الوحدة السابعة

القطوع المخروطية

Conic Sections

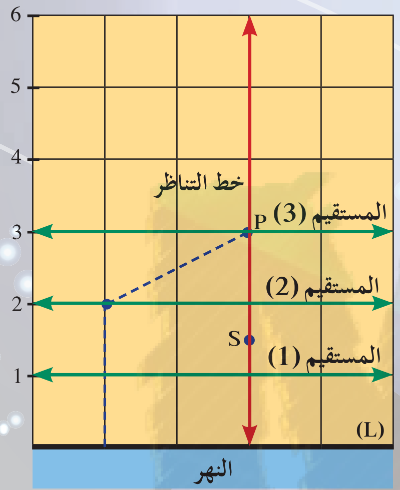
مشروع الوحدة: لماذا القطوع المخروطية؟

1 **مقدمة المشروع:** اهتم علماء الفلك منذ القدم بالشمس والنجوم وحركة الكواكب وتأثيرها على حياتهم وذلك منذ مئات السنين أي قبل الميلاد وحتى عصرنا الحاضر. فتوصلوا إلى تحديد دوران الكواكب حول الشمس فكانت قطوعًا مخروطية على شكل قطع ناقص.

2 **الهدف:** استكشاف القطوع المخروطية وتعرف أنواعها وعناصرها الأساسية واستخداماتها في الحياة اليومية.

3 **اللوازم:** ورق رسم بياني – مسطرة – فرجار – آلة حاسبة (اختياري).

4 **أسئلة حول التطبيق:**



افترض أنك قمت برحلة مع زملائك إلى الطبيعة لبضعة أيام وأردتم نصب خيمة إلى جانب النهر ومضخة للمياه على أن يكون موقع الخيمة على المسافة نفسها من حافة النهر والمضخة.

استخدم اللوازم لصنع نموذج يحدد كل المواقع الممكنة للخيمة.

a ارسم مستقيمًا أفقيًّا (L) قريبًا من أسفل ورقة الرسم البياني والتي تمثل حافة النهر، ثم رقّم المستقيمات الأفقية فوق المستقيم L (انظر الرسم).

b سجّل موقع المضخة بالنقطة (P) على المستقيم الثالث فوق المستقيم (L) الذي يمثل حافة النهر.

c ارسم مستقيمًا عموديًّا على (L) يمر بالنقطة P، ثم حدّد عليه النقطة S في منتصف المسافة بين (P) والمستقيم (L).

d أوجد البعد d_1 من المستقيم (2) إلى المستقيم (L). ثم ركّز سن الفرجار عند P وبفتحة تساوي d_1 وعيّن نقطتين على المستقيم (2) على أن تكون كل نقطة في جهة مختلفة عن الأخرى من الخط العمودي على L.

e هل توجد نقاط أخرى على المستقيم (2) تبعد نفس البعد عن P والمستقيم L؟

f أوجد البعد d_2 من المستقيم (3) إلى المستقيم (L). عيّن نقطتين على المستقيم (3) لهما البعد d_2 إلى المضخة P.

g تابع العمل بتعيين نقاط مشابهة لما ورد سابقًا في الفقرتين (d), (f) وذلك على مستقيمات أفقية أعلى النقطة S.

h صل النقاط بمنحنى. ما نوع المنحنى الذي حصلت عليه؟ وماذا تمثل هذه النقاط؟

i كيف سيتغير المنحنى إذا كان موقع المضخة قريبًا من حافة النهر أو بعيدًا عن حافة النهر؟

j ما أقرب نقطة إلى المضخة وإلى حافة النهر؟ ما اسم هذه النقطة؟

5 **التقرير:** اكتب تقريرًا مفصلًا يعكس عملك في هذا المشروع ويبيّن حساباتك والمنحنى الذي حصلت عليه.
اذكر إذا كان بالإمكان تسميته بناء على مكتسبات سابقة تعرفت عليها.

دروس الوحدة

القطوع المخروطية – القطع المكافىء	القطع الناقص	القطع الزائد	الاختلاف المركزي
7 – 1	7 – 2	7 – 3	7 – 4

الوحدة السابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت نهايات الدوال (كثيرات الحدود والدوال الجذرية).
- تعرفت ميل المماس على منحنى الدالة عند نقطة على هذا المنحنى.
- أوجدت معادلات خط المماس والخط العمودي على المماس عند نقطة معطاة على منحنى دالة.
- استكشفت الخطوط المقاربة العمودية والأفقية وكتبت معادلاتها.
- رسمت منحنى الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$.
- أوجدت معكوس الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$
- حدّدت خط التناظر لمنحنى الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ وخط التناظر لمنحنى معكوسها.

ماذا سوف تتعلم؟

- كتابة معادلات للقطوع المكافئة.
- تمثيل القطوع المكافئة يدويًّا وإيجاد البؤرة والدليل.
- خواص القطع الناقص.
- كتابة معادلات القطوع الناقصة.
- إيجاد البؤرتين وأطراف المحورين الأكبر والأصغر في القطع الناقص ورسم بيانه.
- كتابة معادلات القطوع الزائدة.
- إيجاد المحور القاطع (الأساسي) والمحور المرافق والخطوط المقاربة والبؤرتين في القطع الزائد ورسم بيانه.
- الاختلاف المركزي للقطوع المخروطية.
- ربط قيمة الاختلاف المركزي بشكل القطع المخروطي.
- إيجاد الاختلاف المركزي.

المصطلحات الأساسية

القطوع المخروطية – قطع مكافئ – قطع ناقص – قطع زائد – بؤرة – دليل – المحور الأصغر والمحور الأكبر – نقطة المركز – رأسي القطع الناقص – رأسي القطع الزائد – خطوط مقاربة مائلة للقطع الزائد – المحور الأساسي (القاطع) للقطع الزائد – المحور المرافق للقطع الزائد – الاختلاف المركزي e

أضف إلى معلوماتك

في سنة 1609 أثبت العالم الفلكي «جوهانس كيبلر» أن النظام الذي أثبته «كوبرنيكس» والذي يتحدث عن مركزية الشمس يعكس هذه الحقيقة بدقة وبذلك وضع «كيبلر» القوانين الثلاثة. وما يهمنا هو القانون الأول، ومفاده ما يلي:

تدور الكواكب حول الشمس بحركة على شكل قطع ناقص حيث إن الشمس هي إحدى بؤرتيه.

جوهانس كيبلر Johannes Kepler

(1571 – 1630)

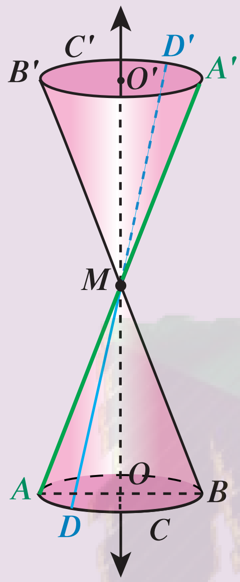
القطوع المخروطية – القطع المكافئ
Conic Sections – Parabola

سوف تتعلم
- القطوع المخروطية.
- القطوع المكافئة وخواصها.
- تطبيقات باستخدام القطوع المكافئة.

المفردات والمصطلحات:
- القطوع المخروطية Conic Sections
- قطع مكافئ Parabola
- بؤرة Focus
- دليل Directrix
- الراسم Tracer
- المحور Axis
- السطح المخروطي Conic Surface
- رأس القطع المكافئ Vertex of Parabola

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن C، C' دائرتين متطابقتين في مستويين متوازيين حيث إن $\overleftrightarrow{OO'}$ عمودي على مستويي C, C' والنقطة M منتصف $\overline{OO'}$.



a ماذا يسمى هذا المجسم؟

b حدّد محوره.

c حدّد الرأس والقاعدة (هل يوجد أكثر من قاعدة؟)

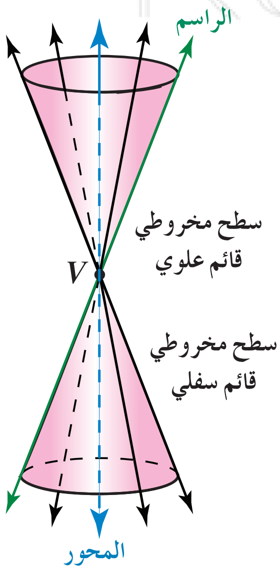
d عيّن راسمًا (مستقيم واصل بين نقطتين على الدائرتين C، C' ويمر بالرأس M)
هل يوجد أكثر من راسم؟
اشرح.

السطح المخروطي Conic Surface

تخيّل شكلًا هندسيًا يتكوّن من مستقيمين غير متعامدين يتقاطعان في نقطة V.

إذا أدرنا هذا الشكل في الفضاء ثلاثي الأبعاد حول منصف إحدى الزاويتين بين هذين المستقيمين، سينشأ من هذا الشكل سطح مخروطين قائمين رأساهما عند النقطة V ومنصف إحدى الزاويتين هو المحور، كما يبيّن الشكل المقابل.

كل مستقيم يمر بالنقطة V ويشكل جزءًا من السطح المخروطي يسمى **راسم**.



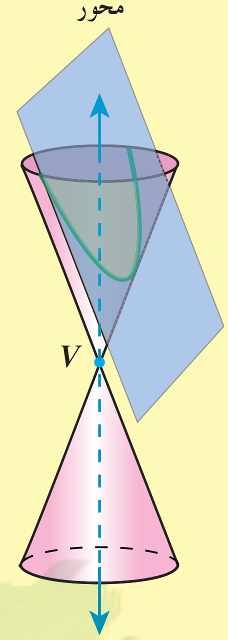
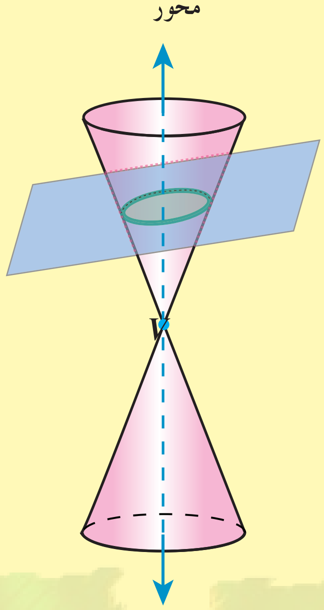
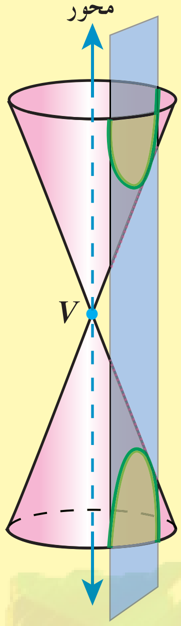
القطوع المخروطية Conic Sections

إذا قُطع السطح الذي حصلنا عليه سابقًا بمستويات تأخذ أوضاعًا واتجاهات مختلفة بالنسبة إلى الراسم أو إلى المحور فسوف نحصل على مقاطع (منحنيات) مختلفة تسمى قطوعًا مخروطية.

الربط بالحياة:

يشبه مخروط الآيس كريم أحد سطوح المخروط.

ويوضح الجدول التالي وضعية المستوى بالنسبة إلى الراسم أو إلى المحور.

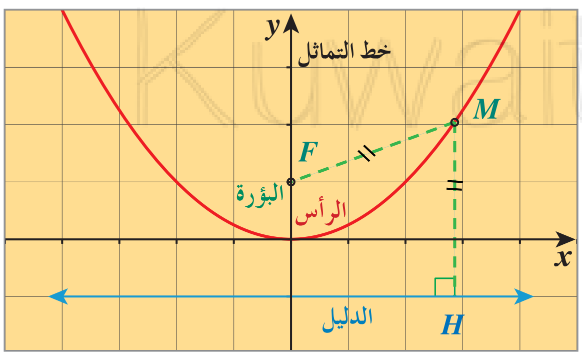
الشكل			
وضع المستوى	المستوى موازٍ لراسم ولا يحويه	المستوى ليس عموديًّا على المحور وليس موازيًا لأي راسم	المستوى موازٍ للمحور ولا يحويه
القطع الناتج	قطع مكافئ	قطع ناقص	قطع زائد

القطع المكافئ Parabola

تعلمنا الكثير عن القطوع المكافئة نلخص ما عرفناه في التعريف التالي:

تعريف: القطع المكافئ

القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى المتساوية البعدين عن نقطة ثابتة معطاة (البؤرة) وعن مستقيم ثابت معطى (الدليل).



