الوحدة السادسة

تطبيقات التكامل

Integration Applications

مشروع الوحدة: احتساب سعر البيع

1 **مقدمة المشروع:** يعتبر النفط منذ فترة طويلة وحتى عصرنا الحاضر من أهم الموارد التي يحتاج إليها الإنسان، إن لجهة استخداماته أو لجهة مردوده المادي على الدول المنتجة.

2 **الهدف:** سوف تستكشف من خلال العمل في هذا المشروع كيف يحتسب سعر البيع لإنتاج بئر من النفط الخام خلال فترة زمنية معينة.

3 **اللوازم:** آلة حاسبة — حاسوب.

4 **أسئلة حول التطبيق:**

تبيّن لإحدى الشركات أن إحدى الآبار يمكن أن يعطي 300 برميل من النفط الخام يوميًّا على أن يتوقف إنتاجه خلال 3 سنوات، وقدرت أنه في عدد t من الأيام ابتداءً من الآن سوف يكون سعر النفط الخام معطى بالعلاقة: $P(t) = 30 + 0.3\sqrt{t}$ (Dollars) للبرميل الواحد (السعر العالمي لبيع النفط الخام بالدولار الأميركي).

إذا كانت الشركة تبيع النفط عند استخراجه من البئر مباشرة، فما القيمة الإجمالية لبيع النفط مستقبلًا؟

a معدل التغير لثمن البيع الإجمالي $\frac{dR}{dt}$ هو:

$\frac{dR}{dt}$ = [سعر بيع البرميل الواحد بالدولار] × [عدد البراميل المباعة في اليوم الواحد]

أوجد $\frac{dR}{dt}$ (لاحظ أن: $\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dB} \times \frac{dB}{dt}$ حيث إن B هو عدد البراميل المستخرجة).

b أوجد $R(t) = \int \frac{dR}{dt}\, dt$ علمًا أن: $R(0) = 0$

c أوجد قيمة $R(t)$ خلال 3 سنوات.

دروس الوحدة

المساحات في المستوي	حجوم الأجسام الدورانية	طول قوس ومعادلة منحنى دالة	المعادلات التفاضلية
6–1	6–2	6–3	6–4

الوحدة السادسة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت النهايات المنتهية وغير المنتهية عند نقطة أو على فترة.
- تعرفت الاتصال على فترة والانفصال عند نقطة أو على فترة.
- تعرفت مشتقة دالة عند نقطة وعلى فترة.
- تعرفت قابلية الاشتقاق وقواعد الاشتقاق.
- تعرفت التطبيق على الاشتقاق لإيجاد التفاضل.
- تعرفت الدوال التزايدية والدوال التناقصية ورسومها البيانية.
- تعرفت المشتقة العكسية والتكامل المحدد.

ماذا سوف تتعلم؟

- إيجاد المساحة بين المنحنيات.
- إيجاد المساحة المحددة بين منحنيات متقاطعة.
- إيجاد القيم المحدودة لدوال متغيرة.
- التعرف على الحجم كتكامل.
- إيجاد الحجم بطريقة المقاطع العرضية الدائرية.
- معادلة منحنى دالة بمعلومية ميل المماس وإحداثيات نقطة.
- طول قوس على منحنى دالة.
- حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.
- حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية.

المصطلحات الأساسية

المساحة ــ المساحة المحددة بين منحنيين ــ الحجم ــ المقاطع العرضية الدائرية ــ معادلة دالة بمعلومية ميل المماس وإحداثيات نقطة ــ طول قوس على منحنى دالة ــ المعادلة التفاضلية ــ المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى ــ المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية.

أضف إلى معلوماتك

يستخدم التكامل المحدد في مجالات علمية متعددة ومنها المجال الفيزيائي حيث يمكن إيجاد كتلة إحداثيات نقطة ثقل جسم معين فمثلاً:

لنأخذ g , f دالتين متصلتين على الفترة $[a\,,b]$ حيث $f(x) \geq g(x)$ ونأخذ صفيحة رقيقة لها كثافة نوعية p وتغطي هذه الصفيحة المنطقة R بين منحنى الدالة $f(x)$ ومنحنى الدالة $g(x)$ فنحصل على التالي:

كتلة $(R) = m = p\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

وإحداثيات نقطة الثقل $(\overline{x}\,,\,\overline{y})$ هي:

$$\overline{x} = \frac{p\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx}{p\int_a^b [f(x) - g(x)]dx} = \frac{p\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx}{m}$$

$$\overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\,p\int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx}{p\int_a^b [f(x) - g(x)]dx} = \frac{\frac{1}{2}\,p\int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx}{m}$$

6-1

المساحات في المستوي

Areas in the Plane

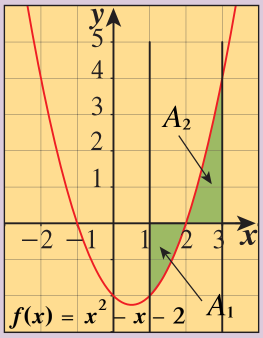
سوف تتعلم

- المساحة بين المنحنيات.
- المساحة المحددة بين منحنيات متقاطعة.
- القيم المحددة لدوال متغيّرة.

المفردات والمصطلحات:

- مساحة منطقة محددة بين منحنيين
Area Enclosed between Two Curves
- المساحة المحددة بين منحنيات متقاطعة
Area Enclosed by Intersecting Curves
- وحدة مربعة
Unit Squared

دعنا نفكر ونتناقش



في الشكل المجاور منحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - x - 2$ في الفترة $[1,3]$.

1 أوجد: $\int_1^3 f(x)\,dx$.

2 احسب مساحة كل من المنطقتين A_2 , A_1 المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = 3$, $x = 1$

3 قارن بين ما حصلت عليه في 2 , 1 .

أولًا: مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a\,,b]$

علمنا من دراستنا السابقة أنه إذا كانت f دالة متصلة على $[a\,,b]$ فإن مساحة المنطقة A المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = b$, $x = a$

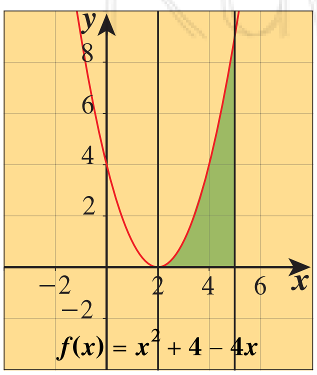
إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in [a\,,b]$

فإن $A = \int_a^b f(x)\,dx$

إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall\, x \in [a\,,b]$

فإن $A = -\int_a^b f(x)\,dx$

مثال (1)



يبيّن الشكل المقابل بيان الدالة: $f(x) = x^2 + 4 - 4x$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x = 5$, $x = 2$

الحل:

من الشكل:

$$\because \quad f(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in [2\,,5]$$

$$\therefore \quad A = \int_2^5 f(x)\,dx = \int_2^5 (x^2 + 4 - 4x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 4x - 2x^2\right]_2^5 = \left[\frac{125}{3} + 20 - 50\right] - \left[\frac{8}{3} + 8 - 8\right]$$

$$= \frac{35}{3} - \frac{8}{3} = 9 \quad \text{units square}$$

تذكر:

أننا نتعامل مع دوال متصلة على فترات معينة.

حاول أن تحل

1 في مثال (1) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x=4$, $x=-1$

مثال (2)

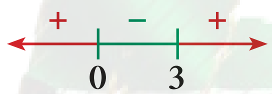
أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=x^2-3x$ ومحور السينات.

الحل:

نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

$$f(x)=0$$
$$x^2-3x=0$$
$$x(x-3)=0$$
$$x=0 \quad \text{أو} \quad x=3$$

نبحث هل $f(x)\leqslant 0$ أو $f(x)\geqslant 0$ في $[0,3]$



$$\because \; f(x)\leqslant 0 \quad \forall x\in[0,3]$$

$\therefore$ المساحة:

$$A=-\int_0^3 f(x)dx$$
$$=-\int_0^3 (x^2-3x)dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$
$$=-\left[\left(9-\frac{27}{2}\right)-(0)\right]$$
$$=-\left(-\frac{9}{2}\right)$$
$$=\frac{9}{2} \quad \text{units square}$$

حاول أن تحل

2 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=x^2+5x+4$ ومحور السينات.

