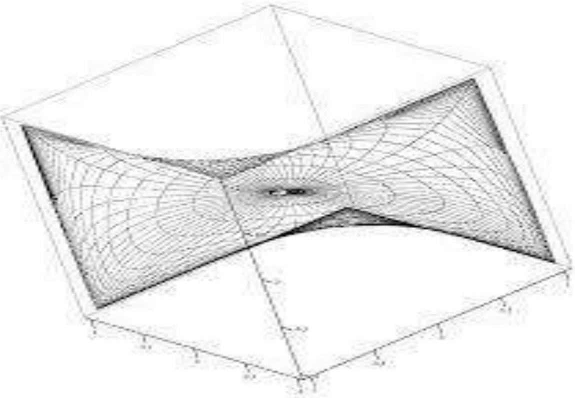
كراسة الطالب في هندسة الفضاء للصف الحادي عشر علمي



اسم الطالب :

الصف :

تجميع وإعداد : أ / صبحي عطية السيد

إشراف رئيس القسم : أ / فوزي حجازي

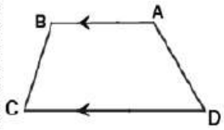
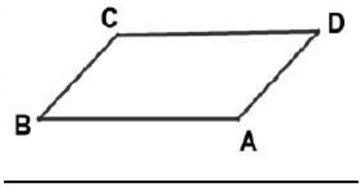
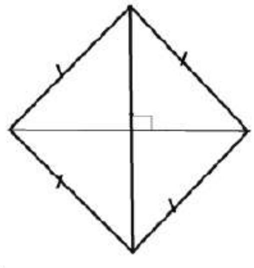
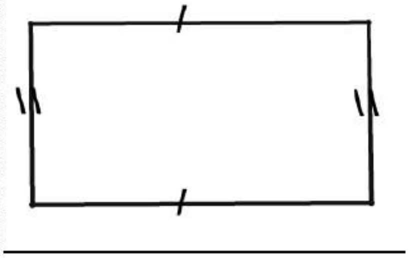
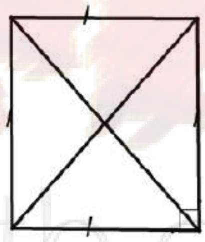
الموجه الفني : أ / حسن نوح المهنا

مدير المدرسة : أ / عادل المظفر

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

<u>ملاحظات هامة في هندسة</u>

خواص الأشكال الرباعية :

شبه المنحرف	متوازي الأضلاع	المعين	المستطيل
			
فيه ضلعان متقابلان متوازيان .	كل ضلعان متقابلان متوازيان.	**أضلاعه الأربعة متطابقة .**	**كل ضلعان متقابلان متطابقان**
	كل ضلعان متقابلان متطابقين.	كل زاويتان متقابلتان متطابقتان.	**كل ضلعان متقابلان متوازيان**
	كل زاويتان متقابلتان متطابقتان.	**القطران ينصف كل منهما الآخر و متعامدان و ينصفان زواياه .**	زواياه الأربع قوائم.
	القطران ينصف كل منهما الآخر.		القطران ينصف كل منهما الآخر و متطابقان
المربع		أضلاعه الأربعة متطابقة .	القطران متطابقان و متعامدان و ينصف كل منهما الاخر
		القطر يصنع زاوية قياسها 45° مع أي ضلع من اضلاعه.	

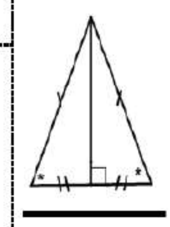
يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع في احدي الحالات التالية

١)توازى كل ضلعين متقابلين فيه.	**٢)تطابق كل ضلعين متقابلين فيه.** **٣)تطابقت كل زاويتين متقابلتين فيه**	**٤)تطابقا و توازى ضلعان متقابلان فقط.**	**٥)نصف القطران كل منهما الآخر**

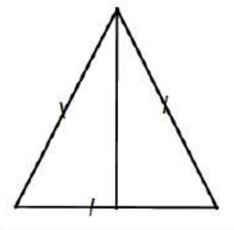
<u>يكون الشكل الرباعي معينا إذا كان</u>:
متوازي أضلاع و تطابق ضلعان متجاوران فيه.

<u>يكون الشكل الرباعي مستطيلا إذا كان</u>:
متوازي أضلاع و أحدى الزوايا قوائم.

في المثلث المتطابق الضلعين:

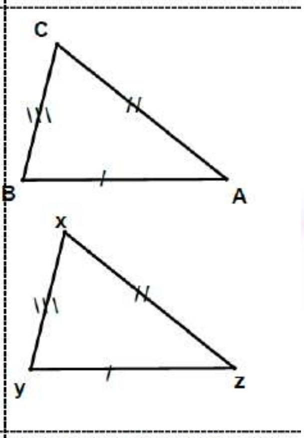
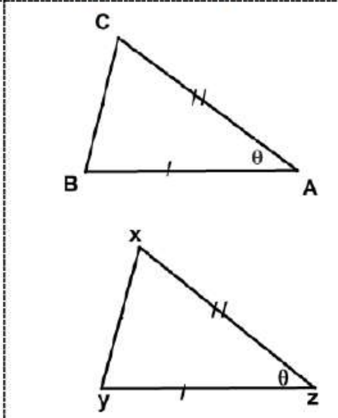
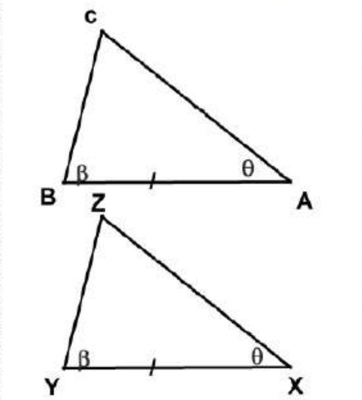
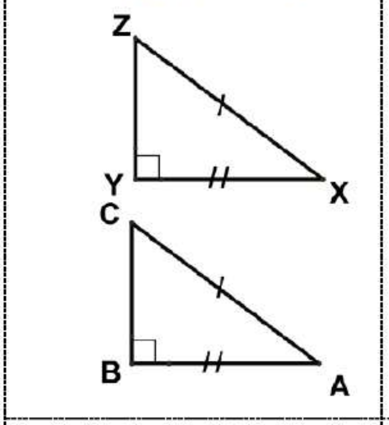
	زاويتا القاعدة متطابقتان.
	المستقيم المار برأس المثلث و منتصف القاعدة يكون عموديا على القاعدة.
	العمود النازل من الرأس على القاعدة ينصف زاوية الرأس و ينصف القاعدة.

في المثلث المتطابق الأضلاع:

	قياس كل زاوية 45°
	المستقيم المار برأس المثلث و منتصف الضلع المقابل له يكون عموديا على هذا الضلع.
	العمود من أي رأس على الضلع المقابل له ينصف زاوية هذا الرأس و ينصف الضلع المقابل.

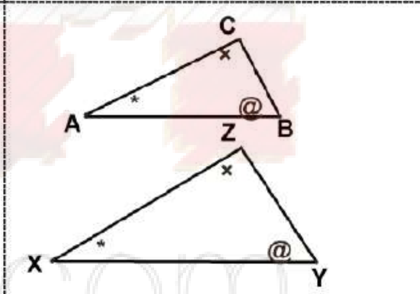
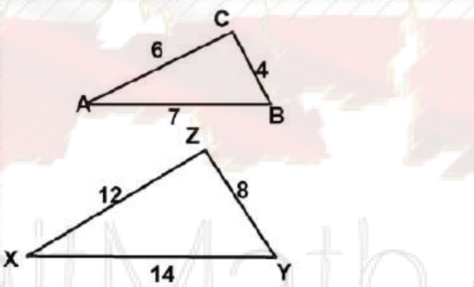
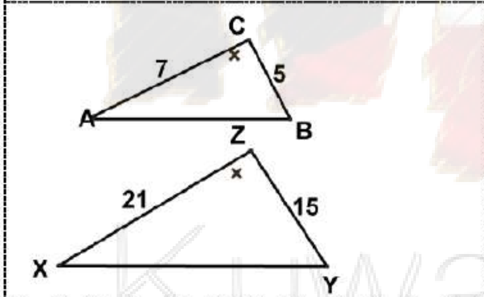
حالات تطابق مثلثان:

يتطابق مثلثان في إحدى الحالات التالية

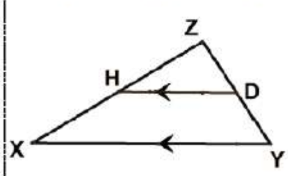
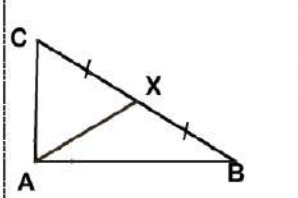
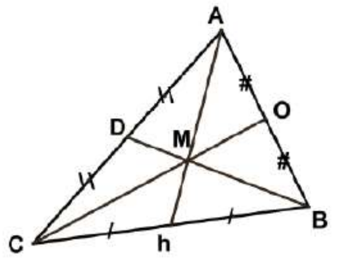
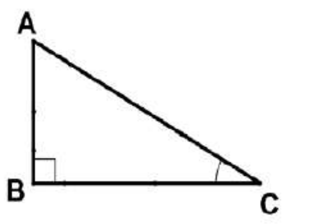
إ ذا كانت أضلاعهما المتناظرة متطابقة.	إذا طابق ضلعان و الزاوية المحددة بهما من أحدهما نظائرهما من الاخر	إذا طابق زاويتان و الضلع الواصل بين راسيهما من إحدهما نظائرهما من الاخر	إذا طابق ضلع و وتر من أحدهما نظائرهما من الاخر .(خاصة بالمثلثان القائما الزاوية)
			
(ض ٠ض٠ض)	(ض ٠ز٠ض)	(ز ٠ض٠ز)	(∆٠و٠ض)

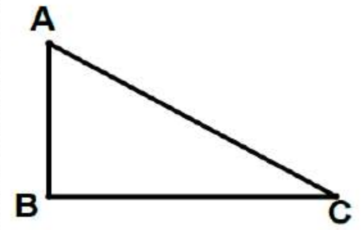
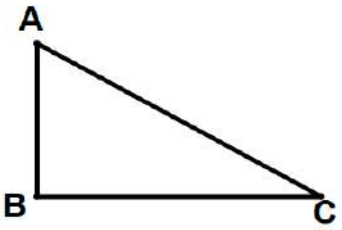
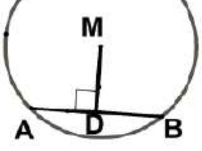
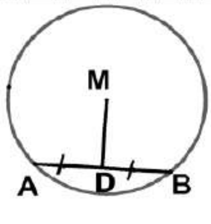
حالات تشابه مثلثان: (نظريات التشابه)

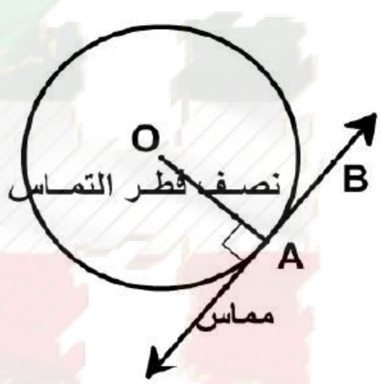
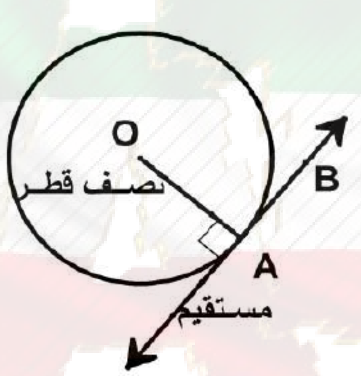
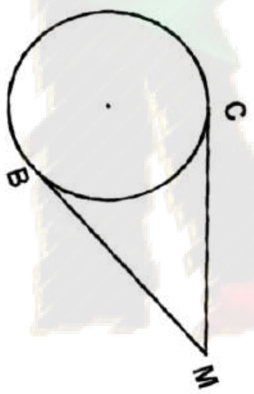
يتشابه مثلثان في إحدي الحالات التالية:

نظرية (١) إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة.	نظرية (٢) إذا كانت اطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة.	نظرية (٣) إذا طابق زاوية في أحدهما زاوية في الآخر و تناسب طولا الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين.
		
$\Delta XYZ \sim \Delta ABC$	$\Delta XYZ \sim \Delta ABC$	$\Delta XYZ \sim \Delta ABC$

نظريات المثلث

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازى الضلع و طولها تساوى نصف طوله.	طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة في المثلث القائم الزاوية إلى منتصف الوتر تساوى نصف طول الوتر.	القطع المتوسطة للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة تقسم كل منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس.	في المثلث الثلاثي الستيني طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠ يساوى نصف طول الوتر.
			

إذا كان مربع طول الضلع الاكبر في مثلث مساويا مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فان الزاوية المقابلة لهذا الضلع تكون قائمة.	في أي Δ ا ب جـ في المثلث أ ب حـ القائم الزاوية في أ أذا كان أ ب ⊥ ب حـ فإن $\boxed{(ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2}$	القطر العمودي على وتر في الدائرة ينصفه.	القطعة المستقيمة الواصلة من مركز الدائرة إلى منتصف وتر فيها تكون عمودية على هذا الوتر.
			