في الوصف الهندسي، النقطة المعطاة هي **بؤرة** القطع المكافئ، والخط المستقيم هو **الدليل**، (انظر إلى الشكل المجاور).

يمكن توضيح أن:

- **خط تماثل القطع المكافئ هو المستقيم العمودي على الدليل مارًا بالبؤرة ويسمى محور القطع المكافئ.**
- **رأس القطع المكافئ هو نقطة تقاطع المحور مع المنحنى وهذه النقطة في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل.**

المثال التوضيحي التالي يبيّن استنتاج معادلة القطع المكافئ باستخدام تعريف القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل.

مثال توضيحي

استنتج أن القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(0\,,p)$ معادلته هي: $x^2 = 4py$

الحل:

$\because$ رأس القطع المكافئ نقطة الأصل وبؤرته $F(0\,,p)$

$\therefore$ معادلة دليله $y = -p$

من تعريف القطع المكافئ:

$M(x\,,y)$ متساوية البعدين عن $F(0\,,p)$ وعن المستقيم $y = -p$.

بعد النقطة M عن المستقيم $y = -p$ هو $|y+p|$ وحدة طول

المسافة من $M(x\,,y)$ إلى $F(0\,,p)$ هي $\sqrt{x^2+(y-p)^2}$ وحدة طول

من تعريف القطع المكافئ:

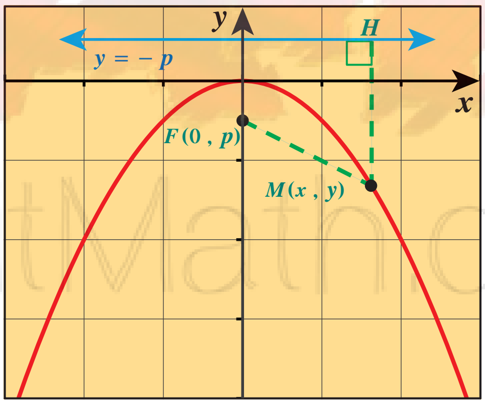
$$|y+p| = \left(\sqrt{x^2+(y-p)^2}\right)$$

بتربيع كل من الطرفين $\quad |y+p|^2 = \left(\sqrt{x^2+(y-p)^2}\right)^2$

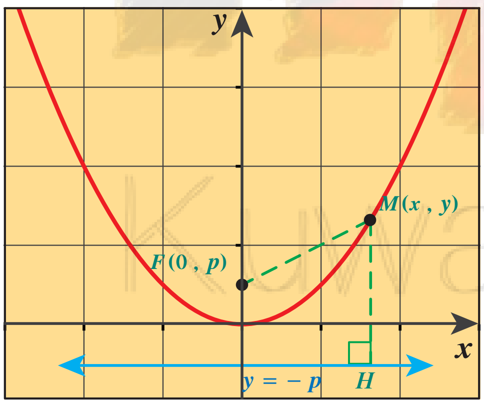
$$(y+p)^2 = x^2+(y-p)^2$$

بتفكيك كل من الطرفين $\quad y^2+2py+p^2 = x^2+y^2-2py+p^2$

تبسيط $\quad x^2 = 4py$



شكل (b) حيث $p < 0$



شكل (a) حيث $p > 0$

لاحظ أن الرأس $(0,0)$ يقع في منتصف المسافة
بين البؤرة والدليل في كل من الحالتين.

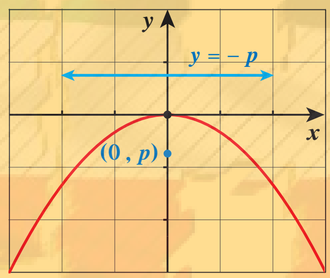
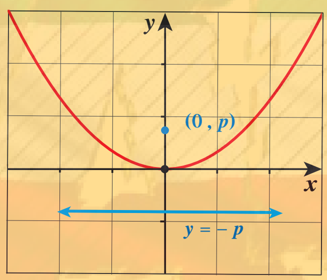
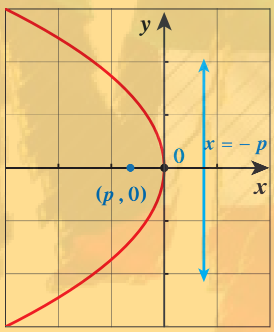
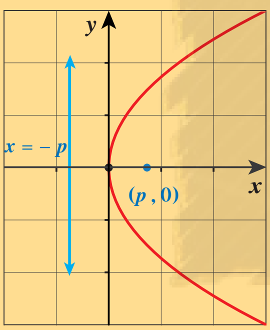
تذكر:
قانون المسافة بين نقطتين في المستوى:
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

تذكر:
$(|x|)^2 = |x|^2 = x^2$

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(0\,,p)$ ومعادلة دليله $y = -p$ هي $x^2 = 4py$

ويمكن استنتاج معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(p\,,0)$ ومعادلة دليله $x = -p$ هي $y^2 = 4px$.

قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل $(0, 0)$

الصورة العامة	$x^2 = 4py$		$y^2 = 4px$	
الفتحة	إلى أعلى أو إلى أسفل		إلى اليمين أو إلى اليسار	
البؤرة	$(0, p)$		$(p, 0)$	
الدليل	$y = -p$		$x = -p$	
محور التناظر	محور الصادات $(y-axis)$		محور السينات $(x-axis)$	
المسافة من الرأس إلى البؤرة	$\lvert p \rvert$			
المسافة من الرأس إلى الدليل				
إشارة p	$p < 0$	$p > 0$	$p < 0$	$p > 0$
الشكل				

مثال (1)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي:

a رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(4, 0)$

b بؤرته $F(0, -3)$ ودليله المستقيم: $y = 3$

الحل:

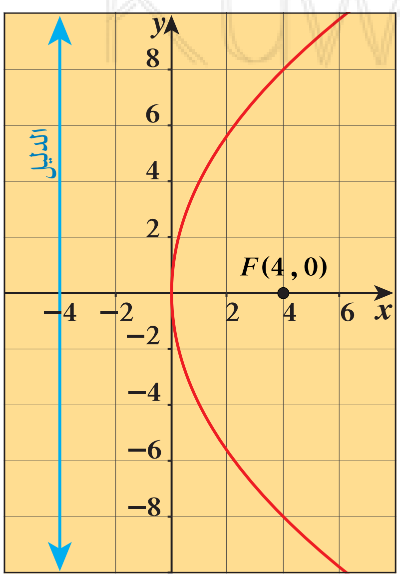
a الرأس: نقطة الأصل $(0, 0)$

$\because$ البؤرة: $F(4, 0)$ تنتمي إلى الجزء الموجب من محور السينات

$p = 4$، معادلة الدليل: $x = -4$ (مستقيم رأسي)

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

معادلة القطع المكافئ هي: $y^2 = 16x$



شكل توضيحي

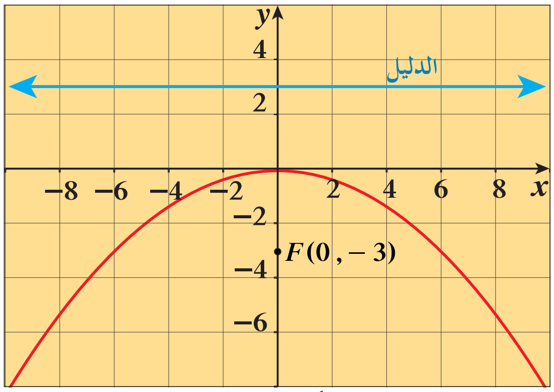
b ∵ البؤرة: $F(0, -3) \Longrightarrow p = -3$

معادلة الدليل: $y = 3$ (مستقيم أفقي)

∴ رأس القطع في منتصف المسافة بين F والدليل أي $(0, 0)$

∴ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2 = 4py$

معادلة القطع المكافئ هي: $x^2 = -12y$



شكل توضيحي

حاول أن تحل

1 a أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(-4, 0)$

b أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(0, 2)$ ودليله المستقيم $y = -2$

مثال (2)

أوجد البؤرة ومعادلة الدليل لقطع مكافئ ، ثم ارسم شكلًا تقريبيًّا لهذا القطع في كل مما يلي:

a المعادلة: $x^2 = -2y$

b المعادلة: $\frac{1}{3}y^2 = x$

الحل:

a ∵ المعادلة المعطاة للقطع المكافئ على الصورة:

$$x^2 = 4py$$

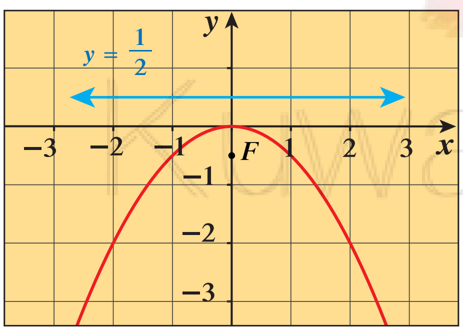
$x^2 = -2y$ ، محور التماثل هو $y - axis$

$$\therefore \quad 4p = -2 \Longrightarrow p = -\frac{1}{2} \quad , \quad p < 0$$

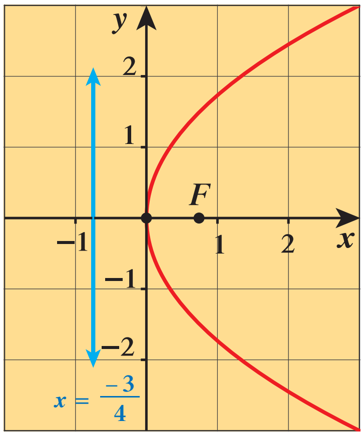
∴ البؤرة: $F(0, p) = F\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

معادلة الدليل: $y = -p \Longrightarrow y = -\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$y = \frac{1}{2}$$



شكل القطع المكافئ



شكل القطع المكافئ

b ∵ المعادلة المعطاة للقطع المكافئ على الصورة: $y^2 = 4px$

محور التماثل هو $x - axis$ ، $y^2 = 3x$

$\therefore \quad 4p = 3 \Longrightarrow p = \frac{3}{4}$

البؤرة: $F(p, 0) = F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

معادلة الدليل: $x = -p \Longrightarrow x = -\frac{3}{4}$

حاول أن تحل

2 أوجد البؤرة والدليل لقطع مكافئ، ثم ارسم شكلًا تقريبيًّا لهذا القطع في كل مما يلي:

a المعادلة: $y = \frac{x^2}{4}$

b المعادلة: $x = -\frac{1}{5}y^2$

مثال (3)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(1, 2)$ وخط تماثله $x - axis$.

الحل:

رأس القطع المكافئ نقطة الأصل

∵ خط تماثله $x - axis$

∴ معادلته على الصورة $y^2 = 4px$

∵ القطع المكافئ يمر بالنقطة $A(1, 2)$ ∴ تحقق المعادلة أي أن:

نعوّض في معادلة القطع عن x بـ 1 وعن y بـ 2

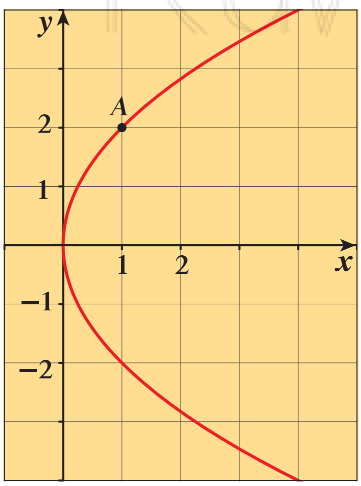
$(2)^2 = 4p(1)$

$4 = 4p \Longrightarrow p = 1$

المعادلة: $y^2 = 4px$

$y^2 = 4(1)x$

$y^2 = 4x$



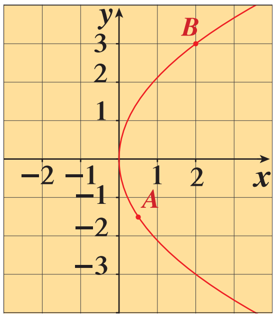
حاول أن تحل

3 أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(1, 1)$ وخط تماثله $y - axis$.

