# الوحدة الخامسة

## التكامل

## Integral

### مشروع الوحدة: إيجاد مساحة تحت منحنى دالة

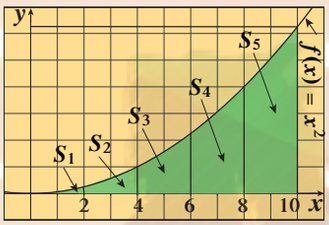
1 **مقدمة المشروع:** تعرّف الطلاب قوانين إيجاد مساحات أشكال هندسيّة مثل: المربع، المستطيل، المثلث، متوازي الأضلاع، الدائرة... ولكن كيف يمكن إيجاد مساحة منطقة محددة بمنحنى دالة ومحور السينات في فترة معينة.

2 **الهدف:** يريد متعهد تقدير مساحة إحدى المنطقتين المحصورة بين مدرّج مسرح يمثل قطعًا مكافئًا معادلته: $y = x^2$ ومستوى الأرض، علمًا أن طول الممر 10 m من كل جهة ونمثله على مستوى الإحداثيات.

3 **اللوازم:** آلة حاسبة بيانية – حاسوب – أوراق رسم.

4 **أسئلة حول التطبيق:**

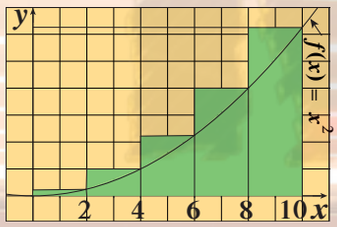
a ارسم منحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^2$ على الفترة المغلقة $[0, 10]$، لتكن $S$ المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ومحور السينات و $x = 0$ , $x = 10$.



شكل (1)

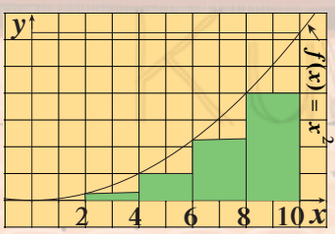
b اقسم الفترة المغلقة $[0 , 10]$ إلى خمسة أجزاء متساوية بحيث أن طول كل جزء يساوي 2. (لاحظ أن: $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$). انظر الشكل (1).

c استخدم أطوال الفترات الجزئية: $[8,10]$، $[6,8]$، $[4,6]$، $[2,4]$، $[0,2]$ كأطوال لأضلاع مستطيلات حيث ارتفاع كل مستطيل يحقق: $y = x^2$ وذلك من جهة اليمين لكل فترة جزئية (انظر الشكل 2). احسب قيمة $R_5$ حيث إن $R_5$ هو مجموع مساحات المستطيلات الخمسة اليمنى. (تسمى أيضًا المجاميع العليا للمساحة الأساسية $S$).



شكل (2)

d استخدم أطوال الفترات الجزئية: $[8,10]$، $[6,8]$، $[4,6]$، $[2,4]$، كأطوال لأضلاع مستطيلات حيث إن ارتفاع كل مستطيل يحقق: $y = x^2$ وذلك من جهة اليسار لكل فترة جزئية (انظر الشكل 3). احسب قيمة $L_5$ حيث إن $L_5$ هو مجموع مساحات المستطيلات الأربعة اليسرى. (تسمى أيضًا المجاميع السفلى للمساحة الأساسية $S$).



شكل (3)

e اكتب متباينة تحدد العلاقة بين $R_5$، $S$، $L_5$.

f استخدم الخطوات السابقة في حالة تقسيم $[0,10]$ إلى 10 أجزاء متساوية الطول. ثم اكتب متباينة تحدد العلاقة بين $R_{10}$، $S$، $L_{10}$.

g أكمل الجدول التالي: حيث $n$ عدد فترات التجزيء.

| $n$ | $R_n$ | $L_n$ |
|---|---|---|
| 5 | | |
| 10 | | |
| 20 | | |
| 50 | | |
| 100 | | |

اكتب متباينة تحدد العلاقة بين $R_n$، $S$، $L_n$ في كل حالة. ماذا تلاحظ؟

5 **التقرير:** اكتب تقريرًا مفصّلًا يبيّن حساباتك والنتائج التي توصلت إليها. اشرح ماذا يحدث كلما كبرت $n$ بلا حدود ($n \to \infty$).

### دروس الوحدة

| التكامل غير المحدد | التكامل بالتعويض | تكامل الدوال المثلثية | الدوال الأسية واللوغاريتمية | التكامل بالتجزيء | التكامل باستخدام الكسور الجزئية | التكامل المحدد |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5–1 | 5–2 | 5–3 | 5–4 | 5–5 | 5–6 | 5–7 |

# الوحدة الخامسة

## أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

تعلمت:

- تحديد الفترات التي تكون عليها الدالة معرفة.
- تحديد الفترات التي تكون عليها الدالة متصلة.
- إيجاد متوسط معدل التغير لدالة على فترة معينة.
- إيجاد معدل التغير اللحظي لدالة في لحظة معينة.
- إيجاد ميل المماس عند نقطة لبيان الدالة.
- إيجاد ميل الخط العمودي على المماس عند نقطة لبيان الدالة.
- إيجاد مشتقة دالة على الفترة التي تكون فيها معرّفة ومتصلة.
- دراسة سلوك بيان الدالة باستخدام مشتقتها.
- إيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة لدالة على فترة معينة.
- إيجاد المشتقة الثانية ومن الرتب العليا.
- دراسة تقعر منحنى الدالة.
- اختبار المشتقة الثانية.

## ماذا سوف تتعلم؟

- تعرّف المشتقة العكسية لدالة متصلة والربط مع مشتقة هذه الدالة.
- استخدام التكامل غير المحدد وجدول التكاملات وخواص التكامل.
- إيجاد تكامل الدوال المثلثية.
- إيجاد مشتقة دالة أسيّة ومشتقتها العكسية.
- إيجاد مشتقة دالة لوغاريتمية ومشتقتها العكسية.
- حساب التكامل بالتعويض.
- حساب التكاملات باستخدام التجزيء.
- تفكيك حدودية نسبية إلى كسور جزئية.
- إيجاد تكاملات بعض الدوال النسبية.
- تعرف التكامل المحدد وخواصه.

## المصطلحات الأساسية

التكامل غير المحدد – مشتقة عكسية – ثابت التكامل – تكامل الدوال المثلثية – مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية – تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية – قابلية الاشتقاق – قاعدة القوى للتكامل – التكامل بالتعويض والتجزيء – الكسور الجزئية – عوامل خطية ومن الدرجة الثانية – التكامل المحدد – خواص التكامل المحدد – التفسير البياني للتكامل المحدد – المساحة.

## أضف إلى معلوماتك

عمر الخيّام وأبو الوفاء البوزجاني زادا على بحوث الخورازميّ في الجبر زيادة تعدّ أساسًا لعلاقة الجبر بالهندسة، وقد مهّدت لعلماء أوروبا بالهندسة التحليليّة التي قادت إلى التكامل والتفاضل، وعليه قامت أكثر الاختراعات والاكتشافات العلميّة.

حساب التكامل: تستطيع أن تعتبر أن ثابت بن قرّة والكوهي ومن بعدهما ابن الهيثم، قد ساهموا في نشأة حساب التكامل الحديث. دفعهم إلى ذلك حساب حجم المجسّم الناشئ عن دوران قطعة من قطع مكافئ حول محور ما.

ابتكر ثابت بن قرّة، ولأوّل مرّة في تاريخ البشريّة، نوعًا من الحساب يُكافئ حساب التكامل الذي نعرفه في الوقت الحاضر، وذلك قبل نيوتن بمئات السنين. أمّا نوع التكامل الذي أحرزه فهو من نوع $\int_0^a x^n\,dx$ قيمة أسيّة تساوي الوحدة، أي التكامل $M\int_a^b x\,dx$ عندما تعرض لحساب عزم كتلة قضيب متجانس ساكن بالنسبة إلى أحد المحاور. وأثبت أن العزم الكليّ يساوي مجموع العزوم الأولية.

عمر الخيام: عالم وفيلسوف وشاعر، تخصص في الرياضيات والفلك واللغة والفقه. وهو أول من اخترع طريق حساب المثلثات والمعادلات الجبرية من الدرجة الثالثة.

# التكامل غير المحدد
# Indefinite Integral

**سوف تتعلم**

- المشتقة العكسية.
- التكامل غير المحدد.
- مصطلحات التكامل ورموزه.
- قواعد التكامل غير المحدد.
- خواص التكامل غير المحدد.

**المفردات والمصطلحات:**

- مشتقة عكسية Antiderivative
- تكامل غير محدد Indefinite Integral
- قاعدة القوى Power Rule
- خاصية الضرب بعدد ثابت Constant Multiple Property
- خاصية الجمع والطرح Sum and Difference Property

**هل تعلم؟**

- يستطيع المهندس قياس معدل التغير لتسرب الماء من الخزان، ولكنه يريد معرفة كمية الماء التي تتسرب من هذا الخزان خلال فترة محددة من الزمن.
- يستطيع عالم الأحياء معرفة معدل التغير لتزايد مجتمع من الجراثيم ولكنه بحاجة لاستنتاج حجم هذا التزايد خلال فترة محددة من الزمن.

عن هذه المسائل يمكن الإجابة بإيجاد مشتقة عكسية لدالة تمثل تسرب الماء من الخزان ومشتقة عكسية لدالة تمثل تزايد مجتمع من الجراثيم.

**دعنا نفكر ونتناقش**

أكمل الجداول التالية:

a

| المشتقة $F'(x) =$ | الدالة $F(x) =$ |
|---|---|
| | $x^2 - 1$ |
| | $x^2 + 5$ |
| | $x^3 + 4$ |
| | $x^3 - 2$ |

b

| المشتقة $F'(x) =$ | الدالة $F(x) =$ |
|---|---|
| $2x$ | |
| $3x^2$ | |
| $5$ | |
| $x^3$ | |

c هل يمكن إيجاد $F(x)$ أخرى في الجزء b بحيث يكون لها المشتقة نفسها؟

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» في الجزء a أوجدنا $F'$ مشتقة دالة معلومة $F$ باستخدام قواعد الاشتقاق، أمّا في الجزء b أوجدنا دالة $F$ بمعلومية مشتقتها $F'$ وذلك بعكس ما تمّ في الجزء a وتسمى الدالة $F$ مشتقة عكسية (دالة مقابلة).

**تعريف: المشتقة العكسية** Antiderivative

**تسمى الدالة $F$ مشتقة عكسية للدالة $f$ المعرفة على مجالها $I$.**

**إذا كان: $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$**

استنادًا إلى هذا التعريف:

إذا كان $f(x) = x$ فيمكن أن تكون: $F(x) = \frac{x^2}{2}$ مشتقة عكسية للدالة $f$.

لأن: $F'(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)x^{2-1}$

$= x = f(x)$ باستخدام قاعدة القوى لاشتقاق الدالة

وأيضًا يمكن أن تكون $F(x) = \frac{x^2}{2} + 4$ مشتقة عكسية لها لأن

$F'(x) = x = f(x)$ (مشتقة الثابت تساوي الصفر)،

كما أن $F(x) = \frac{x^2}{2} + 50$ يمكن أن تكون مشتقة عكسية أخرى لها لأن $F'(x) = x = f(x)$.