لاحظ في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» أن الدالة f تقطع محور السينات عند $x=2$
حيث $2\in[1,3]$ تم تقسيم الفترة لحساب مساحة المنطقة المطلوبة والقاعدة التالية توضح ذلك:

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ ، $c\in(a,b)$ حيث $f(c)=0$
فإن مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a,b]$ هي:

$$A=\left|\int_a^c f(x)\,dx\right|+\left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$

وهذه القاعدة صحيحة عند وجود: ... , c_3 , c_2 , c_1 تنتمي إلى (a,b)
حيث $f(c_1)=f(c_2)=f(c_3)=\ldots=0$

مثال (3)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

a $f(x) = x^3 - 4x \quad , \quad \left[-1 \, , \, \frac{3}{2}\right]$

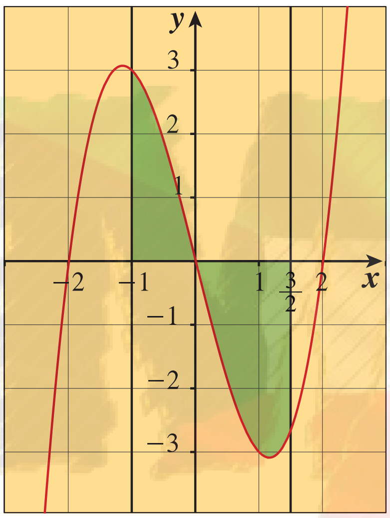
b $f(x) = \sin x \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{2} \, , \, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل:

a $f(x) = x^3 - 4x \quad , \quad \left[-1 \, , \, \frac{3}{2}\right]$

نوجد قيم x بحيث

$$f(x) = 0$$
$$x^3 - 4x = 0$$
$$x(x^2 - 4) = 0$$
$$x(x-2)(x+2) = 0$$
$$x = 0 \quad , \quad 0 \in \left(-1 \, , \, \frac{3}{2}\right)$$
$$x = 2 \quad , \quad 2 \notin \left(-1 \, , \, \frac{3}{2}\right)$$
$$x = -2 \quad , \quad -2 \notin \left(-1 \, , \, \frac{3}{2}\right)$$



شكل توضيحي

∴ المنحنى يقطع محور السينات عند $x = 0$

فتكون مساحة المنطقة A كما يلي:

$$A = \left|\int_{-1}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - 4x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{3}{2}} (x^3 - 4x)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{\frac{3}{2}}\right|$$

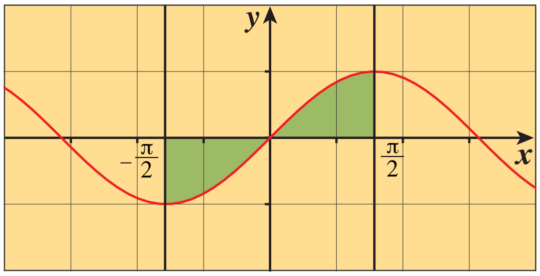
$$= \left|\left[0 - \left(\frac{-7}{4}\right)\right]\right| + \left|-\frac{207}{64} - 0\right|$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{207}{64}$$

$$= \frac{112}{64} + \frac{207}{64}$$

$$= \frac{319}{64} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

b $f(x) = \sin x \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$



نرسم منحنى الدالة f: نلاحظ أنه في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$

تنقسم المنطقة المطلوبة إلى منطقتين حيث $f(x) = 0$ عند $x = 0$

فتكون مساحة المنطقة المطلوبة كما يلي:

$$A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx\right|$$

$$A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx\right|$$

$$= \left|[-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\right| + \left|[-\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= |-(1-0)| + |-(0-1)| = 1 + 1 = 2$$ (وحدة مربعة)

حاول أن تحل

3 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

a $f(x) = x^3 - 9x \quad , \quad [-2 , 1]$

b $f(x) = \cos x \quad , \quad [0 , \pi]$

ثانيًا: مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين في الفترة $[a , b]$

مساحة منطقة محددة بين منحنيين

إذا كانت كل من g , f متّصلتين على الفترة $[a , b]$، حيث

$$f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in [a , b]$$

فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين g , f والمستقيمين $x = a$, $x = b$ هي:

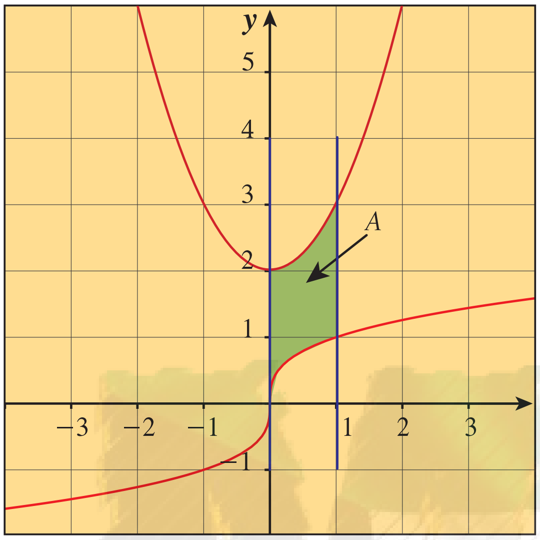
$$A = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]dx$$

مثال (4)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = \sqrt[3]{x}$ والمستقيمين $x = 1$, $x = 0$

علمًا بأن: $\forall x \in [0 , 1]$, $f(x) > g(x)$

الحل:



شكل توضيحي

$\because \; f(x) > g(x) \;\; \forall \;\; x \in [0 , 1]$

$\therefore$ مساحة المنطقة المحددة هي:

$$A = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 + 2 - \sqrt[3]{x})dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{3} + 2 - \frac{3}{4}\right) - (0)$$

$$= \frac{19}{12}$$ (وحدة مربعة)

حاول أن تحل

4 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 3$

ومنحنى الدالة g : $g(x) = x^2 + 1$ والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$

علمًا بأن: $\forall x \in [-1 , 1]$, $f(x) > g(x)$

مثال (5)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = e^x$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = -1 - x^2$ والمستقيمين $x = 3$, $x = 0$

علمًا بأن المنحنيين للدالتين f , g غير متقاطعين.

الحل:

$\because$ المنحنيين غير متقاطعين نأخذ قيمة اختيارية تنتمي للفترة $(0 , 3)$ ولتكن $x = 1$

$f(1) = e^1 = e$

$g(1) = -1 - (1^2) = -2$

أي أن: $f(x) > g(x) \qquad \forall \; x \in [0 \; , \; 3]$

فتكون مساحة المنطقة المحددة هي:

$$A = \int_0^3 f(x) - g(x)dx$$
$$= \int_0^3 (e^x + x^2 + 1)dx = \left[e^x + \frac{x^3}{3} + x\right]_0^3$$
$$= (e^3 + 9 + 3) - (1) = e^3 + 11 \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

حاول أن تحل

5 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 1$

ومنحنى الدالة g: $g(x) = -x^2 - 3$ والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$

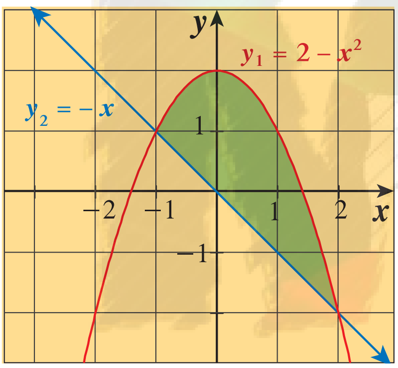
علمًا بأن المنحنيين للدالتين f, g غير متقاطعين.

عندما تنحصر منطقة بين منحنيات متقاطعة، فإنّ حدود التكامل هي الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع.