مثال (4)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين

$A\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$, $B(2,3)$



الحل:

∵ منحنى القطع المكافئ يمر بالنقطتين $A\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$, $B(2,3)$

ورأسه نقطة الأصل

∴ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

وبالتعويض عن (x , y) بإحداثيات B (أو بإحداثيات A) نحصل على:

$(+3)^2 = 4p(2)$

$9 = 8p \Longrightarrow p = \frac{9}{8}$

المعادلة:

$y^2 = 4px$

$y^2 = 4 \times \frac{9}{8}x$

$y^2 = \frac{9}{2}x$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطتين $A(-1,4)$, $B(1,4)$

معلومة:

في 23 فبراير عام 1986 تمّ افتتاح مبنى مجلس الأمة الكويتي بالتزامن مع احتفالات العيد الوطني الخامس والعشرين للدولة.

يقع المبنى في منطقة القبلية على شارع الخليج العربي وهو تحفة معمارية مشابهة لخيمة ويرمز للضيافة الكويتية العريقة. تذكر بعض الدراسات أن المصمم الدنماركي يورن أوتسون قام بتصميمه على أن تكون سقيفة المدخل الواسعة همزة وصل بين البحر والصحراء.

مثال (5)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $x = -3$

الحل:

∵ معادلة الدليل هي: $x = -3$ (مستقيم رأسي)

والدليل متعامد مع خط التماثل

∴ خط التماثل أفقي. $(x - axis)$

∵ رأس القطع نقطة الأصل

∴ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

معادلة الدليل هي على الصورة $x = -p$

$x = -3 \Longrightarrow p = 3$

المعادلة:

$y^2 = 4px$

$y^2 = 4(3)x$

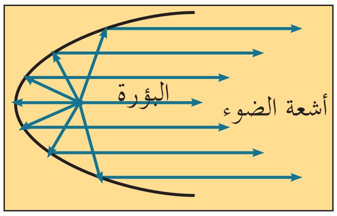
$y^2 = 12x$

حاول أن تحل

5 أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $y = 1$

تطبيقات باستخدام القطوع المكافئة Applications Using Parabolas

إذا دورنا قطعًا مكافئًا في الفراغ الثلاثي الأبعاد باستخدام خط التماثل كمحور للدوران، فإن القطع المكافئ ينتج **سطحًا مكافئًا Paraboloid**.



مقطع عرضي لمجسم مكافئ

إذا وضعنا مصدرًا ضوئيًا في بؤرة سطح مكافئ عاكس، فإن الضوء ينعكس من هذا السطح في خطوط مستقيمة موازية لمحور التماثل، كما هو موضح في الشكل المقابل.

هذا يبيّن كيف تعمل الأنوار (الكشافات) الرئيسية للسيارة.

ينطبق المبدأ نفسه على الإشارات التي تنطلق في الاتجاه العكسي، مثل بعض مكبرات الصوت والعكس صحيح.

عندما تنطلق الموجات الضوئية أو الصوتية نحو السطح المكافئ موازية لخط تماثله فإنها تنعكس من هذا السطح وتتجمع في البؤرة.

الهدف هو تركيز الضوء أو الصوت عند البؤرة حيث يوضع المستقبل الإلكتروني (الريسيفر).

على سبيل المثال الميكروفونات المكافئة التي تستخدم أثناء مباريات كرة القدم.

مثال (6)

تُستخدم ميكروفونات مكافئة على جانبي ملعب لالتقاط الأصوات من داخل الملعب.

إذا كان قد تولد ميكروفون مكافئ من تدوير قطع مكافئ معادلته: $y^2 = 15x$،

فحدّد موضع البؤرة (جهاز الاستقبال الإلكتروني) لهذا القطع المكافئ.

الحل:

إذا نظرنا إلى السطح المكافئ باعتبار أن رأسه $(0\,,0)$ وخط تماثله هو محور السينات،

$$\because\ y^2 = 4px$$

$$y^2 = 15x$$

$$\therefore\ 4p = 15$$

$$p = \frac{15}{4}$$

البؤرة هي عند: $F(p\,,0) = F\left(\frac{15}{4}\,,0\right)$

فيلزم أن يوضع المستقبل (جهاز الاستقبال الإلكتروني) عند النقطة $F\left(\frac{15}{4}\,,0\right)$

حاول أن تحل

6 تصنع إحدى الشركات الكشافات المكافئة لنوعيات عديدة من السيارات.

إذا كان لأحد هذه الكشافات سطح مكافئ متولد من تدوير القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 = 12y$، فأين سيكون موضع المصباح الكهربائي؟

مثال (7)

تصنع إحدى الشركات مصابيح أمامية للسيارات. إذا كان أحد المصابيح على شكل سطح مكافئ متولد من تدوير قطع مكافئ معادلته $y^2 = 12x$ ، فأين يجب وضع لمبة المصباح؟

الحل:

إذا نظرنا إلى السطح المكافئ باعتبار أن رأسه $(0\,,0)$ ومحور تماثله $x-axis$

معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $\quad y^2 = 4px$

$$\because \quad y^2 = 12x$$

$$4p = 12 \Longrightarrow p = 3$$

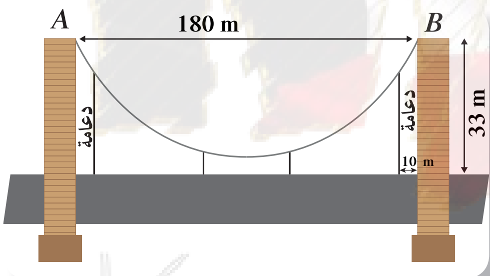
البؤرة: $\quad F(3\,,0) \qquad F(p\,,0)$

توضع اللمبة على بعد 3 (وحدات قياس) من رأس القطع المكافئ.

حاول أن تحل

7 في مثال (7)، ما معادلة القطع المكافئ إذا كانت اللمبة تبعد 4 (وحدات قياس) عن رأس القطع المكافئ؟

مثال (8)



يصل سلك معدني متدلٍ بين رأسي عمودي جسر. السلك المعدني هو على صورة قطع مكافئ. يبعد العمودان عن بعضهما مسافة 180 m ويبلغ ارتفاع كل منهما 33 m ، يبلغ أصغر ارتفاع للسلك عن الطريق العام 3 m ، وضعت على الطريق دعامات للسلك المتدلي. أوجد طول الدعامة التي تبعد 10 m عن أي من العمودين.

الحل: باعتبار رأس القطع المكافئ هو $(0\,,0)$

معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $\quad x^2 = 4py$

إحداثيات النقطة B هي: $\quad x_B = \dfrac{180}{2} = 90 \;,\; y_B = 33 - 3 = 30$

بالتعويض في معادلة القطع المكافئ نحصل على: $\quad (90)^2 = 4p \times 30$

$$p = \frac{90^2}{4 \times 30} = 67.5$$

معادلة القطع المكافئ: $\quad x^2 = 4 \times 67.5y$

$$x^2 = 270y$$

الإحداثي السيني للدعامة: $\quad 90 - 10 = 80$

بالتعويض في معادلة القطع المكافئ: $\quad (80)^2 = 270y$

$$y \approx 23.7$$

يبلغ طول الدعامة حوالي: $\quad 23.7 + 3 = 26.7\text{m}$

حاول أن تحل

8 في مثال (8)، إذا كان البعد بين العمودين 220 m وارتفاع كل عمود 36 m ، فأوجد طول الدعامة التي تبعد 10 m عن أي من العمودين.

القطع الناقص

Ellipse

سوف تتعلم

- القطوع الناقصة وخواصها.
- تطبيقات باستخدام القطوع الناقصة.

المفردات والمصطلحات:

- قطع ناقص Ellipse
- بؤرتين Two Foci
- المحور الأصغر Minor Axis
- المحور الأكبر Major Axis
- نقطة المركز Center
- رؤوس Vertices

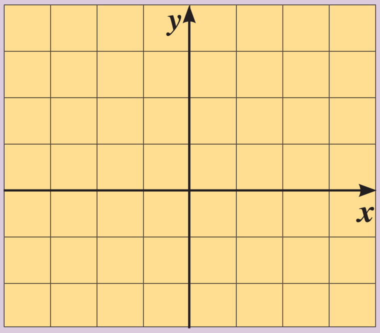
دعنا نفكر ونتناقش

1 a أوجد إحداثيات نقاط التقاطع مع محور السينات ومحور الصادات للمنحنى حيث معادلته: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=1$

b عيّن أربع نقاط أخرى تحقق المعادلة المعطاة أعلاه.

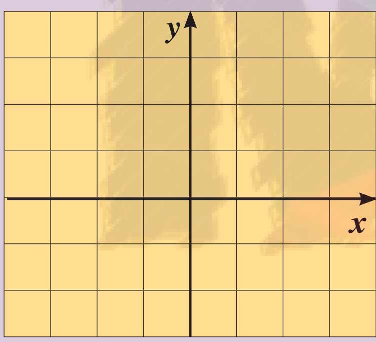
ما شكل المنحنى الذي تتوقع أن تحصل عليه؟

c ما إحداثيات نقطة المركز للشكل الذي حصلت عليه؟



2 a أوجد إحداثيات نقاط التقاطع مع محور السينات ومحور الصادات للمنحنى الذي معادلته: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ عيّن هذه النقاط على المحاور.

b عيّن أربع نقاط أخرى تحقق المعادلة المعطاة. وارسم شكلًا تقريبيًّا ثم قارن بين الشكلين.



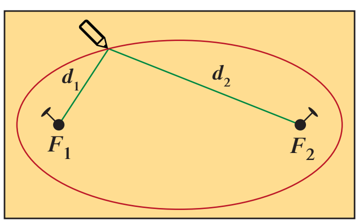
تعريف: القطع الناقص

القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابتًا.

معلومة:

لاحظ أنه إذا انطبقت بؤرتا القطع الناقص على بعضهما، فإن الشكل الناتج يكون دائرة نصف قطرها هو نصف طول الخيط.

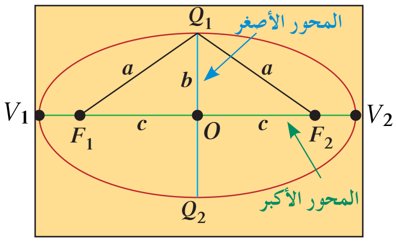
تسمى النقطتان الثابتتان **بؤرتين**، وتسمى نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما **مركز القطع الناقص**. يوضّح الشكل المقابل قطعًا ناقصًا بؤرتاه F_1 , F_2، والبعدان اللذان مجموعهما ثابت هما d_1 , d_2.



شكل **(a)**

لتوضيح تعريف القطع الناقص عمليًّا، تخيل خيطًا طوله ثابت، أحد طرفيه مثبت عند إحدى البؤرتين وطرفه الآخر مثبت عند البؤرة الثانية، ويتحرك قلم على الخيط وهو مشدود، فإن المنحنى الذي يرسمه القلم هو قطع ناقص. وإن طول الخيط هو مجموع البعدين d_1 , d_2 انظر إلى الشكل **(a)**.

وفي القطع الممثل للشكل (b) القطعة المستقيمة $V_1 V_2$ المارة بالبؤرتين وطرفاها على القطع تسمى **المحور الأكبر للقطع (الرئيسي)** ويسمى طرفاها **رأسي القطع الناقص**. والقطعة المستقيمة $Q_1 Q_2$ المارة بالمركز والعمودية على المحور الأكبر، ويقع طرفاها على القطع تسمى **المحور الأصغر للقطع الناقص (الثانوي)**. هذان المحوران هما **خطا تماثل القطع الناقص**، ونقطة تقاطعهما تسمى مركز القطع الناقص.



شكل (b)

$a^2 = b^2 + c^2$

في الشكل (b) عندما يكون القلم على أحد رأسي القطع الناقص وليكن V_1، يكون طول الخيط هو $V_1 F_1 + V_1 F_2$ وإذا وضعنا $F_2 V_2$ بدلًا من $V_1 F_1$ فإن طول الخيط يصبح $V_2 F_2 + V_1 F_2$ وهو طول المحور الأكبر.