**ملاحظة: سنتعامل في دراستنا مع دوال متصلة على فترات معينة.**

KuwaitMath.com

**نظرية (1)**

**إذا كانت $F$ مشتقّة عكسيّة للدالّة $f$ على الفترة $I$، $G$ مشتقّة عكسيّة أيضًا للدالّة $f$ على الفترة $I$ فإنّ:**

$$G(x) = F(x) + C \qquad \forall x \in I$$

**حيث $C$ ثابت.**

**البرهان:**

$\because$ $F$ مشتقّة عكسيّة للدالّة $f$ $\qquad \therefore\ F'(x) = f(x) \quad , \quad x \in I$

$\because$ $G$ مشتقّة عكسيّة للدالّة $f$ $\qquad \therefore\ G'(x) = f(x) \quad , \quad x \in I$

بفرض أن: $\qquad H(x) = G(x) - F(x)$

باستخدام خواصّ الاشتقاق نجد: $\qquad H'(x) = G'(x) - F'(x)$

أي: $\qquad H'(x) = f(x) - f(x)$

$$H'(x) = 0$$

مشتقة الثابت تساوي الصفر $\qquad H(x) = C$

$$\therefore\ G(x) - F(x) = C$$

نستنتج أنّ: $\qquad G(x) = F(x) + C$

**نظرية (2)**

**إذا كانت $F$ مشتقة عكسية لِـ $f$ على الفترة $I$ فإن الصورة العامة للمشتقة العكسية لِـ $f$ على الفترة $I$ هي:**

$$F(x) + C$$

**حيث $C$ ثابت اختياري**

من النظرية (2) نستنتج أنه يوجد عدد لا نهائي من المشتقات العكسية للدالة $f$.

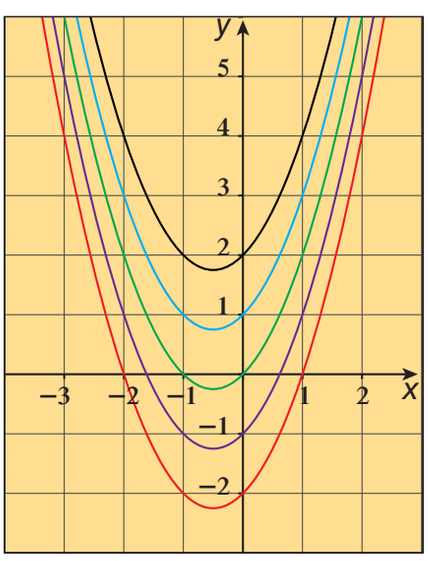
فمثلًا:

إذا كانت $f(x) = 2x + 1$ فإن الصورة العامة لمشتقتها العكسية

هي: $F(x) = x^2 + x + C$ حيث $C$ ثابت.

ويبيّن الشكل المقابل بيانات بعض المشتقات العكسية $F$

عندما يأخذ الثابت $C$ القيم $2$ , $1$ , $0$ , $-1$ , $-2$



**ملاحظة:**
إذا طُلب إيجاد مشتقة عكسية للدالة $f$ فيمكن اعتبار $C = 0$.

**مثال (1)**

أثبت أن: $F(x) = x^3 + 5x + 3$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 3x^2 + 5$
ثم اكتب الصورة العامة للمشتقة العكسية.

الحل:

$$F(x) = x^3 + 5x + 3$$
$$F'(x) = 3x^2 + 5$$
$$= f(x)$$

$\therefore$ $F$ هي مشتقة عكسية للدالة $f$

الصورة العامة للمشتقة العكسية هي:

$F(x) = x^3 + 5x + C$ حيث $C$ ثابت

**حاول أن تحل**

1 أثبت أن: $F(x) = 5 - \frac{1}{3}x^3$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = -x^2$
ثم اكتب مشتقة عكسية أخرى لها.

**تذكر:**
مشتقة الثابت $C$ هي صفر.

**مثال (2)**

أثبت أن: $F(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

الحل:

$$F(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$
$$F'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$
$$= f(x)$$

$\therefore$ $F$ هي مشتقة عكسية للدالة $f$

**حاول أن تحل**

2 أثبت أن: $F(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

**تعريف: التكامل غير المحدد** **Indefinite Integral**

التكامل غير المحدد للدالّة $f$ بالنسبة إلى $x$ هو مجموعة كل المشتقّات العكسيّة $F$ ، ويكتب على الصورة:

$$\int f(x)dx$$

KuwaitMath.com

الرمز $\int$ يعبّر عن **علامة التكامل**، الدالّة $f$ هي **الدالّة المكاملة** في التكامل، $x$ **متغيّر التكامل**.

أي أنّ: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

وتقرأ:

التكامل غير المحدد للدالّة $f$ بالنسبة إلى $x$ هو $F(x) + C$.

حيث $F(x) + C$ هي مجموعة كل المشتقات العكسية $F$.

الثابت $C$ هو **ثابت التكامل** وهو **ثابت اختياريّ**، وعندما نحصل على $F(x) + C$ نقول إنّنا **كاملنا** $f$ أو **أوجدنا تكامل** $f$.

**ملاحظة:**

الدّالة التي يجري تكاملها

$\int f(x)\,dx$

رمز التكامل

$x$ متغيّر التكامل

## قواعد التكامل غير المحدد — Rules of Indefinite Integral

1. $\int k\,dx = kx + C$ ، $k$ عدد ثابت

قاعدة القوى

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\}$

## خواص التكامل غير المحدد — Properties of Indefinite Integral

خاصية الضرب بعدد ثابت

1. $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)dx \quad , \quad k \neq 0$

خاصية الجمع والطرح

2. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

## ملاحظات:

a. $\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$

b. $\int (f(x) + k)dx = \int f(x)dx + \int k\,dx$

KuwaitMath.com

### مثال (3)

أوجد:

a. $\int 5dx$

b. $\int 4x^3\,dx$

الحل:

a. $\int 5\,dx = 5x + C$

b. $\int 4x^3 dx = 4\int x^3 dx$

$= 4\left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right) + C = x^4 + C$

### حاول أن تحل

3 أوجد:

a. $\int 15\,dx$

b. $\int 5x^4 dx$

تمكنّنا قاعدة الجمع والطرح في التفاضل من اشتقاق المقادير حدًّا حدًّا، كما تمكّننا هذه القاعدة في التكامل من مكاملة المقادير حدًّا حدًّا، وعندما نفعل ذلك **ندمج ثوابت التكامل الكثيرة الموجودة في ثابت اختياري واحد** في نهاية الحل.

**مثال (4)**

احسب: $\int (x^2 - 2x + 5)dx$

**الحل:**

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int (x^2 - 2x + 5)dx = \int x^2 dx - \int 2x\, dx + \int 5\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + C_1 - 2\frac{x^2}{2} + C_2 + 5x + C_3$$

ادمج $C_1$ , $C_2$ , $C_3$ في ثابت واحد

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

**حاول أن تحل**

4 احسب: $\int (3x^2 - 4x - 1)dx$

**مثال (5)**

أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a $\int \frac{1}{x^2}dx$ b $\int \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}dx$ c $\int \left(\frac{x^2 - 2}{x^2}\right)^2 dx$

**الحل:**

a

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$= \frac{-1}{x} + C$$

b

$$\int \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}dx = \int \frac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}dx$$

قاعدة الطرح في التكامل

$$= \int (x - 3)dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

c

$$\int \left(\frac{x^2 - 2}{x^2}\right)^2 dx = \int (1 - 2x^{-2})^2 dx$$

$$\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} = 1 - 2x^{-2}$$

بسّط

$$= \int (1 - 4x^{-2} + 4x^{-4})dx$$

$$= x + \frac{4}{x} - \frac{4}{3x^3} + C$$

KuwaitMath.com

حاول أن تحل

5 أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a $\int (2x-3)(x+4)dx$

b $\int \frac{x^2+5x+4}{x+1}dx$

c $\int \left(\frac{3x^2-x}{x}\right)^2 dx$

مثال (6)

أوجد:

a $\int \sqrt{x}\,dx$

b $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx$

c $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$

الحل:

a $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

b $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{5}}dx = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + C$

$= \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + C = \frac{5}{7}x\sqrt[5]{x^2} + C$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

c $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx = \int \frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}+1)}(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)dx}{\cancel{(\sqrt[3]{x}+1)}}$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$= \int (\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)dx$

$= \int (x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1)dx$

قاعدة الجمع والطرح

$= \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + C$

$= \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + x + C$

حاول أن تحل

6 أوجد:

a $\int x\sqrt{x}\,dx$

b $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

c $\int \frac{x^2-3x}{\sqrt[3]{x}}dx$

KuwaitMath.com

يمكن تحديد واحدة من المشتقات العكسية عندما يتوفر شرط يمكننا من إيجاد قيمة الثابت $C$.

**مثال (7)**

إن كان: $F(x) = \int (2x-3)dx$ ، $F(3) = 2$ فأوجد $F(x)$

**الحل:**

$$F(x) = \int (2x-3)dx = \int 2xdx - \int 3dx$$
$$= x^2 - 3x + C$$

لإيجاد قيمة الثابت $C$ نستخدم القيمة المعطاة: $F(3) = 2$

عوّض عن $x$ بـ 3 وعن $F(3)$ بـ 2

$$2 = (3)^2 - 3(3) + C$$
$$2 = 9 - 9 + C$$

ومنه $C = 2$

فيكون: $F(x) = x^2 - 3x + 2$

**حاول أن تحل**

7 إذا كان: $F(x) = \int (2x+5)dx$ ، $F(-1) = 0$ فأوجد $F(x)$

**مثال (8)**

ألقيت كرة إلى الأعلى بسرعة ابتدائية 15 m/s من سطح برج ارتفاعه 140 m عن سطح الأرض.

a في أي زمن $t$ سوف تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع؟

b في أي زمن $t$ سوف تصل الكرة إلى الأرض؟ (علمًا بأن عجلة الجاذبية الأرضية $a(t) = 9.8\ m/s^2$)

**الحل:**

a بما أن الكرة ألقيت إلى الأعلى فإن الحركة رأسية ونختار الاتجاه الموجب إلى الأعلى.

في الزمن $t$ ثانية المسافة فوق سطح الأرض هي $s(t)$ والسرعة المتجهة $v(t)$ هي تناقصية وبالتالي العجلة سالبة لذا:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -9.8$$

بمكاملة الطرفين بالنسبة إلى $t$

$$v(t) = \int a(t)dt = \int -9.8dt$$
$$v(t) = -9.8t + C$$

ولكن $v(0) = 15$ لذا:

$$15 = -9.8(0) + C$$

ومنه:

$$C = 15$$

ويكون:

$$v(t) = -9.8t + 15$$

تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع عندما $v(t) = 0$

$$-9.8t + 15 = 0 \Longrightarrow t = \frac{15}{9.8}$$
$$t \approx 1.53\ s$$

**b** نوجد $s(t)$

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$

$$= \int (-9.8t + 15)\,dt$$

$$= -\frac{9.8t^2}{2} + 15t + C = -4.9t^2 + 15t + C$$

$$\because \; s(0) = 140$$

$$-4.9(0)^2 + 15(0) + C = 140$$

$$\therefore \; C = 140$$

$$s(t) = -4.9t^2 + 15t + 140$$

تصل الكرة إلى سطح الأرض عندما $s(t) = 0$ أي:

$$-4.9t^2 + 15t + 140 = 0$$

باستخدام قانون حل المعادلة التربيعية

$$t = \frac{-15 \pm \sqrt{2\,969}}{-9.8} \implies t \approx 7.1\,s$$

أي تصل الكرة إلى سطح الأرض بعد مرور $7.1\,s$ تقريبًا

**حاول أن تحل**

**8** ألقيت كرة إلى الأعلى بسرعة ابتدائية $12\ m/s$ من على سطح أحد الأبنية ارتفاعه $80\ m$ عن سطح الأرض.

**a** في أي زمن $t$ سوف تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع؟

**b** في أي زمن $t$ سوف تصل الكرة إلى الأرض؟

(علمًا بأن عجلة الجاذبية الأرضية $a(t) = 9.8\ m/s^2$)

**معلومة:**

- دالة العجلة $a(t)$ تنتج من اشتقاق دالة السرعة $v(t)$ أي أن: $v'(t) = a(t)$.
- دالة السرعة $v(t)$ تنتج من اشتقاق دالة الإزاحة $s(t)$ أي أن: $v(t) = s'(t)$.