المماس عمودي على نصف قطر التماس	المستقيم العمودي على نصف القطر من نهاية يكون مماس للدائرة	**القطعتان المماستان لدائرة من نقطة خارجها متطابقان**
		

متي يتوازي مستقيمين .... إذا قطعهما ثلاث ونتج أحدي الحالات التالية

زاويتان متبادلتان ومتطابقتان	**زاويتان متناظرتان ومتطابقتان**	**زاويتان داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع متكاملتان**

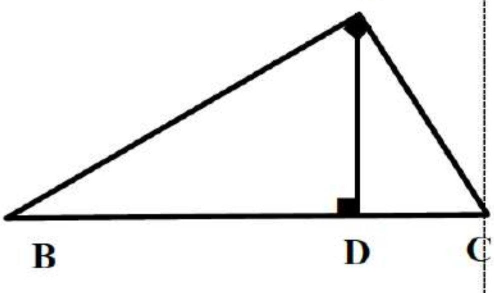
مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود

1) $(AD)^2 = BD \times CD$

2) $(AB)^2 = CD \times CB$

4) $(AC)^2 = CD \times CB$

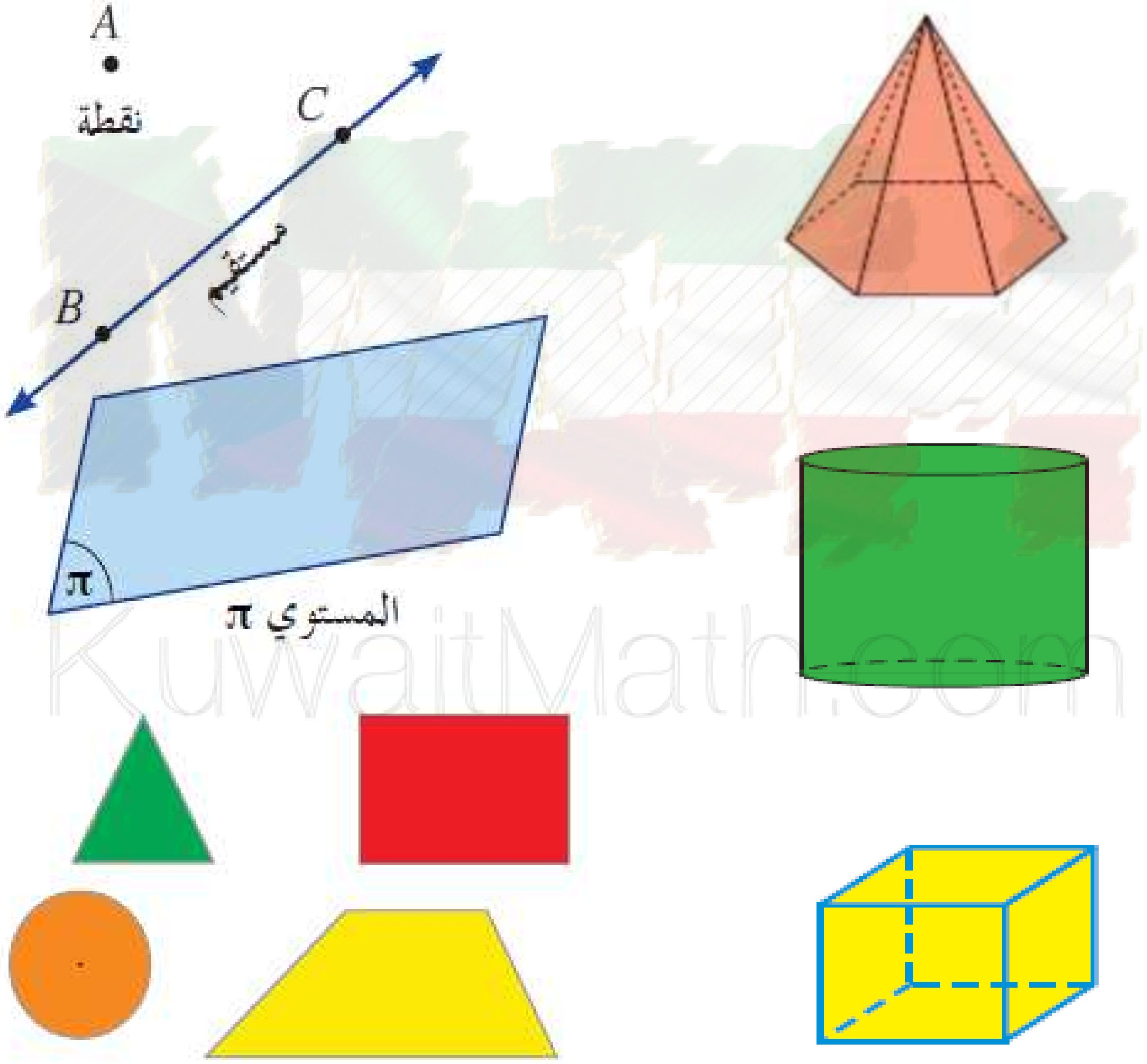
5) $AB \times AC = AD \times BC$



المستقيمات والمستويات في الفضاء

Lines and Planes in Space

النقطة والمستقيم والمستوي في الفضاء

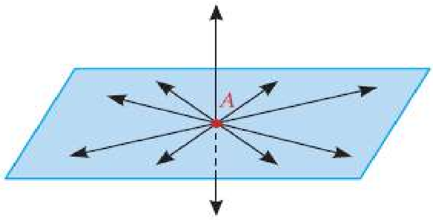


مسلمات (موضوعات) الفضاء

a

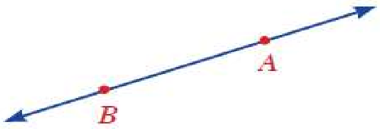
(i) أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد (واحد فقط).

(ii) كل مستقيم يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين.



نقطة واحدة

عدد لا نهائي من المستقيمات



نقطتان مختلفتان

مستقيم واحد فقط

b

(i) في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

A, B, C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

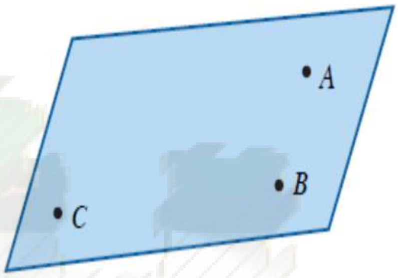
(ii) أي ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يحويها مستوٍ وحيد.

الحامل الثلاثي مستقر على المستوي الذي

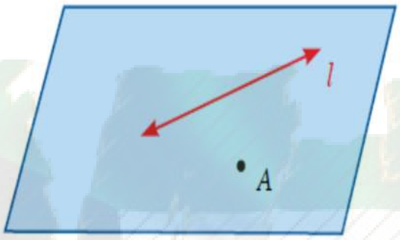
يحوي الأطراف الثلاثة: A, B, C

حالات تعيين المستوي في الفضاء

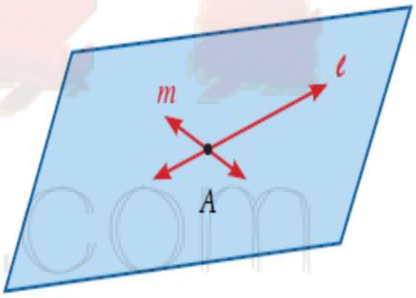
- أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعيّن مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويًا واحدًا فقط.



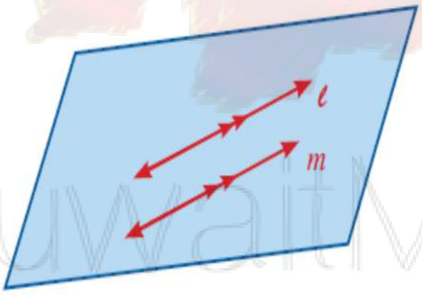
ثلاث نقاط غير مستقيمة



مستقيم ونقطة خارجة عنه

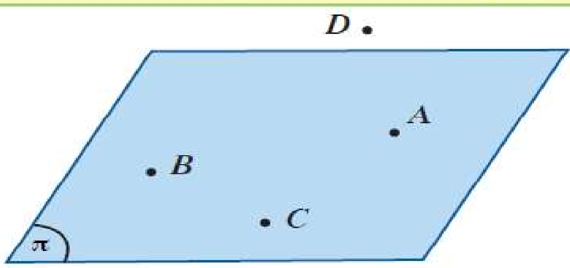


مستقيمان متقاطعان

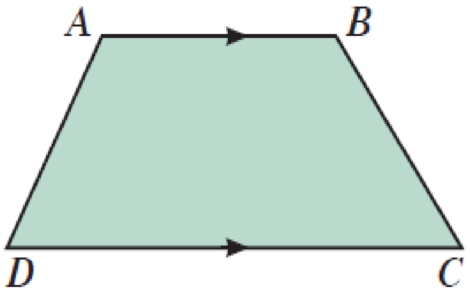


مستقيمان متوازيان

c يحوي الفضاء على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية.



النقاط A, B, C, D لا تقع في مستوٍ واحد



مثال (1)

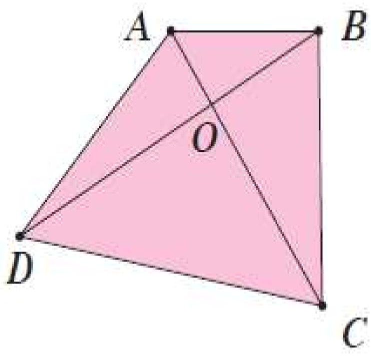
أثبت أن أضلاع أي شبه منحرف تقع جميعها في مستو واحد.

المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

حاول أن تحل



1 في الشكل المقابل $\overline{BD}$ ، $\overline{AC}$ يتقاطعان في O

أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد.

المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

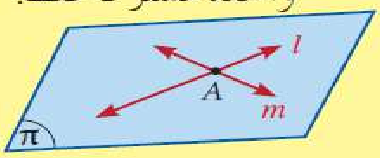
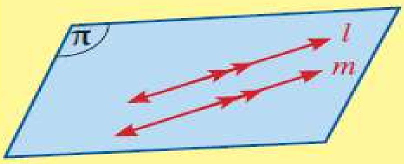
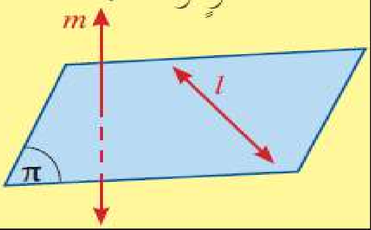
أوضاع المستقيمات في الفضاء Positions of Lines in Space

l, m مستقيمان مختلفان في الفضاء.

في الهندسة المستوية يكون مستقيمان متوازيين أو متقاطعين.

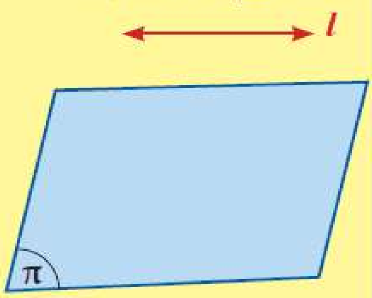
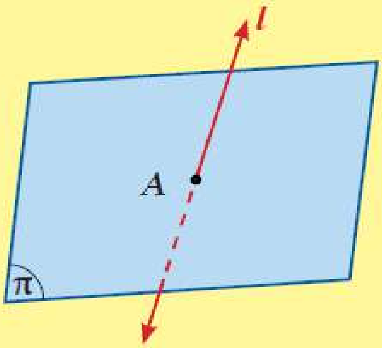
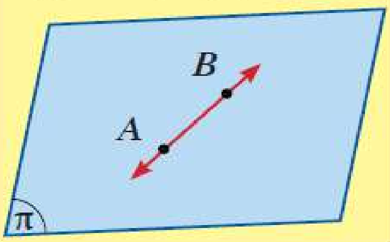
أما في الهندسة الثلاثية الأبعاد فهناك **ثلاثة أوضاع: متقاطعان أو متوازيان أو متخالفان.**

يقال لمستقيمين مختلفين في الفضاء أنهما:

a متقاطعان	b متوازيان	c متخالفان
إذا وقعا في مستوٍ واحد وكان بينهما نقطة واحدة مشتركة فقط. 	إذا وقعا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين. 	إذا كان لا يحويهما مستوٍ واحد. 
$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \{A\}$ مستقيمان متقاطعان	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi \ , \ \overleftrightarrow{m} \subset \pi \ ,$ $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi \Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متوازيان	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi \ , \ \overleftrightarrow{m} \not\subset \pi$ $\Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$ مستقيمان متخالفان

أوضاع مستقيم ومستوٍ في الفضاء Positions of a Line and a Plane in Space

إن معرفة عدد النقاط المشتركة بين مستقيم ومستوٍ في الفضاء تسمح بمعرفة أوضاعهما وهي:

a صفر نقطة مشتركة:	b نقطة مشتركة واحدة:	c نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل
المستقيم موازٍ للمستوي (في هذه الحالة يكون البعد بينهما ثابت). 	المستقيم يقطع المستوي. 	المستقيم يقع بكامله (بتمامه) في المستوي (المستقيم يوازي المستوي). 
$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \pi$	$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \{A\}$	$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ $\therefore \ \overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$

مثال (2)

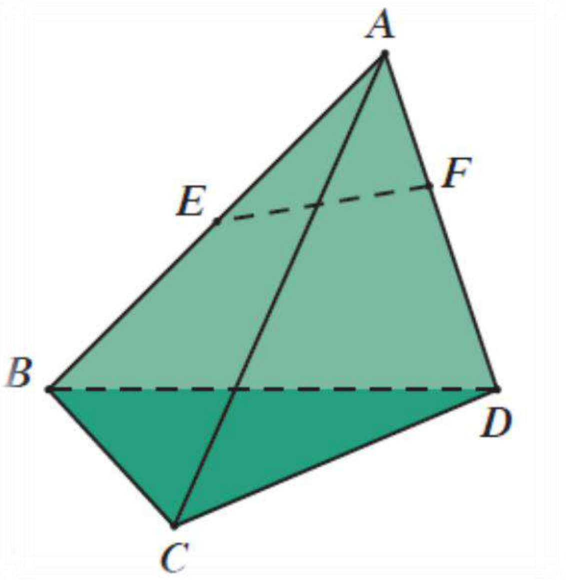
إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

النقطة E تنتمي إلى $\overline{AB}$، النقطة F تنتمي إلى $\overline{AD}$.

$\overleftrightarrow{EF}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{BD}$.