مثال (6)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى القطع المكافئ

$y_1 = 2 - x^2$ والمستقيم $y_2 = -x$



شكل توضيحي

الحل:

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقطتي التقاطع:

نضع $y_1 = y_2$

$$2 - x^2 = -x$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x = -1 \quad \text{أو} \quad x = 2$$

$\therefore$ حدّا التكامل هما: 2 , -1

نأخذ قيمة اختيارية تنتمي إلى الفترة $(-1, 2)$ ولتكن $x = 0$

$$y_1 = 2 - (0)^2 \quad , \quad = 0$$
$$y_2 = 0$$
$$\because \quad y_1 \geqslant y_2 \qquad \forall x \in [-1, 2]$$

$\therefore$ مساحة المنطقة هي:

$$A = \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)dx$$
$$A = \int_{-1}^{2} [2 - x^2 - (-x)]dx$$
$$= \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left[(2 \times 2) - \frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2}\right] - \left[2(-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2}\right]$$
$$= \frac{9}{2} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

حاول أن تحل

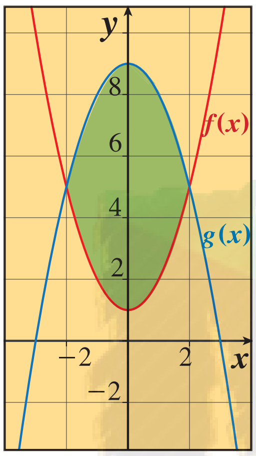
6 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $y_2 = -2x + 5 \quad , \quad y_1 = x^2 + 2$

في مثال (6) يمكن إيجاد المساحة A باستخدام القيمة المطلقة دون الحاجة لاستخدام القيمة الاختيارية كالتالي:

$$A = \left|\int_{-1}^{2}(y_1 - y_2)dx\right| = \left|\int_{-1}^{2}(y_2 - y_1)dx\right|$$

مثال (7)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي: $g(x) = -x^2 + 9 \quad , \quad f(x) = x^2 + 1$



شكل توضيحي

الحل:

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين نضع

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 + 1 = -x^2 + 9$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

يكون التكامل من $x = -2$ إلى $x = 2$ ومساحة المنطقة هي:

$$A = \left|\int_{-2}^{2}(f(x) - g(x))dx\right|$$

$$= \left|\int_{-2}^{2}(x^2 + 1 + x^2 - 9)dx\right| = \left|\int_{-2}^{2}(2x^2 - 8)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{2x^3}{3} - 8x\right]_{-2}^{2}\right|$$

$$= \left|\left[\frac{2(2)^3}{3} - 8(2)\right] - \left[\frac{2(-2)^3}{3} - 8(-2)\right]\right|$$

$$= \frac{64}{3}$$ (وحدة مربعة)

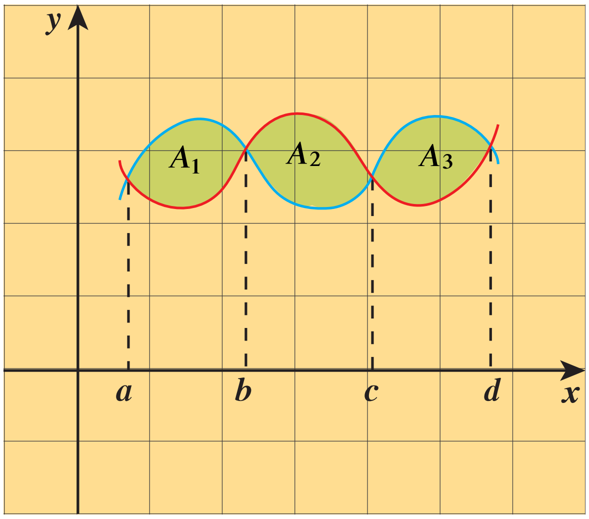
حاول أن تحل

7 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $g(x) = x^2 - 1 \quad , \quad f(x) = -2x^2 + 2$

القيم المحدودة لدوال متغيّرة

Boundaries with Changing Functions

إذا كانت منطقة محدودة بأكثر من دالّة واحدة، ولا يوجد تكامل واحد يعطي مساحة هذه المنطقة. في هذه الحالة تُجزأ المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها ولتكن A، إلى مناطق جزئية تناظر تغيرات هذه الدوال كما في الشكل الموضح وتكون:



$$A = A_1 + A_2 + A_3 + ...$$

ونكمل كالمعتاد.

مثال (8)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة g حيث:

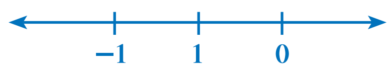
$$f(x) = x^3 - 1 \quad , \quad g(x) = x - 1$$

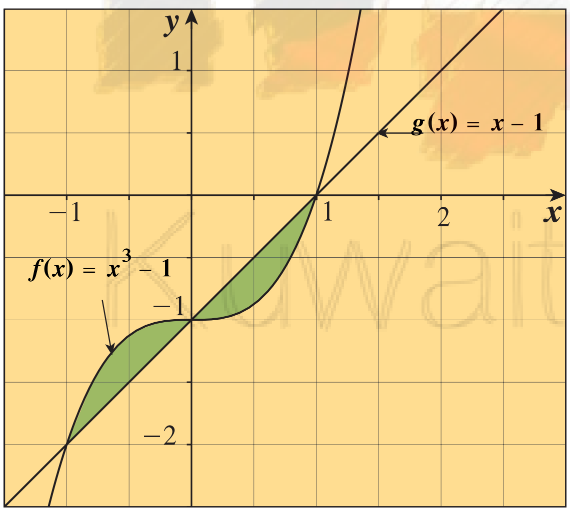
الحل:

$$f(x) = x^3 - 1 \quad , \quad g(x) = x - 1$$

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع نضع:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^3 - 1 = x - 1$$
$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$x(x - 1)\ (x + 1) = 0$$
$$x = 0 \ , \ x = 1 \ , \ x = -1$$





شكل توضيحي

فيكون التكامل على الفترتين: $[-1, 0]$, $[0, 1]$ وهو يعطي مساحة المنطقة المحددة A بين المنحنيين.

$$A = \left|\int_{-1}^{0}(f(x) - g(x))dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(f(x) - g(x))dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{0}(x^3 - 1 - x + 1)dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(x^3 - 1 - x + 1)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|0 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right| + \left|-\frac{1}{4} - 0\right| = \frac{1}{2} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

حاول أن تحل

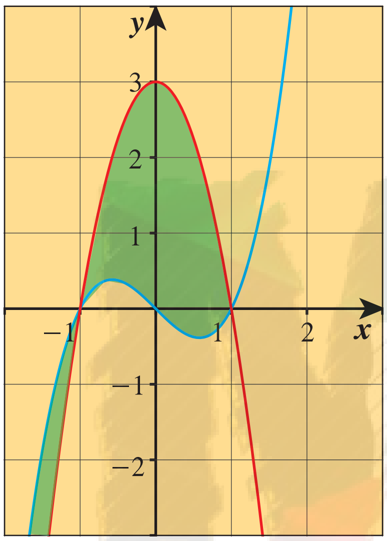
8 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة g في كل مما يلي:

$$f(x) = 1 - x^3 \quad , \quad g(x) = -4x + 1$$

مثال (9)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين:

$$f(x) = x^3 - x \quad , \quad g(x) = 3 - 3x^2$$



شكل توضيحي

الحل:

لإيجاد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع المنحنيين:

نضع

$$f(x) = g(x)$$
$$x^3 - x = 3 - 3x^2$$
$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$
$$x^2(x+3) - (x+3) = 0$$
$$(x^2 - 1)(x+3) = 0$$
$$(x-1)(x+1)(x+3) = 0$$
$$x = 1 \quad , \quad x = -1 \quad , \quad x = -3$$

$-3 \quad -1 \quad 1$

فيكون التكامل على الفترتين $[-1, 1]$, $[-3, -1]$

وهو يعطي مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين A:

$$A = \left| \int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x)\,dx) \right| + \left| \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x)\,dx) \right|$$
$$= \left| \int_{-3}^{-1} (x^3 - x - 3 + 3x^2)dx \right| + \left| \int_{-1}^{1} (x^3 - x - 3 + 3x^2)dx \right|$$
$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 3x + x^3 \right]_{-3}^{-1} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 3x + x^3 \right]_{-1}^{1} \right|$$
$$= \left| \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 - 1 \right) - \left(\frac{81}{4} - \frac{9}{2} + 9 - 27 \right) \right| + \left| \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 3 + 1 \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 - 1 \right) \right|$$
$$= |+4| + |-4| = 8 \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

حاول أن تحل

9 أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين:

$f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad g(x) = \frac{x}{2}$

والمستقيمين $x = 9 \quad , \quad x = 0$

6-2

حجوم الأجسام الدورانية

Volumes of Revolution Solids

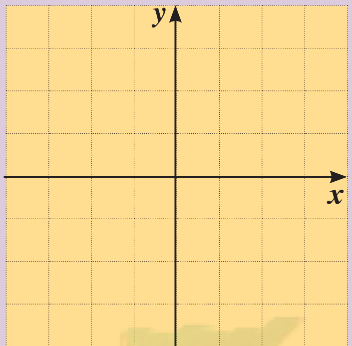
سوف تتعلم

- التعرف على الحجم كتكامل.
- إيجاد الحجم بطريقة المقاطع العرضيّة الدائريّة.

