات بعض الدوال التي يمكن أن تكون بيانات f.

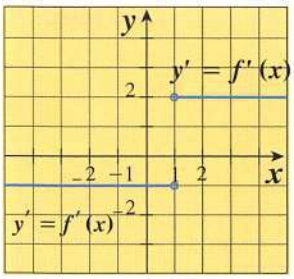
مثال (5) الرسم البياني للدالة f من f' (إثرائي)

ارسم صورة تقريبيّة للرسم البيانيّ للدالة f التي لها الخواص التالية:

a $f(0) = 0$

b الرسم البيانيّ للدالّة f' (مشتقّة الدالّة f) موضّح في الشكل المقابل.

c f دالّة متّصلة لكلّ x.



الرسم البياني للمشتقة

الحل:

لتحقيق الخاصّيّة a نبدأ بنقطة الأصل.

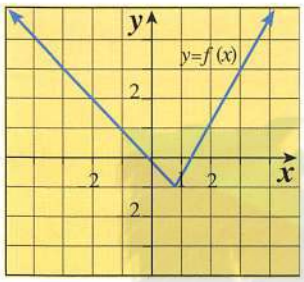
لتحقيق الخاصّيّة b نأخذ بعين الاعتبار ما يوضّحه الرسم البيانيّ للمشتقّة بالنسبة إلى الميول.

إلى يسار $x = 1$ الرسم البيانيّ للدالّة f له ميل ثابت قدره -1، لذلك نرسم مستقيمًا ميله -1 إلى يسار $x = 1$ مع التأكّد من أنّه يمرّ بنقطة الأصل.

إلى يمين $x = 1$ الرسم البيانيّ للدالّة f له ميل ثابت قدره 2، لذلك ينبغي أن يكون مستقيمًا ميله 2.

هناك عدد لا نهائيّ من مثل تلك المستقيمات، ولكنّ واحدًا فقط، المستقيم الذي يقابل الجانب الأيسر من الرسم البيانيّ عند النقطة $(1 , -1)$ سوف يحقّق شرط الاتصال.

يبيّن الشكل أعلاه الرسم البيانيّ الناتج.



الرسم البياني للدالة f منشأ عن الرسم البياني للمشتقة f' وشرطين آخرين.

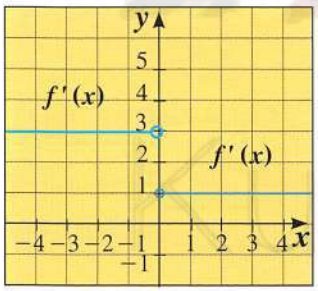
حاول أن تحل

5 ارسم صورة تقريبيّة للرسم البيانيّ للدالّة f التي لها الخواصّ التالية:

a $f(0) = 1$

b الرسم البيانيّ للدالّة f' موضّح في الشكل المقابل.

c f دالّة متّصلة لكلّ x.



3–5

تطبيقات على القيم القصوى

Applications on Extreme Value

سوف تتعلم
- تطبيقات على الهندسة والصناعة.
- تطبيقات على الاقتصاد.

المفردات والمصطلحات
- القيم العظمى والقيم الصغرى Max–Min Values

عمل تعاوني

وجد صاحب محل لبيع الأحذية الرياضية أنه يمكن نمذجة ربحه بالدالة f:

$f(x) = -15x^2 + 600x + 50$، حيث x تمثل سعر الحذاء بالدينار.

a ما سعر الحذاء الذي يحقق أعلى ربح؟

b ما قيمة أعلى ربح؟

من «العمل التعاوني» وجدت أكبر قيمة للدالة من خلال تطبيق خواص القطع المكافئ للدالة التربيعية، وفي هذا البند يمكنك إيجاد القيم نفسها باستخدام خواص القيم القصوى التي درستها حيث إن الاشتقاق يقدم لنا الطريقة الناجحة لإيجاد أكبر القيم وأصغرها للدوال ويمكن أن تساعدنا الخطوات التالية على ذلك:

1. **افهم المسألة:** اقرأ المسألة بعناية، حدّد المعلومات التي تحتاج إليها لحل المسألة.
2. **كوّن نموذجًا رياضيًّا للمسألة:** ارسم أشكالًا وضع علامات على الأجزاء المهمّة في المسألة. ضع متغيّرًا واحدًا يمثّل الكميّة المطلوب الحصول على قيمتها العظمى أو قيمتها الصغرى. ثم اكتب دالة باستخدام المتغيّر بحيث تعطي قيمتها القصوى المعلومات التي نبحث عنها.
3. أوجد مجال الدالة. وحدّد قيم المتغيّر التي تكون معقولة في المسألة.
4. حدّد **النقاط الحرجة** ويمكن إيجاد **النقاط الطرفيّة**.
   أوجد أين تكون المشتقّة صفريّة أو أين لا يكون لها وجود.
5. **حل النموذج الرياضي:** إذا لم تكن واثقًا من النتيجة دعّم أو أكّد صحّة حلك بطريقة أخرى.
6. **فسّر الحل:** ترجم نتيجتك الرياضية إلى الموقف في المسألة، ثمّ قرّر ما إذا كانت النتيجة معقولة.

مثال (1)

عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان؟

الحل:

نمذج:

بفرض أن أحد العددين x حيث $0 < x < 100$

$\therefore$ العدد الآخر هو $100 - x$

مجموع مربعيهما هو: $g(x) = x^2 + (100 - x)^2$

$g'(x) = 2x + 2(100 - x)(-1)$

$g'(x) = 2x - 200 + 2x$

$= 4x - 200$

نضع $g'(x) = 0$

$4x - 200 = 0 \Rightarrow x = 50$

$\therefore$ توجد نقطة حرجة $(50 \ , \ g(50))$

$g''(x) = 4 \quad , \quad 4 > 0$

$\therefore$ $g(50)$ قيمة صغرى مطلقة عند $x = 50$

$\therefore$ العدد الأول هو: $x = 50$

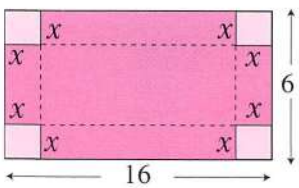
العدد الثاني هو: $100 - x = 100 - 50 = 50$

$\therefore$ العددان هما 50 ، 50

حاول أن تحل

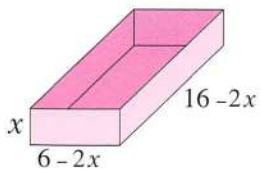
1 أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

مثال (2) صنع صندوق



يراد صنع صندوق بدون غطاء بقصّ مربّعات متطابقة طول ضلع كلّ منها x من أركان طبقة صفيح أبعادها 16 cm , 6 cm وثني جوانبها إلى أعلى (انظر الشكل المقابل).

أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن. وما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة؟



الحل:

نمذج:

ارتفاع الصندوق x، والبعدان الآخران هما $(6 - 2x)$, $(16 - 2x)$

$2x$ لا يمكن أن تزيد على 6، $0 < 2x < 6$

أي أنّ $0 < x < 3$

∴ حجم الصندوق هو: $V(x) = x(6-2x)(16-2x)$

بفك الأقواس نحصل على: $V(x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x$

المشتقّة الأولى للحجم V هي: $V'(x) = 12x^2 - 88x + 96$

نضع $V'(x) = 0$

$$12x^2 - 88x + 96 = 0$$

$$4(3x^2 - 22x + 24) = 0$$

$$4(x-6)(3x-4) = 0$$

حلّا المعادلة التربيعيّة هما: $x = 6 \quad , \quad x = \frac{4}{3}$

وحيث إن $6 \notin (0, 3)$ فيتم استبعادها

المشتقة الثانية: $V''(x) = 24x - 88$

$$V''\left(\frac{4}{3}\right) = 24 \times \frac{4}{3} - 88 = -56 \quad , \quad -56 < 0$$

لذلك يكون الصندوق أكبر ما يمكن عند $x = \frac{4}{3}$

حجم أكبر صندوق: $V\left(\frac{4}{3}\right) = 4\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 44\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 96\left(\frac{4}{3}\right)$

$$= \frac{1600}{27}\ \text{cm}^3$$

فسّر

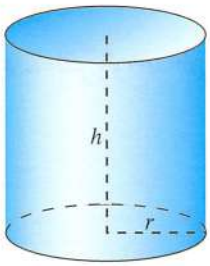
طول ضلع كل مربّع يقطع من أركان طبقة صفيح $\frac{4}{3}$ cm ليعطي أكبر سعة للصندوق.