أثبت أن: **a** $\overleftrightarrow{EF} \subseteq (ABD)$

b $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (ACD)



المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

حاول أن تحل

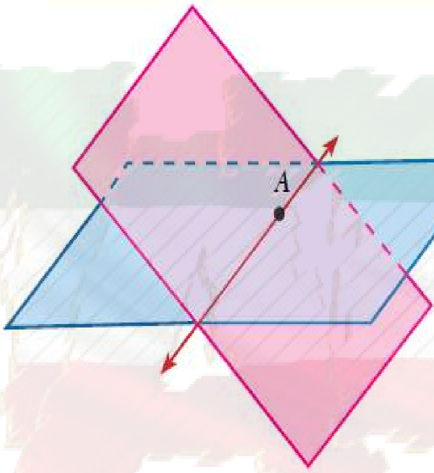
2 في مثال (2)، أثبت أن $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (BCD).

أوضاع مستويين في الفضاء Positions of Two Planes in Space

يمكن أن يمر عدد لا نهائي من المستويات في مستقيم واحد.
فكّر في باب مفتوح في أوضاع مختلفة.
تمثّل كل وضعية من واجهة الباب مستويًا يمر عبر خط وهمي تحدده مصاريع الباب.

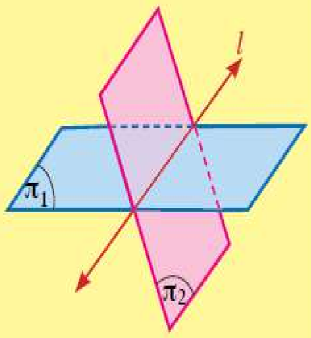
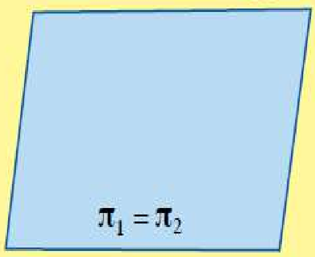
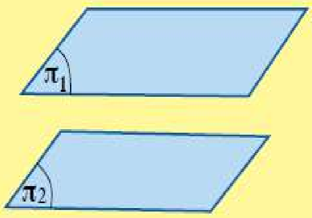
إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فإنه يوجد على الأقل نقطة أخرى مشتركة بين هذين المستويين.

إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستقيم.



إذا اشترك مستويان في ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يكون المستويان منطبقين.

يمكن حصر أوضاع مستويين في الفضاء بثلاث حالات:

a المستويان متقاطعان في مستقيم. 	**b** المستويان منطبقان (يشتركان في جميع النقاط). 	**c** المستويان متوازيان (لا توجد نقاط مشتركة بينهما). 
$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \Longrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$	$\pi_1 = \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 \mathbin{//} \pi_2$	$\pi_1 \cap \pi_2 = \phi \Longrightarrow \pi_1 \mathbin{//} \pi_2$

مثال (3)

l, m, n ثلاثة مستقيمات لا تقع في مستوٍ واحد تتقاطع مثنى مثنى.

أثبت أن المستقيمات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة.

المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

حاول أن تحل

3 $\overleftrightarrow{l}$ ، $\overleftrightarrow{m}$ ، $\overleftrightarrow{n}$ ثلاثة مستقيمات مختلفة تتقاطع في A.

المستقيم t يقطع المستقيمات الثلاثة في B, C, D على الترتيب.

أثبت أن المستقيمات l , m , n , t تقع في مستوٍ واحد.

المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

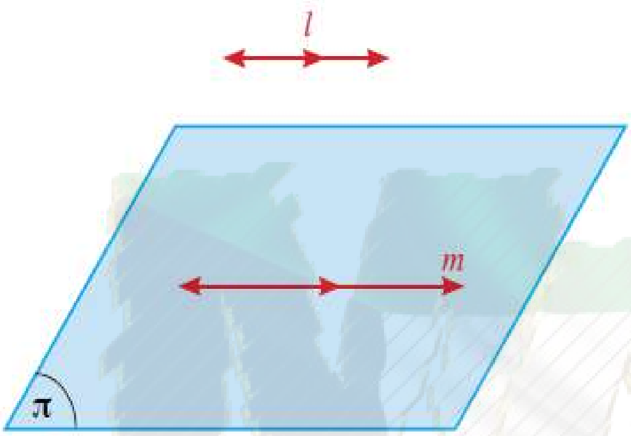
المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space

نظرية (1)

إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيمًا في المستوى، فإنه يوازي المستوى.

معلق



المعطيات:

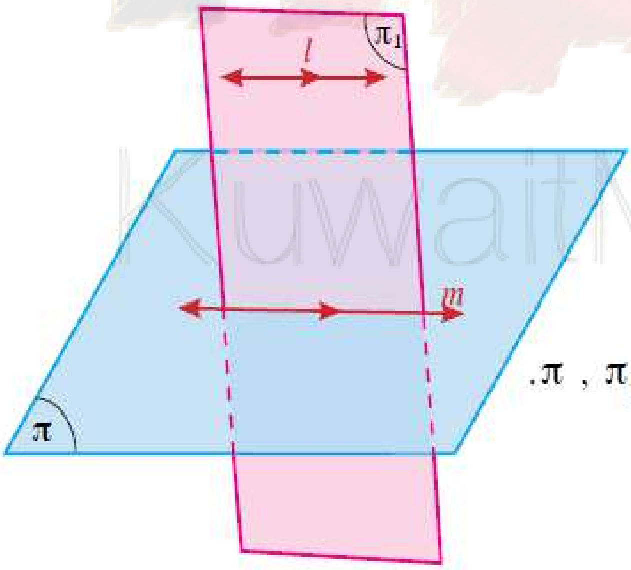
$\overleftrightarrow{l}$ خارج المستوي π.

$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$

المطلوب:

إثبات أن $\overleftrightarrow{l} \parallel \pi$.

البرهان:



$\because \ \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{l}$ يعينان مستويًا وحيدًا π_1

$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{m}$

لنفرض أن: $\overleftrightarrow{l}$ لا يوازي π.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{l}$ يقطع π في نقطة تنتمي إلى خط تقاطع π_1 , π.

أي أنها نقطة تنتمي إلى $\overleftrightarrow{m}$

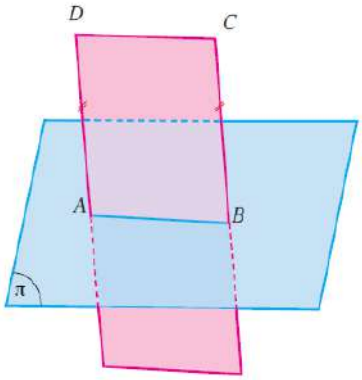
وهذا يخالف الفرض لأن $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{l}$ لا يمكن أن يقطع المستوي π، وبالتالي $\overleftrightarrow{l} \parallel \pi$.

مثال (1)

في الشكل المقابل: $AD = BC$ ، $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$

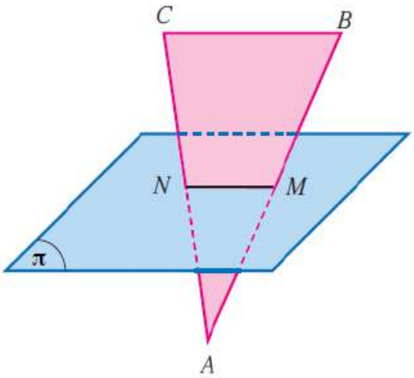


المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

حاول أن تحل



1 في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{AC}$،

M ، N تنتميان إلى المستوي π .

أثبت أن $\overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$.

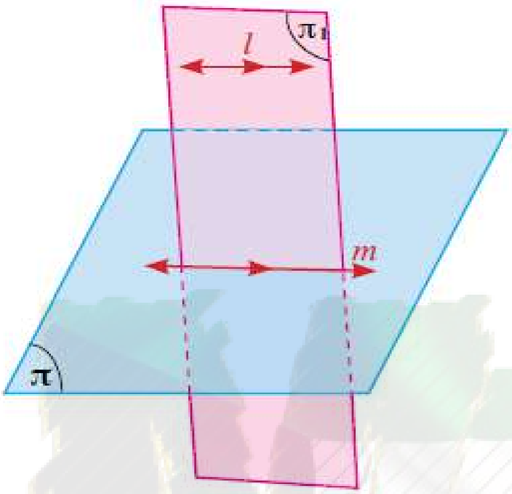
المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

نظرية (2)

إذا وازى مستقيم مستويًا، فكل مستوٍ مار بالمستقيم ويقطع المستوي، يقطعه في مستقيم موازٍ للمستقيم المعلوم.

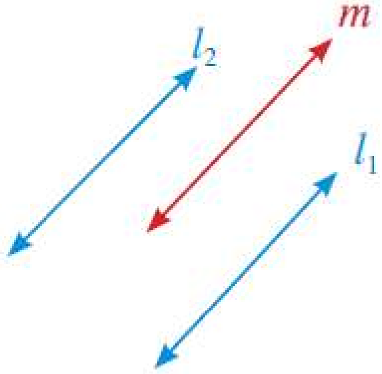


$\because\ \overleftrightarrow{l} \parallel \pi\ ,\ \overleftrightarrow{l} \subset \pi_1\ ,\ \pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{m}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l}$

نظرية (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.



$\because \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{m}\ ,\ \overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$

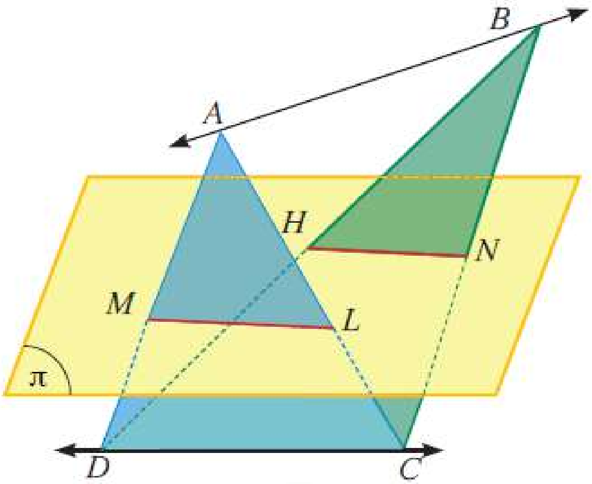
مثال (2)

في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متخالفان، $\pi \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L .

$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N .

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{NH}$



المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

حاول أن تحل

2 في المثال (2)، إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$ فأثبت أن $LMHN$ متوازي أضلاع.

المعطيات:

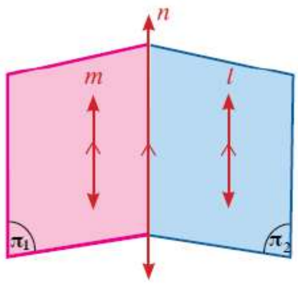
المطلوب:

البرهان:

نتيجة (1)

إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان،

فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين.



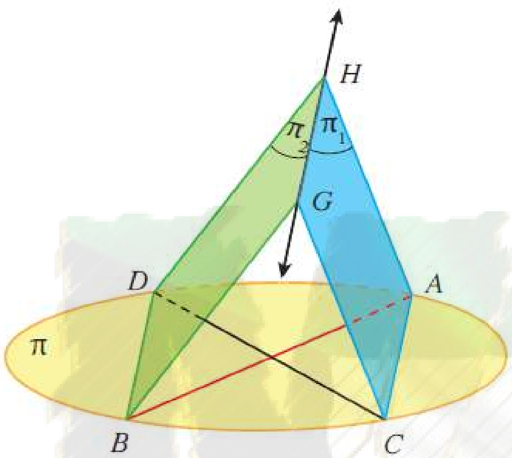
$$(\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l} \ , \ \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{l} \subset \pi_2 \ , \ \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n}) \Rightarrow (\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{n})$$

مثال (3)

في الشكل المقابل: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة π.

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

أثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$.



المعطيات:

المطلوب:

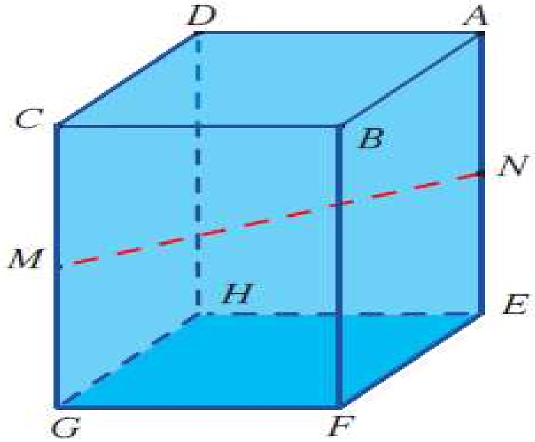
البرهان:

حاول أن تحل

3 $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

M منتصف $\overline{CG}$ ، N منتصف $\overline{AE}$.

أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overline{MN}$.



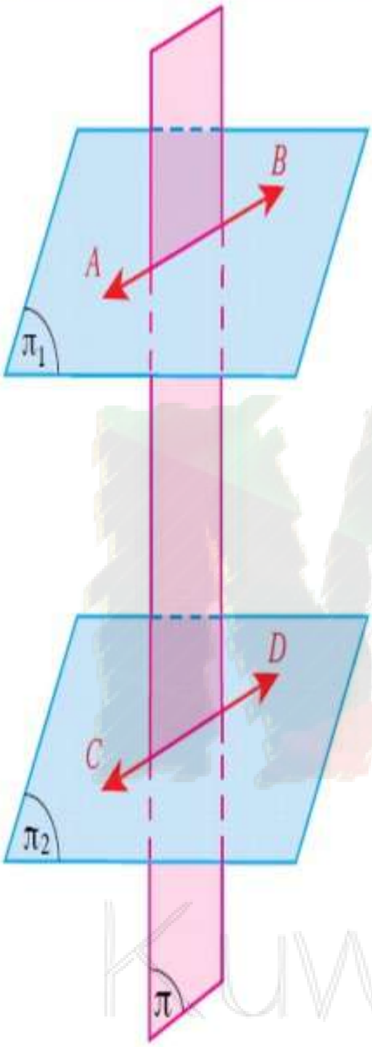
المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

نظرية (4)

إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.