المفردات والمصطلحات:

- شرائح Slices
- حجم مجسم Volume of a Solid
- الأجسام الدورانية Solids of Revolution

دعنا نفكر ونتناقش



1 a ارسم منحنى الدالة: $f(x) = 1$ في الفترة $[1, 4]$

b ظلّل المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f(x) = 1$ ومحور السينات في الفترة $[1, 4]$

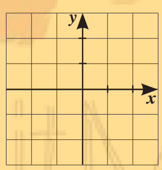
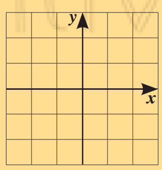
c قم بتدوير هذه المنطقة المستوية حول محور السينات. ما المجسم الناتج؟

d أوجد حجم المجسم الناتج من الدوران؟

e أوجد قيمة التكامل: $\int_1^4 \pi(f(x))^2\,dx$

f ماذا تلاحظ من e , d ؟

2 كرّر الخطوات السابقة من 1 لكلّ من الدوال التالية وأكمل الجدول.

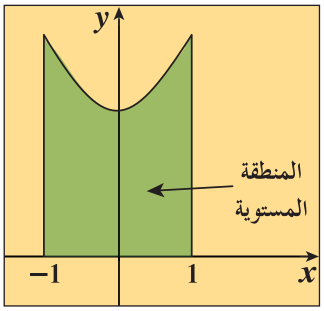
الدالة	الفترة	منحنى الدالة	اسم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية	حجم المجسم	$\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$
$f(x) = x$	$[0, 3]$				
$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$	$[-2, 2]$				

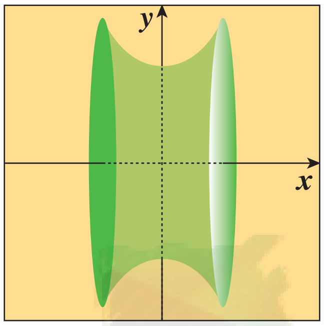
من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أنه: إذا نتج مجسم من دوران منطقة محددة بمنحنى دالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = b$, $x = a$ حيث $a < b$ دورة كاملة حول محور السينات فإن حجم هذا المجسم يساوي:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$$

مثال (1)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ ومحور السينات في الفترة $[-1,1]$.





شكل توضيحي

الحل:

حجم المجسم الناتج هو:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-1}^{1}(f(x))^2 dx \\
&= \pi\int_{-1}^{1}(x^2+2)^2 dx \\
&= \pi\int_{-1}^{1}(x^4+4x^2+4)dx \\
&= \pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{4x^3}{3}+4x\right]_{-1}^{1} \\
&= \pi\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{5}-\frac{4}{3}-4\right)\right] \\
&= \frac{166}{5}\pi \quad \text{units cube}
\end{aligned}
$$

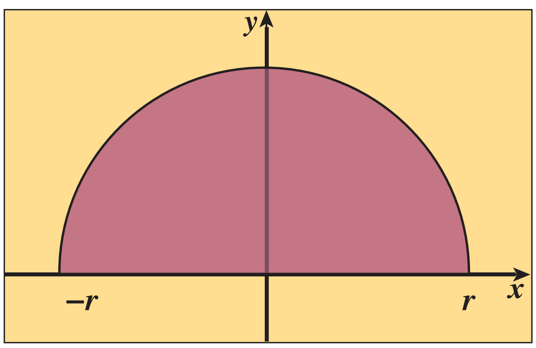
حاول أن تحل

1 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f: $f(x) = \sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1,5]$.

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أن المجسم الناتج من دوران منحنى الدالة $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ (نصف دائرة) هو كُرة طول نصف قطرها $r = 2$. ويمكننا استخدام قاعدة إيجاد حجوم الأجسام الدورانية في إثبات قانون حجم الكُرة.

مثال (2)

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$



شكل توضيحي

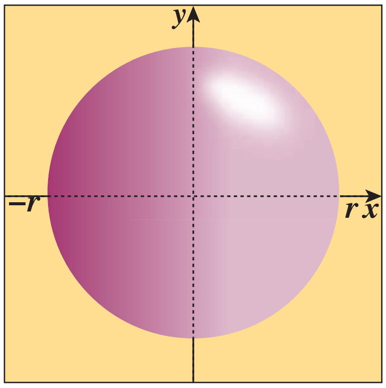
الحل:

$\because \quad y = \sqrt{r^2 - x^2}$

تمثل معادلة نصف دائرة مركزها نقطة الأصل $(0\,,0)$ وطول نصف قطرها r

$\therefore$ المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات هو كُرة.

∴ حجم المجسم الناتج (الكُرة) هو:



$$V = \pi\int_{-r}^{r} y^2dx = \pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx$$
$$= \pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx = \pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}$$
$$= \pi\left[\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)-\left(-r^3+\frac{r^3}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{units cube}$$

حاول أن تحل

2 باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $r \neq 0$, $f(x) = r$ في الفترة $[0 , h]$

إذا نتج مجسم عن دوران منطقة محددة بمنحنيي الدالتين f , g والمستقيمين $x = a$, $x = b$ دورة كاملة حول محور السينات، بحيث f, g لهما الإشارة نفسها في الفترة $[a , b]$، فإن حجم هذا المجسم يعطى بالقاعدة:

$$V = \pi\int_a^b[(f(x))^2-(g(x))^2]dx$$

حيث: $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ أو $f(x) \leqslant g(x) \leqslant 0$

مثال (3)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$: g

الحل:

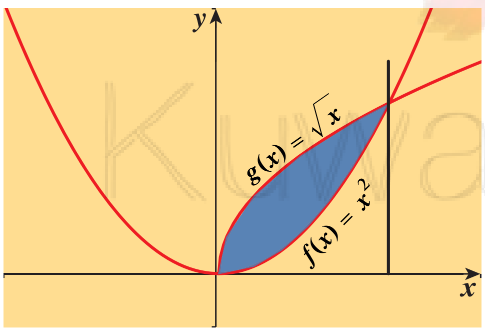
المنطقة المستوية محددة بمنحنيي الدالتين

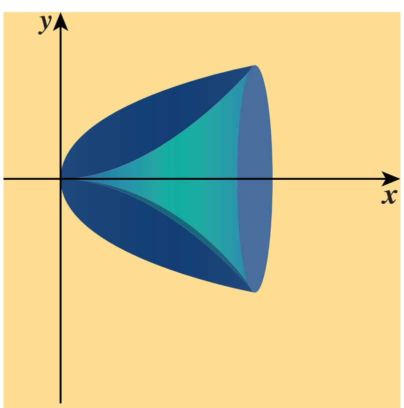
نجد التقاطع بوضع:

$f(x) = g(x)$

$x^2 = \sqrt{x} \qquad (x \geqslant 0)$

بتربيع الطرفين





$x^4 = x$

$x^4 - x = 0$

$x(x^3-1) = 0$

$x(x-1)(x^2+x+1) = 0$

نحصل على: $x = 0$, $x = 1$

وبالنسبة إلى المعادلة $x^2+x+1 = 0$

نوجد المميز Δ :

حيث $\Delta = 1-4(1)(1) = -3$, $-3 < 0$

∴ المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ فيكون التكامل على $[0,1]$