وفي دراسة القطع الناقص، اتفق على اعتبار **طول المحور الأكبر $2a$ وطول المحور الأصغر $2b$ والمسافة بين البؤرتين $2c$**.

وهناك علاقة أساسية بين القيم a , b , c يمكن استنتاجها من الشكل (b) حيث $Q_1 F_2$ ،$Q_1 F_1$ متساويان في الطول ومجموعهما هو $2a$، أما OQ_1 فتساوي b، OF_1 تساوي c.

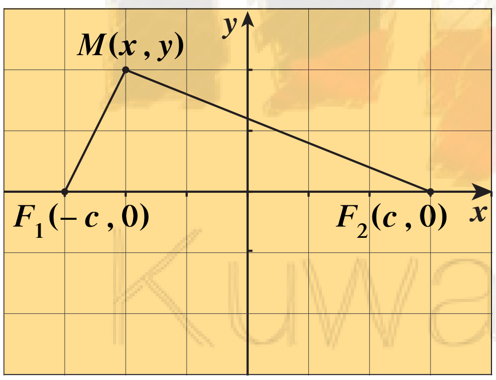
$\therefore$ $a^2 = b^2 + c^2$ أو $c^2 = a^2 - b^2$. وللقطع الناقص دليلان.

مثال توضيحي

لنأخذ في المستوى الإحداثي نقطتان ثابتتان على محور السينات $F_1(-c , 0)$ ، $F_2(c , 0)$ والنقطة $M(x , y)$ متحركة بحيث:

$$MF_1 + MF_2 = 2a \qquad (1)$$

$a > c$ ثابتان $a \neq 0$, $c \neq 0$



$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \ ; \ MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$MF_1^{\,2} - MF_2^{\,2} = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - x^2 + 2cx - c^2 - y^2$$

$$MF_1^{\,2} - MF_2^{\,2} = 4cx \qquad (2)$$

$$(MF_1 - MF_2)(MF_1 + MF_2) = 4cx \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

من

$$(MF_1 - MF_2)(2a) = 4cx$$

$$MF_1 - MF_2 = \frac{2cx}{a} \qquad (3)$$

من $(1) , (3)$

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

$$MF_1 - MF_2 = \frac{2cx}{a}$$

نستنتج:

$$MF_1 = a + \frac{cx}{a} \ , \ MF_2 = a - \frac{cx}{a}$$

لنأخذ

$$MF_1^{\,2} = (x+c)^2 + y^2 \text{ ثم } MF_1^{\,2} = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2$$

فنحصل على:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}$$

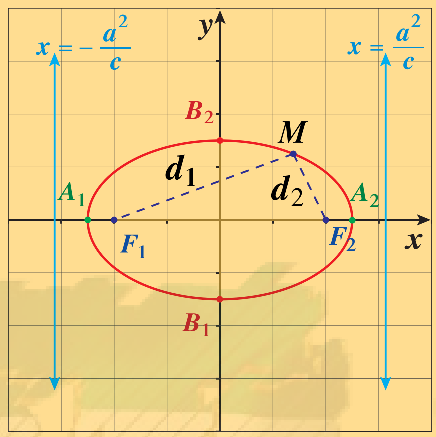
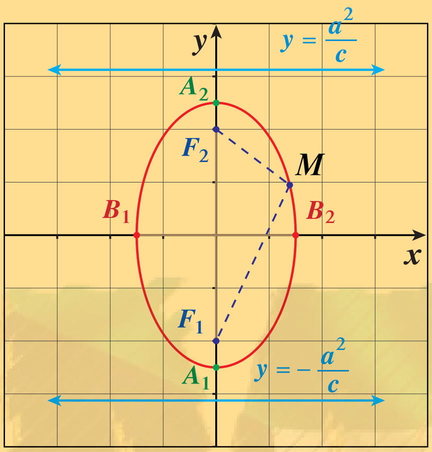
$$x^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2$$

نضع $a^2 - c^2 = b^2$:

$$x^2\frac{(a^2 - c^2)}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2b^2}{a^2} + y^2 = b^2$$

بالقسمة على b^2 نحصل على: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ وهي معادلة القطع الناقص.

معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ كالتالي:

	$a > b > 0$	$a > b > 0$
المعادلة	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
بيان القطع		
المحور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
الرأسان طرفا المحور الأكبر	$A_1(-a,0)$ ، $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$ ، $A_2(0,a)$
طول المحور الأكبر	$2a$	
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0,-b)$ ، $B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)$ ، $B_2(b,0)$
طول المحور الأصغر	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0), F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$ ، $F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$a^2 = b^2 + c^2$	
معادلتا الدليلين	$x = -\frac{a^2}{c}$ ، $x = \frac{a^2}{c}$	$y = -\frac{a^2}{c}$ ، $y = \frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه ومركزه	

مثال (1)

إذا كانت: $\frac{y^2}{10} + \frac{x^2}{16} = 1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

a رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر.

b البؤرتين.

c معادلتي دليلي القطع.

d طول كل من المحورين ثم ارسم شكلًا تقريبيًّا للقطع.

الحل:

a معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ومن معادلة القطع الناقص نجد أن:

$$a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4$$

$$b^2 = 10 \Longrightarrow b = \sqrt{10}$$

والمحور الأكبر ينطبق على محور السينات

رأسا القطع الناقص هما: $A_1(-4,0)\ ,\ A_2(4,0)$

طرفا المحور الأصغر هما: $B_1(0,-\sqrt{10})\ ,\ B_2(0,\sqrt{10})$

b

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 16 - 10$$

$$= 6$$

ومنه $c = \sqrt{6}$

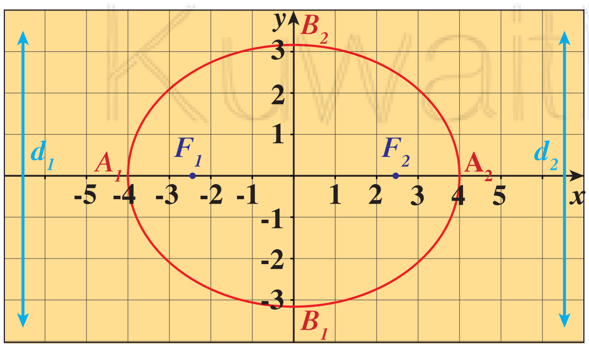
فنحصل على: $F_1(-\sqrt{6},0)\ ,\ F_2(\sqrt{6},0)$

c معادلة الدليلين: $x = \frac{a^2}{c}\ ,\ x = -\frac{a^2}{c}$ ومنه نجد:

$$x = \frac{16}{\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{3} \qquad x = \frac{-16}{\sqrt{6}} = \frac{-8\sqrt{6}}{3}$$

d طول المحور الأكبر هو $2a$: $2a = 2 \times 4 = 8$

طول المحور الأصغر هو $2b$: $2b = 2\sqrt{10}$



حاول أن تحل

1 إذا كانت: $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

a رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر.

b البؤرتين.

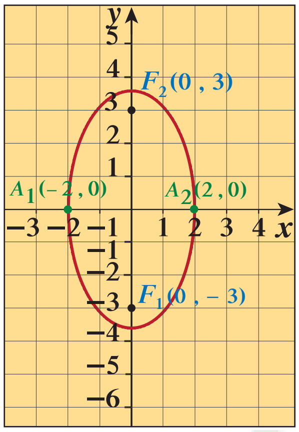
c معادلة دليلي القطع.

d طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلًا تقريبيًّا للقطع.

مثال (2)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: $F_1(0,-3)$, $F_2(0,3)$ وطول محوره الأصغر 4، ثم ارسم شكلًا تقريبيًا لهذا القطع.

الحل:



تقع البؤرتان على محور الصادات فتكون المعادلة على الصورة $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

وتكون $c = 3$، طول المحور الأصغر $= 4$

$$\therefore\ 2b = 4 \Longrightarrow b = 2$$

$\therefore$ طرفا المحور الأصغر $(2,0)$, $(-2,0)$

$$\therefore\ b^2 = 4$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$9 = a^2 - 4$$

$$a^2 = 13$$

$\therefore$ معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{13}=1$

حاول أن تحل

2 أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$ وطول محوره الأكبر 6، وارسم شكلًا تقريبيًا لهذا القطع.

مثال (3)

أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $25x^2+16y^2-400=0$

الحل:

$$25x^2+16y^2-400=0$$

$$25x^2+16y^2=400$$

قسمة طرفي المعادلة على 400

$$\frac{25x^2}{400}+\frac{16y^2}{400}=\frac{400}{400}$$

الصورة العامة للقطع الناقص

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$$

$$b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4$$

$$a^2 = 25 \Longrightarrow a = 5$$

$$\because\ c^2 = a^2 - b^2$$

$$\therefore\ c^2 = 25 - 16$$

$$c^2 = 9 \Longrightarrow c = 3$$

البؤرتان على محور الصادات: $F_1(0,-3)$, $F_2(0,3)$

الرأسان على محور الصادات: $B_1(0,-5)$, $B_2(0,5)$

طول المحور الأكبر هو $2a$ فيكون: $2a = 2\times 5 = 10$

حاول أن تحل

3 أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $x^2+4y^2=16$

مثال (4)

أوجد معادلة قطع ناقص إذا كان طول محوره الأكبر 12 cm والمسافة بين البؤرتين 8 cm.

الحل:

$\because$ طول المحور الأكبر هو 12 cm

$\therefore 2a = 12 \Longrightarrow a = 6$

$\because$ المسافة بين البؤرتين هو 8 cm

$\therefore 2c = 8 \Longrightarrow c = 4$

ولكن: $a^2 = b^2 + c^2$

$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$

معادلة القطع الناقص هي: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

بالتعويض نحصل على المعادلة: $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{20} = 1$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة قطع ناقص إذا كان محوره الأكبر 16 cm والمسافة بين البؤرتين 10 cm.

مثال (5)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه $F(2,0)$ ويمر بالنقطة $A(2,1)$.

الحل:

$\because$ البؤرة $F(2,0)$ تقع على محور السينات

$\therefore$ معادلة للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل هي:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad c = 2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$(2)^2 = a^2 - b^2$$

$$a^2 = b^2 + 4 \qquad (1)$$

$\because$ القطع الناقص يمر بالنقطة $A(2,1)$

$$\therefore \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{4b^2 + a^2}{a^2 b^2} = 1$$

$$4b^2 + a^2 = a^2 b^2 \qquad (2)$$

بالتعويض (1) في (2) نجد: $4b^2 + b^2 + 4 = b^2(b^2 + 4)$

ومنه نحصل على المعادلة: $b^4 - b^2 - 4 = 0$

$$b^2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$

بالتعويض عن b^2 في (1) نجد:

$$a^2 = \frac{9+\sqrt{17}}{2}$$

ومعادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{x^2}{\frac{9+\sqrt{17}}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} = 1$$

$$\frac{2x^2}{9+\sqrt{17}} + \frac{2y^2}{1+\sqrt{17}} = 1$$

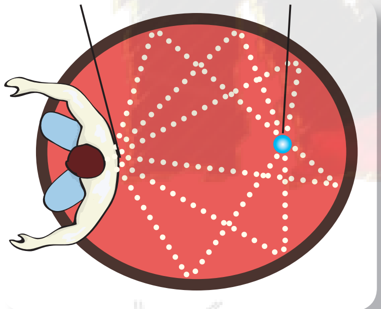
حاول أن تحل

5 a هل يمكنك حل مثال (5) بطريقة أخرى؟ فسّر.

b أوجد معادلة القطع الناقص الذي محوره الأصغر أفقي طوله 10 cm ويمر بالنقطة $A(2, 2\sqrt{6})$.

تطبيقات باستخدام القطوع الناقصة Applications Using Ellipses

عندما ندوّر قطعًا ناقصًا في فراغ ثلاثي الأبعاد حول محوره الأكبر، فإن القطع الناقص يُنتج سطحًا لمجسم قطع ناقص. فالضوء أو الصوت المنبعث من إحدى البؤرتين سينعكس عند السطح ويمر خلال البؤرة الأخرى. كذلك تحتوي متاحف العلوم على صالات عرض للهمس تعمل بهذا المبدأ، إذا همس شخص يقف في إحدى البؤرتين، فيمكن للشخص الذي يقف في البؤرة الأخرى أن يسمعه بسهولة، حتى إذا كان المتحدث يدير له ظهره. هناك تطبيق طبي أيضًا، في علاج حصوات الكلى. يبعث جهاز تفتيت الحصوات بموجات صدمية فائقة التردد (UHF) من إحدى البؤرتين وتمر الموجات الصدمية عبر حصوات كلية المريض في البؤرة الثانية وتفتتها.