معلق

المعطيات: $\pi_1 \parallel \pi_2$

$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB}$

$\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}$

المطلوب:

إثبات أن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

البرهان: $\because \pi_1 \parallel \pi_2$ فرضًا

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \phi$

أي أن $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ هما متوازيان أو متخالفان (1)

ولكن $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ يحويهما مستوٍ واحد هو π (2)

$\therefore$ من (2) ,(1) نستنتج أن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

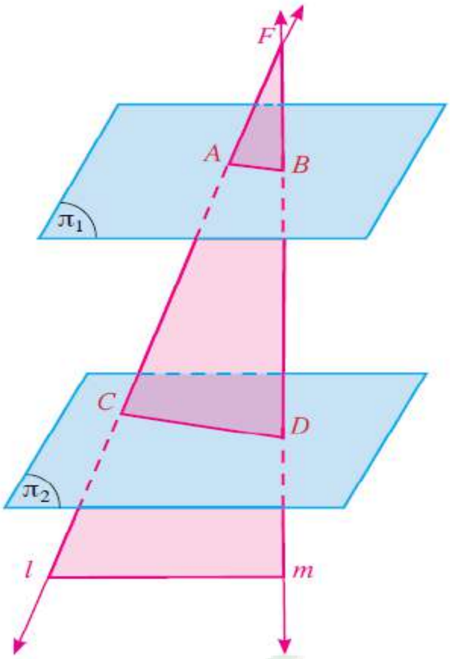
مثال (4)

في الشكل المقابل: π_1 , π_2 مستويين متوازيين.

$\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان في F ويقطعان كلًّا من π_1 في A, B، π_2 في

إذا كان $BD = 4\text{ cm}$ ، $AC = 6\text{ cm}$ ، $CD = 9\text{ cm}$ ، $FB = 5\text{ cm}$

فأوجد محيط المثلث FAB



المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

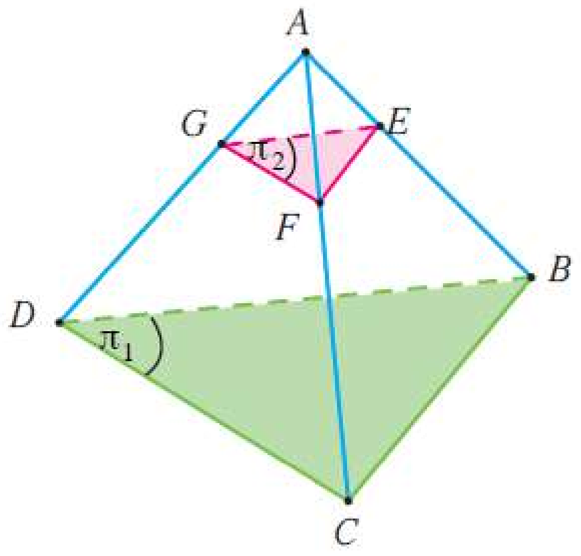
حاول أن تحل

4 في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي.

المستويان π_2 ، π_1 متوازيان.

إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ، $FG = 6\text{ cm}$

فأوجد DC



المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

تعامد مستقيم مع مستوٍ

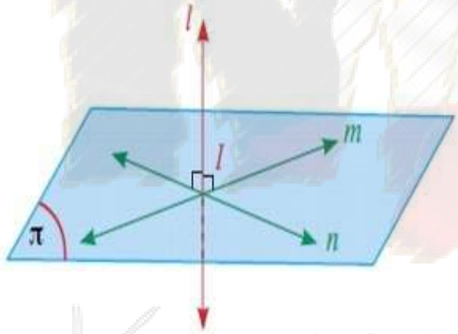
Perpendicular Line With a Plane

Angle Between Two Skew Lines — الزاوية بين مستقيمين متخالفين

الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيمٍ قاطعٍ له ومواز للآخر.

تعريف

يكون المستقيم l عموديًا على المستوي π إذا كان $\overleftrightarrow{l}$ عموديًا على جميع المستقيمات الواقعة في π ويرمز لذلك بـ : $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$

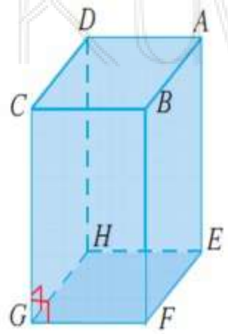


نقول أيضًا إن π عمودي على $\overleftrightarrow{l}$

ونرمز لذلك بـ: $\pi \perp \overleftrightarrow{l}$

والعكس صحيح ،

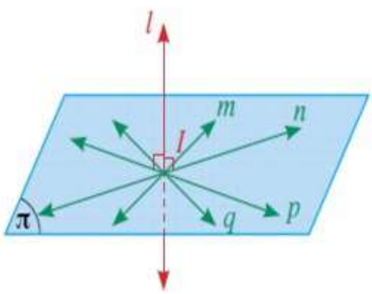
إذا كان $\pi \perp \overleftrightarrow{l}$ فإن l عموديًا على كل المستقيمات في المستوى π



نظرية (5)

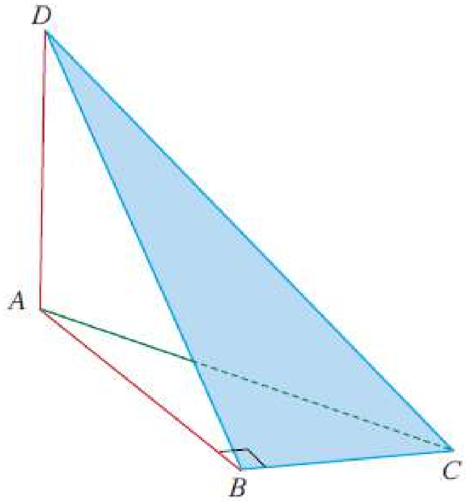
المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًا على مستويهما.

$$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{GF} \cap \overleftrightarrow{GH} = \{G\} \\ \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GF} \ , \ \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GH} \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CG} \perp (EFGH)$$



نتيجة (2)

جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواة في مستوٍ واحد عموديًا على المستقيم المعلوم.



مثال (1)

في الشكل المقابل، المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

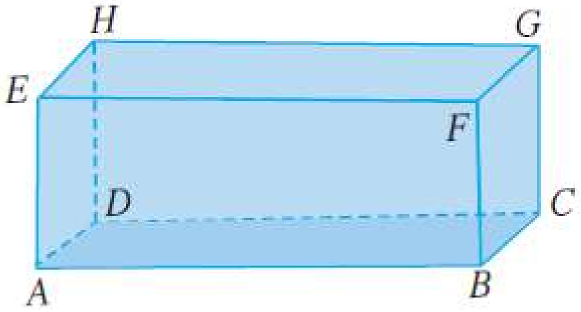
$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$.

أثبت أن المثلث DBC قائم في $\widehat{B}$

المعطيات:

المطلوب:

البرهان:



حاول أن تحل

1 في شبه المكعب المقابل،
أثبت أن المثلث BEH قائم في $\widehat{E}$.

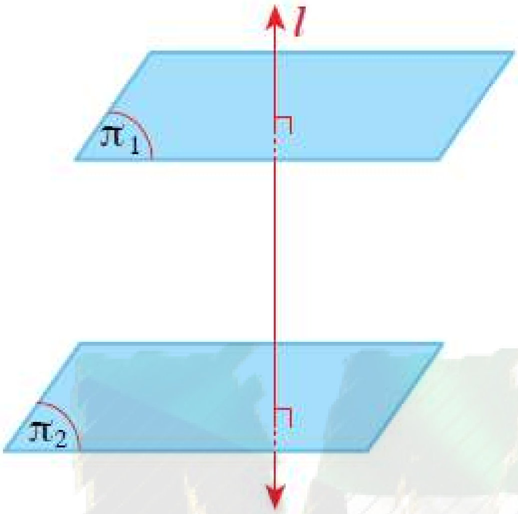
المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

نظرية (6)

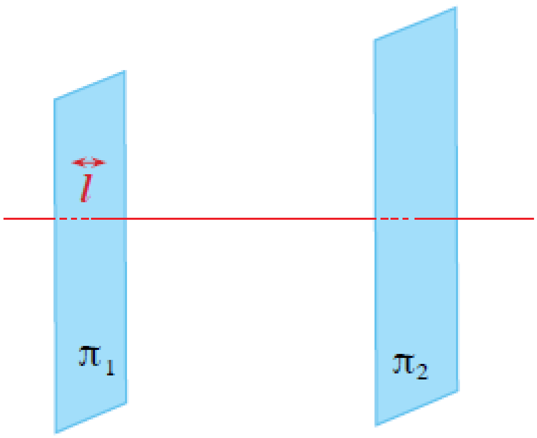
إذا كان مستقيم عموديًا على كلٍّ من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين.



$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2 \implies \pi_1 \parallel \pi_2$$

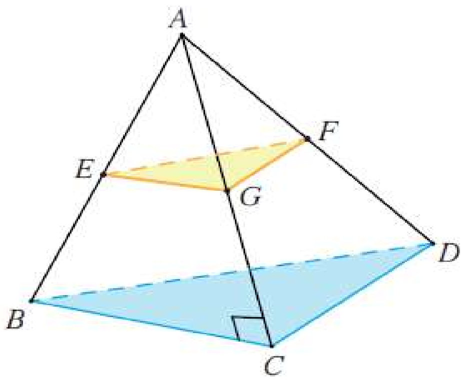
نظرية (7)

إذا كان مستقيم عموديًا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديًا على المستوي الآخر.



$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \pi_1 \parallel \pi_2 \implies \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2$$

مثال (2)



في الشكل المقابل:

A نقطة خارج المستوى BCD،

والنقاط E, G, F منتصفات $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ ، $\overline{AD}$ على الترتيب.

إذا كان $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

وكان $AD = 13\text{ cm}$ ، $AC = 12\text{ cm}$ ، $CD = 5\text{ cm}$

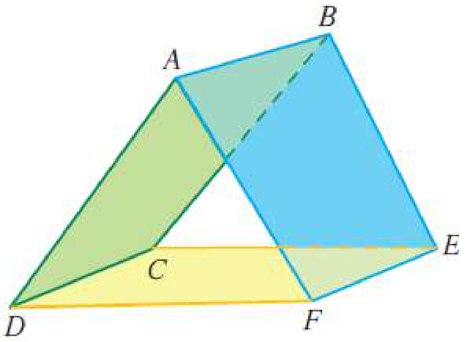
فأثبت أن: $(EGF) \parallel (BCD)$.

المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

حاول أن تحل



2 في الشكل المقابل:

$ABEF$, $ABCD$ مستطيلان

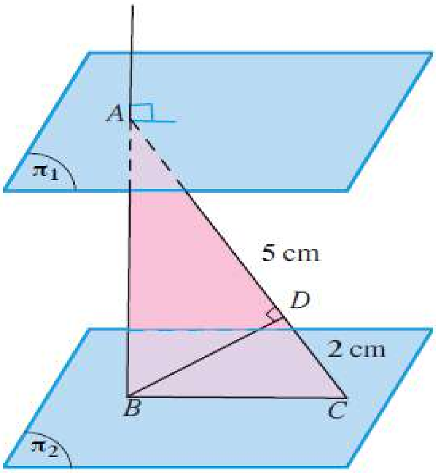
أثبت أن: $(AFD) \parallel (BEC)$

المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

مثال (3)



في الشكل المقابل، $\pi_1 \,/\!/\, \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ، $A \in \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$

رسم: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوي ABC

إذا كان: $AD = 5\text{ cm}$ ، $DC = 2\text{ cm}$

أوجد: BD

المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

حاول أن تحل

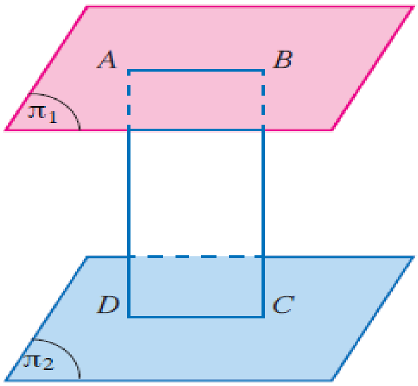
3 في الشكل المقابل: $\pi_1 \parallel \pi_2$

A, B نقطتان في π_1،

C, D نقطتان في π_2 حيث:

$\overline{AD} \perp \pi_2 \quad , \quad \overline{BC} \perp \pi_2$

أثبت أن $ABCD$ مستطيل.



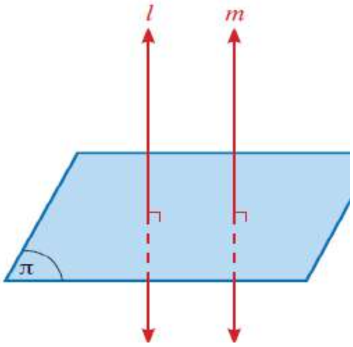
المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

نظرية (8)

المستقيمان العموديان على مستوٍ متوازيان.