نأخذ قيمة اختيارية في $(0\,,1)$ ولتكن $x=\frac{1}{4}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16} \quad , \quad g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad g(x)\geqslant f(x)\geqslant 0 \quad \forall x\in[0\,,1]$$

$\therefore$ حجم المجسم الناتج عن الدوران: $V=\pi\int_0^1[(g(x))^2-(f(x))^2]dx$

$$V=\pi\int_0^1[(\sqrt{(x)})^2-(x^2)^2]dx$$

$$V=\pi\int_0^1(x-x^4)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\pi\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)-(0)\right]$$

$$=\frac{3}{10}\pi \quad \text{units cube}$$

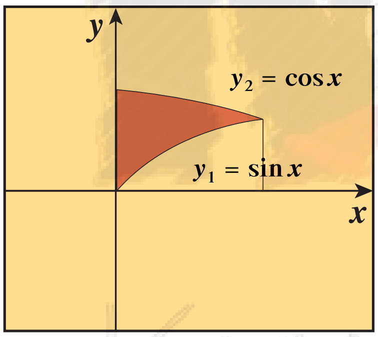
حاول أن تحل

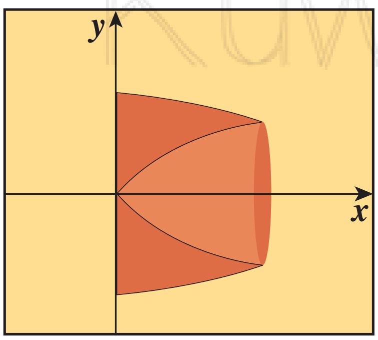
3 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنيي الدالتين

$$f(x)=\frac{x^2}{2}+1 \quad , \quad g(x)=\frac{x}{2}+2$$

مثال (4)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين. $y_1=\sin x$, $y_2=\cos x$ على الفترة $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$.





الحل:

نرسم منحنى كل من الدالتين y_2 , y_1 في الفترة $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$

المنطقة موضّحة في الشكل (المقابل).

من الرسم البياني نلاحظ أن: $y_2\geqslant y_1\geqslant 0$

$\therefore$ حجم المجسم الناتج يساوي: $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}[(y_2^2-y_1^2)dx$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}[(\cos^2x-\sin^2x)dx$$

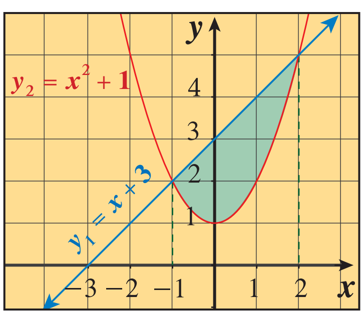
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2x)dx \qquad \cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$$

$$=\frac{\pi}{2}[\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-0)$$

$$=\frac{\pi}{2} \quad \text{(وحدة مكعبة)}$$

حاول أن تحل



4 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين: $y_1=x+3$, $y_2=x^2+1$

6–3

طول قوس ومعادلة منحنى دالة

Arc Length and Equation of Function Curve

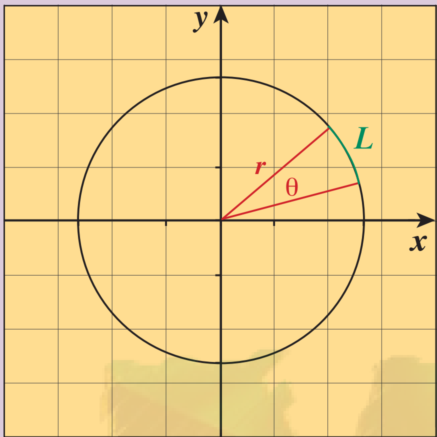
سوف تتعلم

- معادلة منحنى دالة بمعلومية ميل المماس ونقطة تنتمي إلى بيان الدالة.
- طول القوس.

المفردات والمصطلحات:

- معادلة منحنى دالة Equation of Function Curve
- طول قوس Arc Length

دعنا نفكر ونتناقش



تعرفت سابقًا أن محيط دائرة طول نصف قطرها r يعطى بالقاعدة: $2\pi r$ وأن القوس المقابل لزاوية مركزية θ (radians) في الدائرة طوله: $L = r\theta$.

أكمل الجدول التالي:

قياس زاوية مركزية في دائرة θ (radians)	طول القوس المقابل (L)
$\frac{\pi}{6}$	
$\frac{\pi}{2}$	
π	
$\frac{3\pi}{2}$	

أولًا: إيجاد طول قوس من منحنى

نلاحظ من خلال فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» أن بالإمكان إيجاد طول قوس على منحنى مألوف لدينا وهو الدائرة حيث استخدمنا القاعدة $L = r\theta$.

كما أننا نستخدم قاعدة لإيجاد طول قوس على أي منحنى.

قاعدة طول القوس

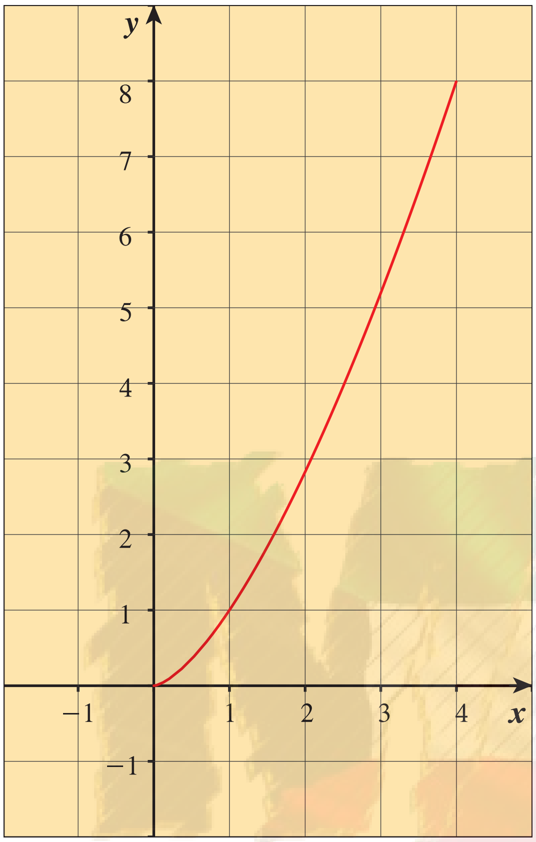
إذا كانت الدالة f' متصلة على $[a, b]$ فإن طول القوس من منحنى $y = f(x)$ في $[a, b]$ هو:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

ملاحظة: سنتعامل في هذا البند مع دوال مشتقاتها متصلة على الفترات المعطاة.

مثال (1)

في الشكل، أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^3}$ في الفترة $[0, 4]$



الحل:

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$$

لإيجاد التكامل نستخدم قاعدة التعويض

$$g(x) = 1 + \frac{9}{4}x$$

$$g'(x) = \frac{9}{4}$$

$$L = \frac{4}{9}\int_0^4 \frac{9}{4}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$L = \frac{4}{9} \times \frac{2}{3}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3}\right]_0^4$$

$$= \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}(4)\right)^3} - \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}(0)\right)^3}\right]$$

$$= \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$$

$$L \approx 9.07 \text{ units}$$

حاول أن تحل

1 أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$ في الفترة $[3, 8]$

مثال (2)

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0\,,6]$

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{3}{2}(3+2x)^{\frac{1}{2}}$$

$(u^n)' = nu'u^{n-1}$

$$f'(x) = (3+2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_0^6 \sqrt{1+(f(x))^2}\,dx$$

قاعدة طول القوس

$$L = \int_0^6 \sqrt{1+3+2x}\,dx$$

$$= \int_0^6 \sqrt{4+2x}\,dx$$

$$= \int_0^6 (4+2x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^6 2(4+2x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(4+2x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^6$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}[16^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}]$$

$$L = \frac{56}{3} \quad \text{(وحدة طول)}$$

حاول أن تحل

2 أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2\,,5]$

ثانيًا: إيجاد معادلة منحنى دالة باستخدام التكامل

مثال (3)