مثال (6)

للقطع الناقص الذي يولد السطح الناقص لجهاز تفتيت الحصوات، محور أكبر نقطتاه الطرفيتان $A_1(-6, 0)$ ، $A_2(6, 0)$، ومحور الأصغر إحدى نقطتيه الطرفيتين $B_1(0, -2.5)$ ، أوجد إحداثيات البؤرتين.

الحل:

من المعلومات المعطاة نجد أن: $a = 6$ ، $b = 2.5$ ومركزه $(0, 0)$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$= \sqrt{6^2 - 2.5^2}$$

$$\approx 5.454$$

البؤرتان هما بالتقريب النقطتان $F_1(-5.45, 0)$ ، $F_2(5.45, 0)$

حاول أن تحل

6 يتولد المجسم الناقص لأحد أجهزة تفتيت الحصوات، من دوران قطع ناقص نقطتا طرفي محوره الأكبر $A_1\,(-8\,,0)\,,\,A_2\,(8\,,0)$. إذا كانت إحدى نقطتي طرفي محوره الأصغر $B_1\,(0\,,3.5)$ ؛ فأوجد إحداثيات البؤرتين.

مثال (7)

لمتابعة الهمس في الصالات البيضاوية الشكل فإن الصوت الذي ينطلق من بؤرة يمكن الاستماع إليه بشكل تام في البؤرة الثانية. على افتراض أن إحدى الصالات الكبرى مبنية على شكل بيضاوي طولي محوريها 98 m و 46 m.
على أي مسافة من مصدر الصوت يجب أن يكون موقع شخص ليتمكن من سماعه بشكل واضح؟

الحل:

$\because$ مصدر الصوت عند إحدى البؤرتين

$\therefore$ يجب أن يقف الشخص عند البؤرة الأخرى حتى يسمع الصوت بوضوح

الشكل البيضاوي للصالة يمثل قطعًا ناقصًا له محور أكبر طوله 98 m

$$\therefore\ 2a = 98$$
$$a = 49$$

وطول المحور الأصغر 46 m

$$\therefore\ 2b = 46$$
$$b = 23$$

من المعادلة:

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = (49)^2 - (23)^2$$
$$c^2 = 1872$$
$$c \approx 43.267$$

والمسافة بين البؤرتين هي:

$$2c \approx 86.5$$

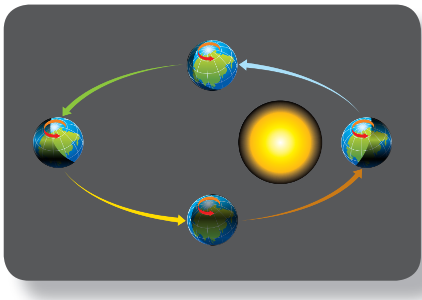
أي حوالي 86.5 m

يجب أن يكون موقع الشخص على بعد 86.5 m تقريبًا من مصدر الصوت.

حاول أن تحل

7 على افتراض أن الصالة بيضاوية الشكل طولي محوريها 78 m ، 36 m.
على أي مسافة من مصدر الصوت يجب أن يكون موقع شخص ليتمكن من سماع الصوت المنطلق بشكل واضح؟

مثال (8)



تتحرك كواكب المجموعة الشمسية في مدارات على شكل قطع ناقص حيث إن الشمس هي إحدى بؤرتيه. على افتراض أن المحور الأكبر أفقي وطوله حوالى 1.52×10^8 km والمحور الأصغر طوله حوالى 1.48×10^8 km،

ما المسافة بين الشمس والبؤرة الثانية؟

الحل:

$\because$ المدار على شكل قطع ناقص

طول المحور الأكبر 1.52×10^8

$$\therefore\ 2a = 1.52 \times 10^8$$

$$a = 0.76 \times 10^8 = 76 \times 10^6$$

وطول المحور الأصغر 1.48×10^8

$$\therefore\ 2b = 1.48 \times 10^8$$

$$b = 0.74 \times 10^8 = 74 \times 10^6$$

من المعادلة:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = (76 \times 10^6)^2 - (74 \times 10^6)^2 = 10^{12}(5\,776 - 5\,476)$$

$$= 300 \times 10^{12} \Longrightarrow c \approx 17.3 \times 10^6$$

$$2c \approx 34.6 \times 10^6$$

أي أن المسافة بين الشمس والبؤرة الثانية هي 34.6×10^6 km

حاول أن تحل

8 إذا كان الكوكب المقصود في المثال (8) هو كوكب الأرض، اكتب معادلة تمثل حركة كوكب الأرض حول الشمس.

7–3

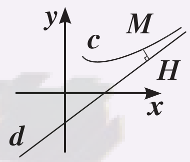
القطع الزائد
Hyperbola

سوف تتعلم
- القطع الزائد.
- خواص القطع الزائد.

المفردات والمصطلحات:
- قطع زائد Hyperbola
- خطوط مقاربة Asymptotes
- رؤوس Vertices

معلومة:

الخط المقارب المائل



d هو خط مقارب مائل للمنحنى c إذا المسافة $MH \longrightarrow 0$ عندما تبتعد النقطة M إلى اللا نهاية على المنحنى c.

الربط بالتكنولوجيا:

لرسم بيان القطوع المخروطية على الآلة الحاسبة البيانية:
من القائمة Menu أنقر على Conics فتظهر الصفحة.
Select Equation

$X = A(Y-K)^2+K$

$X = AY^2+BY+C$

$Y = A(X-H)^2+K$

$Y = AX^2+BX+C$

$(X-H)^2+(Y-H)^2 = R^2$

$AX^2+AY^2+BX+CY+D=0$

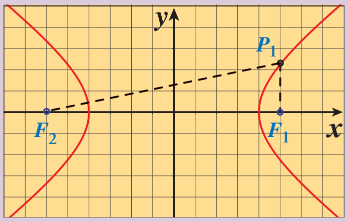
$\frac{(X-H)^2}{A^2}+\frac{(Y-H)^2}{B^2}=1$

$\frac{(X-H)^2}{A^2}-\frac{(Y-H)^2}{B^2}=1$

$\frac{(Y-H)^2}{B^2}-\frac{(X-H)^2}{A^2}=1$

اختر المعادلة. فتظهر صفحة تتضمن المعاملات والثوابت.
عوّض ثم أنقر على $\boxed{=}$ فيظهر الرسم البياني للقطع المخروطي على الشاشة.

دعنا نفكر ونتناقش



الشكل المجاور يمثل بيان المعادلة:

$9x^2 - 16y^2 = 144$

a اكتب المعادلة على الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

b تحقق من أن النقطة $P_1\left(5,\frac{9}{4}\right)$ تحقق المعادلة السابقة.

c أوجد بعد النقطة P_1 عن كل من النقطتين $F_1(5,0)$ ، $F_2(-5,0)$

d أوجد: $|P_1F_1 - P_1F_2|$

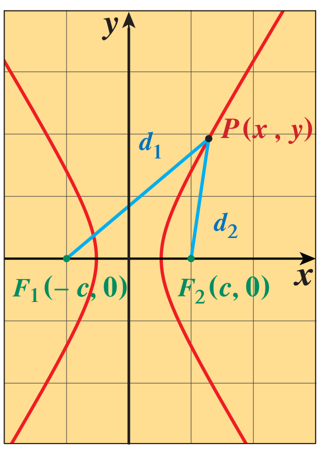
e كرر الخطوات **c** ، **b** مع النقطتان: $P_2\left(-5,\frac{9}{4}\right)$ ، $P_3(4,0)$

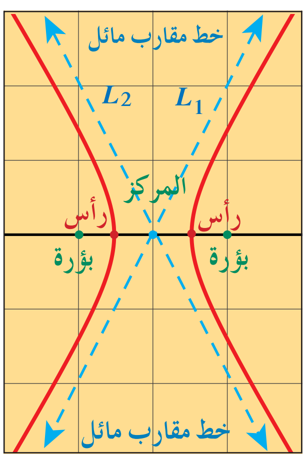
f ماذا تلاحظ؟

تعريف: القطع الزائد

القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوي ثابتًا.

يوضح الشكل **(a)** قطعًا زائدًا، وكل من النقطتين الثابتتين F_2 ، F_1 تسمى **بؤرة**، وبعدا أي نقطة عنهما d_2 ، d_1 (حيث الفرق بينهما ثابت). يتكون القطع الزائد من منحنيين منفصلين (فرعين) ويسمى الخطان L_2 ، L_1 **خطين مقاربين مائلين** للقطع. المستقيم المار بالبؤرتين يقطع فرعي القطع في **نقطتي الرأسين**، وتسمى القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين **بالمحور القاطع (الأساسي)**، كما تسمى نقطة منتصف المحور القاطع **مركز القطع الزائد**.





شكل **(a)**

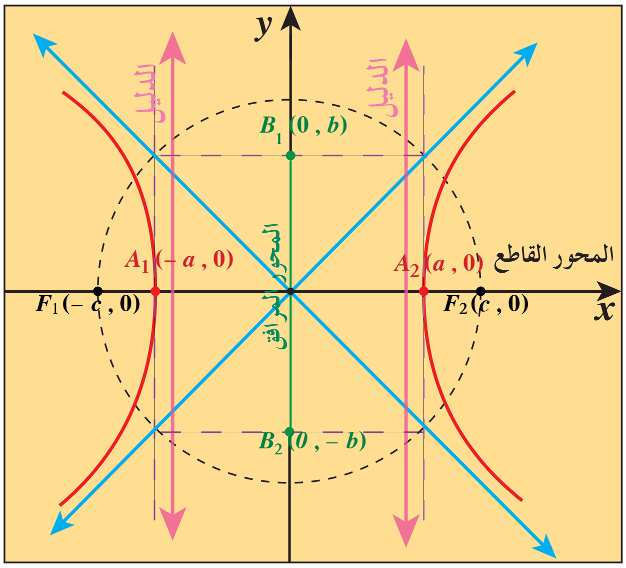
في الشكل **(b)** إذا رسمنا مماسين للقطع الزائد عند نقطتي الرأسين، ودائرة مركزها هو مركز القطع الزائد، وطول نصف قطرها c هو بعد البؤرة عن مركز القطع، فإن الدائرة تقطع كل مماس بنقطتين. وبرسم مستطيل رؤوسه النقاط الأربع يكون أحد بعديه $2a$ مساويًا لطول المحور القاطع $(\overline{A_1A_2})$، وبعده الآخر $2b$ مساويًا لطول **المحور المرافق** $(\overline{B_1B_2})$، وبالتالي، نحصل على العلاقة الأساسية:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

نلاحظ أن: $c > a \ , \ c > b$

كما أنه لا توجد علاقة ثابتة بين $a \ , \ b$ كما في القطع الناقص.

وللقطع الزائد دليلين كما في الشكل.