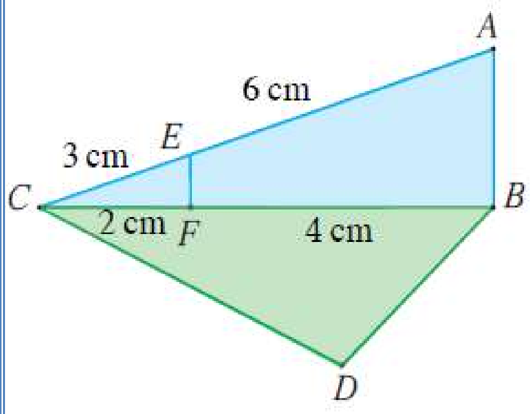
$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi \ , \ \overleftrightarrow{m} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$$

نظرية (9)

إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديًا على مستوٍ كان المستقيم الآخر عموديًا على المستوي أيضًا.

$$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m} \ , \ \overleftrightarrow{l} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$

مثال (4)



في الشكل المقابل إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$

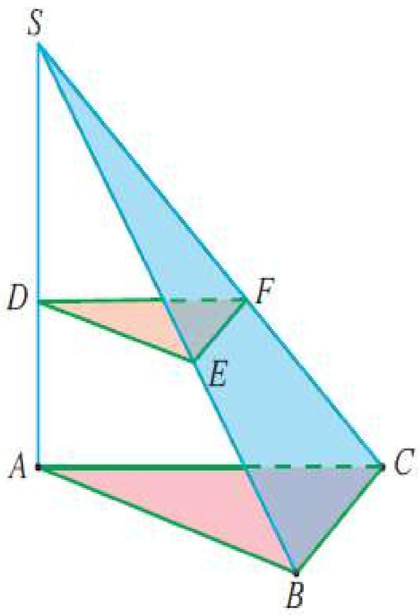
وكان $FB = 4\text{ cm}$ ، $CF = 2\text{ cm}$ ، $EA = 6\text{ cm}$ ، $CE = 3\text{ cm}$

أثبت أن: $\overline{EF} \perp \overline{DB}$

المعطيات:

المطلوب:

البرهان:



حاول أن تحل

4 في الشكل المقابل:

المستويان (DEF)، (ABC) متوازيان

$\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$

إذا كان: $SD = 3\text{ cm}$ ، $DA = 2\text{ cm}$ ، $BC = 5\text{ cm}$ ، $AC = 6\text{ cm}$

فأوجد محيط المثلث DEF

المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

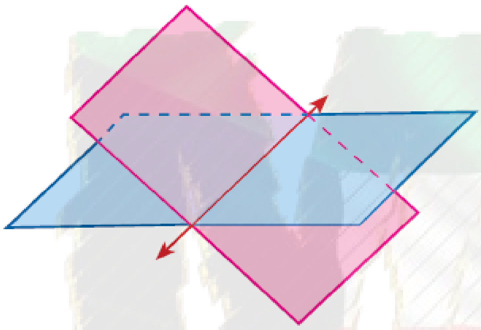
الزاوية بين مستويين (الزاوية الزوجية) The Dihedral Angle

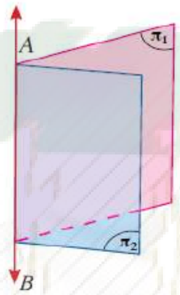
تعلمت أنه إذا تقاطع مستويان مختلفان في الفضاء فإنهما يتقاطعان في مستقيم وينتج من هذا التقاطع أربع زوايا تسمى كل منها **زاوية زوجية**.

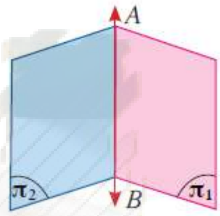
يقسم المستقيم المشترك كل مستوى إلى نصفين ويسمى المستقيم المشترك **حافة الزاوية الزوجية** أو **الفاصل المشترك**.

ويسمى كل من نصفي المستويين وجه الزاوية الزوجية.

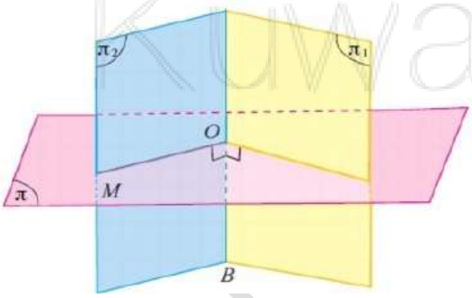
يبيّن الشكلان أدناه زاويتين زوجيتين حافة كل منهما $\overleftrightarrow{AB}$





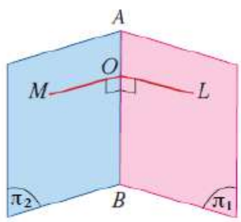


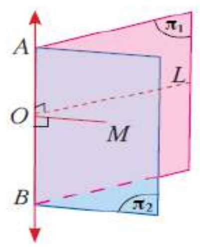
نقرأ الزاوية الزوجية بحافتها فنقول الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$، أو في حال وجود أكثر من زاوية زوجية: $(\pi_1 , \overleftrightarrow{AB} , \pi_2)$



تعريف: الزاوية المستوية لزاوية زوجية

هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستوٍ عمودي على حافتها.





لإيجاد قياس الزاوية الزوجية نتبع التالي:

- نحدّد حافة الزاوية الزوجية ولتكن $\overleftrightarrow{AB}$
- نأخذ نقطة O على حافة الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$
- نرسم من O شعاعًا $\overrightarrow{OL}$ عموديًا على $\overleftrightarrow{AB}$ يكون واقعًا بتمامه في المستوى π_1
- نرسم من O شعاعًا $\overrightarrow{OM}$ عموديًا على $\overleftrightarrow{AB}$ يكون واقعًا بتمامه في المستوى π_2

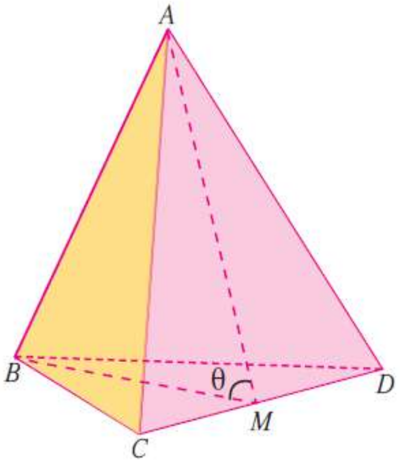
فتكون الزاوية LOM تسمى **الزاوية المستوية** للزاوية الزوجية.

قياس الزاوية الزوجية يرمز له بالرمز $m(\widehat{LOM})$

مثال (1)

يبيّن الشكل المقابل هرمًا ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع طول حرفه 8 cm

M منتصف $\overline{DC}$



a حدد الزاوية المستوية بين المستويين ADC , BDC

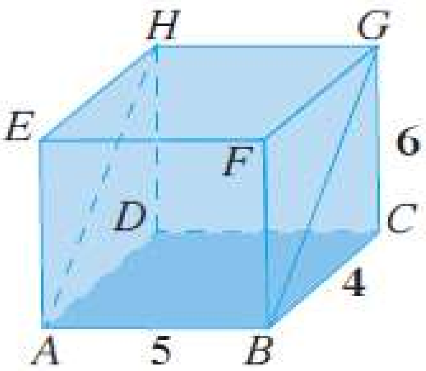
b أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

حاول أن تحل



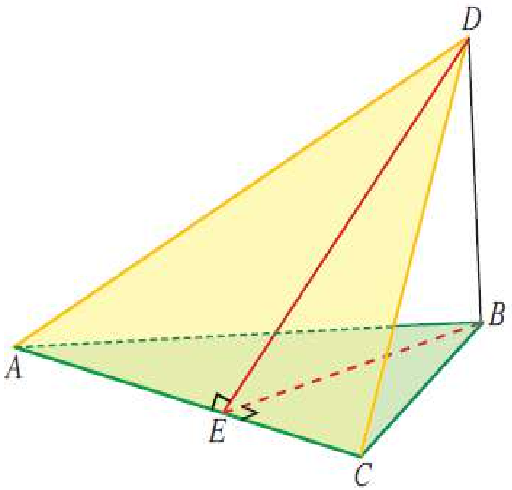
1 في شبه المكعب المقابل، أثبت أن الزاوية GBC هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين $(ABCD)$, $(ABGH)$، ثم أوجد قياسها.

المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

مثال (2)



في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$DB = 5\text{ cm}$ ، $AB = 10\text{ cm}$ ، $m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{6}$

$\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ،$\overline{DE} \perp \overline{AC}$

أوجد:

a BE , DE

b قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC

المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

حاول أن تحل

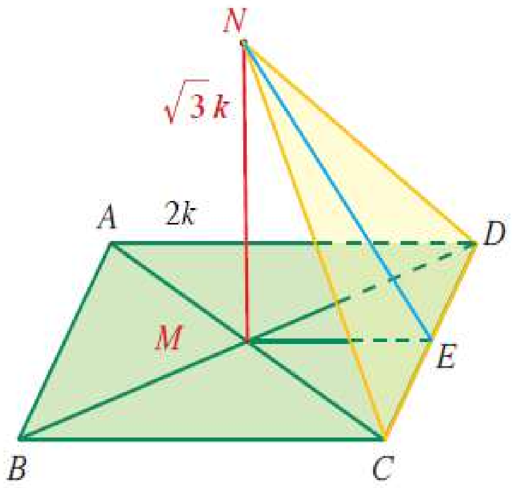
2 في المثال (2)، أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC، DAC إذا كان $m(B\widehat{A}C) = 45^\circ$.

المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

مثال (3)



$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$

أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}\,k$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD , $ABCD$

المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

حاول أن تحل

3 في المثال (3)، إذا كان $AB = 6\,k$ ، فأوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NBC

المعطيات:

المطلوب:

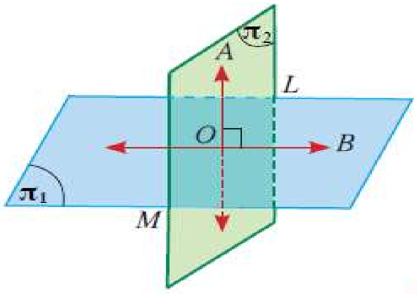
البرهان:

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

Perpendicular Planes المستويات المتعامدة

يكون المستويان متعامدين إذا كانت الزاوية المستوية بينهما زاوية قائمة أي أن قياس الزاوية الزوجية بين المستويين 90°.



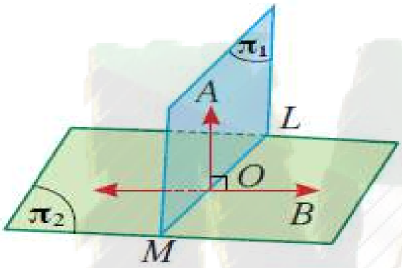
في المستوي π_1: $\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{LM}$

في المستوي π_2: $\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{LM}$

$\therefore$ $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ أي أن المستويين متعامدان.

نظرية (10)

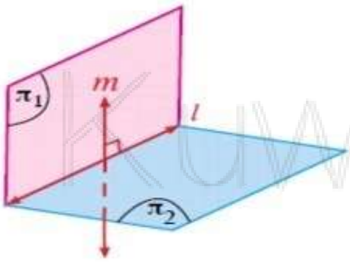
إذا كان مستقيم عموديًا على مستوٍ، فكل مستوٍ يمر بذلك المستقيم يكون عموديًا على المستوي.



$$\overleftrightarrow{OA} \perp \pi_2 \,,\, \overleftrightarrow{OA} \subset \pi_1 \implies \pi_1 \perp \pi_2$$

نتيجة (3)

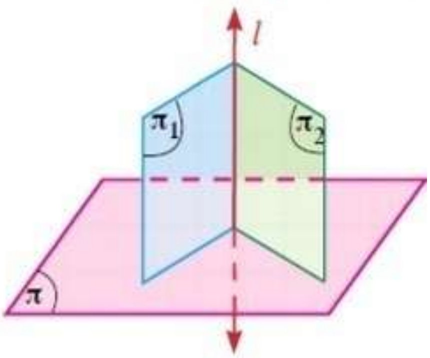
إذا تعامد مستويان ورسم في أحدهما مستقيم عمودي على خط تقاطعهما فإنه يكون عموديًا على المستوي الآخر.



$$\pi_1 \perp \pi_2 \,,\, \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l} \,,\, \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1 \,,\, \overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{l} \implies \overleftrightarrow{m} \perp \pi_2$$

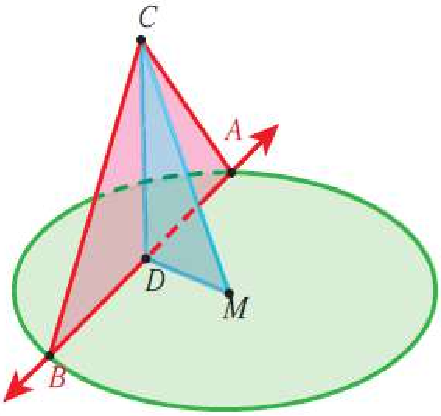
نتيجة (4)

إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودي على مستوٍ ثالث فإن خط تقاطع المستويين يكون عموديًا على هذا المستوي الثالث.



$$\pi_1 \perp \pi \,,\, \pi_2 \perp \pi \,,\, \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l} \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \pi$$

مثال (1)



في الشكل المقابل: C نقطة خارج مستوى الدائرة التي مركزها M، D منتصف $\overline{AB}$

ABC مثلث فيه $CA = CB$. إذا كان $MC = \sqrt{50}$ cm , $DM = DC = 5$ cm

أثبت أن:

a) $\overline{MC} \perp \overline{AB}$

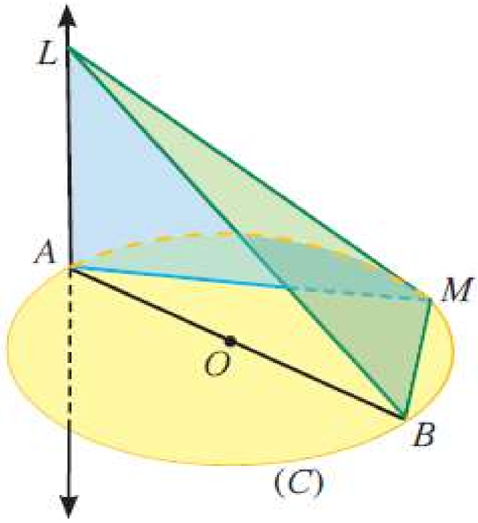
b) مستوي الدائرة $\perp (ACB)$

المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

حاول أن تحل



1 في الشكل المقابل، C دائرة مركزها O، $\overline{AB}$ قطر.

M نقطة تنتمي إلى الدائرة.

$\overleftrightarrow{LA}$ متعامد مع مستوي الدائرة.

أثبت أن:

a $\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$

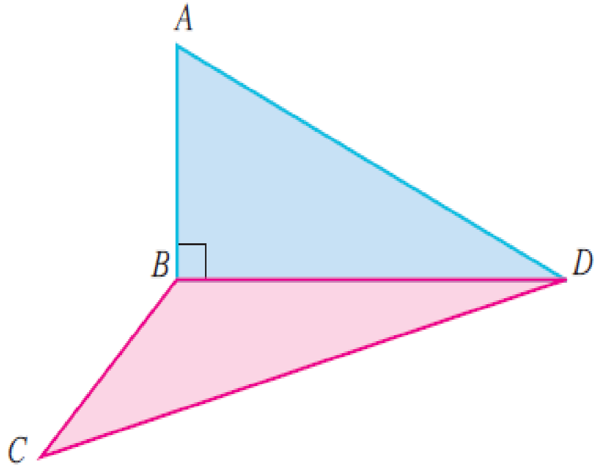
b $(LBM) \perp (LAM)$

المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

مثال (2)



A, B, C, D أربع نقاط ليست مستوية معًا.

إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

وكان $(AD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2$

أثبت أن:

a $\overline{BC} \perp \overline{DC}$

b $(ABD) \perp (CBD)$

المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

حاول أن تحل

2 في شبه المكعب $ABCDEFGH$ المقابل:

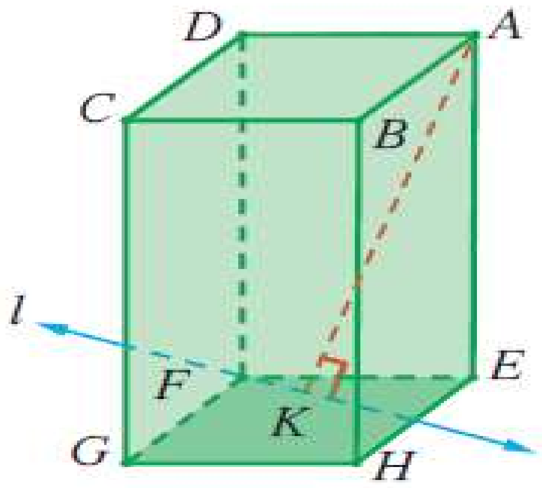
$\overleftrightarrow{l}$ مستقيم في $(EFGH)$ يمر في F.

$\overline{AK} \perp \overleftrightarrow{l}$

أثبت أن:

a $\overline{EK} \perp \overleftrightarrow{l}$

b $(FDK) \perp (AEK)$



المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

تمرَّنْ
10−1

المستقيمات والمستويات في الفضاء

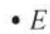
Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية

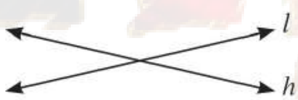
في التمارين (5−1)، هل الشكل يجب أن يكون موجودًا في مستوٍ واحد فقط؟

(1)

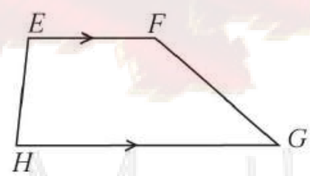
(2)



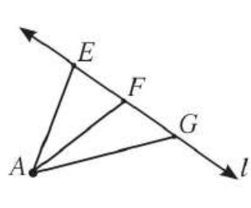
(3)



(4)



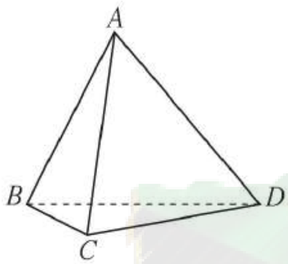
(5)



المستقيمات والمستويات في الفضاء

Lines and Planes in Space

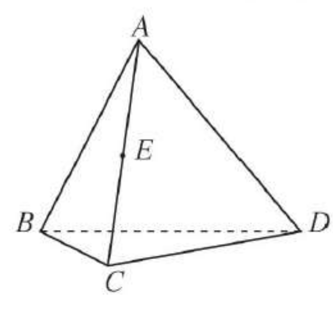
المجموعة A تمارين مقالية



(6) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

سمّ المستويات الأربعة التي تجدها في الرسم.

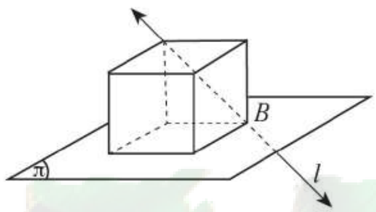
(7) أثبت أن النقطة E تقع في المستوي ADC وفي المستوي ABC



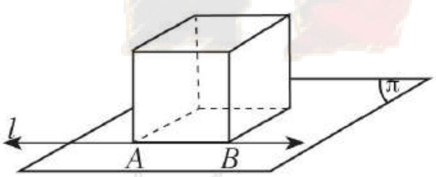
المستقيمات والمستويات في الفضاء

Lines and Planes in Space

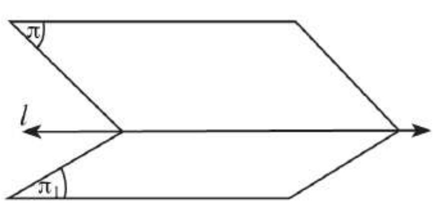
المجموعة A تمارين مقالية



(8) **(a)** أوجد نقطة تقاطع المستوي π والمستقيم l.



(b) أوجد تقاطع المستوي π والمستقيم l.



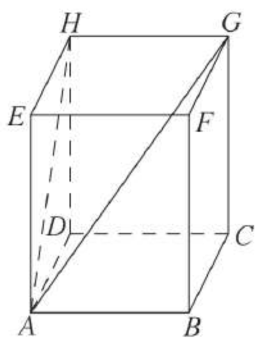
(c) أوجد تقاطع المستوي π والمستوي π_1.

تمرَّنْ
10−1

المستقيمات والمستويات في الفضاء

Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية



(9) في شبه المكعب المقابل، أكمل:

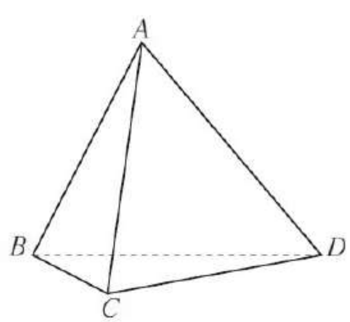
(a) $(AGH) \cap (ABC) = \ldots$

(b) ارسم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين BFH, $ABCD$

(c) إذا كانت L نقطة تنتمي إلى $\overline{EF}$،

ارسم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين ADL, BCL

(10) ارسم $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع مستويًا π_1 في النقطة B، ثم ارسم المستوي π_2 يقطع المستوي π_1 في مستقيم يمر بالنقطة B.



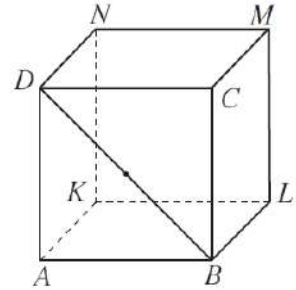
(11) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة أوجد:

(a) تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ مع المستوي BCD؟

(b) تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ مع المستوي ACD؟

(c) تقاطع (ABC) مع المستوي BCD؟

(12) في الرسم المقابل $ABCDKLMN$ مكعب أوجد إن أمكن العلاقة بين:



(a) $\overleftrightarrow{ND}$ ، $\overleftrightarrow{BD}$ ؟

(b) $\overleftrightarrow{AD}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ ؟

(c) $\overleftrightarrow{BD}$ ، $\overleftrightarrow{ML}$ ؟

(d) $\overleftrightarrow{ML}$ والمستوي $ABLK$؟

(e) سمّ المستقيم الذي هو تقاطع المستويين NBD، $ABCD$

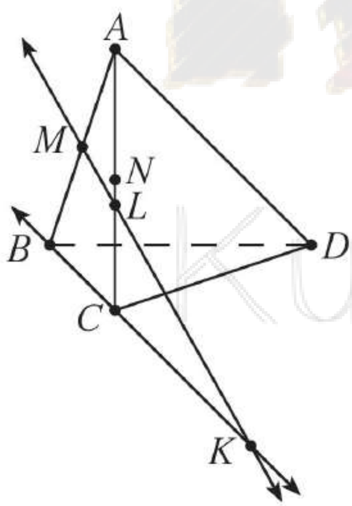
(f) أثبت أن النقاط L, B, D, N تنتمي إلى مستوٍ واحد.

(g) هل $\overleftrightarrow{ML}$, $\overleftrightarrow{ND}$ يعينان مستويًا واحدًا؟

(h) أثبت أن المستويين CMN , ADK يتقاطعان.

(13) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{AC}$ ، $L \in \overline{AC}$ ، $L \neq N$



(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{ML}$ يقع في المستوي ABC

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{CB}$, $\overleftrightarrow{ML}$ يتقاطعان في النقطة K

(c) ما نقطة تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{ML}$ مع المستوي BCD؟

تمرَّنْ
10–1

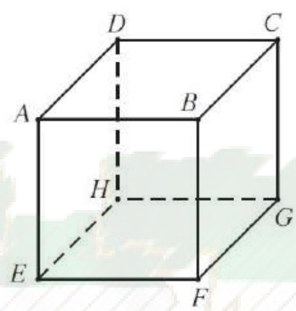
المستقيمات والمستويات في الفضاء

Lines and Planes in Space

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$ABCDEFGH$ مكعّب.



(1) المستقيمان HG ,AB يعينان مستويًا. (a) (b)

(2) النقاط B, D, H, F تعيّن مستويًا. (a) (b)

(3) النقاط A, B, G, C تعيّن مستويًا. (a) (b)

(4) المستقيمان EF ,GC يعينان مستويًا. (a) (b)

(5) المستقيمان AB ,BC يعينان مستويًا. (a) (b)

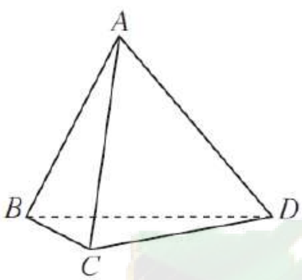
تمرّنْ
10−1

المستقيمات والمستويات في الفضاء

Lines and Planes in Space

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمرينين (7—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.



(6) النقاط B, C, D تعيّن:

(a) مستويًا واحدًا
(b) مستويين مختلفين
(c) عدد لا منته من المستويات المختلفة
(d) لا يمكن أن تعيّن مستويًا

(7) أوجه منشور قائم خماسي القاعدة يعيّن:

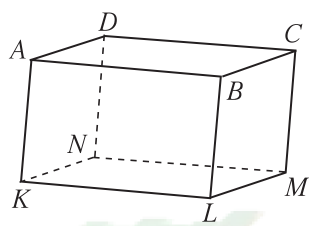
(a) خمسة مستويات مختلفة
(b) ستة مستويات مختلفة
(c) سبعة مستويات مختلفة
(d) ثمانية مستويات مختلفة

تمرَّنْ
10−2

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية



(1) $ABCDKLMN$ شبه مكعب.

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AK} \parallel \overleftrightarrow{CM}$

(b) أثبت أن النقاط A, K, M, C تنتمي إلى مستو واحد.

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AD}$ يوازي المستوي MKN

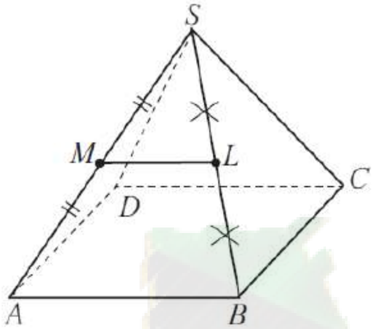
(2) **(a)** متى يكون المستقيم l موازيًا للمستوي π؟ وضح ذلك بالرسم.

(b) ارسم مستقيمًا آخرًا يوازي المستوي π

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space

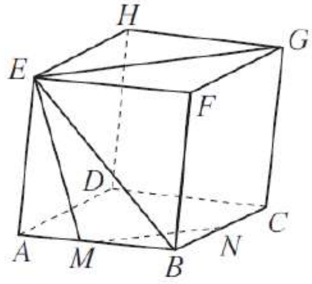
المجموعة A تمارين مقالية



(3) $SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل.

M منتصف $\overline{SA}$، L منتصف $\overline{SB}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{ML} \parallel (ABCD)$



(4) $ABCDEFGH$ مكعب.

$M \in \overline{AB}$، المستوي GEM يقطع $\overline{BC}$ في النقطة N

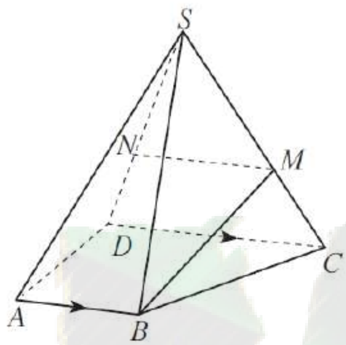
أثبت أن: $\overleftrightarrow{GE} \parallel \overleftrightarrow{MN}$

تمرّنْ
10−2

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية



(5) $SABCD$ هرم قاعدته شبه المنحرف $ABCD$ حيث إن $\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

$M \in \overline{SC}$، المستوي ABM يقطع $\overleftrightarrow{SD}$ في N

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB}$ يوازي المستوي SDC

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية

(6) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة، $I \in \overline{AB}$

المستقيم الموازي لِـ $\overleftrightarrow{AC}$ والمار بالنقطة I يقطع $\overleftrightarrow{BC}$ في J

المستقيم الموازي لِـ $\overleftrightarrow{BD}$ والمار بالنقطة J يقطع $\overleftrightarrow{CD}$ في K

المستقيم الموازي لِـ $\overleftrightarrow{AC}$ والمار بالنقطة K يقطع $\overleftrightarrow{AD}$ في H

(a) ضع رسمًا مناسبًا.