ويكون أكبر حجم $\frac{1600}{27}\ \text{cm}^3$

حاول أن تحل

2 في مثال (2)، ما أكبر حجم للصندوق إذا كانت أبعاد طبقة الصفيح 15 cm , 8 cm؟

مثال (3) تصميم علبة



طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لترًا واحدًا تكون على شكل أسطوانة دائريّة قائمة (كما في الشكل المقابل).
ما أبعادها لتكون كمية المعدن المستخدم لصنعها أقل ما يمكن؟

الحل:

نفرض أن طول نصف قطر قاعدة العلبة هو r وارتفاعها h . لكي تكون كمية المعدن المستخدمة أقل ما يمكن، يجب أن تكون المساحة السطحية (الكلية) أقل ما يمكن وفي الوقت نفسه تحقق شرط الحجم

المساحة السطحية للعلبة = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 \qquad (1)$$

وحيث إن حجم العلبة معلوم $1L = 1000\ \text{cm}^3$

$$\therefore\ V = \pi r^2 h = 1000$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \qquad (2)$$

وبالتعويض عن h في المعادلة (1) نحصل على

$$A = 2\pi r \times \frac{1\,000}{\pi r^2} + 2\pi r^2$$

$$A = \frac{2\,000}{r} + 2\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dr} = \frac{-2\,000}{r^2} + 4\pi r$$

نضع $\frac{dA}{dr} = 0$

$$\therefore\ 0 = \frac{-2\,000}{r^2} + 4\pi r$$

$$4\pi r = \frac{2\,000}{r^2}$$

$$\therefore\ 4\pi r^3 = 2\,000$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

$$r \approx 5.42$$

وهذه هي القيمة الحرجة الوحيدة حيث $r \neq 0$

وللتأكّد من أن هذه القيمة تعطي أقل مساحة سطحية نوجد المشتقة الثانية:

المشتقة الثانية: $\frac{d^2A}{dr^2} = \frac{4\,000}{r^3} + 4\pi$

وهي موجبة على كل مجال A.

لذلك فإن منحنى الدالة A مقعرًا لأعلى وقيمة A عند $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ هي قيمة صغرى مطلقة.

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r \quad ، \quad h \approx 10.84$$

فسّر:

علبة اللتر الواحد التي تستخدم أقل معدن ممكن لتصنيعها يكون ارتفاعها مساويًا للقطر، حيث:

$$r \approx 5.42 \text{ cm} \quad , \quad h \approx 10.84 \text{ cm}$$

حاول أن تحل

3 تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h.

a أوجد الارتفاع $h(\text{cm})$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.

b ما قيمة هذا الحجم؟

مثال (4)

أوجد أقصر مسافة بين النقطة $P(x\ ,\ y)$ على المنحنى الذي معادلته $y^2 - x^2 = 16$ والنقطة $Q(6\ ,\ 0)$

الحل:

$$y^2 - x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 + 16$$

نوجد المسافة بين النقطتين $P\ ,\ Q$

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$
$$= \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2}$$

نفرض أن دالة المسافة هي:

$$S(x) = \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 - 12x + 36 + y^2} = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + x^2 + 16}$$
$$= \sqrt{2x^2 - 12x + 52}$$

$$S'(x) = \frac{1}{2}(4x - 12)(2x^2 - 12x + 52)^{\frac{-1}{2}}$$
$$= \frac{2x - 5}{\sqrt{2x^2 - 12x + 52}}$$

$$S'(x) = 0 \ \Rightarrow\ 2x - 6 = 0 \ \Rightarrow\ x = 3$$

نوجد أصفار المقام بوضع

$$2x^2 - 12x + 52 = 0$$
$$x^2 - 6x + 26 = 0$$

المميز:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 26$$
$$= 36 - 104 = -68 \quad , \quad -68 < 0$$