**معلومة:**

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$

$$v(t) = \int a(t)\,dt$$

# التكامل بالتعويض
# Integration by Substitution

**سوف تتعلم**
- التكامل بالتعويض.

**المفردات والمصطلحات:**
- التكامل بالتعويض
Integration by substitution

**دعنا نفكر ونتناقش**

a أثبت أن: $F(x) = \frac{1}{5}(x^2+1)^5$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 2x(x^2+1)^4$

b استفد من a في إيجاد $\int 2x(x^2+1)^4\,dx$

c ما العلاقة بين $2x$ , $x^2+1$؟

d ضع $g(x) = x^2+1$ ثم أوجد $g'(x)$.

e اكتب التكامل في b وناتجه باستخدام الرموز في d.

f ماذا تلاحظ؟

في بعض الأحيان لا تمكننا القواعد الأساسية للتكامل غير المحدد من إيجاد تكامل دالة ما كما لاحظنا في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش».

ولإيجاد هذا التكامل نتعامل مع متغير جديد. نستبدل المتغير $x$ بالمتغير $u$ بهدف استخدام القواعد الأساسية للتكامل غير المحدد.

فمثلًا لإيجاد: $\int 2x\sqrt{4+x^2}\,dx$

نرمز للمجذور بـ $u$ أي $u = 4+x^2$ ثم نفاضل لنحصل على: $du = 2x\,dx$ وبالتالي نكتب:

$$\int 2x\sqrt{4+x^2}\,dx = \int \sqrt{4+x^2}(2x\,dx) = \int \sqrt{u}\,du$$
$$= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3}(4+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3}(4+x^2)\sqrt{4+x^2} + C$$

**معلومة:**
إذا كانت $f$ دالة قابلة للاشتقاق بدلالة المتغير $x$ فإن التفاضل هو:
$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$
$$df = f'(x)\,dx$$

**قاعدة التكامل بالتعويض** — **Rule of Integration by Substitution**

إذا كانت $F$ هي مشتقة عكسية للدالة $f$ فإن:
$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$
وإذا كان $u = g(x)$ ، $du = g'(x)\,dx$ فإن:
$$\int f(u)\,du = F(u) + C$$

KuwaitMath.com

## مثال (1)

أوجد:

a $\int (x^2+2x+5)^3(2x+2)dx$

b $\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}dx$

الحل:

a $\int (x^2+2x+5)^3(2x+2)dx$

$u = x^2+2x+5$

$du = (2x+2)dx$ قاعدة التفاضل

$\int (x^2+2x+5)^3(2x+2)dx = \int u^3 du$ بالتعويض

$= \frac{u^4}{4}+C$

$= \frac{(x^2+2x+5)^4}{4}+C$ $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C$

b $\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}dx$

$u = \frac{1}{x}+4$

$du = -\frac{1}{x^2}dx$ قاعدة التفاضل

$\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}dx = \int -u^5\, du$

$= -\frac{u^6}{6}+C$ بالتعويض

$= -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}+4\right)^6+C$ $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C$

### حاول أن تحل

1 أوجد:

a $\int (x^3+4x^2+x)^7(3x^2+8x+1)dx$

b $\int \sqrt[3]{x^2-5x+2}\quad (2x-5)\,dx$

تمكننا قاعدة التكامل بالتعويض من تعميم قاعدة القوى في التكامل غير المحدد كالتالي:

$$\int (g(x))^n g'(x)dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1}+C \quad , \quad n \in Q-\{-1\} \quad , \quad C \text{ ثابت}$$

## مثال (2)

أوجد:

a $\int \sqrt{4x-5}\,dx$

b $\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3}dx$

الحل:

a $\int \sqrt{4x-5}\,dx = \int (4x-5)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$g(x) = 4x - 5$

$g'(x) = 4$

$\therefore \int (4x-5)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{4}\int 4(4x-5)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{1}{4}\int (g(x))^{\frac{1}{2}}\,g'(x)\,dx$

$= \frac{1}{4}\frac{(4x-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{12}(4x-5)^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{1}{6}\sqrt{(4x-5)^3} + C$

b $\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3}\,dx$

$u = \sqrt{x} + 2$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Longrightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$ قاعدة التفاضل

$\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3}\,dx = \int \frac{5}{u^3}(2\,du)$

$\int \frac{10}{u^3}\,du = 10\int u^{-3}\,du$ بالتعويض

$= -5u^{-2} + C$ $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

$= \frac{-5}{(\sqrt{x}+2)^2} + C$

KuwaitMath.com

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\int \sqrt[5]{(3x+7)}\,dx$

b $\int \frac{3(\sqrt[3]{x}-5)\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

مثال (3)

أوجد: $\int x(x+1)^5\,dx$

الحل:

$u = x + 1 \Longrightarrow x = u - 1$

$du = dx$ قاعدة التفاضل

بالتعويض

$$\int x(x+1)^5 dx = \int (u-1)u^5 du$$
$$= \int (u^6 - u^5) du$$
$$= \frac{u^7}{7} - \frac{u^6}{6} + C$$
$$= \frac{(x+1)^7}{7} - \frac{(x+1)^6}{6} + C$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

**حاول أن تحل**

3 أوجد: $\int x(2x-1)^3 dx$

**مثال (4)**

أوجد: $\int x^5 \sqrt{4-x^2}\, dx$

الحل:

$$u = 4 - x^2 \Longrightarrow x^2 = 4 - u$$
$$du = -2x\, dx \Longrightarrow x\, dx = -\frac{1}{2} du$$

قاعدة التفاضل

$x^5 = x^4 \cdot x$

$$\int \sqrt{4-x^2}(x^4)(x\, dx) = \int \sqrt{4-x^2}(x^2)^2 (x\, dx)$$

بالتعويض

$$= \int \sqrt{u}(4-u)^2 \left(-\frac{1}{2} du\right)$$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$= \int -\frac{1}{2}\sqrt{u}(16 - 8u + u^2) du$$
$$= \int \left(-8u^{\frac{1}{2}} + 4u^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}u^{\frac{5}{2}}\right) du$$
$$= \frac{-8}{\frac{3}{2}} u^{\frac{3}{2}} + \frac{4u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C$$
$$= \frac{-16}{3} u^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7} u^{\frac{7}{2}} + C$$
$$= -\frac{16}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7}(4-x^2)^{\frac{7}{2}} + C$$

**حاول أن تحل**

4 أوجد: $\int x^5 \sqrt{3+x^2}\, dx$

KuwaitMath.com

# تكامل الدوال المثلثية

# Integral of Trigonometric Functions

**سوف تتعلم**

- قواعد المكاملة المثلثية.

**المفردات والمصطلحات:**

- قواعد Rules
- قواعد المكاملة المثلثية Trigonometric Integral Rules

**دعنا نفكر ونتناقش**

يتحرك جسيم على محور السينات حيث إن موقعه عند أي لحظة $t \geqslant 0$ يعطى بالدالة: $s(t) = \sin t$. أوجد:

a السرعة اللحظية للجسيم كدالة في $t$.

b العجلة للجسيم كدالة في $t$.

الجدول أدناه يبيّن قواعد التكامل غير المحدد لبعض الدوال المثلثية جنبًا إلى جنب مع مصادر المشتقة لكل منها.

| | التكامل غير المحدد |
|---|---|
| 1 | $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ |
| 2 | $\int \sin kx\, dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$ |
| 3 | $\int \cos x\, dx = \sin x + C$ |
| 4 | $\int \cos kx\, dx = \frac{\sin kx}{k} + C$ |
| 5 | $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ |
| 6 | $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$ |
| 7 | $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$ |
| 8 | $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$ |

**تذكر:**

$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$

$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) = \sin kx$

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right) = \cos kx$

$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \csc^2 x$

$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

$\frac{d}{dx}(-\csc x) = \csc x \cot x$

يمكن تطبيق قواعد التكامل التي تم دراستها عند تكامل الدوال المثلثية.

**مثال (1)**

**أوجد التكاملات غير المحددة التالية:**

a $\int (\sin x + \sec^2 x)dx$

b $\int \csc x(\cot x + \csc x)dx$

c $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

**معلومة:**

- دالة السرعة $v(t)$ تنتج من اشتقاق دالة الإزاحة $s(t)$ أي أن: $v(t) = s'(t)$.
- دالة العجلة $a(t)$ تنتج من اشتقاق دالة السرعة $v(t)$ أي أن: $v'(t) = a(t)$.

الحل:

a $\int (\sin x + \sec^2 x)dx$

$= -\cos x + \tan x + C$ قواعد تكامل الدوال المثلثية

b $\int \csc x(\cot x + \csc x)dx$

$= \int \csc x \cdot \cot x\, dx + \int \csc^2 x\, dx$ قاعدة الجمع والطرح

$= -\csc x + C_1 - \cot x + C_2$

$= -\csc x - \cot x + C$ قواعد تكامل الدوال المثلثية

$(C_1 + C_2 = C)$

c $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ قواعد تكامل الدوال المثلثية

حاول أن تحل

1 أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a $\int (\cos x + \csc^2 x)dx$ b $\int \sec x(\tan x + \sec x)dx$ c $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

مثال (2)

أوجد:

a $\int \cos 4x\, dx$ b $\int (2x - \sin 3x)dx$ c $\int x\csc^2(x^2 - 1)dx$

الحل:

a $\int \cos 4x\, dx = \frac{1}{4}\sin 4x + C$

b $\int (2x - \sin 3x)dx = x^2 + \frac{1}{3}\cos 3x + C$

c $\int x\csc^2(x^2 - 1)dx$

$u = x^2 - 1$

$du = 2x\, dx \Longrightarrow x\, dx = \frac{1}{2}du$

$\int x\csc^2(x^2 - 1)dx$

$= \frac{1}{2}\int \csc^2 u\, du = -\frac{1}{2}\cot u + C$ قواعد تكامل الدوال المثلثية

$= -\frac{1}{2}\cot(x^2 - 1) + C$

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\int \sin 5x\, dx$ b $\int (x^2 + \cos 2x)dx$ c $\int x\sec^2(x^2 + 2)dx$

KuwaitMath.com

## مثال (3)

أوجد:

a $\int \cos^4 t \cdot \sin t \, dt$

b $\int \sec^2 x \cdot \tan x \, dx$

الحل:

a $\int \cos^4 t \cdot \sin t \, dt$

$u = \cos t$

$du = -\sin t \, dt$

$\int \cos^4 t \cdot \sin t \, dt = \int -u^4 \, du$

$= -\frac{u^5}{5} + C$ $\quad$ $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ والتعويض

$= -\frac{1}{5}\cos^5 t + C$

b $\int \sec^2 x \cdot \tan x \, dx$

$u = \tan x$

$du = \sec^2 x \, dx$

$\int \tan x \cdot \sec^2 x \, dx = \int u \, du$ $\quad$ بالتعويض

$= \frac{1}{2}u^2 + C$

$= \frac{1}{2}\tan^2 x + C$

### حاول أن تحل

3 أوجد:

a $\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$

b $\int \csc^2 x \cdot \cot x \, dx$

KuwaitMath.com

## مثال (4)

أوجد:

a $\int \sin^5(x+1) \cdot \cos(x+1) \, dx$

b $\int x^3 \cdot \cos(x^4+5) dx$

c $\int (1+\cos x)^6 \sin x \, dx$

الحل:

a $\int \sin^5(x+1) \cdot \cos(x+1) dx$

$u = \sin(x+1)$

قاعدة التفاضل $du = \cos(x+1)dx$

$$\int \sin^5(x+1)\cdot\cos(x+1)\,dx$$

بالتعويض $= \int u^5 du = \frac{1}{6}u^6 + C$

$$= \frac{1}{6}\sin^6(x+1) + C$$

**b** $\int x^3\cdot\cos(x^4+5)dx$

$u = x^4 + 5$

قاعدة التفاضل $du = 4x^3dx \Longrightarrow x^3dx = \frac{1}{4}du$

بالتعويض $\int \cos(x^4+5)\cdot x^3dx = \frac{1}{4}\int \cos u\,du$

$$= \frac{1}{4}\sin u + C$$

$$= \frac{1}{4}\sin(x^4+5) + C$$

**c** $\int (1+\cos x)^6 \sin x\,dx$

$g(x) = 1+\cos x \quad , \quad g'(x) = -\sin x$

قاعدة التفاضل $\int (1+\cos x)^6 \sin x\,dx = -\int (g(x))^6 g'(x)dx$

$$= -\frac{(g(x))^7}{7} + C$$

$$= \frac{-1}{7}(1+\cos x)^7 + C$$

**حاول أن تحل**

**4** أوجد:

**a** $\int \cos^3(2x-3)\cdot\sin(2x-3)dx$

**b** $\int x^2\cdot\sin(x^3-1)dx$

**c** $\int (3+\sin 2x)^5 \cos 2x\,dx$

**مثال (5)**

أوجد: $\int \sec^4 x \tan x\,dx$

الحل:

$u = \sec x$

$du = \sec x \tan x\,dx$

$$\int \sec^4 x \tan x \, dx$$

$$= \int \sec^3 x \cdot \sec x \tan x \, dx$$

$$= \int u^3 \, du = \frac{u^4}{4} + C$$

$$= \frac{\sec^4 x}{4} + C$$

حاول أن تحل

5 أوجد: $\int \csc^5 x \cot x \, dx$

KuwaitMath.com

5–4

# الدوال الأسية واللوغاريتمية

# Exponential and Logarithmic Function

**سوف تتعلم**

- تعرّف مشتقات الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية.
- تكامل الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية.