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x\,,y)$ يساوي: $3x^2-4x+1$ ويمر بالنقطة $A(1\,,2)$

الحل:

$$\because \quad f'(x) = 3x^2-4x+1$$

$$\therefore \quad f(x) = \int (3x^2-4x+1)dx$$

$$f(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + x + C$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + C$$

لتعيين قيمة الثابت C نعوّض بالنقطة $A(1,2)$ في المعادلة السابقة فنحصل على:

$$2 = (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + C$$

$$2 = 1 - 2 + 1 + C$$

$$C = 2$$

$\therefore$ معادلة المنحنى f المطلوب هي: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $3x^2 + x$ ويمر بالنقطة $(2, 2)$

مثال (4)

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي: $4x^3 + 6x^2 - 2x + 1$ ويمر بالنقطة $B(1,0)$

الحل:

$$\because \quad f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x + 1$$

$$\therefore \quad f(x) = \int (4x^3 + 6x^2 - 2x + 1)dx$$

$$f(x) = 4\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x + C$$

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + x + C$$

لتعيين قيمة الثابت C نعوّض بالنقطة $B(1, 0)$ في المعادلة السابقة فنحصل على:

$$0 = (1)^4 + 2(1)^3 - (1)^2 + 1 + C$$

$$0 = 1 + 2 - 1 + 1 + C$$

$$C = -3$$

$\therefore$ معادلة المنحنى f المطلوب هي: $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + x - 3$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ويمر بالنقطة $(-1, -5)$

مثال (5)

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه $(x\,,\,y)$ يساوي $\sqrt{5-4x}$

فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5\,,\,3)$

الحل:

$\because$ ميل العمودي $= \dfrac{-1}{f'(x)}$ حيث $f'(x) \neq 0$

$$\therefore\ \sqrt{5-4x} = \frac{-1}{f'(x)}$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{5-1x}}$$

$\therefore$ معادلة المنحنى هي:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

$$= \int \frac{-1}{\sqrt{5-4x}}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int -4(5-4x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{(5-4x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C\right]$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5-4x} + \frac{1}{4}C \qquad (1)$$

لتعيين قيمة C:

$$f(-5) = 3$$

بالتعويض في (1)

$$3 = \frac{1}{2}\sqrt{5-4(-5)} + \frac{1}{4}C$$

$$3 = \frac{1}{2}(5) + \frac{1}{4}C$$

$$\Longrightarrow C = 2$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5-4x} + \frac{1}{2}$$

حاول أن تحل

5 إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه $(x\,,y)$ هو $2x-1$

فأوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $B(1\,,0)$

مثال (6)

لتكن: $f''(x) = 6x - 6$ فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $(-1\ ,\ 15)$ نقطة حرجة للدالة.

الحل:

$$f'(x) = \int f''(x)dx$$
$$= \int (6x-6)dx$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + C$$

$\because$ $(-1\ ,\ 15)$ نقطة حرجة $\qquad \therefore\ f'(-1) = 0$

$$3(-1)^2 - 6(-1) + C = 0$$
$$C = -9$$
$$\therefore\ f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$
$$f(x) = \int f'(x)dx$$
$$= \int (3x^2 - 6x - 9)dx$$
$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + C$$

بالتعويض في النقطة $(-1\ ,\ 15)$:

$$15 = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + C$$
$$\therefore\ C = 15 - 5 = 10$$

$\therefore$ معادلة المنحنى هي: $\quad \therefore\ f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

حاول أن تحل

6 لتكن: $f''(x) = 5x - 2$

فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $P(2\ ,\ -2)$ نقطة حرجة للدالة.

المعادلات التفاضلية

Differential Equations

سوف تتعلم
- حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.
- حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية.

المفردات والمصطلحات:
- معادلة تفاضلية

Differential Equation

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $y = f(x) = 5e^{2x} + 4$

a أوجد المشتقه من الرتبة الأولى y' للدالة $y = f(x)$

b أثبت أن y' , y تحققان المعادلة: $y' - 2y + 8 = 0$

c لنأخذ الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $y = g(x) = x^2 + 4$،

أوجد علاقة بين y' , y مستقلة عن المتغير x.

تعريف (1)

المعادلات التفاضلية: هي معادلات تحتوي على دالّة مجهولة وبعض مشتقاتها.

نستخدم عادة y بدلًا من $f(x)$.

تعريف (2)

رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.

فمثلًا:

$y' = xy$ ، $y' = -8$ ، $y' - 2y = x - 1$ هي معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى.

$y'' = -8$ ، $y'' + 2xy' - y = 0$ هي معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية.

ولكن $y - 2x = 5$ هي ليست بمعادلة تفاضلية.

تعريف (3)

درجة المعادلة التفاضلية: هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.

فمثلًا:

$y'' + (y')^2 + y = 1$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى.

$(y')^2 = \frac{4x}{y}$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية.

$(y'')^3 + x^4y' + e^xy = 0$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثالثة.

تدريب:

أكمل الجدول التالي محدّدًا رتبة ودرجة كل معادلة من المعادلات التفاضلية فيه.

المعادلة التفاضلية	الرتبة	الدرجة
$y' = 5y$		
$y'^2 = \frac{4x}{y}$		
$y'' = 5y' + xy$		
$(y'')^2 = 1 + (y')^3$		
$y''' = (y')^2 + x^3$		

حل المعادلات التفاضلية هو إيجاد دوال تحقق مع مشتقاتها هذه المعادلات.

وسنقتصر في دراستنا على حل معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى.

مثال (1)

أثبت أن الدالة: $y = e^{x^2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$

الحل:

أوجد المشتقة من الدرجة الأولى: $y = e^{x^2}$

$(e^u)' = u'e^u$ $\quad y' = 2x\,e^{x^2}$

عوّض y, y' بقيمتيهما في المعادلة التفاضلية $\quad 2xe^{x^2} - 2xe^{x^2} = 0$

الدالة $y = e^{x^2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$

حاول أن تحل

1 أثبت أنّ الدالة: $y = 2e^{3x} + 1$ هي حل للمعادلة: $y' + 3 = 3y$

هناك بعض القواعد التي تساعد في حل معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى.

I المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى التي على الصورة $y' = f(x)$ حلها يكون على الصورة: $y = \int f(x)dx$

مثال (2)

حل المعادلة: $y' = 3x^2 - 1$

الحل:

لإيجاد y نكامل y' $\quad y = \int y'\,dx$

طبّق الحالة $\quad y = \int (3x^2 - 1)\,dx$

حيث C ثابت $\quad y = x^3 - x + C$

حاول أن تحل

2 حل المعادلة: $y' = 7x^2 + 9x - 1$

مثال (3)

حل المعادلة: $y' = 3x^2 - 1$، التي تحقق $y = 2$ عند $x = 1$

الحل:

$$y = \int y'\,dx$$

$$y = \int (3x^2 - 1)\,dx$$

$$= x^3 - x + C$$

عوّض عن x بـ 1 وعن y بـ 2 $\quad 2 = 1^3 - 1 + C$

$$C = 2$$

$$\therefore \quad y = x^3 - x + 2$$

حاول أن تحل

3 حل المعادلة: $y' = 8x^3 - 3x^2 + 4$، والتي تحقق $y = 5$ عند $x = 1$

II بعض المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى تحوي المتغيرين: y , x على الصورة: $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ يتم حلها بطريقة فصل المتغيرات بالصورة التالية:

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$$

ونكامل الطرفين وصولًا إلى حل المعادلة التفاضلية وهو إيجاد y.