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{IH} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية

(7) ليكن π_2, π_1 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث:

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{AB} \parallel \pi_2$

و $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2 \ , \ \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi_1$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

(8) $ABEF$, $ABCD$ متوازيا أضلاع غير مستويين معًا ويتقاطعان في $\overleftrightarrow{AB}$

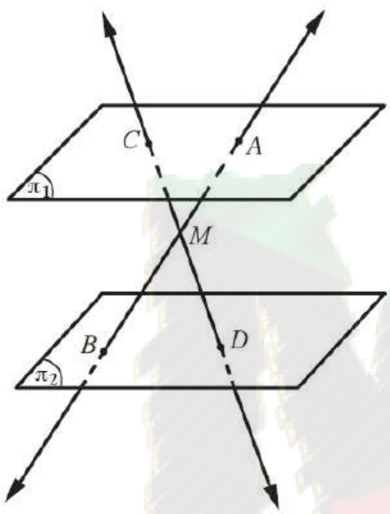
أثبت أن: $CDFE$ متوازي أضلاع

تمرَّنْ
10−2

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية



(9) في الشكل المقابل π_2, π_1 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،

حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

أثبت أن: $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AC}{BD}$

تمرَّنْ
10-2

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل. (a) (b)

(2) إذا وازى مستقيم مستويًا فإنهما لا يشتركان في أي نقطة من نقاطهما. (a) (b)

(3) إذا وازى مستقيم l مستوي π فإن $\overleftrightarrow{l}$ يوازي مستقيمًا وحيدًا في π (a) (b)

(4) إذا كان: $\pi \parallel \overleftrightarrow{m}$, $\pi \parallel \overleftrightarrow{l}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ (a) (b)

(5) إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين. (a) (b)

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space

في التمارين (8–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا توازى مستويان مختلفان وقطعهما مستو ثالث فإن خطّي التقاطع:

(a) متقاطعان (b) متخالفان

(c) متوازيان (d) متعامدان

(7) إذا كان $\pi_2 \parallel \pi_1$، $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_1$، $\overleftrightarrow{m} \subset \pi_2$ فإن:

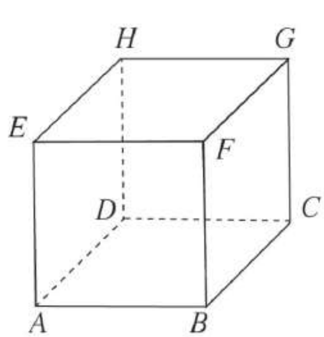
(a) $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ (b) $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$

(c) $\overleftrightarrow{l}, \overleftrightarrow{m}$ متخالفان (d) $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$

(8) في المكعّب $ABCDEFGH$، $\overleftrightarrow{EG}$, $\overleftrightarrow{BD}$ هما:

(a) متوازيان (b) متقاطعان

(c) متخالفان (d) يحويهما مستوٍ واحد



تمرَّنْ
10−3

تعامد مستقيم مع مستوٍ

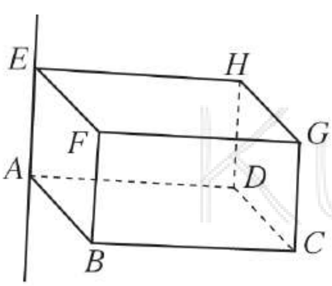
Perpendicular Line with a Plane

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) متى يكون المستقيم عموديًّا على المستوي؟

(b) ارسم مستقيمًا عموديًّا على مستو.

(2) $ABCDEFGH$ شبه مكعّب.



(a) سمّ المستقيمات المتعامدة مع $\overleftrightarrow{AE}$

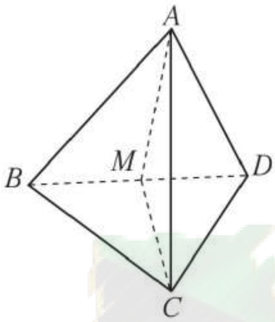
(b) سمّ المستويات المتعامدة مع $\overleftrightarrow{AE}$

(c) أثبت أن $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على المستوي CGH

تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line with a Plane

المجموعة A تمارين مقالية



(3) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

$AD = AB$ ، $CD = CB$

النقطة M منتصف $\overline{DB}$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$

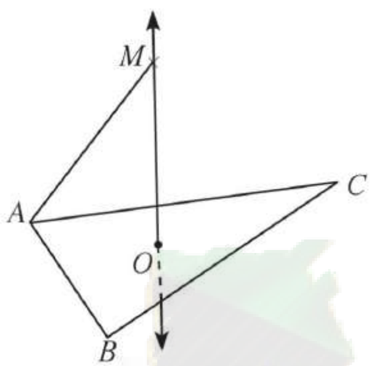
(b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

تمرَّنْ
10-3

تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line with a Plane

المجموعة A تمارين مقالية



(4) ABC مثلث متطابق الأضلاع مركزه O، $\overleftrightarrow{MO}$ متعامد مع (ABC)

أثبت أن: $\overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{AM}$

تعامد مستقيم مع مستوٍ

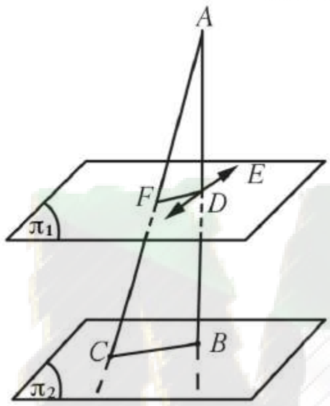
Perpendicular Line with a Plane

المجموعة A تمارين مقالية

(5) في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على المستوي π_2 , $\overleftrightarrow{DE} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DE}$

فإذا كانت D منتصف $\overline{AB}$، F منتصف $\overline{AC}$

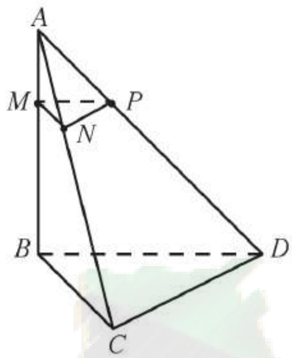
أثبت أن: $\pi_1 \parallel \pi_2$



تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line with a Plane

المجموعة A تمارين مقالية



(6) في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة حيث $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ فإذا كان:

$AB = 3\,AM$ ، $AC = 3\,AN$ ، $AD = 3\,AP$ ،

أثبت أن $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على (MNP)

تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line with a Plane

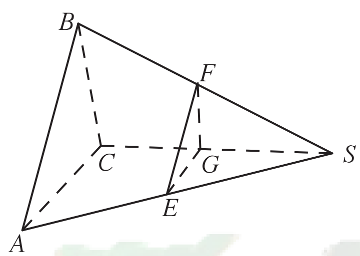
المجموعة A تمارين مقالية

(7) في الشكل المقابل، $(EFG) \parallel (ABC)$, S نقطة خارج $(ABC), (EFG)$

بحيث $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{AC}$

فإذا كان: $SB = 10\text{ cm}\,, SC = 8\text{ cm}\,, BC = 6\text{ cm}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{FE}$



تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line with a Plane

المجموعة A تمارين مقالية

(8) ليكن $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{CD}$ عموديان على المستوي π ويقطعانه في D, F على الترتيب. فإذا كان $\overleftrightarrow{CE}$ يوازي π. أثبت أن $CDFE$ مستطيل.

تمرَّنْ
10−3

تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line with a Plane

المجموعة A تمارين مقالية

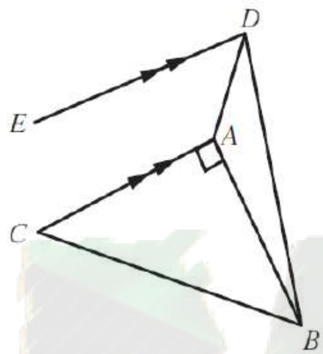
(9) ABC مثلث، أخذت النقطة D خارج مستوي المثلث بحيث كان: $\overleftrightarrow{DA}$ عموديًّا على كل من $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{AC}$
فإذا كانت M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{DB}$، أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$

تمرَّنْ
10−3

تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line with a Plane

المجموعة A تمارين مقالية

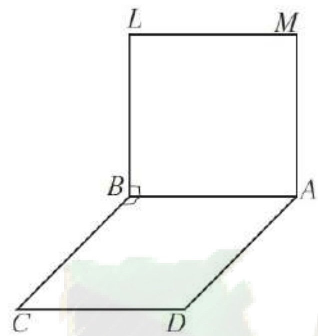


(10) في الشكل المقابل، ABC مثلث قائم الزاوية في A
رسم $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على مستوي المثلث ABC، ورسم $\overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{CA}$
أثبت أن: $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{AB}$

تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line with a Plane

المجموعة A تمارين مقالية



(11) $ABCD$، $ABLM$ مربعان ليسا في مستو واحد، لهما ضلع مشترك $\overline{AB}$،

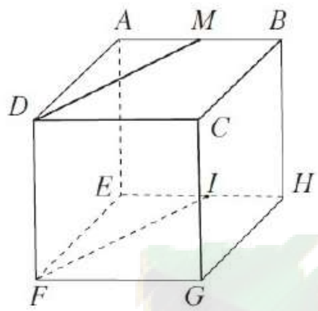
أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$

تمرَّنْ
10−3

تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line with a Plane

المجموعة B تمارين موضوعية



في التمارين (7−1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمرينين (2−1)، على الشكل المقابل حيث $ABCDEHGF$ مكعّب، النقطة M منتصف $\overline{AB}$، I منتصف $\overline{EH}$.

(1) $\overleftrightarrow{MI} \perp (EFGH)$ (a) (b)

(2) $\overleftrightarrow{MD} \perp (BCGH)$ (a) (b)

(3) إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة جميع أحرفه متطابقة فإن: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (a) (b)

(4) إذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$ ، $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$ فإن $\overleftrightarrow{l} \subset \pi$ (a) (b)

(5) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان وكان $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{n}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n}$ (a) (b)

(6) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان وكان $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{n}$ فإن $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{n}$ متخالفان. (a) (b)

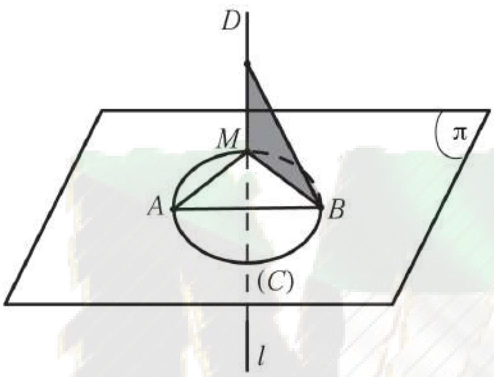
تمرَّنْ
10-3

تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line with a Plane

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (11–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.



(7) في الشكل المقابل :

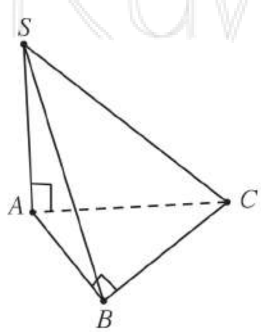
إذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp (AMB)$ ، $\overline{AB}$ قطر في الدائرة (C) فإن:

(a) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$

(b) $\overleftrightarrow{l} \perp (BMD)$

(c) $\overleftrightarrow{AM} \perp (BMD)$

(d) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BM}$



(8) في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$ ، $m(\widehat{B}) = 90^\circ$ فإن:

(a) المثلث SAB قائم في $\widehat{B}$

(b) $\overleftrightarrow{CB} \perp (SAB)$

(c) المثلث SAB متطابق الضلعين.

(d) المثلث SCB قائم في $\widehat{C}$

تمرَّنْ
10–3

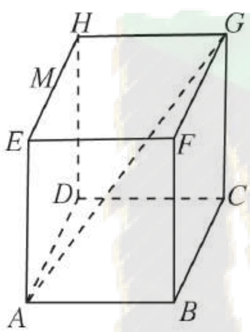
تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line with a Plane

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (11–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(9) يمثل الشكل المقابل مكعبًا، إذا كان طول حرفه 3 cm فإن طول قطره $\overline{AG}$ يساوي:



(a) $\sqrt{3}$ cm

(b) $3\sqrt{3}$ cm

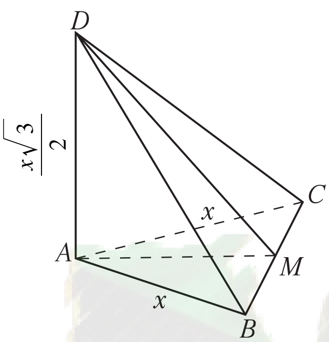
(c) 9 cm

(d) 18 cm

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

المجموعة A تمارين مقالية



(1) ABC مثلث متطابق الأضلاع وطول ضلعه x

$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC، $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$،

M منتصف $\overline{BC}$

(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{CB}$ متعامد مع المستوي AMD

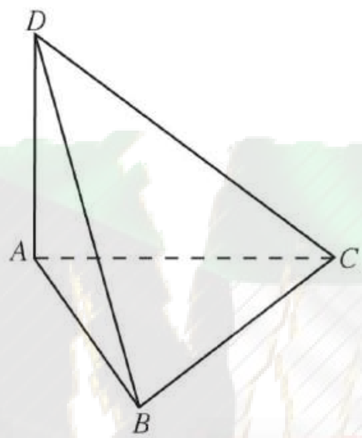
(b) عيّن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(DCB, \overleftrightarrow{BC}, ACB)$

(c) أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DCB, \overleftrightarrow{BC}, ACB)$

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

المجموعة A تمارين مقالية



(2) ABC مثلث متطابق الأضلاع.