**المفردات والمصطلحات:**

- دالة أسية
Exponential Function
- دالة لوغاريتمية
Logarithmic Function

**تذكر:**

الدالة $f$ : $f(x) = a^x$ هي دالة أسية حيث $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

## دعنا نفكر ونتناقش

1 لتكن $f$ دالة أسية: $f(x) = a^x$

باستخدام تعريف المشتقة بيّن أن: $f'(x) = a^x \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h}$

2 أوجد: $f'(0)$

3 من 2 , 1 لاحظ أن: $f'(x) = f'(0)a^x$

4 من المعادلة في 1 تبيّن أن معدل التغير لأي دالة أسية يعتمد على الأساس لهذه الدالة.

أكمل الجدول التالي باستخدام الآلة الحاسبة:

| $h$ | $\dfrac{2^h - 1}{h}$ | $\dfrac{3^h - 1}{h}$ | $\dfrac{e^h - 1}{h}$ |
|---|---|---|---|
| 0.1 | | | |
| 0.01 | | | |
| 0.001 | | | |
| 0.0001 | | | |
| 0.00001 | | | |

5 استنتج قيمة تقريبية لكل من:

$$\lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \ , \ \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} \ , \ \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

6 أكمل ما يلي:

عند $a = 2$ فإن $f'(0) \approx$ .....

عند $a = 3$ فإن $f'(0) \approx$ .....

عند $a = e$ فإن $f'(0) \approx$ .....

7 أوجد باستخدام الآلة الحاسبة: $\ln(2), \ln(3), \ln e$

وقارن إجاباتك مع ما حصلت عليه في 6 .

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» يمكننا ملاحظة أن: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h} = \ln(a)$

KuwaitMath.com

## Derivative of Exponential Functions اشتقاق الدوال الأسية

**تذكر:**

$\ln e = 1$

$\ln e^m = m$

$m > 0 \ , \ n > 0$

(1) $\ln(m \cdot n) = \ln m + \ln n$

(2) $\ln \frac{m}{n} = \ln m - \ln n$

(3) $\ln m^k = k \ln m$

(4) $e^{\ln m} = m$

**قاعدة (1)**

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

إذا كانت $u$ دالة في $x$ قابلة للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

في القاعدة (1) وبوضع $a = e$ نحصل على القاعدة التالية:

**قاعدة (2)**

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

وفي حالة $u$ دالة في $x$ قابلة للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

**مثال (1)**

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = 3^x$ b $f(x) = 6^{\sqrt{x}}$ c $f(x) = 10^{\sin x}$

الحل:

a $f(x) = 3^x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(3^x) = 3^x \ln 3 \qquad \frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

b $f(x) = 6^{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(6^{\sqrt{x}}) = 6^{\sqrt{x}} \ln 6 \frac{d}{dx}\sqrt{x} \qquad \frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{6^{\sqrt{x}} \ln 6}{2\sqrt{x}}$$

c $f(x) = 10^{\sin x}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(10^{\sin x}) = 10^{\sin x} \cdot \ln 10 \frac{d}{dx} \sin x$$

$$= 10^{\sin x} \cdot \ln 10 \cdot \cos x$$

**حاول أن تحل**

1 أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = 10^x$ b $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ c $f(x) = 5^{\cos x}$

KuwaitMath.com

**مثال (2)**

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = e^{\frac{2x}{3}}$ b $g(x) = e^{x^2+3x-1}$ c $h(x) = e^{\sec x}$

الحل:

a $f(x) = e^{\frac{2x}{3}}$

$f'(x) = e^{\frac{2}{3}x}\left(\frac{2x}{3}\right)' = \frac{2}{3}e^{\frac{2x}{3}}$

b $g(x) = e^{x^2+3x-1}$

$g'(x) = e^{x^2+3x-1}(x^2+3x-1)'$

$= (2x+3)e^{x^2+3x-1}$

c $h(x) = e^{\sec x}$

$h'(x) = e^{\sec x}(\sec x)'$

$= \sec x \tan x\, e^{\sec x}$

**حاول أن تحل**

2 أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ b $g(x) = e^{x^2-4}$ c $h(x) = e^{\tan x}$

## اشتقاق دوال اللوغاريتمات الطبيعية

## Derivatives of Natural Logarithmic Functions

سنوجد مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي مرتكزين على مشتقة الدالة الأسية.

تعلمت فيما سبق أن: $y = \ln x \Longleftrightarrow e^y = x$

$$\frac{d}{dx}(e^y) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$(e^y)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \qquad e^y = x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \qquad y = \ln x$$

**قاعدة (3)**

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

إذا كانت $u$ دالة في $x$ قابلة للاشتقاق:

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

لاحظ أن: $\frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

**تذكر:**

(1) مجال الدالة $f$:

$f(x) = \ln x$ هو $\mathbb{R}^+$

(2) مجال الدالة $f$:

$f(x) = \ln(g(x))$ هو

$\{x : g(x) > 0\}$

**تذكر:**

$\ln e^x = x \ , \ x \in \mathbb{R}$

$e^{\ln x} = x \ , \ x > 0$

## مثال (3)

أوجد مشتقات كل من الدوال التالية:

a $f(x) = \ln x^2$

b $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

c $h(x) = \ln \sqrt{x}$

d $k(x) = \ln(\cos x)$

الحل:

a $f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$

b $g'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = x \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x}$

c $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$

d $k'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$

### حاول أن تحل

3 أوجد مشتقات كلّ من الدوال التالية:

a $f(x) = \ln(2x + x^3)$

b $g(x) = \ln \frac{1}{2x+1}$

c $h(x) = \ln(1 + \sqrt{3}x)$

d $h(x) = \ln(\sin x)$

## مثال توضيحي

إذا كان $f$ دالة: $f(x) = \ln|x|$

فأوجد $f'(x)$

الحل:

$$f(x) = \ln|x| \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} \ln x & : x > 0 \\ \ln(-x) & : x < 0 \end{cases}$$

$f(x) = \ln x \qquad : x > 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad (1)$

$f(x) = \ln(-x) \qquad : x < 0$

$f'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} \qquad (2)$

قاعدة

$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$

من (2) , (1) نجد أن:

$f'(x) = \frac{1}{x}$

KuwaitMath.com

**قاعدة (4)**

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

## تكامل بعض الدوال الأسية واللوغاريتمية

## Integrals of some Exponential and Logarithmic Functions

علمنا أن: $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$ ومنها تكون المشتقة العكسية هي:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

والجدول التالي يبيّن تكامل بعض الدوال الأسية واللوغاريتمية حيث: $u = g(x)$

| قاعدة المشتقة | التكامل غير المحدد |
|---|---|
| $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ | $\int e^x\,dx = e^x + C$ |
| $\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx} = u'e^u$ | $\int u'e^u\,dx = e^u + C$ |
| $\frac{d}{dx}\ln\|x\| = \frac{1}{x}$ | $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + C$ |
| $\frac{d}{dx}\ln\|u\| = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$ | $\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln\|u\| + C$ |

لاحظ أن: $\int \frac{g'(x)dx}{g(x)} = \ln|g(x)| + C$

**مثال (4)**

أوجد:

a $\int 2e^x\,dx$

b $\int 2x \cdot e^{x^2+3}dx$

الحل:

a $\int 2e^x dx = 2\int e^x dx$

$= 2e^x + C$

b $\int 2x \cdot e^{x^2+3}dx$

$u = x^2 + 3$

$du = 2x\,dx$

$\int 2x\,e^{x^2+3}dx = \int e^u du$

$= e^u + C$

$\therefore \int 2x\,e^{x^2+3}dx = e^{x^2+3} + C$

**حاول أن تحل**

4 أوجد:

a $\int e^{3x}dx$

b $\int (2x-1)e^{x^2-x+3}dx$

KuwaitMath.com

## مثال (5)

أوجد:

a $\int \frac{3}{2x+5}dx$

b $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx$

c $\int \frac{x^2-5x+6}{x}dx$

الحل:

a $\int \frac{3}{2x+5}dx$

$u = 2x+5$

$du = 2dx \Longrightarrow dx = \frac{1}{2}du$ قاعدة التفاضل

$\int \frac{3}{2x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{2}\ln|u|+C$ بالتعويض

$= \frac{3}{2}\ln|2x+5|+C$

b $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx$

$u = x^2+3x+7$

$du = (2x+3)dx$ قاعدة التفاضل

$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u|+C$ بالتعويض

$= \ln|x^2+3x+7|+C$

c $\int \frac{x^2-5x+6}{x}dx = \int \left(\frac{x^2}{x} - \frac{5x}{x} + \frac{6}{x}\right)dx$

$= \int \left(x - 5 + \frac{6}{x}\right)dx$

$= \frac{x^2}{2} - 5x + 6\ln|x| + C$

## حاول أن تحل

5 أوجد:

a $\int \frac{-5}{3x-2}dx$

b $\int \frac{3t^2-6t}{t^3-3t^2+8}dt$

c $\int \frac{x^3+4}{x}dx$

KuwaitMath.com

يتضمن تكامل دالة الظل (tangent) الدالة اللوغاريتمية كما هو مبيّن في المثال التالي. وهذا أيضًا صحيح في دالة مقلوب ظل الزاوية (cotangent).

**مثال (6)**

أوجد: $\int \tan x \, dx$

**الحل:**

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$g(x) = \cos x$$

قاعدة التفاضل

$$g'(x) = -\sin x$$

بالتعويض

$$\int \tan x \, dx = \int -\frac{g'(x)}{g(x)} dx$$

$$= -\ln|g(x)| + C$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C$$

$$= \ln|\sec x| + C$$

**حاول أن تحل**

6 أوجد: $\int \cot x \, dx$

KuwaitMath.com

# التكامل بالتجزيء
# Integration by Parts

**سوف تتعلم**
- التكامل بالتجزيء.

**المفردات والمصطلحات:**
- بالتجزيء By Parts

**دعنا نفكر ونتناقش**

1. هل يمكنك إيجاد: $\int x\sin x\, dx$ مستخدمًا ما تعلمته في البنود السابقة؟
2. لتكن الدالة $f$ : $f(x) = x\sin x$
   - a أوجد: $f'(x)$ ، $f''(x)$
   - b اكتب $f(x)$ بدلالة $\cos x$ و $f''(x)$ فقط.
   - c أوجد مشتقة عكسية $F$ للدالة $f$ وتحقق من إجابتك.

عند إيجاد تكامل بعض الدوال نواجه بعض الصعوبات لذلك نبحث عن طرائق بديلة تساعدنا في حل ذلك وإحدى هذه الطرائق التكامل بالتجزيء.