مثال (4)

حل المعادلات التفاضلية التالية:

a $y' - 2xy = 0$

b $y' = 4y$

الحل:

a

$y' - 2xy = 0$

$y' = \dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 0$

$\dfrac{dy}{dx} = 2xy$

فصل المتغيرات

$\dfrac{dy}{y} = 2x\,dx$

كامل الطرفين $\int \dfrac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$

$\int \dfrac{dy}{y} = \int 2x\,dx$

$\ln|y| = x^2 + C$

$\ln y = x \Rightarrow y = e^x$

$|y| = e^{x^2+C} = e^{x^2} \cdot e^C$

$y = \pm e^C \cdot e^{x^2}$

$\pm e^C = k$

$y = ke^{x^2}$

b

$y' = 4y$

$y' = \dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx} = 4y$

فصل المتغيرات

$\dfrac{dy}{y} = 4\,dx$

كامل الطرفين

$\int \dfrac{dy}{y} = \int 4\,dx$

$\ln|y| = 4x + C$

$|y| = e^{4x+C}$

$\pm e^C = k$

$y = \pm e^C \cdot e^{4x}$

$y = k\,e^{4x}$

حاول أن تحل

4 حل المعادلة التفاضلية: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x}$

III المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay$ حيث $a \neq 0$ حلولها هي $y = k\,e^{ax}$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$.

يمكن توضيح ذلك كالتالي:

$y' = ay$

$\dfrac{dy}{dx} = ay$

$\dfrac{dy}{y} = a\,dx$

$\int \dfrac{dy}{y} = \int a\,dx$

$\ln|y| = ax + C$

$|y| = e^{ax+C} = e^{ax} \cdot e^C$

$y = \pm e^C \cdot e^{ax}$

$y = ke^{ax}$

ثابت $k = \pm e^C$

مثال (5)

أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = 4y$ إذا كان $y = 2$ عند $x = 0$

الحل:

طبّق القاعدة III

$$y' = 4y$$

$$\therefore\ y = k\,e^{4x}$$

عوّض عن x , y بالقيم المعطاة

$$2 = k\,e^{4(0)}$$

$e^{0} = 1$

$$2 = k \times 1$$

$$k = 2$$

$$\therefore\ y = 2e^{4x}$$

حاول أن تحل

5 أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = -2y$ إذا كان $y = 3$ عند $x = 0$

IV المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay + b$ حيث $b \neq 0$, $a \neq 0$ تكون حلولها: $y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}$

مثال (6)

a حلّ المعادلة: $2y' + y = 1$

b أوجد الحل الذي يحقق $y = 2$ عند $x = -1$

الحل:

اكتب المعادلة على الشكل $y' = ay + b$

a $2y' + y = 1$

$$y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

طبّق القاعدة IV

$$y = k\,e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

عوّض x , y بقيمتيهما

b $k\,e^{\frac{1}{2}} + 1 = 2$

$$k = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} + 1$$

حاول أن تحل

6 حل المعادلة $3y' - 2y = 4$، ثم أوجد الحل الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 0$

V المعادلات التفاضلية على الصورة: $y'' = f(x)$

يتم حل هذه المعادلات بخطوتين: $y' = \int f(x)dx = F(x) + C_1$

ثم $y = \int (F(x) + C_1)dx$

مثال (7)

حل المعادلة: $y'' = 3x^2 - 2x$

الحل:

نكتب: $y' = \int (3x^2 - 2x)dx$

كامل $y' = x^3 - x^2 + C_1$

$y = \int y' dx$ $\quad y = \int (x^3 - x^2 + C_1)\, dx$

كامل $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$

حاول أن تحل

7 حل المعادلة: $y'' = -3x^2 + 6x$

VI المعادلات التفاضلية على الصورة: $ay'' + by' + cy = 0$ حيث a, b, c أعداد حقيقية و $a \neq 0$

المعادلة: $ar^2 + br + c = 0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية: $ay'' + by' + cy = 0$

تقبل النتائج التالية حيث $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^*$

a إذا كان للمعادلة المميزة حلّين حقيقيين $r_1 \neq r_2$ فإن حل المعادلة التفاضلية هو: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

b إذا كان للمعادلة المميزة حلًّا حقيقيًّا (مكررًا) $r_1 = r_2$ فإن حل المعادلة التفاضلية هو: $y = (C_1 x + C_2)e^{rx}$

c إذا كان للمعادلة المميزة حلّين تخيليين $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ فإن حل المعادلة التفاضلية هو:
$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

مثال (8)

حل المعادلة: $y'' - 4y' + 3y = 0$

الحل:

أوجد المعادلة المميزة

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$
$$(r-3)(r-1) = 0$$
$r = 3$ أو $r = 1$

أوجد الحلول

طبّق a — VI

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$

حاول أن تحل

8 حل المعادلة: $2y'' - 5y' + 3y = 0$

ملاحظة: يمكنك استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد جذري المعادلة التربيعية.

مثال (9)

حل المعادلة: $y'' - 4y' + 4y = 0$

الحل:

أوجد المعادلة المميزة

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$
$$(r-2)^2 = 0$$
$$r - 2 = 0$$

أوجد الحلول

$$r = 2$$
$$r_1 = r_2 = 2$$
$$y = (C_1 x + C_2)e^{rx}$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y = (C_1 x + C_2)e^{2x}$

حاول أن تحل

9 حل المعادلة: $4y'' - 12y' + 9y = 0$

مثال (10)

حل المعادلة: $y'' + y' + 4y = 0$

الحل:

أوجد المعادلة المميزة

$$r^2 + r + 4 = 0$$

$$\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 1 - 16$$

$$= -15 = 15i^2$$

أوجد الحلول

$$r_1 = \frac{-1 - \sqrt{15}\,i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$$

$$r_2 = \frac{-1 + \sqrt{15}\,i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{15}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{15}}{2}x\right)$$

حاول أن تحل

10 حل المعادلة: $y'' + 2y' + 8y = 0$

تطبيق حياتي إثرائي (الطب)

حقنت مادة كيميائية مباشرة في العضل، بعد مرورها عبر الدم يتخلص الجسم من فضلات هذه المادة عن طريق الكلى.

لقد تمّ الاستنتاج أن كمية المادة (S) الموجودة في الدم في الزمن t (بالساعات) هي حل للمعادلة التفاضلية:

$2S''(t) + 3S'(t) + S(t) = 0$ مع $S(0) = 0$ ، $S'(0) = \frac{q}{2}$

حيث q هي كمية المادة المحقونة في العضل.

أوجد: $S(t)$.

الحل:

$$2S''(t) + 3S'(t) + S(t) = 0$$

أوجد المعادلة المميزة

$$2r^2 + 3r + 1 = 0$$

أوجد الحلول

$$r = -1 \ , \ r = -\frac{1}{2}$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $S(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-\frac{1}{2}t}$

عوّض عن S بقيمتها $0 = C_1 + C_2 \qquad (1)$

أوجد مشتقة $S(t)$ $S'(t) = -C_1 e^{-t} - \frac{1}{2} C_2 e^{-\frac{1}{2}t}$

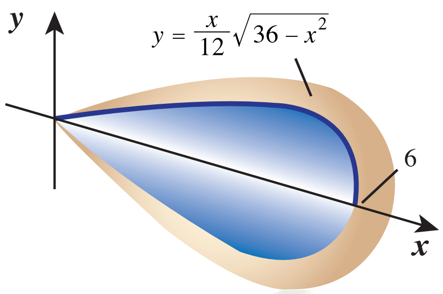
عوّض عن S' بقيمتها $\frac{q}{2} = -C_1 - \frac{1}{2} C_2 \qquad (2)$

لإيجاد قيم C_1 , C_2 نحل النظام $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 - \frac{1}{2} C_2 = \frac{q}{2} \end{cases}$

نحصل على: $C_1 = -q \ , \ C_2 = q$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $S(t) = -q e^{-t} + q e^{-\frac{1}{2}t}$

بعد أن طلب أستاذ الرسم من الطلاب رسم شاقول يستخدم للبناء، رسم وليد الشكل المقابل.
وقد قدّر أن الرسم هو لشاقول وزنه 195 g تقريبًا.



a أوجد حجم الشاقول.

b إذا كان الشاقول مصنوع من النحاس، وكتلة الثقل النوعي هي $8.5\ \text{g/cm}^3$،
فما هو الوزن التقريبي لهذا الشاقول؟ وهل تقدير وليد مناسب؟

الحل:

a $V = \int_0^6 \pi(f(x))^2\,dx = \pi\int_0^6 \frac{x^2}{144}(36 - x^2)\,dx$

$= \frac{\pi}{144}\left[\frac{36x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^6 = \pi(7.2)$