$\therefore$ لا يوجد أصفار للمقام

نكوّن جدول التغيّر

x	$-\infty$	3	∞
$S'(x)$	$- -$		$+ +$
$S(x)$	↘		↗

$\therefore$ أقصر مسافة بين النقطتين $P\ ,\ Q$ هي عند $x = 3$

$$S(3) = \sqrt{2(3)^2 - 12(3) + 52}$$
$$= \sqrt{34}$$

أقصر مسافة هي $\sqrt{34}$ وحدة طول.

حاول أن تحل

4 أوجد أقصر مسافة بين النقطة $A(x\ ,\ y)$ على المنحنى الذي معادلته $y = \sqrt{x}$ والنقطة $B(3\ ,\ 0)$

مثال (5)

تنتج إحدى شركات الأدوات الكهربائية خلال فترة زمنية محددة كمية x من الخلاطات الكهربائية..

يعطى معدل كلفة إنتاج كل قطعة (بالدينار) بالعلاقة $C(x) = x - 20 + \frac{400}{x}$

1 أوجد كمية عدد القطع المنتجة خلال الفترة لتحقيق أقل كلفة ممكنة.

2 تباع كل قطعة منتجة بمبلغ 100 دينار.

a عبّر عن ربح الشركة بمعلومية x.

b أوجد قيمة x التي تحقق أكبر ربح، وما قيمته؟

الحل:

يمثّل المتغير x عدد القطع المنتجة $\therefore$ x عدد صحيح موجب.

1 ندرس تغير الدالة c على الفترة $(0, \infty)$ لحساب قيمة x التي تعطي قيمة صغرى.

$$C'(x) = 1 - \frac{400}{x^2} = \frac{x^2 - 400}{x^2} = \frac{(x-20)(x+20)}{x^2}$$

$\because$ $x^2 > 0$, $x + 20 > 0$ (x عدد صحيح موجب)

$\therefore$ C' ، $x - 20$ لهما نفس الإشارة

جدول التغير

x	0	20	∞
إشارة f'	− −	+ +	
سلوك f	↘	↗	

من جدول التغير نستنتج أن إنتاج 20 قطعة يحقق أقل كلفة ممكنة.

2 a الربح = سعر مبيع الكمية − كلفة الكمية المباعة

سعر الكمية المباعة: $100x$

كلفة الكمية المباعة: $\left(x - 20 + \frac{400}{x}\right).x = x^2 - 20x + 400$

الربح:

$$P(x) = 100x - (x^2 - 20x + 400)$$
$$= 100x - x^2 + 20x - 400$$
$$= -x^2 + 120x - 400$$

b لحساب قيمة x التي تحقق أكبر ربح ندرس تغيّر الدالة P على الفترة $(0, \infty)$ ونوجد قيمة x التي تحقق قيمة قصوى.

$$P'(x) = -2x + 120$$

نضع $P'(x) = 0$

$$-2x + 120 = 0$$
$$x = 60$$

تغير الدالة P :

x	0	60	∞
إشارة P'	++		−−
سلوك P	↗		↘

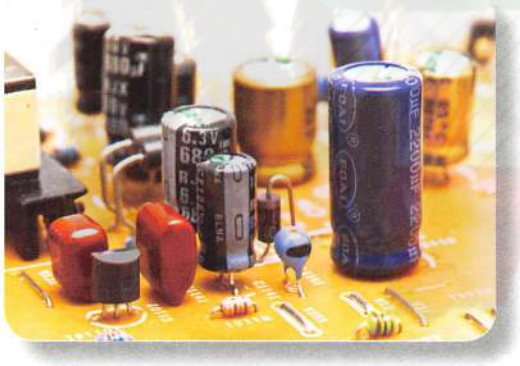
من جدول التغير نستنتج أن قيمة x التي تحقق قيمة عظمى للدالة P هي 60 أي أن مبيع 60 قطعة يحقق أكبر ربح للشركة.