## قاعدة حاصل الضرب في صورة التكامل Product Rule in Integral Form

عندما تكون $v$ و $u$ دالتين في $x$ قابلتين للتفاضل، فإن قاعدة حاصل الضرب في التفاضل تفيد بما يلي:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

بمكاملة كل من الطرفين بالنسبة إلى $x$ :

$$\int \frac{d}{dx}(uv)\, dx = \int \left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right) dx$$

وبإعادة الترتيب نصل إلى المعادلة التكاملية:

$$\int \left(u\frac{dv}{dx}\right) dx = \int \left(\frac{d(uv)}{dx}\right) dx - \int \left(v\frac{du}{dx}\right) dx$$

$$= uv - \int \left(v\frac{du}{dx}\right) dx$$

وعند كتابة هذه المعادلة بالصورة التفاضلية الأبسط نحصل على القاعدة التالية:

**قاعدة التكامل بالتجزيء** **Integration by Parts Formula**

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

تعبّر هذه القاعدة عن $\int u\, dv$ بدلالة تكامل آخر هو $\int v\, du$.

باختيار **ملائم** للمتغيّرين $u$ , $v$، يمكن حساب التكامل الثاني بطريقة أسهل من حساب التكامل الأول، وهذا هو السبب في أهميّة القاعدة.

KuwaitMath.com

## مثال (1)

أوجد: $\int x \sin x \, dx$

الحل:

$$\int x \sin x \, dx$$

$u = x \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x - \int (-\cos x) dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C$$

**معلومة:**
للمساعدة يمكننا استخدام النمط التالي:

$u = \square \ , \ dv = \square$

$du = \square \ , \ v = \square$

### حاول أن تحل

1 أوجد: $\int x \cos x \, dx$

## مثال (2)

أوجد:

a $\int x e^x \, dx$

b $\int 3x \, e^{2x+1} \, dx$

الحل:

a $\int x e^x \, dx$

$u = x \qquad dv = e^x \, dx$

$du = dx \qquad v = e^x$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x e^x \, dx = xe^x - \int e^x dx$$

$$= x e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

b $\int 3x \, e^{2x+1} \, dx$

$u = 3x \qquad dv = e^{2x+1} \, dx$

$du = 3dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x+1}$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int 3x \, e^{2x+1} \, dx = \frac{3}{2} x \, e^{2x+1} - \frac{3}{2} \int e^{2x+1} \, dx$$

$$= \frac{3}{2} x \, e^{2x+1} - \frac{3}{4} e^{2x+1} + C$$

KuwaitMath.com

**حاول أن تحل**

2 أوجد:

a $\int (x-3)e^{x-3}\,dx$

b $\int 4x\,e^{-5x}\,dx$

**مثال (3)**

أوجد: $\int \ln(x+1)dx$

الحل:

$$\int \ln(x+1)dx$$

$u = \ln(x+1)$ $\qquad$ $dv = dx$

$du = \frac{1}{x+1}dx$ $\qquad$ $v = x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \ln(x+1)dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx$$

$$= x\ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1}dx$$

$$= x\ln(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= x\ln(x+1) - x + \ln|x+1| + C$$

$$= x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C$$

لاحظ $x+1 > 0$

**حاول أن تحل**

3 أوجد: $\int \ln x\,dx$

**مثال (4)**

أوجد: $\int x\ln x\,dx$

الحل:

$$\int x\ln x\,dx$$

$u = \ln x$ $\qquad$ $dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\qquad$ $v = \frac{x^2}{2}$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

تذكر:

$\int dx = x + C$

KuwaitMath.com

$$\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

**حاول أن تحل**

4 أوجد: $\int (x+1)\ln(x+1)dx$

يمكن حساب التكامل بالتجزيء أكثر من مرة.

**مثال (5)**

أوجد: $\int x^2\cos x\,dx$

**الحل:**

$$\int x^2\cos x\,dx$$

$u = x^2$ $\qquad$ $dv = \cos x\,dx$

$du = 2x\,dx$ $\qquad$ $v = \sin x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx \qquad (1)$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد: $\int x\sin x\,dx$

$u = x$ $\qquad$ $dv = \sin x\,dx$

$du = dx$ $\qquad$ $v = -\cos x$

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C_1 \qquad (2)$$

من (2) , (1) نحصل على:

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2(-x\cos x + \sin x + C_1)$$
$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

حيث $C = -2C_1$

**حاول أن تحل**

5 أوجد: $\int x^2\sin x\,dx$

KuwaitMath.com

## مثال (6)

أوجد: $\int x^2 e^x \, dx$

الحل:

$$\int x^2 e^x \, dx$$

$$u = x^2 \qquad dv = e^x \, dx$$

$$du = 2x \, dx \qquad v = e^x$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x \, e^x dx \qquad (1)$$

باستخدام القاعدة مرّة ثانية لإيجاد:

$$\int x \, e^x \, dx$$

$$u = x \qquad dv = e^x \, dx$$

$$du = dx \qquad v = e^x$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x \, e^x dx = x \, e^x - \int e^x dx$$

$$= x \, e^x - e^x + C_1 \qquad (2)$$

من (2) , (1) نحصل على:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x \, e^x - e^x + C_1)$$

$$= x^2 e^x - 2x \, e^x + 2e^x - 2C_1 \qquad C = -2C_1$$

$$= (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

### حاول أن تحل

6 أوجد: $\int x^2 \, e^{x+2} \, dx$

KuwaitMath.com

## مثال (7)

أوجد: $\int e^x \sin x \, dx$

الحل:

$$\int e^x \sin x \, dx$$

$$u = e^x \qquad dv = \sin x \, dx$$

$$du = e^x \, dx \qquad v = -\cos x$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x - \int -e^x \cos x\, dx$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx \qquad (1)$$

باستخدام القاعدة مرّة ثانية لإيجاد: $\int e^x \cos x\, dx$

$u = e^x \qquad dv = \cos x\, dx$

$du = e^x\, dx \qquad v = \sin x$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx \qquad (2)$$

نعوّض (2) في (1) :

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

$$2\int e^x \sin x\, dx = e^x (\sin x - \cos x)$$

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

حاول أن تحل

7 أوجد: $\int e^x \cos x\, dx$

KuwaitMath.com

# التكامل باستخدام الكسور الجزئية

# Integration Using Partial Fractions

**سوف تتعلم**

- مقدمة عن الكسور الجزئية.
- مقامات لها عوامل خطية.

**المفردات والمصطلحات:**

- كسور جزئية Partial Fractions
- تفكيك Expand
- عامل خطي Linear Factor

**دعنا نفكر ونتناقش**

**a** لتكن الدالة $f$: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2}$

اكتب $f(x)$ على الصورة: $f(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$

حيث $h(x)$ هو المقام المشترك.

**b** لتكن الدالة $g$: $g(x) = \frac{x^2+8x-4}{x(x^2-4)}$

نأخذ: $\frac{x^2+8x-4}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$

**1** اضرب طرفي المعادلة في $x$ ثم بسّط وعوّض عن $x$ بالصفر.

استنتج قيمة $A$.

**2** اضرب طرفي المعادلة في $x-2$ ثم بسّط وعوّض عن $x$ بـ 2

استنتج قيمة $B$.

**3** اضرب طرفي المعادلة في $x+2$ ثم بسّط وعوّض عن $x$ بـ $-2$

استنتج قيمة $C$.

**c** ما العلاقة بين $f(x)$ و $g(x)$؟

درسنا في ما سبق أن أي كثيرة حدود عواملها حقيقية قد يمكننا تحليلها إلى عوامل خطية (من الدرجة الأولى) وعوامل من الدرجة الثانية (تربيعية) ليس لها أصفار حقيقية (ليس لها جذور حقيقية).

يمكننا استخدام ذلك في إيجاد تكامل لحدوديات نسبية وسوف تقتصر دراستنا على تكامل الحدوديات النسبية التي يمكن تحليل المقام فيها إلى عوامل خطيّة.

## أولًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية (عوامل من الدرجة الأولى) غير مكررة

**المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية غير مكررة.**

**لتكن $f(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$ حيث المقام $h(x)$ على الصورة:**

$$h(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots(a_kx+b_k)$$

**حيث لا يوجد عوامل مكررة ولا يوجد عامل ثابت مضروب بآخر.**

**في هذه الحالة تكون الدالة $f$ على صورة كسور جزئية كالتالي:**

$$\frac{r(x)}{h(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \ldots + \frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

KuwaitMath.com

## مثال (1)

لتكن الدالة $f$ : $f(x) = \dfrac{5x-1}{x^2-2x-15}$

فأوجد:

a الكسور الجزئية

b $\int f(x)\,dx$

الحل:

a

حلّل المقام

$$x^2-2x-15=(x+3)(x-5)$$

$$\frac{5x-1}{x^2-2x-15}=\frac{A_1}{x+3}+\frac{A_2}{x-5}$$

اضرب طرفي المعادلة في $(x+3)(x-5)$ وبسّط

$$5x-1=A_1(x-5)+A_2(x+3)$$

عوّض عن $x$ بـ 5

$$5(5)-1=A_1(5-5)+A_2(5+3)$$

$$\therefore\ A_2=3$$

عوّض عن $x$ بـ $(-3)$

$$5(-3)-1=A_1(-3-5)+A_2(-3+3)$$

$$\therefore\ A_1=2$$

عوّض عن $A_2$ و $A_1$ بقيمتيهما

$$\frac{5x-1}{x^2-2x-15}=\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x-5}$$

للتحقق يمكن جمع كسري الطرف الأيمن بإيجاد مقام مشترك وبالمقارنة مع الطرف الأيسر.

b

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{5x-1}{x^2-2x-15}\,dx$$

$$=\int\left(\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x-5}\right)dx$$

$$=\int\frac{2}{x+3}\,dx+\int\frac{3}{x-5}\,dx$$

$$\int(f_1(x)+f_2(x))\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx$$

$$=2\int\frac{1}{x+3}\,dx+3\int\frac{1}{x-5}\,dx$$

$$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$$

$$=2\ln|x+3|+3\ln|x-5|+C$$

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+C$$

## حاول أن تحل

1 لتكن الدالة $f$ : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-4x+3}$

فأوجد:

a الكسور الجزئية

b $\int f(x)\,dx$

**مثال (2)**

أوجد: $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

الحل:

نوجد الكسور الجزئية للحدودية النسبية: $\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}$

تحليل المقام

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2)$$
$$= x(2x-1)(x+2)$$
$$\therefore \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{2x-1}+\frac{A_3}{x+2}$$

اضرب طرفي المعادلة في: $x(2x-1)(x+2)$ وبسّط

$$x^2+2x-1 = A_1(2x-1)(x+2)+A_2x(x+2)+A_3x(2x-1)$$

عوّض عن $x$ بـ $0$

$$0^2+2(0)-1 = A_1(0-1)(0+2)+A_2(0)+A_3(0)$$
$$\therefore A_1 = \frac{1}{2}$$

عوّض عن $x$ بـ $\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)-1 = A_1(0)+\frac{1}{2}A_2\times\left(\frac{5}{2}\right)+A_3(0)$$
$$\therefore A_2 = \frac{1}{5}$$

عوّض عن $x$ بـ $-2$

$$(-2)^2+2(-2)-1 = A_1(0)+A_2(0)+(-2A_3)(-5)$$
$$\therefore A_3 = -\frac{1}{10}$$

ومنه:

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{5}}{2x-1}+\frac{\frac{-1}{10}}{x+2}$$
$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx = \int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{5}}{2x-1}-\frac{\frac{1}{10}}{x+2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{10}\ln|2x-1|-\frac{1}{10}\ln|x+2|+C$$

**حاول أن تحل**

2 أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}dx$

## ثانيًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية بعضها متكرر

المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية بعضها متكرر. لكل عامل من عوامل $h(x)$ على الصورة $(mx+n)^k$، يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها $k$:

$$\frac{A_1}{mx+n}+\frac{A_2}{(mx+n)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(mx+n)^k}$$

## مثال (3)

أوجد: $\int \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

الحل:

نوجد الكسور الجزئية للحدودية النسبية $\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}$

حلّل المقام:

$$x^3-4x^2+4x = x(x^2-4x+4) = x(x-2)^2$$

تفكك $(x-2)^2$ إلى حدّين

$$\therefore \quad \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x} = \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{(x-2)^2} \qquad (1)$$