شكل **(b)**

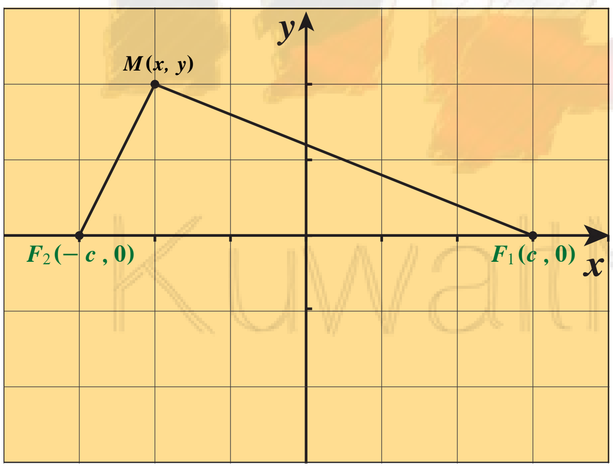
مثال توضيحي

لنأخذ في المستوى الإحداثي نقطتان ثابتتان $F_1(c , 0)$ ، $F_2(- c , 0)$ والنقطة $M(x , y)$ متحركة بحيث:

$$|MF_1 - MF_2| = 2a \qquad a \neq 0 \ , \ c \neq 0 \text{ ثابتتان } c > a$$

ومنه $MF_1 - MF_2 = 2a$ أو $MF_2 - MF_1 = 2a$

ومن الشكل المقابل نلاحظ أن: $MF_1 > MF_2$ فيكون $MF_1 - MF_2 = 2a$



$$MF_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$MF_2 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$MF_1{}^2 - MF_2{}^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - x^2 - 2cx - c^2 - y^2$$

$$MF_1{}^2 - MF_2{}^2 = - 4cx$$

ولكن: $(MF_1 - MF_2)(MF_1 + MF_2) = - 4cx$

المعطى: $(2a)(MF_1 + MF_2) = - 4cx$

$$MF_1 + MF_2 = - \frac{2cx}{a}$$

فيصبح لدينا:

$$\begin{cases} MF_1 + MF_2 = - \dfrac{2cx}{a} \\ MF_1 - MF_2 = 2a \end{cases}$$

نحصل على:

$$MF_1 = a - \frac{cx}{a} \ , \ MF_2 = - a - \frac{cx}{a}$$

$$MF_1{}^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 = (x - c)^2 + y^2$$

$$a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$\frac{c^2x^2}{a^2} - x^2 - y^2 = c^2 - a^2$$

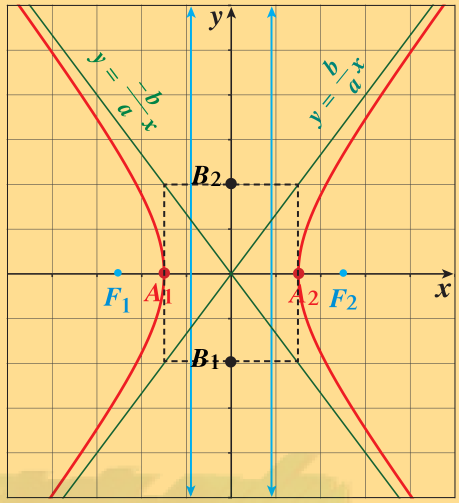
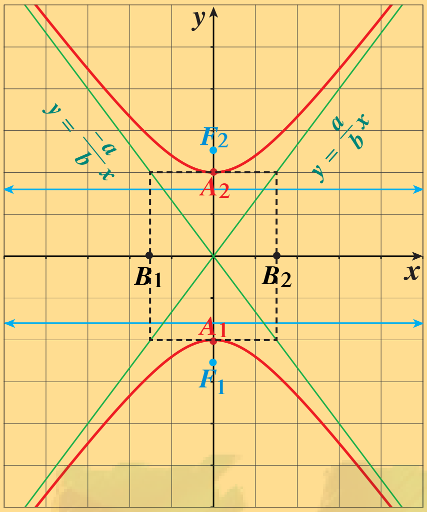
نفرض $c^2 - a^2 = b^2$

$$x^2 \frac{(c^2 - a^2)}{a^2} - y^2 = c^2 - a^2$$

$$\frac{x^2b^2}{a^2} - y^2 = b^2$$

بالقسمة على b^2 نحصل على: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ وهي معادلة قطع زائد

معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل كالتالي:

المعادلة	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
بيان القطع		
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(-a,0)\ ,\ A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)\ ,\ A_2(0,a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0,-b)\ ,\ B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)\ ,\ B_2(b,0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0)\ ,\ F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)\ ,\ F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$c^2=a^2+b^2$	
معادلة الخطين المقاربين	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
معادلة الدليلين	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه ومركزه	

مثال (1)

لتكن: $9x^2 - 16y^2 = 144$ معادلة قطع زائد، أوجد:

a رأسي القطع الزائد.

b البؤرتين.

c معادلتي دليلي القطع.

d طول كل من المحورين.

e معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلًا تخطيطيًّا للقطع.

الحل:

a المعادلة

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

اقسم طرفي المعادلة على 144

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

والمعادلة على الصورة:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

المحور القاطع على محور السينات وبالتالي:

$$a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4$$

$$b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3$$

رأسا القطع الزائد هما:

$$A_1(-4,0)\ ,\ A_2(4,0)$$

b لإيجاد البؤرتين نكتب المعادلة:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

بالتعويض:

$$c^2 = 16 + 9 = 25$$

$$c = 5$$

البؤرتان:

$$F_1(-5,0)\ ,\ F_2(5,0)$$

c معادلتي دليلي القطع الزائد:

$$x = \frac{a^2}{c}\quad ,\quad x = -\frac{a^2}{c}$$

$$x = \frac{16}{5}\quad ,\quad x = -\frac{16}{5}$$

d طول المحور القاطع:

$$2a = 2 \times 4 = 8$$

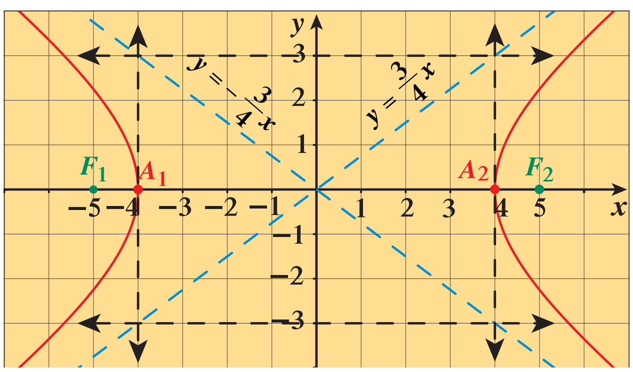
طول المحور المرافق:

$$2b = 2 \times 3 = 6$$

e معادلة كل من الخطين المقاربين:

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

$$y = \pm \frac{3}{4}x$$



لرسم مخطط هذا القطع الزائد نعيّن طرفي المحور الأساسي (رأس القطع) ونرسم منهما مستقيمين موازيين لمحور الصادات ونعيّن طرفي المحور المرافق ونرسم منهما مستقيمين موازيين لمحور السينات.

تتقاطع هذه المستقيمات في أربع نقاط تشكل رؤوس مستطيل والخطان المقاربان للقطع الزائد ينطبقان على قطري المستطيل ونكمل رسم بيان القطع.

حاول أن تحل

1 لتكن: $9y^2 - 25x^2 = 225$ معادلة قطع زائد، أوجد:

a رأسي القطع الزائد.

b البؤرتين.

c معادلتي دليلي القطع.

d طول كل من المحورين.

e معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلًا تخطيطيًّا للقطع.

مثال (2)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_2(0,3)$, $F_1(0,-3)$ ورأساه $A_2(0,2)$, $A_1(0,-2)$

ثم أوجد معادلة كلّ من خطيه المقاربين وارسم شكلًا تقريبيًّا للقطع.

الحل:

$\because$ البؤرتين على محور الصادات.

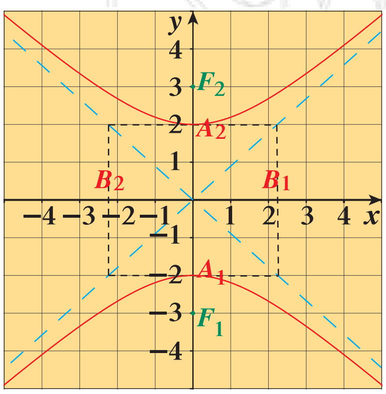
$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي: $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

$\because$ إحدى البؤرتين $F_2(0,3)$ $\therefore c = 3$

$\because$ أحد الرأسين $A_2(0,2)$ $\therefore a = 2$

ولكن:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$3^2 = 2^2 + b^2$$
$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$= 9 - 4$$
$$= 5$$



معادلة القطع الزائد هي: $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{5} = 1$

معادلتا الخطين المقاربين هما: $y = \pm \dfrac{a}{b}x \Rightarrow y = \pm \dfrac{2}{\sqrt{5}}x \Rightarrow y = \pm \dfrac{2\sqrt{5}}{5}x$

لرسم مخطط القطع الزائد، نبدأ برسم مستطيل رؤوسه هي الأزواج المرتبة: $(\pm a , \pm b)$

$(\pm\sqrt{5} , \pm 2)$، ثم نرسم الخطين المقاربين على أنهما ينطبقان على قطري المستطيل ونكمل رسم بيان القطع.

حاول أن تحل

2 أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_2(4 , 0)$, $F_1(-4 , 0)$ ورأساه $A_2(2 , 0)$, $A_1(-2 , 0)$، ثم أوجد معادلة كلّ من خطيه المقاربين، وارسم شكلًا تقريبيًّا للقطع.

ملاحظة: يمكنك رسم مخطط القطع الزائد بطرق أخرى.

مثال (3)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وإحدى بؤرتيه $F(0,\sqrt{34})$ ومعادلة أحد خطيه المقاربين هي: $y=\frac{3}{5}x$

الحل:

$\because$ إحدى البورتين $F(0,\sqrt{34})$

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق على محور الصادات ومعادلته: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

$\because\ c^2=a^2+b^2$

$\therefore\ 34=a^2+b^2 \quad (1)$

معادلة المقارب: $y=\frac{a}{b}x$ حيث من المعطى $y=\frac{3}{5}x$

$\therefore\ \frac{3}{5}=\frac{a}{b}$

$\therefore\ a=\frac{3b}{5}$

بالتعويض في المعادلة (1):

$34=\left(\frac{3b}{5}\right)^2+b^2$

$34=\frac{9b^2}{25}+b^2$

$850=9b^2+25b^2$

$b^2=\frac{850}{34}$

$b^2=25 \implies b=5$

لإيجاد قيمة a نستخدم:

$a=\frac{3b}{5}$

$a=\frac{3\times 5}{5}=3$

ومعادلة القطع الزائد هي:

$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1$

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $F(\sqrt{41},0)$ ومعادلة أحد خطية المقاربين $y=\frac{4}{5}x$

مثال (4)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وأحد رأسيه $(-4,0)$ ويمر بالنقطة $(5,-2)$.

الحل:

$\because$ أحد رأسي القطع الزائد $(-4,0)$

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق على محور السينات

ومعادلة القطع هي:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

من المعطيات: $a = 4$ فيكون:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

يمر القطع الزائد بالنقطة $(5, -2)$

بالتعويض

$$\therefore \quad \frac{25}{16} - \frac{4}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{25}{16} - 1 = \frac{4}{b^2}$$

$$\frac{9}{16} = \frac{4}{b^2}$$

$$b^2 = \frac{64}{9}$$

معادلة القطع الزائد:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{\frac{64}{9}} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{9y^2}{64} = 1$$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة القطع الزائد الذي أحد رأسيه $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ ويمر بالنقطة $\left(-\sqrt{3}, -\frac{5}{2}\right)$

تطبيقات باستخدام القطع الزائد

يتحدث العلماء عن نظرية تقول إن الجرم السماوي الذي يتحرك ضمن مجال جاذبية جسم آخر أثقل منه يتبع مسارًا قريبًا جدًّا من شكل قطع مخروطي حيث إحدى بؤرتيه هي الجسم الأثقل، مثال على ذلك الشمس هي إحدى بؤرتي الكواكب التي تدور حولها. أما حركة المذنبات بالنسبة للشمس نظريًّا فإنها تقترب من الشمس ويكوّن معها حلقة جزئية لتترك بعد ذلك النظام الشمسي وتبتعد في الفضاء الواسع لتتبع مسارًا يشبه أحد فروع القطع الزائد.

مثال (5) **تطبيقات حياتية**

عند اقتراب مركبة فضائية من أحد الكواكب، تُغيّر جاذبية هذا الكوكب مسار المركبة إلى قطع زائد.

أوجد معادلة تنمذج مسار مركبة فضائية قرب كوكب زحل إذا كان $a = 332\,965$ km ، $c = 492\,788.2$ km

الحل:

نفرض أن مركز القطع الزائد هو نقطة الأصل وأن المحور القاطع أفقي.