أكبر قيمة للربح:

$$P(60) = -(60)^2 + 120(60) - 400$$
$$= -4\,000 + 7\,200$$
$$= 3\,200$$

أكبر قيمة للربح 3 200 دينار.

حاول أن تحل



5 تصنع إحدى الشركات يوميًّا x (بالآلاف) من المكثفات الكهربائية.

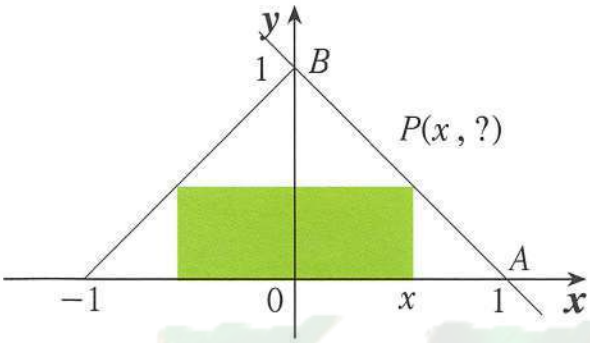
يعطى معدل كلفة إنتاج كل قطعة بالعلاقة: $C(x) = x - 2 + \frac{25}{x}$

a أوجد كمية عدد المكثفات المنتجة يوميًّا لتحقيق أقل كلفة ممكنة.

b تباع كل ألف قطعة بسعر 10 دنانير.

أوجد كمية المكثفات المنتجة لتحقيق أكبر ربح.

مستطيلات داخل أشكال: يبيّن الشكل مستطيلًا داخل مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين، طول وتره وحدتي طول:



1 عبّر عن الإحداثيّ الصاديّ للنقطة P بدلالة x.

[**إرشاد:** اكتب معادلة $\overleftrightarrow{AB}$.]

2 عبّر عن مساحة المستطيل بدلالة x.

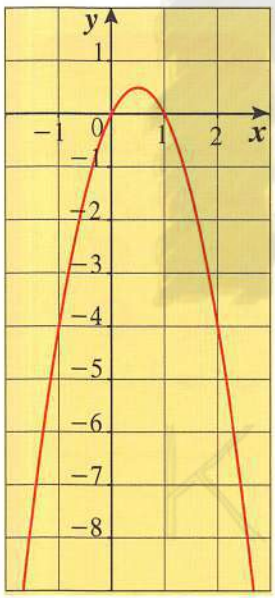
3 ما أكبر مساحة يأخذها المستطيل؟ وما أبعاده حينها؟

الحل:

1 يجب إيجاد معادلة $\overleftrightarrow{AB}$: لدينا $A(1,0)$, $B(0,1)$

ميل $\overleftrightarrow{AB} = -1$ ∴ معادلة $\overleftrightarrow{AB}$: $y = -x + 1$

∵ النقطة P موجودة على $\overleftrightarrow{AB}$ ∴ $P(x, -x+1)$



2 مساحة المستطيل = الطول × العرض

الطول = $2 \times x_p = 2x$

العرض = $y_p = -x + 1$

∴ مساحة المستطيل = $2x(-x+1) = -2x^2 + 2x$

3 نرسم على الآلة الحاسبة البيانية الدالة f : $f(x) = -2x^2 + 2x$

نجد بيانيًّا أن $f(x)$ لها قيمة قصوى تساوي 0.5 عندما $x = 0.5$

∴ أقصى مساحة يأخذها المستطيل هي 0.5 وحدة مربعة.

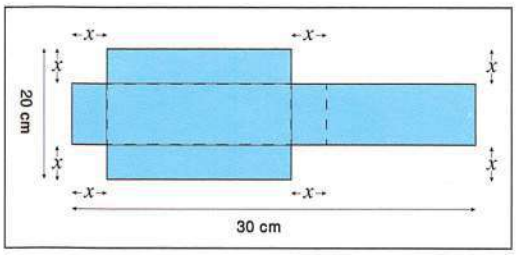
قياسات المستطيل:

الطول: $2 \times 0.5 = 1$ units

العرض: $-0.5 + 1 = 0.5$ units

مسألة إضافية

لتصميم صندوق له غطاء، أُخذت قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل أبعادها 30 cm × 20 cm، قطع مربعان متطابقان من أركانها طول ضلع كل منهما x cm، وقطع مستطيلان متطابقان من الجهة الأخرى بحيث أصبح بالإمكان طيّ الأجزاء البارزة لتكوّن متوازي مستطيلات له غطاء.