اضرب كلًّا من طرفي المعادلة في $x(x-2)^2$

$$-x^2+2x+4 = A_1(x-2)^2 + A_2x(x-2) + A_3x$$

نضع في المعادلة $x=2$ فنحصل على $A_3 = 2$

نضع في المعادلة $x=0$ فنحصل على $A_1 = 1$

ثم نعوّض في المعادلة عن $A_1 = 1$، $A_3 = 2$، وإحدى قيم $x$ ولتكن $x=1$ لإيجاد $A_2$

$$-(1)^2+2(1)+4 = 1(1-2)^2 + A_2(1)(1-2) + (2)(1)$$

$$-1+2+4 = (-1)^2 + A_2(-1) + 2$$

$$\therefore \quad A_2 = -2$$

لدينا: $A_1 = 1 \;,\; A_2 = -2 \;,\; A_3 = 2$

التعويض في المعادلة (1) يعطي:

$$\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x} = \frac{1}{x}+\frac{-2}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}$$

$$\int \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{-2}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-2}{x-2}dx + \int \frac{2}{(x-2)^2}dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx - 2\int \frac{1}{x-2}dx + 2\int \frac{1}{(x-2)^2}dx$$

$$= \ln|x| - 2\ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

### حاول أن تحل

3 أوجد: $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

## مثال (4)

أوجد: $\int \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}\,dx$

الحل:

تحليل المقام إلى عوامل خطية

$$x^3+2x^2 = x^2(x+2)$$

$$\therefore \quad \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x+2}$$

اضرب كلًّا من طرفي المعادلة في: $x^2(x+2)$ ثم بسّط

$$3+x+x^2 = A_1x(x+2) + A_2(x+2) + A_3x^2$$

عوّض عن $x$ بـ $0$

$$3+0+0^2 = A_1(0) + A_2(0+2) + A_3(0)^2$$

$$\therefore \quad A_2 = \frac{3}{2}$$

عوّض عن $x$ بـ $-2$

$$3-2+(-2)^2 = A_1(0) + A_2(0) + A_3(-2)^2$$

$$\therefore \quad A_3 = \frac{5}{4}$$

نعوّض في المعادلة عن: $A_2 = \frac{3}{2}$ ، $A_3 = \frac{5}{4}$ وإحدى قيم $x$ ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة $A_1$

$$3+1+(1)^2 = 3A_1 + \frac{3}{2}(3) + \frac{5}{4}\times(1)^2$$

$$\therefore \quad A_1 = -\frac{1}{4}$$

$$\int \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}\,dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x^2} + \frac{\frac{5}{4}}{x+2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{3}{2x} + \frac{5}{4}\ln|x+2| + C$$

KuwaitMath.com

### حاول أن تحل

4 أوجد: $\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}\,dx$

عندما تكون درجة البسط في الحدودية النسبية $f(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$ مساوية أو أكبر من درجة المقام، نوجد أولًا ناتج القسمة $q(x)$ باستخدام القسمة المطولة ثم نكتب الدالة على الصورة: $f(x) = q(x) + \frac{p(x)}{h(x)}$ حيث $p(x)$ هو الباقي.

## مثال (5)

أوجد: $\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}\,dx$

الحل:

$\because$ درجة البسط = درجة المقام

$\therefore$ نبدأ بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة

ناتج القسمة ← 1

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 4x + 4 & x^2 - 3x + 7 \\ & -\,x^2 - 4x + 4 \\ \hline & x + 3 \end{array}$$

الباقي ← $x + 3$

$$\frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4} = 1 + \frac{x+3}{(x-2)^2}$$

الحدودية النسبية

$$\frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2}$$

نضرب كلًّا من طرفي المعادلة في $(x-2)^2$ ثم نبسّط

$$x+3 = A_1(x-2) + A_2$$

عوّض عن $x$ بـ 2

$$2+3 = A_1(0) + A_2$$

$$\therefore\ A_2 = 5$$

نعوّض في المعادلة عن $A_2 = 5$ وإحدى قيم $x$ ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة $A_1$ .

$$1+3 = -A_1 + 5$$

$$\therefore\ A_1 = 1$$

$$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$= x + \ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + C$$

## حاول أن تحل

5 a هل يمكن حل مثال (5) بطريقة أخرى.

b أوجد: $\int \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx$

## مثال (6)

أوجد: $\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 25}{x^2 - 6x + 8}\, dx$

الحل:

$\because$ درجة البسط 3 ودرجة المقام 2

$\therefore$ يجب استخدام القسمة المطولة

ناتج القسمة ← $2x + 3$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^3 - 9x^2 + 25 \\
x^2 - 6x + 8 & \\
 & -\ (2x^3 - 12x^2 + 16x) \\
\hline
 & 3x^2 - 16x + 25 \\
 & -\ (3x^2 - 18x + 24) \\
\hline
 & 2x + 1
\end{array}
$$

الباقي ← $2x + 1$

ومنه نكتب:

$$\frac{2x^3 - 9x^2 + 25}{x^2 - 6x + 8} = 2x + 3 + \frac{2x + 1}{x^2 - 6x + 8}$$

$$= 2x + 3 + \frac{2x + 1}{(x - 2)(x - 4)}$$

نأخذ الحدودية النسبية $\frac{2x + 1}{(x - 2)(x - 4)}$

ونكتبها على الصورة: $\frac{2x + 1}{(x - 2)(x - 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 4}$

نضرب طرفي المعادلة في $(x - 2)(x - 4)$ ثم نعوّض على الترتيب $x = 2$ و $x = 4$

نحصل على $A = -\frac{5}{2}$ ، $B = \frac{9}{2}$

$$\frac{2x^3 - 9x^2 + 25}{x^2 - 6x + 8} = 2x + 3 + \frac{-\frac{5}{2}}{x - 2} + \frac{\frac{9}{2}}{x - 4}$$

ومنه تكون:

$$\therefore \int \frac{2x^3 - 9x^2 + 25}{x^2 - 6x + 8}\, dx = 2\int x\,dx + 3\int dx - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x - 2} + \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x - 4}$$

$$= x^2 + 3x - \frac{5}{2}\ln|x - 2| + \frac{9}{2}\ln|x - 4| + C$$

## حاول أن تحل

6 أوجد: $\int \frac{x^3 - 7x + 9}{x^2 - 3x + 2}\, dx$

KuwaitMath.com

## مثال (7)

أوجد: $\int \frac{x^4-2x^3+4x+2}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

الحل:

$\because$ درجة البسط أكبر من درجة المقام

$\therefore$ نبدأ بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-1 \longleftarrow \text{ناتج القسمة} \\
\hline
x^3-x^2-x+1 & x^4-2x^3+4x+2 \\
 & -\;(x^4-x^3-x^2+x) \\
\hline
 & -x^3+x^2+3x+2 \\
 & -\;(-x^3+x^2+x-1) \\
\hline
 & 2x+3 \longleftarrow \text{الباقي}
\end{array}
$$

$$\frac{x^4-2x^3+4x+1}{x^3-x^2-x+1}=x-1+\frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)}$$

الحدودية النسبية

$$\frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{x+1}$$

نضرب كلًّا من طرفي المعادلة في $(x-1)^2(x+1)$ ثم نبسّط

$$2x+3=A_1(x-1)(x+1)+A_2(x+1)+A_3(x-1)^2$$

عوّض عن $x$ بـ $1$

$$2(1)+3=A_1(0)+2A_2+A_3(0)$$

$$\therefore\ A_2=\frac{5}{2}$$

عوّض عن $x$ بـ $-1$

$$2\times(-1)+3=A_1(0)+A_2(0)+4A_3$$

$$\therefore\ A_3=\frac{1}{4}$$

نعوّض في المعادلة عن $A_2=\frac{5}{2}$، $A_3=\frac{1}{4}$ وإحدى قيم $x$ ولتكن $x=0$

$$\therefore\ A_1=-\frac{1}{4}$$

$$\int \frac{x^4-2x^3+4x+2}{x^3-x^2-x+1}dx=\int\left(x-1+\frac{-\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{\frac{5}{2}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{x+1}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{5}{2(x-1)}+\frac{1}{4}\ln|x+1|+C$$

### حاول أن تحل

7 أوجد: $\int \frac{2x^4+3x^2-7}{x^3-6x^2+9x}dx$

KuwaitMath.com

# التكامل المحدد

# Definite Integral

**سوف تتعلم**

- التكامل المحدد والمساحة.
- خواص التكامل المحدد.
- قاعدة القوى في صورة التكامل.
- التعويض في التكامل المحدد.

**المفردات والمصطلحات:**

- تكامل محدد Definite Integral
- تكامل بالتعويض Integration by Substitution

**معلومة:**
عند كتابة $\int_a^b f(x)dx$ يأخذ المتغيّر $x$ كلّ القيم من $a$ إلى $b$.

**دعنا نفكر ونتناقش**

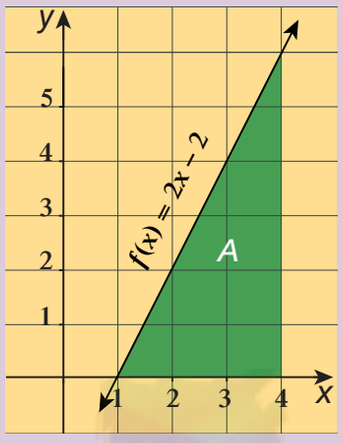
لنعتبر $f(x) = 2x - 2$ على الفترة $[1 , 4]$،
من الشكل المقابل، أوجد:

a) $F(x)$ المشتقة العكسية للدالة.

b) $F(4)$ , $F(1)$، ثم احسب $F(4) - F(1)$

c) مساحة المنطقة $A$.

d) ماذا تلاحظ؟




## التكامل المحدد Definite Integral

تعلمت فيما سبق إنه إذا كانت $f$ دالة متصلة على $[a , b]$ وكانت الدالة $F$ مشتقة عكسية للدالة $f$ فإن التكامل غير المحدد للدالة $f$ هو:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

وفي هذا البند سوف تتعلم التكامل المحدد للدالة $f$ من $a$ إلى $b$ وهو العدد الحقيقي: $F(b) - F(a)$

حيث:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b$$
$$= [F(x)]_a^b$$
$$= F(b) - F(a)$$

ويسمّى $a, b$ حدّي التكامل، والقواعد التي سبق ذكرها في التكامل غير المحدد تطبق على التكامل المحدد.

**مثال (1)**

أوجد التكامل المحدد للدالة: $f(x) = 3x^2 - x + 4$ من $x = -2$ إلى $x = 3$.