تكون المعادلة على الصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

العلاقة الأساسية للقطع الزائد $\quad c^2 = a^2 + b^2$

حل في b^2 $\quad b^2 = c^2 - a^2$

عوّض $\quad b^2 = (492\,788.2)^2 - (332\,956)^2$

استخدام آلة حاسبة $\quad b^2 \approx 1.320 \times 10^{11}$

$$\frac{x^2}{1.109 \times 10^{11}} - \frac{y^2}{1.320 \times 10^{11}} = 1$$

يمكن أن تنمذج مسار سفينة فضائية حول زحل بالمعادلة: $\frac{x^2}{1.109 \times 10^{11}} - \frac{y^2}{1.320 \times 10^{11}} = 1$

حاول أن تحل

5 أوجد معادلة تنمذج مسار سفينة فضائية حول نبتون إذا كان: $a = 35\,988\,342$ km ، $c = 4\,498\,542\,800$ km

مثال (6)

عندما تنطلق مركبة فضائية وتقترب من أحد الكواكب، فإن جاذبية هذا الكوكب تغير مسار المركبة من خط مستقيم إلى منحنى يشبه أحد فرعي القطع الزائد. أوجد معادلة قطع زائد تمثل مسار مركبة فضائية حول كوكب الزهرة إذا افترضنا أن نقطة الأصل هي مركز القطع الزائد والمحور القاطع في وضع أفقي علمًا أن طول نصف المحور القاطع 1 882 820 km والمسافة بين البؤرتين هي 108 208 000 km

الحل:

$\because$ المحور القاطع هو أفقي

$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي على الصورة:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

من المعطيات:

$$a = 1\,882\,820$$

$$2c = 108\,208\,000$$

$$c = 54\,104\,000$$

من المعادلة الأساسية للقطع الزائد:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = (54\,104\,000)^2 - (1\,882\,820)^2 = 2.9 \times 10^{15}$$

والمعادلة:

$$\frac{x^2}{3.5 \times 10^{12}} - \frac{y^2}{2.9 \times 10^{15}} = 1$$

حاول أن تحل

6 أوجد معادلة قطع زائد لمسار مركبة فضائية حول كوكب المشتري علمًا أن: $c = 778\,547\,200$ km ، $a = 38\,942\,360$ km

7-4

الاختلاف المركزي

Eccentricity

سوف تتعلم

- الاختلاف المركزي.
- الدليل.

المفردات والمصطلحات:

- اختلاف مركزي Eccentricity
- دليل Directrix

دعنا نفكر ونتناقش

1 في كل قطع من القطوع الموضحة إذا كانت MF تمثل المسافة بين البؤرة ونقطة تنتمي للقطع، MH تمثل البعد بين الدليل ونقطة تنتمي للقطع.

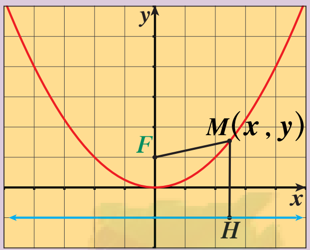
فأوجد $\frac{MF}{MH}$ (مستخدمًا الأدوات الهندسية).

2 بفرض أن النقطة M في التمثيلات البيانية أخذت موضعًا آخر على منحنى القطع.

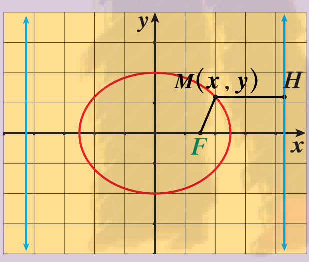
أوجد $\frac{MF}{MH}$

3 من 2 , 1 ماذا تلاحظ؟

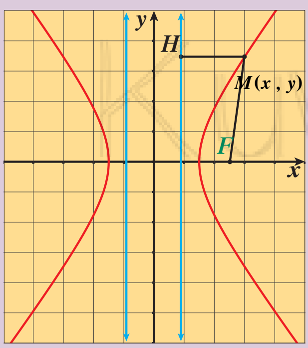
قطع مكافئ



قطع ناقص



قطع زائد



ملاحظة:

البؤرة لا تقع على الدليل.

معلومة:

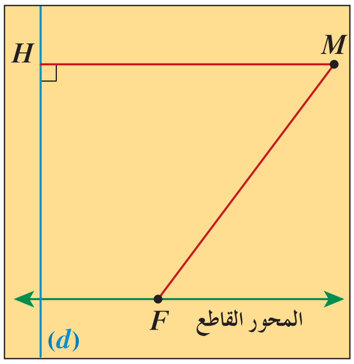
الحرف e هو نسبة تستخدم في القطوع المخروطية $e > 0$ وليس له علاقة بالحرف e في اللوغاريتم الطبيعي حيث $\ln e = 1$

تمكنا في البنود السابقة من تعريف القطوع المخروطية (المكافئ – الناقص – الزائد).
يوفر الاختلاف المركزي فرصة جديدة للتعرف على القطوع المخروطية على أنها منحنيات مترابطة تشكل عائلة موحدة.

تعريف:

القطع المخروطي هو مجموعة كل النقاط في المستوى الإحداثي حيث تكون نسبة بعد كل منها من نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) في نفس المستوى تساوي مقدارًا ثابتًا.

- هذا المقدار الثابت يسمى **الاختلاف المركزي** للقطع المخروطي ويرمز إليه بالرمز e



ومن فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» نجد أن:

$$\frac{MF}{MH} = e$$

وحيث إن M نقطة على قطع مخروطي، F نقطة ثابتة (بؤرة القطع) ولا تقع على المستقيم الثابت d (دليل القطع). MF المسافة بين النقطتين، MH البعد بين M والدليل.

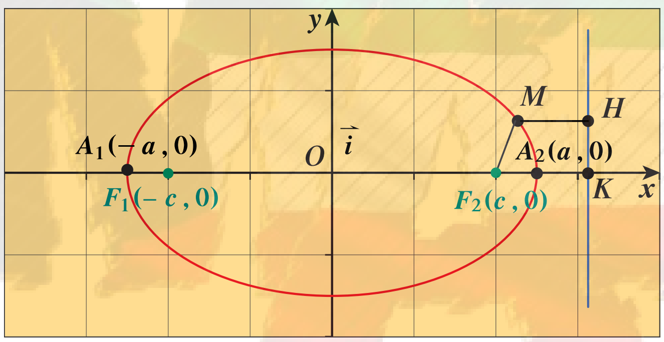
فيكون لدينا الحالات التالية:

a إذا $e = 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا مكافئًا** (Parabola)

b إذا $e < 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا ناقصًا** (Ellipse)

c إذا $e > 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا زائدًا** (Hyperbola)

من تعريف القطع المخروطي $e = \frac{MF}{MH}$ قيمة ثابتة لكل نقطة متحركة في المستوى الإحداثي فمثلًا في القطع الناقص:



$A_1(-a,0)$ ، $A_2(a,0)$ هما نقطتان تحققان خاصية النقطة M

$\because\ e = \dfrac{\text{بعد النقطة عن إحدى البؤرتين}}{\text{بعد النقطة عن أحد الدليلين}}$

$$\frac{A_1F_2}{A_1K} = e \Longrightarrow A_1F_2 = e(A_1K)$$

$$\Longrightarrow OF_2 + OA_1 = e(OK + OA_1)$$

$$c + a = e(OK + a)$$

$$c + a = e(OK) + (e)a \qquad (1)$$

$$\frac{A_2F_2}{A_2K} = e \Longrightarrow A_2F_2 = e(A_2K)$$

$$OA_2 - OF_2 = e(OK - OA_2)$$

$$a - c = e(OK - a)$$

$$-c + a = e(OK) - (e)a \qquad (2)$$

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) ينتج أن:

$$2c = 2 \cdot e(a)$$

$$e = \frac{c}{a}$$

معلومة:

الاختلاف المركزي للمسارات المخروطية لبعض الكواكب

الكوكب	الاختلاف المركزي
عطارد	0.21
الزهرة	0.01
الأرض	0.02
المريخ	0.09
المشتري	0.05
زحل	0.06
أورانوس	0.05
نبتون	0.008

مثال (1)

حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته.

a اختلافه المركزي $(e = 1)$ وبؤرته: $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

b اختلافه المركزي $\left(e = \frac{1}{2}\right)$ وإحدى بؤرتيه: $F(2, 0)$

c اختلافه المركزي $(e = 2)$ ومعادلة أحد دليليه: $x = 1$

الحل:

a $\because \; e = 1$

$\therefore$ القطع هو قطع مكافئ

البؤرة $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $p = \frac{1}{2}$

محور السينات هو محور التماثل

$$\therefore \; y^2 = 4px$$
$$= 4\left(\frac{1}{2}\right)x$$

معادلة القطع: $y^2 = 2x$

b $\because \; e = \frac{1}{2} \; , \; \frac{1}{2} < 1$

$\therefore$ القطع هو قطع ناقص

$\because$ إحدى البؤرتين $F(2, 0)$

$\therefore$ المحور الأكبر ينطبق على محور السينات ومركزه نقطة الأصل

من البؤرة $F(2, 0)$ نستنتج $c = 2$

$$\because \; e = \frac{c}{a}$$
$$\therefore \; \frac{1}{2} = \frac{2}{a}$$
$$a = 4$$

في القطع الناقص:

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$2^2 = 4^2 - b^2$$
$$b^2 = 16 - 4$$
$$b^2 = 12$$

معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

c $\because \; e = 2 \; , \; 2 > 1$

$\therefore$ القطع هو قطع زائد

$\because$ معادلة أحد دليليه $x = 1$

$\therefore$ المحور القاطع (الأساسي) ينطبق على محور السينات ومركزه $(0, 0)$

معادلة الدليل هي:

$$x = \frac{a^2}{c}$$

$$1 = \frac{a^2}{c}$$

$$c = a^2 \qquad (1)$$

$$\because \; e = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \; 2 = \frac{c}{a}$$

$$c = 2a \qquad (2)$$

بحل المعادلتين (2) , (1)

$$a^2 = 2a$$

$$a(a-2) = 0$$

$\therefore \; a = 0$ مرفوضة أو $a = 2$ قيمة مقبولة

$$\therefore \; e = a = 2$$

$$c = (2)^2 = 4$$

$$\because \; c^2 = a^2 + b^2$$

$$\because \; c^2 = a^2 + b^2$$

$$16 = 4 + b^2 \implies b^2 = 12$$

$\because$ معادلة القطع هي:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

حاول أن تحل

1 حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته

a اختلافه المركزي $(e = 1)$ وبؤرته $F(-1,0)$

b اختلافه المركزي $\left(e = \frac{4}{5}\right)$ وإحدى بؤرتيه $F(-4\sqrt{2}\,,0)$

c اختلافه المركزي $(e = \sqrt{3})$ ومعادلة أحد دليليه $x = \frac{1}{3}$

مثال (2)

أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته:

a $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b $x^2 - 25y^2 = 1$

الحل:

a $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

قطع ناقص معادلته: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

بالمقارنة:

$$a^2 = 25$$
$$a = 5$$
$$b^2 = 9$$
$$b = 3$$

لدينا:

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = 25 - 9$$
$$= 16$$
$$c = 4$$

الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a}$$

بالتعويض:

$$e = \frac{4}{5}$$

b $x^2 - 25y^2 = 1$

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1$$

قطع زائد معادلته: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالمقارنة يكون:

$$a^2 = 1$$
$$a = 1$$
$$b^2 = \frac{1}{25}$$
$$b = \frac{1}{5}$$

في القطع الزائد:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 1 + \frac{1}{25}$$
$$= \frac{26}{25}$$
$$c = \frac{\sqrt{26}}{5}$$
$$\because \quad e = \frac{c}{a}$$
$$\therefore \quad e = \frac{\frac{\sqrt{26}}{5}}{1} = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

حاول أن تحل

2 أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته:

a $x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$

b $24y^2 = 600 + 25x^2$

مثال (3)

أوجد طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي $\left(e = \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ وطول محوره الأصغر 4 وحدات.