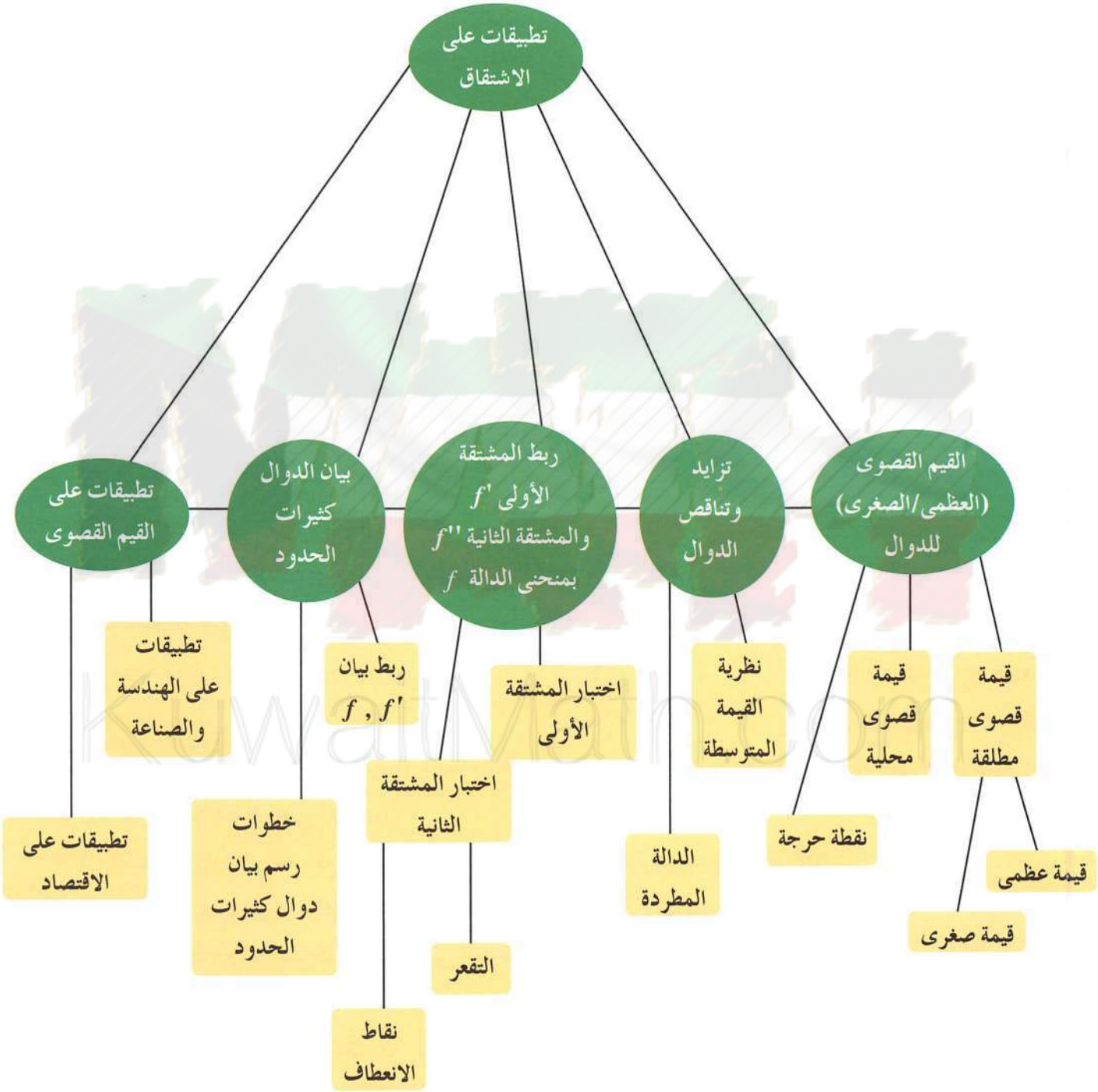
a اكتب صيغة تعبّر عن $V(x)$ حجم الصندوق.