**الحل:**

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{3} (3x^2 - x + 4)dx$$
$$= \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{-2}^{3}$$
$$= \left((3)^3 - \frac{1}{2}(3)^2 + 4(3)\right) - \left((-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 + 4(-2)\right)$$
$$= 34.5 + 18 = 52.5$$

KuwaitMath.com

حاول أن تحل

1 أوجد: $\int_2^7 (x^3 - 2x^2 + 2)dx$

## خواص التكامل المحدد Properties of the Definite Integral

إذا كانت $f$ دالة متصلة على الفترة $I$ ، $k \in \mathbb{R}$ ، $a, b, c \in I$ فإن:

1 $\int_a^a f(x)dx = 0$

2 $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

3 $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

4 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

5 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

لاحظ في خاصية 3 أنه: إذا كان $k = 1$ فإن: $\int_a^b dx = b - a$

مثال (2)

أوجد:

a $\int_{-8}^{-4} dx$

b $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos x)dx$

c $\int_2^{-1} (\sqrt{x+1} - 3)dx$

d $\int_1^2 \left(3e^x + \frac{e}{x}\right)dx$

الحل:

a $\int_{-8}^{-4} dx = [x]_{-8}^{-4} = -4 - (-8) = 4$

b $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos x)dx = 0$

خواص التكامل المحدد $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

c $\int_2^{-1} (\sqrt{x+1} - 3)dx = -\int_{-1}^2 (\sqrt{x+1} - 3)dx = -\int_{-1}^2 \left((x+1)^{\frac{1}{2}} - 3\right)dx$

$= -\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 3x\right]_{-1}^2$

$= -\left[\frac{2}{3}(2+1)^{\frac{3}{2}} - 3(2) - \frac{2}{3}(-1+1)^{\frac{3}{2}} + 3(-1)\right]$

$= -\left(\frac{2}{3}(3\sqrt{3}) - 6 - 3\right) = 9 - 2\sqrt{3}$

d $\int_1^2 \left(3e^x + \frac{e}{x}\right)dx = [3e^x + e\ln x]_1^2$

$\int_a^b \frac{1}{x}dx = [\ln x]_a^b$

$= (3e^2 + e\ln 2) - (3e^1 + e\ln 1)$

$= 3e^2 + e\ln 2 - 3e$

KuwaitMath.com

**حاول أن تحل**

2 أوجد:

a $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \csc^2 x\right)dx$

b $\int_{2}^{-3} 5\,dx$

c $\int_{3}^{3} (-2x^3 + x^2)dx$

d $\int_{2}^{4} \frac{dx}{x-1}$

**مثال (3)**

أوجد:

a $\int_{-2}^{3} |x|dx$

b $\int_{0}^{5} |x-3|dx$

الحل:

a
$$\int_{-2}^{3} |x|dx = \int_{-2}^{0} |x|dx + \int_{0}^{3} |x|dx$$
$$= \int_{-2}^{0} (-x)dx + \int_{0}^{3} x\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{3}$$
$$= 2 + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}$$

b
$$\int_{0}^{5} |x-3|dx = \int_{0}^{3} |x-3|dx + \int_{3}^{5} |x-3|dx$$
$$= \int_{0}^{3} (-x+3)dx + \int_{3}^{5} (x-3)dx$$
$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{0}^{3} + \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_{3}^{5}$$
$$= \frac{9}{2} + \left(\frac{25}{2} - 15\right) - \left(\frac{9}{2} - 9\right)$$
$$= \frac{13}{2}$$

**تذكر:**

$$|x| = \begin{cases} x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

**حاول أن تحل**

3 أوجد:

a $\int_{-3}^{4} |2x-4|dx$

b $\int_{1}^{3} |x+2|dx$

لتكن $f$ دالة متصلة على $[a, b]$

6 إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in [a, b]$

فإن: $\int_{a}^{b} f(x)dx \geqslant 0$

7 إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall \quad x \in [a, b]$

فإن: $\int_{a}^{b} f(x)dx \leqslant 0$

KuwaitMath.com

## مثال (4)

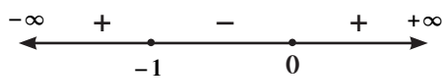
دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_3^5 (x^2+x)dx \geqslant 0$

الحل:

بفرض $f(x) = x^2 + x$

نضع $x^2 + x = 0$

$x(x+1) = 0$




$f(x) \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$

$\because \quad [3,5] \subseteq [0, \infty)$

$\therefore \quad x^2 + x \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in [3,5]$

$\int_3^5 (x^2+x)dx \geqslant 0$

### حاول أن تحل

4 دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^0 (x^2+x)dx \leqslant 0$

8 لتكن الدالتين $f, g$ متصلتين على $[a,b]$ وكانت: $f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

## مثال (5)

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_1^3 (2x-3)dx \leqslant \int_1^3 (x^2+2)dx$

الحل:

نفرض أن $f(x) = 2x - 3 \ , \ g(x) = x^2 + 2$

وهما دالتان متصلتان على $\mathbb{R}$

نوجد $f(x) - g(x) = (2x-3) - (x^2+2)$

$= 2x - 3 - x^2 - 2$

$= -x^2 + 2x - 5$

نضع $-x^2 + 2x - 5 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 4 - 4(-1)(-5)$$
$$= 4 - 20 = -16 \ , \ -16 < 0$$

$\therefore$ لا توجد للمعادلة جذور حقيقية $\Longleftarrow$ $f(x) - g(x)$ وحيدة الإشارة وبأخذ قيمة اختيارية نجد أن

$$f(x) - g(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

أي أن: $f(x) - g(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in [1, 3]$

$$(2x - 3) - (x^2 + 2) \leqslant 0 \qquad \forall x \in [1, 3]$$
$$\Longrightarrow 2x - 3 \leqslant x^2 + 2$$

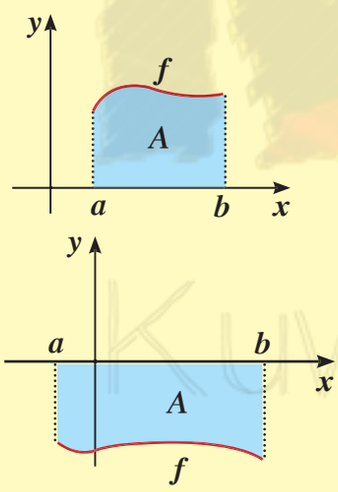
خاصية

$$\therefore \int_1^3 (2x - 3)dx \leqslant \int_1^3 (x^2 + 2)dx$$

**حاول أن تحل**

5 دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^{2} (x^2 + 1)dx \geqslant \int_{-1}^{2} (x - 1)dx$

## التفسير البياني للتكامل المحدد Graphical Interpretation of Definite Integral




في المستوى الإحداثي لتكن $f$ دالة متصلة على $[a, b]$،

$A$ تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات

والمستقيمين $x = a \ , \ x = b$

1 إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a, b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\, dx = A$

2 إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in [a, b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\, dx = -A$

**مثال (6)**

a أوجد مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = -3$، ومحور السينات، والمستقيمين $x = -2 \ , \ x = 4$.

b تحقق بيانيًّا.

الحل:

a $f(x) = -3$

$\because \ f(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in [-2, 4]$

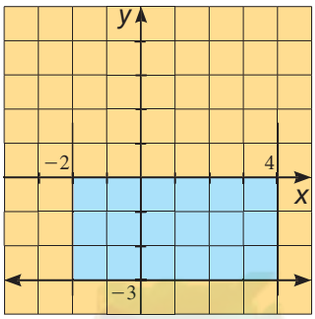
$f$ سالبة على $[-2, 4]$

$$A = -\int_{-2}^{4} f(x)dx$$

$f(x) = -3$

$$= -\int_{-2}^{4} -3\,dx$$
$$= \int_{-2}^{4} 3\,dx$$
$$= 3(4-(-2))$$
$$= 18 \text{ units squared}$$

**b** تحقق بيانيًّا:




مساحة المنطقة تساوي مساحة المستطيل الذي بعديه 3، 6 (وحدة طول)

$\therefore\ A = 3 \times 6 = 18$ units squared

**حاول أن تحل**

**6** أوجد قيمة $\int_{1}^{5} (2-2x)dx$ بيانيًّا.

**مثال (7)**

أوجد:

**a** $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$

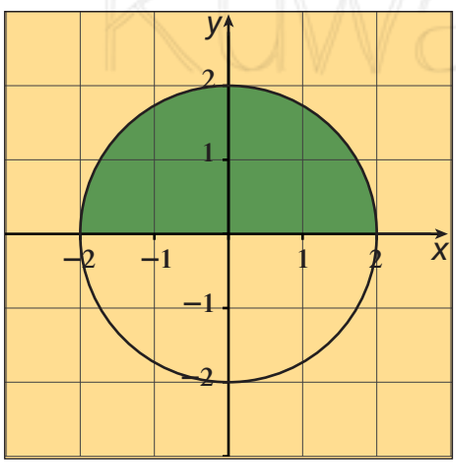
**b** $\int_{0}^{3} -\sqrt{9-x^2}\,dx$

الحل:

**a** $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$

نأخذ: $y = \sqrt{4-x^2}$

$$y^2 = 4 - x^2$$
$$x^2 + y^2 = 4$$




وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 وحدة طول.

والدالة: $y = \sqrt{4-x^2}$ تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة

مساحة المنطقة المظللة $= \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi(2)^2$$
$$= 2\pi$$

**b** $\int_0^3 -\sqrt{9-x^2}\,dx$

نأخذ: $y=-\sqrt{9-x^2}$

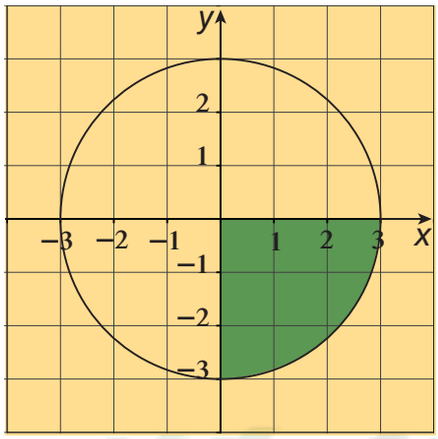
$y^2=9-x^2$

$x^2+y^2=9$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها 3 وحدات طول.

والدالة $y=-\sqrt{9-x^2}$ تمثل معادلة النصف السفلي للدائرة

فيكون:




$$\int_0^3 -\sqrt{9-x^2}\,dx=-A$$

$$=\frac{-1}{4}\pi(3)^2$$

$$=\frac{-9\pi}{4}$$

**حاول أن تحل**

**7** أوجد:

**a** $\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx$

**b** $\int_0^4 -\sqrt{16-x^2}\,dx$

تعلمت في البنود السابقة طرائق عدة لإيجاد التكامل غير المحدد منها التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزيء والتكامل بالكسور الجزئية. وتستخدم هذه الطرائق أيضًا في إيجاد التكاملات المحددة.

ويجب مراعاة ما يلي عند استخدام طريقة التعويض في إيجاد التكامل المحدد:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$$

بفرض $u=g(x)\ ,\ du=g'(x)dx$

ثم كامل بالنسبة لـ $u$ من $u=g(a)$ إلى $u=g(b)$ بحيث يكون:

$$\int_c^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\cdot du$$

**مثال (8)**

أوجد: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\sec^2 x\,dx$

الحل:

$$u=\tan x\ ,\ du=\sec^2 x\,dx$$

عندما $x=0$ فإن $u=\tan 0=0$

عندما $x=\frac{\pi}{4}$ فإن $u=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \, dx = \int_0^1 u du$$
$$= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

**حاول أن تحل**

8 a هل يمكن حل مثال (8) بطريقة أخرى؟ فسّر إجابتك.

b أوجد: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos 2x \, dx$

**مثال (9)**

أوجد:

a $\int_{-1}^{1} (x^2+2x-3)^2 (x+1) dx$

b $\int_0^3 x\sqrt{x+1} \, dx$

الحل:

a $\int_{-1}^{1} (x^2+2x-3)^2 (x+1) dx$

لتكن: $u = x^2+2x-3$

فإن $du = (2x+2)dx \Longrightarrow \frac{1}{2}du = (x+1)dx$

عندما $x = -1$ فإن $u = -4$

عندما $x = 1$ فإن $u = 0$

عندئذٍ

$$\int_{-1}^{1} ((x^2+2x-3)^2 (x+1)) dx = \frac{1}{2}\int_{-4}^{0} u^2 \, du$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-4}^{0}$$
$$= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{64}{3}\right)$$
$$= \frac{32}{3}$$

b $\int_0^3 x\sqrt{x+1} \, dx$

طريقة أولى بالتجزيء:

$u = x$ $\quad dv = (x+1)^{\frac{1}{2}} dx$

$du = dx$ $\quad v = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$
$$\int_0^3 x\sqrt{x+1} \, dx = \left[\frac{2x}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 - \frac{2}{3}\int_0^3 (x+1)^{\frac{3}{2}} dx$$
$$= \frac{2}{3}\left[x(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 - \frac{4}{15}\left[(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^3$$
$$= \frac{2}{3}\left[3 \times (4)^{\frac{3}{2}}\right] - \frac{4}{15}\left[4^{\frac{5}{2}} - 1\right] = \frac{116}{15}$$

KuwaitMath.com

طريقة ثانية:

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx = \int_0^3 (x+1-1)\sqrt{x+1}\,dx$$
$$= \int_0^3 (x+1)\sqrt{x+1}\,dx - \int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx$$
$$= \int_0^3 (x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx - \int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \frac{2}{5}\left[(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^3 - \frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$
$$= \frac{116}{15}$$

**حاول أن تحل**

**9** أوجد:

**a** $\int_{-1}^{1}\left((x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\right)dx$

**b** $\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

**مثال (10)**

أوجد: $\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x}\,dx$

الحل:

$$\int_{-2}^{0} x\,e^{-x}\,dx$$

نستخدم التكامل بالتجزيء:

$u = x$ $\qquad$ $dv = e^{-x}\,dx$

$du = dx$ $\qquad$ $v = -e^{-x}$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int_{-2}^{0} x\,e^{-x}\,dx = -\left[x\,e^{-x}\right]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} -e^{-x}\,dx$$
$$= -\left[x\,e^{-x}\right]_{-2}^{0} - \left[e^{-x}\right]_{-2}^{0}$$
$$= -(0+2e^2) - (1-e^2)$$
$$= -2e^2 - 1 + e^2$$
$$= -e^2 - 1$$

**حاول أن تحل**

**10** أوجد: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\,dx$

## مثال (11)

أوجد: $\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\,dx$

الحل:

نوجد الكسور الجزئية للدالة الحدودية النسبية $f(x)=\frac{2x+8}{x^2+4x+3}$

فنكتب:

$$f(x)=\frac{2x+8}{(x+1)(x+3)}$$

$$\frac{2x+8}{(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}$$

نضرب طرفي المعادلة بـ $(x+1)(x+3)$ ونعوّض $x=-1$ و $x=-3$ فنجد على الترتيب $A=3$ ، $B=-1$

وبالتالي: $f(x)=\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x+3}$

ومنه:

$$\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}dx=\int_1^5\left(\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$=3\int_1^5\frac{dx}{x+1}-\int_1^5\frac{dx}{x+3}$$

$$=3\left[\ln|x+1|\right]_1^5-\left[\ln|x+3|\right]_1^5$$

$$=3[\ln 6-\ln 2]-[\ln 8-\ln 4]$$

$$=3\ln\frac{6}{2}-\ln\frac{8}{4}$$

$$=3\ln 3-\ln 2$$

### حاول أن تحل

11 أوجد: $\int_4^7 \frac{3x^2-17}{x^2-x-6}\,dx$

KuwaitMath.com

## المرشد لحل المسائل

إن معدل التغير الشهري في دالة العائدات للمتجر الذي يملكه فهد من بيع سلعة معينة هو $\frac{dR}{dx} = R'(x) = x^2 - x$ حيث $x$ هو عدد الوحدات المباعة شهريًّا من السلعة و$R$ هو العائدات الشهرية من بيع $x$ وحدات من السلعة نفسها بالدينار.

**a** اشرح كيف يمكن لفهد أن يجد الدالة التي تمثل العائدات الشهرية في متجره من بيع السلعة المذكورة.

**b** ما هي عائدات فهد في الشهر الذي يباع خلاله 30 وحدة من السلعة المذكورة؟

**الحل:**

**a** لإيجاد دالة العائدات فكّر فهد بإيجاد المشتقة العكسية لمعدل التغير الشهري، وهنا قام بوضع $R(x) = \int R'(x)\,dx$ أي $R(x) = \int (x^2 - x)\,dx$ مما يعطي دالة العائدات على النحو $R(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$ مما يجعل وجود الثابت $C$ لغزًا، عندها فكّر وانتبه أنه عندما لا تباع أي وحدة شهريًّا يكون العائد هو 0 أي $R(0) = 0$ مما يعطيه أن $C = 0$ وهنا تأكد أن دالة العائدات الشهرية هي: $R(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$ (دينار) في الشهر عندما يبيع $x$ وحدة.

**b** أما عائدات المتجر من السلعة عندما يبيع فهد 30 وحدة هو:

$$R(30) = \frac{(30)^3}{3} - \frac{(30)^2}{2} = 9\,000 - 450 = 8\,550 \text{ (دينارًا)}$$

**مسألة إضافية**

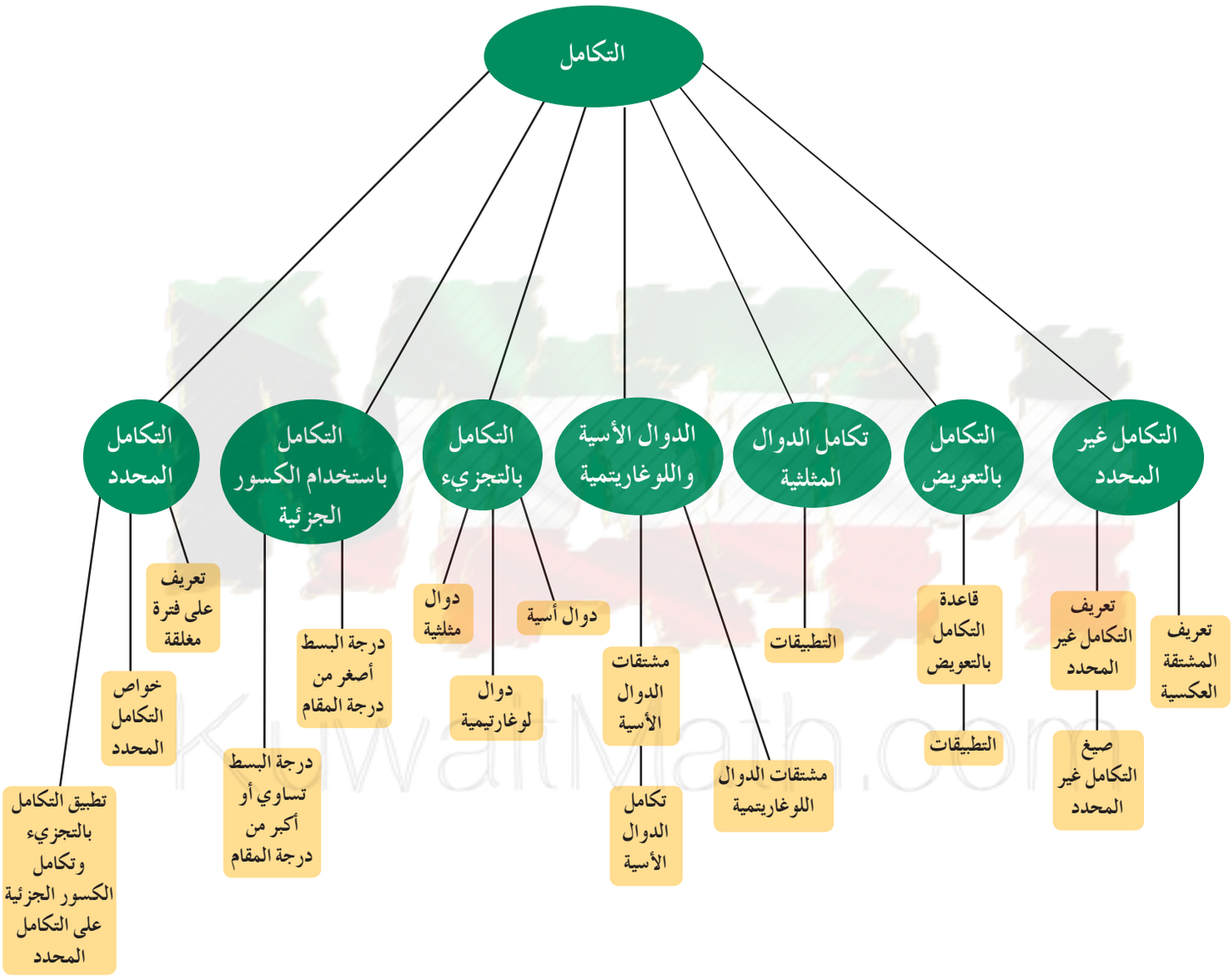
إن معدل التغير الأسبوعي في دالة التكلفة لمصنع الإطارات الذي يملكه عيسى عند صنع $x$ إطار أسبوعيًّا هو: $\frac{dC}{dx} = C'(x) = 10x + 50$ حيث $C(x)$ هي التكلفة الأسبوعية من بيع $x$ إطار بالدينار.

**a** اشرح كيف يمكن لعيسى أن يجد الدالة التي تمثل التكلفة الأسبوعية لصنع $x$ إطار علمًا أن التكلفة لصنع 10 إطارات أسبوعيًّا هي 2 000 دينار.

**b** ما هي تكلفة صنع 20 إطارًا في الأسبوع الواحد في مصنع عيسى؟

KuwaitMath.com

## مخطط تنظيمي للوحدة الخامسة




## ملخص

- التكامل غير المحدد للدالة $f$ بالنسبة إلى $x$ يكتب $\int f(x)\,dx$ ويساوي $F(x)+C$ حيث $F(x)$ هي المشتقة العكسية و$C$ ثابت التكامل.

• جدول صيغ التكامل:

| التكامل غير المحدد | قاعدة المشتقّة |
|---|---|
| 1 $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ , \ n \neq -1$ | $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n \ , \ n \neq -1$ |
| 2 $\int \sin kx\,dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$ | $\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) = \sin kx$ |
| 3 $\int \cos kx\,dx = \frac{\sin kx}{k} + C$ | $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right) = \cos kx$ |
| 4 $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$ | $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$ |
| 5 $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$ | $\frac{d}{dx}(-\cot x) = \csc^2 x$ |
| 6 $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$ | $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$ |
| 7 $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$ | $\frac{d}{dx}(-\csc x) = \csc x \cot x$ |

قاعدة التكامل بالتعويض $\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$

• خواص التكامل غير المحدد

a $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

b $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

c $\int -f(x)\,dx = -\int f(x)\,dx$

d $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

e $\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C$

KuwaitMath.com

جدول تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

| التكامل غير المحدد | قاعدة المشتقّة |
|---|---|
| $\int e^x\,dx = e^x + C$ | $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ |
| $\int u'e^u\,dx = e^u + C$ | $\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx} = u'e^u$ |
| $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + C$ | $\frac{d}{dx}\ln\|x\| = \frac{1}{x}$ |
| $\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln\|u\| + C$ | $\frac{d}{dx}\ln\|u\| = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$ |

- التكامل بالتجزيء: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ حيث $u$ , $v$ دالتين في $x$ قابلتين للتفاضل.
- الكسور الجزئية

تفكيك $\frac{r(x)}{h(x)}$ إلى كسور جزئية.

لكل عامل من $h(x)$ على الصورة $(mx+n)^k$، يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها $k$ :

$$\frac{A_1}{mx+n} + \frac{A_2}{(mx+n)^2} + \dots + \frac{A_k}{(mx+n)^k}$$

لاحظ أنه في حالة $k = 1$، فإنه يوجد حد واحد فقط في المجموع.

- تفكيك $\frac{r(x)}{h(x)}$ إلى كسور جزئية

حلّل المقام وحدّد العوامل الخطية لِـ $h(x)$.

- التكامل المحدد

- $\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
- $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \; (u = g(x) \;\; ; \;\; du = g'(x)\,dx)$

1. إذا $f$ دالة متصلة وموجبة على $[a,b]$، $a < b$، فإن $\int_a^b f(x)\,dx$ يمثل المساحة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ، ومحور السينات، والمستقيمين ذات المعادلتين $x = a$ , $x = b$.
2. إذا $f$ دالة متصلة وسالبة على $[a,b]$، $a < b$، فإن $-\int_a^b f(x)\,dx$ يمثل المساحة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ، ومحور السينات، والمستقيمين ذات المعادلتين $x = a$ , $x = b$.

- خواص التكامل المحدد

$f$ دالة متصلة على $[a,b]$

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
3. $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$
4. $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
5. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \; ; \; c \in [a,b]$
6. $f(x) \geqslant 0 \;\forall\; x \in [a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$
7. $f(x) \leqslant 0 \;\forall\; x \in [a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$
8. $f$ ، $g$ دالتان متصلتان على $[a,b]$ وإذا كان: $f(x) \leqslant g(x) \forall\, x \in [a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

KuwaitMath.com