الحل:

$$\because \quad e = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \quad \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

أي:

$$c = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

طول المحور الأصغر 4 أي

$$2b = 4$$

$$b = 2$$

في القطع الناقص:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$\frac{5a^2}{9} = a^2 - 4$$

$$a^2 = 4 + \frac{5a^2}{9}$$

$$9a^2 = 36 + 5a^2$$

$$4a^2 = 36$$

$$a^2 = 9$$

$$a = 3$$

$$2a = 2(3) = 6$$

طول المحور الأكبر = 6 وحدات.

حاول أن تحل

3 أوجد طول المحور القاطع للقطع الزائد الذي اختلافه المركزي $(e = 2)$ وطول محوره المرافق 6 وحدات.

مثال (4)

يمكن وضع الأقمار الاصطناعية في مدارات بيضاوية الشكل (قطع ناقص) في دورانها حول الأرض.

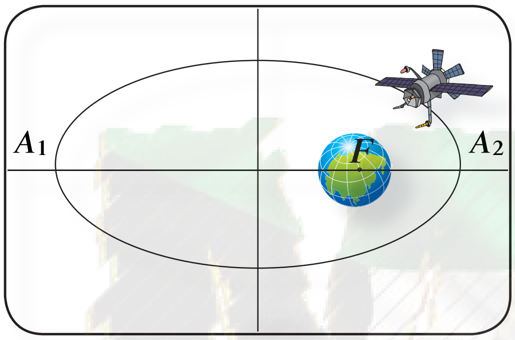
لنفترض أن قمرًا صناعيًّا يتحرك في مدار بيضاوي (قطع ناقص) حول الأرض حيث الاختلاف المركزي $(e = 0.04)$ وطول نصف محوره الأكبر $7\,500$ km وإحدى بؤرتيه مركز الأرض.

a أوجد معادلة مدار القمر الاصطناعي.

b على افتراض أن طول نصف قطر الأرض $6\,372$ km

فأوجد أطول وأقصر بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض.

الحل:



a $e = 0.04 \;,\; a = 7\,500$ km

لدينا: $e = \frac{c}{a} = 0.04$ بالتعويض:

$$c = 7\,500 \times 0.04$$
$$= 300$$

ويكون مركز الأرض إحدى البؤرتين أي $F(300\,,0)$:

في القطع الناقص:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$b^2 = (7\,500)^2 - (300)^2$$
$$b^2 = 56\,160\,000$$

معادلة المدار: $\frac{x^2}{56\,250\,000} + \frac{y^2}{56\,160\,000} = 1$

b أقصر بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض هو عند النقطة A_2

نوجد أولًا المسافة FA_2

$$FA_2 = 7\,500 - 300 = 7\,200$$

طول نصف قطر الأرض $= 6\,372$

فيكون أقصر بُعد: $7200 - 6372 = 828$

أي 828 km

أطول بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض هو عند النقطة A_1

نوجد FA_1

$$FA_1 = 7\,500 + 300 = 7\,800$$

أطول بُعد عن سطح الأرض:

$$7\,800 - 6\,372 = 1\,428$$

أي $1\,428$ km

حاول أن تحل

4 إذا كان القمر الاصطناعي له مدار بيضاوي (قطع ناقص) حول الأرض حيث اختلافه المركزي $e = 0.05$ وطول نصف محوره الأكبر 8 600 km وإحدى بؤرتيه مركز الأرض.

a أوجد معادلة مدار القمر الاصطناعي.

b إذا كان نصف قطر الأرض 6 372 km

فأوجد أطول وأقصر بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض.

المرشد لحل المسائل

يوضح الرسم المقابل شكل **(a)** لوحًا للطاقة الشمسية على شكل قطع مكافئ، حيث إن البعد بين طرفيه هو $8\,m$.
ويبلغ عمقه من منتصف المسافة $2\,m$.
أوجد البؤرة، ثم أوجد معادلة القطع المكافئ وارسمه.

الحل:

كيف فكر عبد العزيز؟

بعد تحليل معطيات المسألة. أستنتج نقطتين على القطع المكافئ وأعوض عنهما في المعادلة لأجد البؤرة، ومن ثم أرسم القطع المكافئ بعد إيجاد معادلته.

أولًا:

بما أن المسافة بين طرفي القطع المكافىء هي $8\,m$ والعمق في منتصف المسافة هو $2\,m$ فيكون لدينا $M_1(4,2)$, $M_2(-4,2)$ نقطتان على القطع المكافئ.

ثانيًا:

معلوم أن معادلة القطع المكافئ العامة هي: $x^2 = 4py$

لذا أعوض عن x بـ 4 وعن y بـ 2 لأجد p

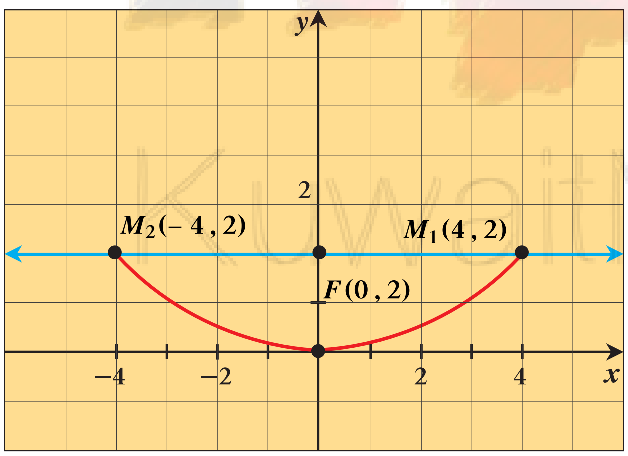
إذًا $(4)^2 = 4p(2)$

$16 = 8p$

$p = 2$

$\therefore$ البؤرة هي $F(0,p)$ أي $F(0,2)$ فتكون المعادلة هي:

$x^2 = 8y$ فأرسمها بالآلة الحاسبة البيانية.

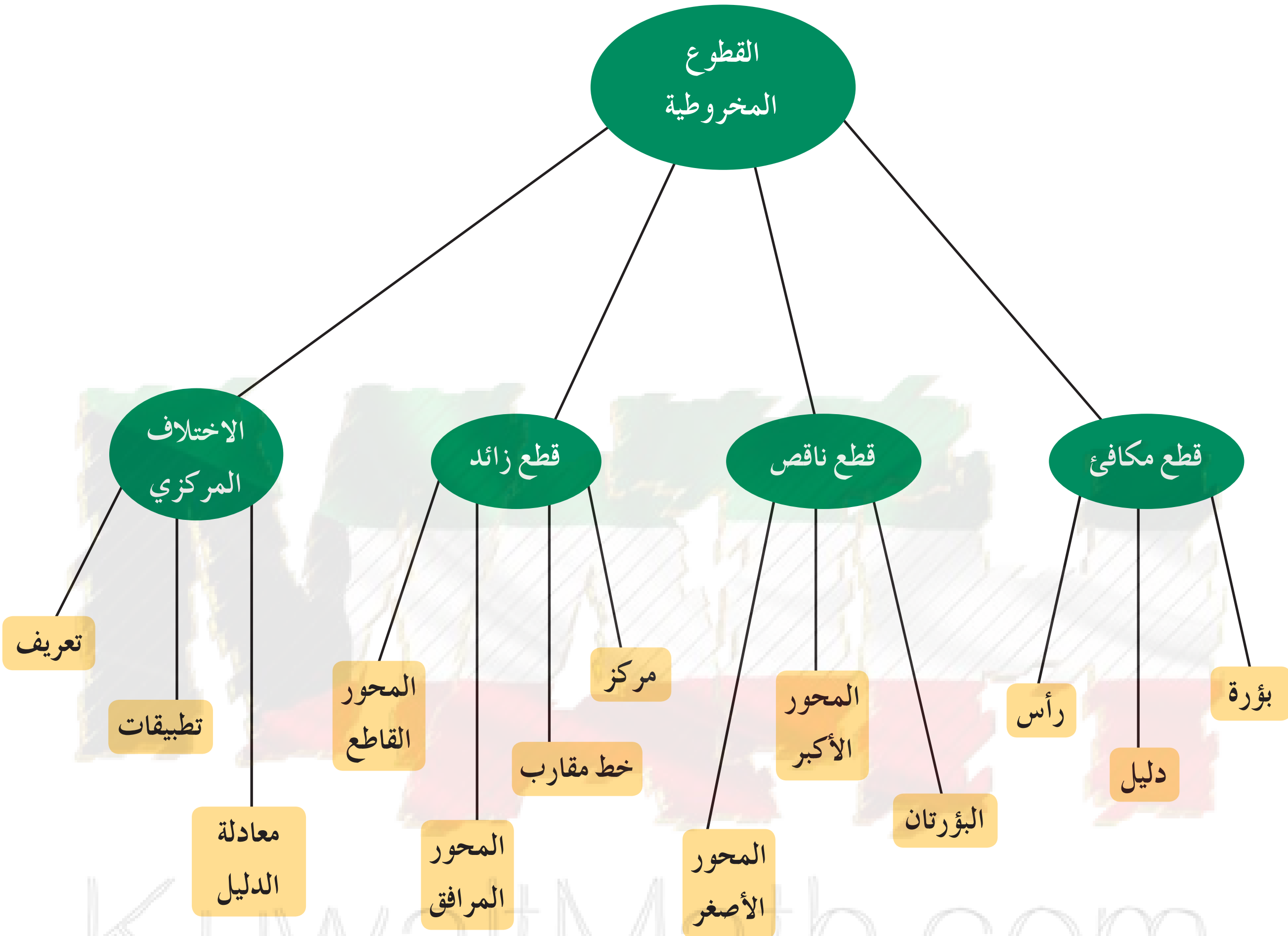


شكل (a)

مسألة إضافية

أوجد البؤرة في المسألة أعلاه إذا بلغ عمق لوح الطاقة الشمسية مترًا واحدًا من المركز.

مخطط تنظيمي للوحدة السابعة



ملخص

- **القطع المكافئ:**
  - **تعريف:** القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى المتساوية البعدين عن نقطة ثابتة معطاة (البؤرة) وعن مستقيم ثابت معطى (الدليل).

• قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل $(0, 0)$

الصورة العامة	$x^2 = 4py$		$y^2 = 4px$	
الفتحة	إلى أعلى أو إلى أسفل		إلى اليمين أو إلى اليسار	
إشارة p	$p < 0$	$p > 0$	$p < 0$	$p > 0$
البؤرة	$(0, p)$		$(p, 0)$	
الدليل	$y = -p$		$x = -p$	
محور التناظر	محور الصادات $(y - axis)$		محور السينات $(x - axis)$	
المسافة من الرأس إلى البؤرة	$\lvert p \rvert$			
المسافة من الرأس إلى الدليل	$\lvert p \rvert$			

▪ القطع الناقص:

• **تعريف:** القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابتًا.

• معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل $(0, 0)$ كالتالي:

المعادلة	$a > b > 0$	$a > b > 0$
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
المحور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
الرأسان طرفا المحور الأكبر	$A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a)$, $A_2(0, a)$
طول المحور الأكبر	$2a$	
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$	$B_1(-b, 0)$, $B_2(b, 0)$
طول المحور الأصغر	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$
العلاقة الأساسية	$a^2 = b^2 + c^2$	
معادلتا الدليلين	$x = -\frac{a^2}{c}$, $x = \frac{a^2}{c}$	$y = -\frac{a^2}{c}$, $y = \frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه ومركزه	

■ القطع الزائد:

• **تعريف:** القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوي ثابتًا.

• **معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل كالتالي:**

المعادلة	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(-a,0)\ ,\ A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)\ ,\ A_2(0,a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0,-b)\ ,\ B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)\ ,\ B_2(b,0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0)\ ,\ F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)\ ,\ F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$c^2=a^2+b^2$	
معادلة الخطين المقاربين	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
معادلة الدليلين	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه ومركزه	

■ الاختلاف المركزي:

• **تعريف:** القطع المخروطي هو مجموعة كل النقاط في المستوى الإحداثي حيث تكون نسبة بعد كل منها من نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) في نفس المستوى تساوي مقدارًا ثابتًا.

هذا المقدار الثابت يسمى الاختلاف المركزي للقطع المخروطي ويرمز إليه بالرمز e.

• في القطع المكافئ: $e=1$

• في القطع الناقص: $e=\frac{c}{a}<1$

• في القطع الزائد: $e=\frac{c}{a}>1$