b أوجد مجال V للمسألة واستخدمْ رسمًا بيانيًّا يمثّل V في ذلك المجال.

c استخدم الطريقة البيانيّة لإيجاد أكبر حجم ممكن للصندوق وقيمة x التي تعطي ذلك الحجم.

d دعّم النتائج التي حصلت عليها تحليليًّا.

مخطط تنظيمي للوحدة الثالثة



ملخص

- إذا كانت f دالة مجالها D، $c \in D$ فإن $f(c)$ تسمى:
  - قيمة عظمى مطلقة للدالة f على D عندما: $f(c) \geqslant f(x)\ ,\ \forall x \in D_f$
  - قيمة صغرى مطلقة للدالة f على D عندما: $f(c) \leqslant f(x)\ ,\ \forall x \in D_f$
- إذا كانت f دالّة متصلة على فترة مغلقة $[a\ ,\ b]$ فإن f تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.
- لتكن $(c\ ,f(c))$ نقطة داخلية للدالة f، D فترة مفتوحة تحوي c ، $f(c)$ تكون:
  - **a** قيمة عظمى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D$ $\quad f(c) \geqslant f(x)$
  - **b** قيمة صغرى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D$ $\quad f(c) \leqslant f(x)$
- النقطة الداخليّة للدالّة f $(c\ ,f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.
- إذا كانت للدالّة f قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محليّة عند $x = c$ فإنّ $(c\ ,f(c))$ نقطة حرجة.
- إذا كانت f دالة:
  - متّصلة على الفترة $[a\ ,\ b]$
  - قابلة للاشتقاق على الفترة $(a\ ,\ b)$

  فإنّه يوجد على الأقل $c \in (a\ ,b)$ بحيث $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- لتكن f دالّة معرّفة على الفترة I . نقول إن:
  - **1** f دالّة متزايدة على I إذا كان: $\forall x_1\ ,\ x_2 \in I \quad , \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
  - **2** f دالّة متناقصة على I إذا كان: $\forall x_1\ ,\ x_2 \in I \quad , \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- الدالّة التي تكون دائمًا متزايدة على فترة أو دائمًا متناقصة على فترة، يقال عنها إنّها دالّة مطّردة على هذه الفترة.
- لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق على $(a\ ,\ b)$.
  - ذا كانت $f'(x) > 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$، فإنّ f تتزايد على $(a\ ,\ b)$.
  - إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$، فإنّ f تتناقص على $(a\ ,\ b)$.
  - إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$، فإنّ الدالة f ثابتة على $(a\ ,\ b)$.
- لتكن f دالّة متّصلة على مجالها وكانت $(c\ ,f(c))$ نقطة حرجة.
  - إذا كانت إشارة المشتقّة f' تتغيّر من الموجب إلى السالب عند $x = c$ فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c.
  - إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند $x = c$ فإن f يكون لها قيمة صغرى محلّية عند c.

- إذا لم تتغيّر إشارة f' عند $x = c$ فإن f لا يكون لها قيمة قصوى محلّية عند c.
- تعريف: التقعّر

إذا وقع منحنى الدالة أعلى جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعّرًا لأعلى على I .

وإذا وقع منحنى الدالة أسفل جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعّرًا لأسفل على I .

- اختبار التقعّر:

a إذا كانت $\forall x \in I$, $f''(x) > 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأعلى على I .

b إذا كانت $\forall x \in I$, $f''(x) < 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأسفل على I .

- نقطة الانعطاف:

تسمّى النقطة $(c , f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا كانت f دالّة متّصلة عند c، ومنحنى الدالة f يغيّر تقعّره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

- إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محليّة عند $x = c$.
- إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ ، فإن f تكون لها قيمة صغرى محليّة عند $x = c$.