$\approx 22.62\ \text{cm}^3$

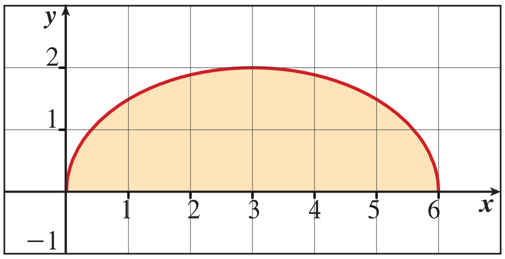
b الثقل النوعي = $\frac{\text{الوزن}}{\text{الحجم}}$

الوزن: $22.62 \times 8.5 = 192.1$

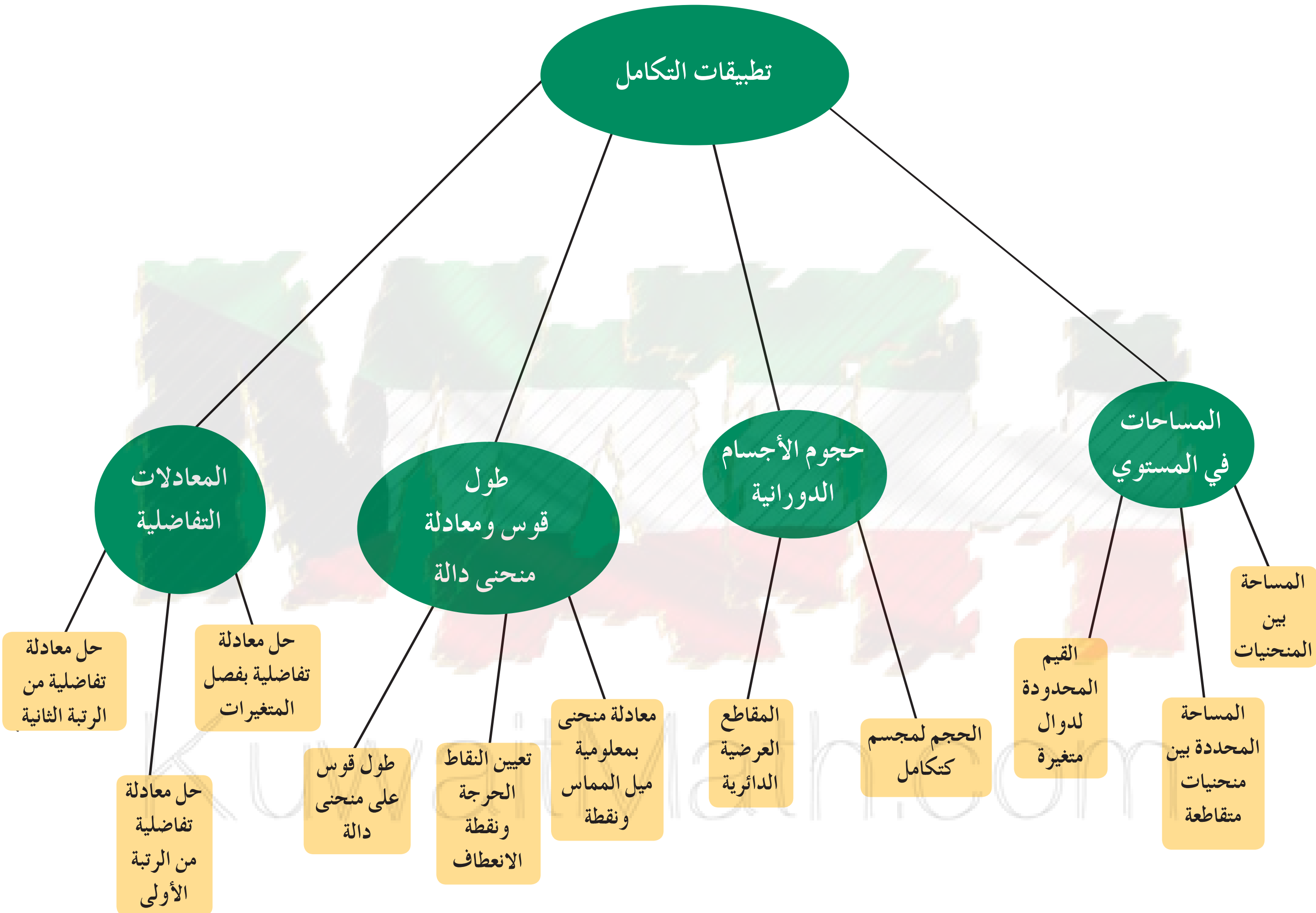
إذًا تقدير وليد قريب من الوزن الحقيقي.

مسألة إضافية

أوجد حجم الشكل الناتج عن دورة كاملة للمنطقة المظللة حول محور السينات
والمحصورة بين $x = 0$، $x = 6$، $x'Ox$ ومنحنى الدالة: $y = \frac{\sqrt{-4x^2 + 24x}}{3}$



مخطط تنظيمي للوحدة السادسة



ملخص

- مساحة منطقة محددة بمنحنى دالة f متصلة في فترة $[a,b]$ ومحور السينات والمستقيمين: $x=a$ ، $x=b$ هي:

$$A=\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{حيث} \quad f(x)\ge 0$$

$$A=-\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{حيث} \quad f(x)\le 0$$

- إذا كان $f(x)\le 0$ على الفترة $[a,c]$ و $f(x)\ge 0$ على الفترة $[c,b]$ فإن: $A=\left|\int_a^c f(x)\,dx\right|+\left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$

- إذا كانت كل من f ، g متصلتين في الفترة $[a,b]$ وكانت $f(x)\ge g(x)$ فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين والمستقيمين $x=a$ ، $x=b$ هي: $A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$

- إذا تحددت منطقة بين منحنيات متقاطعة فإن نقاط التقاطع هي حدود التكامل.
- إذا تحددت منطقة بأكثر من دالة ولا يوجد تكامل مفرد يعطي المساحة فيمكن تجزيء هذه المنطقة إلى مناطق تناظر تغيرات كل دالة ونتابع العمل.
- إذا نتج مجسم عن دوران منطقة مستوية محددة بمنحيي الدالتين f , g دورة كاملة حول محور السينات بحيث f , g لهما الإشارة نفسها في الفترة $[a, b]$ فإن حجم هذا المجسم يعطى بالقاعدة: $V(x) = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]dx$ وذلك في الحالتين: $f(x) \ge g(x) \ge 0$ أو $f(x) \le g(x) \le 0$.
- إذا نتج مجسم عن دورة منطقة مستوية محددة بمنحنى دالة واحدة f دورة كاملة حول محور السينات في الفترة $[a, b]$ فإن حجم المجسم يعطى بالقاعدة: $V(x) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.
- كل نقطة على منحنى دالة ينتج عنها مقطع دائري في دورة كاملة حول محور السينات.
- يمكن إيجاد معادلة منحنى دالة بمعلومية ميل المماس على المنحنى ومعلومية نقطة محددة يمر بها هذا المنحنى.
- نستخدم المشتقة الثانية للدالة f لدراسة القيم القصوى والقيم العظمى لمنحنى الدالة.
- نستخدم المشتقة الثانية للدالة f لإيجاد نقطة انعطاف منحنى الدالة.
- تساعدنا القاعدة: $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ على إيجاد طول قوس على منحنى دالة في الفترة $[a, b]$.
- رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.
- درجة المعادلة التفاضلية هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.
- يمكن حل المعادلات التفاضلية بفصل المتغيرات: $\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$ ثم نكامل.
- حل المعادلة التفاضلية: $y' = ay$ هو $y = ke^{ax}$.
- حل المعادلة التفاضلية: $y' = ay + b$ هو $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

لحل المعادلات التفاضلية على الصورة: $ay'' + by' + cy = 0$

نوجد المعادلة المميزة: $ar^2 + br + c = 0$ ومنها لدينا 3 حالات:

a إذا كانت $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ فإن الحل: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

b إذا كانت $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ فإن الحل: $y = (C_1 x + C_2)e^{rx}$

c إذا كانت $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ فإن الحل: $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

حيث: $r_1 = \alpha + i\beta\ ,\ r_2 = \alpha - i\beta$