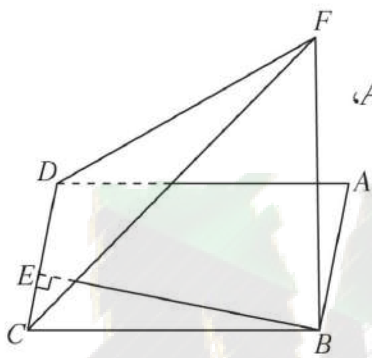
$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC

أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

المجموعة A تمارين مقالية



(3) في الشكل المقابل $ABCD$ شكل رباعي، $\overleftrightarrow{FB}$ عمودي على المستوي $ABCD$،

$\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ فإذا كان $FB = BE$،

أوجد قياس الزواية الزوجية بين $(ABCD)$، (FCD)

تمرَّنْ
10-4

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

المجموعة A تمارين مقالية

(4) $MABC$ هرم ثلاثي رأسه M وقاعدته مثلث متطابق الأضلاع ABC،
طول ضلعه $10\,\text{cm}$، إذا كان $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{MAC}) = 90°$، $MA = 5\,\text{cm}$، D منتصف $\overline{BC}$

(a) أثبت أن: $\overline{BC} \perp (MAD)$

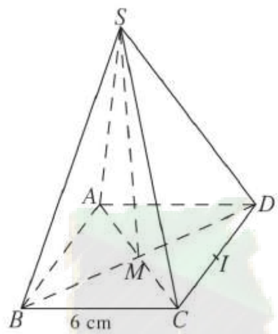
(b) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين (MBC), (ABC)

تمرَّنْ
10-4

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

المجموعة A تمارين مقالية



(5) $SABCD$ هرم مربع القاعدة طول ضلعها $6\,\text{cm}$ ومركزها M

بحيث إن $(ABCD) \perp \overleftrightarrow{SM}$ ، I منتصف $\overline{CD}$

(a) أثبت أن: $(M\hat{I}S)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(ABCD, \overleftrightarrow{CD}, SCD)$

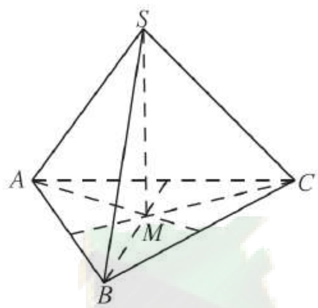
(b) أوجد: $m(M\hat{I}S)$ إذا كان $SM = \sqrt{3}\ cm$

تمرَّنْ
10−4

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

المجموعة A تمارين مقالية



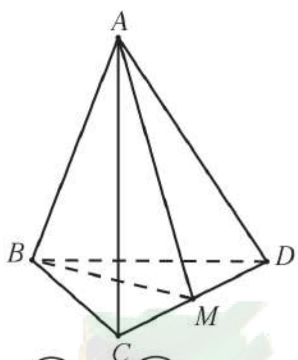
(6) $SABC$ هرم قاعدته مثلث متطابق الأضلاع مركزه M
بحيث إن $\overleftrightarrow{SM} \perp (ABC)$
أوجد قياس الزاوية الزوجية $(SMB, \overleftrightarrow{SM}, SMC)$

تمرّنْ
10−4

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

المجموعة B تمارين موضوعية



في التمارين (4—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمرينين (2—1)، على الشكل المقابل.

إذا كان $ABCD$ هرم جميع حروفه متساوية الطول، M منتصف $\overline{CD}$

فإن:

(1) $\overline{CD}$ عمودي على $\overline{AB}$ (a) (b)

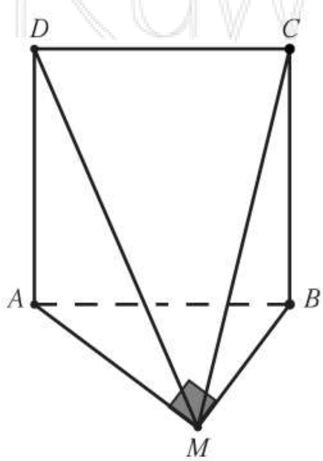
(2) الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(BDC, \overleftrightarrow{DC}, ADC)$ هي $A\widehat{M}D$ (a) (b)

أسئلة التمرينين (4—3)، على الشكل المقابل.

المثلث AMB قائم الزاوية في M، $\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي AMB

إذا أخذنا النقطة C بحيث يكون $ABCD$ مربعًا.

فإن:



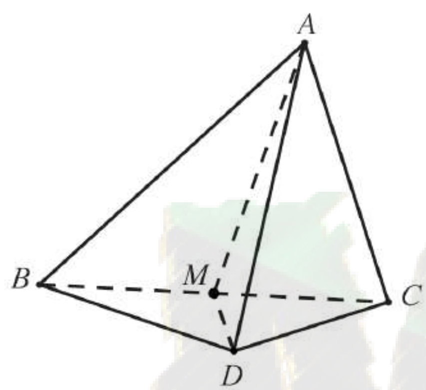
(3) $\overleftrightarrow{BM}$ متعامد مع (MAD) (a) (b)

(4) $\overleftrightarrow{CB}$ متعامد مع (AMB) (a) (b)

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

المجموعة B تمارين موضوعية



في التمارين (10–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

أسئلة التمارين (7–5)، على الشكل المقابل. حيث إن:

M منتصف $\overline{BC}$

ABC، DBC مثلثان لهما ضلع مشترك $\overline{BC}$ حيث $BC = x$

وهما متطابقا الأضلاع ولا يحويهما مستو واحد.

(5) الزاوية الزوجية $(BAC\ ,\ \overleftrightarrow{BC}\ ,\ BCD)$ هي:

ⓐ $A\widehat{M}D$ ⓑ $B\widehat{M}C$ ⓒ $A\widehat{M}B$ ⓓ $B\widehat{A}M$

(6) إذا كان: $m(A\widehat{M}D) = 60^\circ$ فقيمة AD بدلالة x هي:

ⓐ $\frac{x}{2}$ ⓑ $\frac{x\sqrt{2}}{2}$ ⓒ $x\sqrt{3}$ ⓓ $\frac{x\sqrt{3}}{2}$

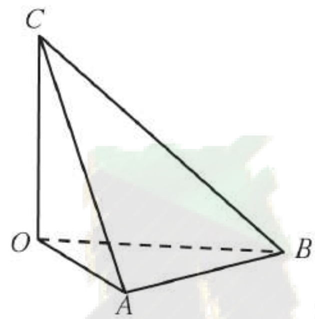
(7) إذا كان $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$، فإنّ: $m(A\widehat{M}D)$ يساوي:

ⓐ 90° ⓑ 45° ⓒ 60° ⓓ 30°

الزاوية الزوجية
The Dihedral Angle

المجموعة B تمارين موضوعية

أسئلة التمرينين (9−8) على الشكل المقابل.



إذا كان OAB مثلث فيه:

$OA = x$ ، $OB = 2x$ ، $m(A\widehat{O}B) = 60^\circ$

$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي OAB

(8) طول $\overline{AB}$ يساوي:

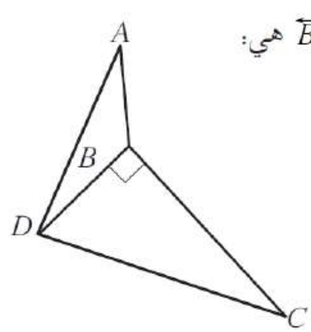
(a) x (b) $x\sqrt{2}$ (c) $x\sqrt{3}$ (d) $\frac{x}{2}$

(9) قياس الزاوية الزوجية $(AOC , \overleftrightarrow{OC} , BOC)$ هو:

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

(10) في الشكل المقابل، المثلث DBC قائم الزاوية في B،

فإذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على (DBC) فإن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BD}$ هي:

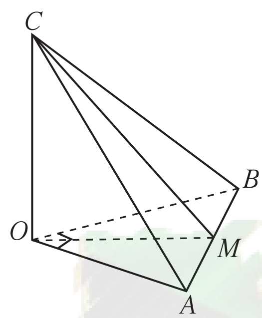


(a) $D\widehat{B}C$ (b) $A\widehat{B}C$
(c) $A\widehat{B}D$ (d) $A\widehat{D}C$

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

المجموعة A تمارين مقالية



(1) OAB مثلث قائم في $\widehat{O}$، $OA = OB = 1$

$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي OAB، $OC = 1$،

M منتصف $\overline{AB}$

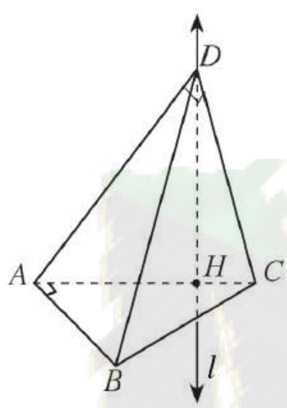
(a) أثبت أن المستوي COM متعامد مع المستوي OAB

(b) أثبت أن المستوي COM متعامد مع المستوي CAB

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

المجموعة A تمارين مقالية



(2) ABC مثلث قائم في $\widehat{A}$، $H \in \overline{AC}$

نأخذ المستقيم l المتعامد مع المستوي ABC والمار بالنقطة H

$D \in \overleftrightarrow{l}$ حيث يكون المثلث ADC قائم الزاوية في D

(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{AB}$ متعامد مع (ACD)

(b) استنتج أن $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{CD}$ متعامدان وأن المثلث ABD قائم في $\widehat{A}$

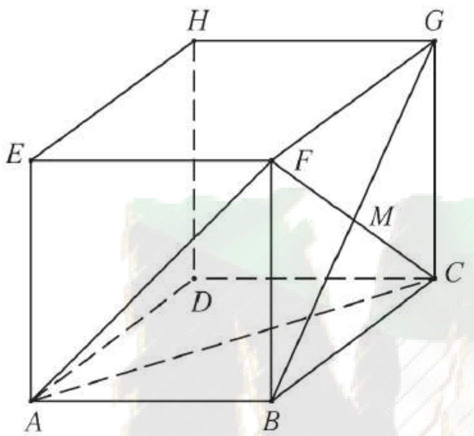
(c) أثبت أن $\overleftrightarrow{CD}$ متعامد مع (ADB)

(d) استنتج أن (CDB), (BDA) متعامدان.

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

المجموعة A تمارين مقالية



(3) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a:

(a) أثبت أن: $(ABCD) \perp (FBCG)$

(b) أثبت أن المثلث ACF متطابق الأضلاع.

(c) M نقطة تقاطع $\overline{FC}$، $\overline{BG}$،

أثبت أن: $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{FC}$

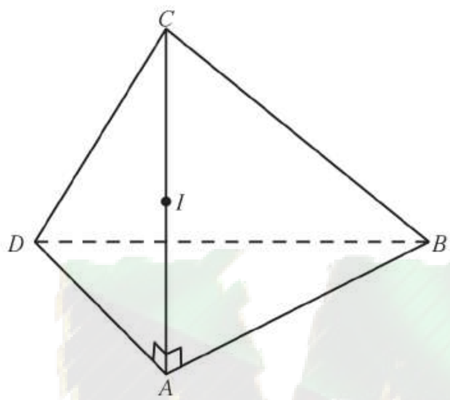
(d) أثبت أن: $(BCGF) \perp (ABG)$

(e) أثبت أن: $(ABG) \perp \overleftrightarrow{FC}$

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

المجموعة A تمارين مقالية

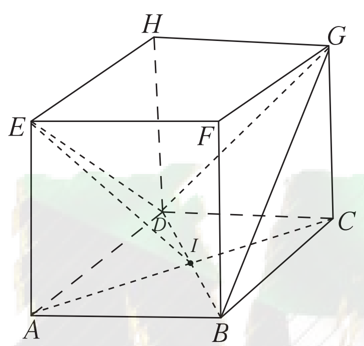


(4) $CABD$ هرم ثلاثي القاعدة فيه:
$\overleftrightarrow{CA} \perp (ABD)$، I منتصف $\overline{AC}$
أثبت أن المستوي العمودي من I على $\overleftrightarrow{AC}$ يقطع (ADC) بمستقيم يمر في منتصف $\overline{DC}$ ويقطع (ABC) بمستقيم يمر في منتصف $\overline{BC}$

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

المجموعة A تمارين مقالية



(5) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 5 cm

(a) أثبت أن المثلث EDB متطابق الأضلاع.

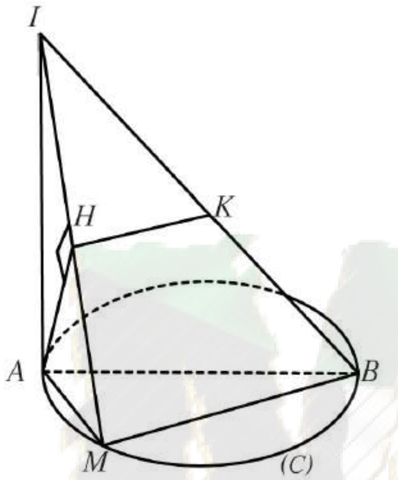
(b) I نقطة تقاطع القطرين في المربع $ABCD$،

أثبت أن: $(DBG) \perp (AEI)$

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

المجموعة A تمارين مقالية



(6) في الشكل المقابل:

(C) دائرة قطرها $\overline{AB}$، M نقطة على الدائرة مختلفة عن A و B

$\overleftrightarrow{IA}$ عمودي على مستوى الدائرة.

(a) أثبت أن: $(IMB) \perp (IAM)$

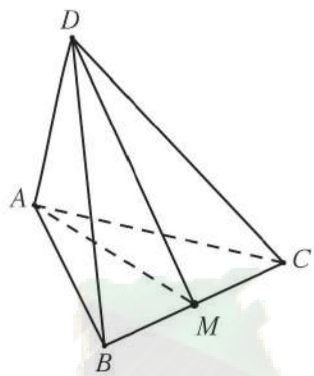
(b) إذا كان $\overline{AH} \perp \overline{IM}$, K نقطة على $\overline{IB}$
أثبت أن: $(IMB) \perp (AHK)$

تمرَّنْ
10−5

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

المجموعة B تمارين موضوعية



في التمارين (6−1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمارين (5−1)، على الشكل المقابل.

إذا كان $\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع (ABC)، $AB = AC$، M منتصف $\overline{BC}$ فإن:

(1) $(ABC) \perp (DAC)$ (a) (b)

(2) $(DBC) \perp (DAC)$ (a) (b)

(3) $(AMD) \perp (ABC)$ (a) (b)

(4) $(AMD) \perp (DBC)$ (a) (b)

(5) $DC = DB$ (a) (b)

(6) المستويان العمودان على ثالث متوازيان. (a) (b)

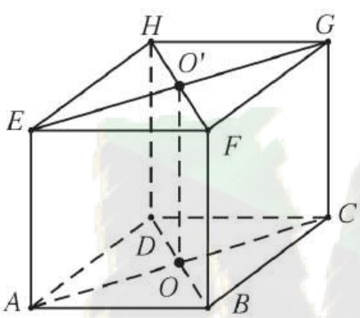
تمرَّنْ
10–5

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (12–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.



أسئلة التمرينين (8–7)، على الشكل المقابل حيث إن:

ABCDEFGH شبه مكعب فيه:

O مركز المستطيل *ABCD*، *O'* مركز المستطيل *EFGH*

(7) (*EFGH*)، (*FGCB*) هما:

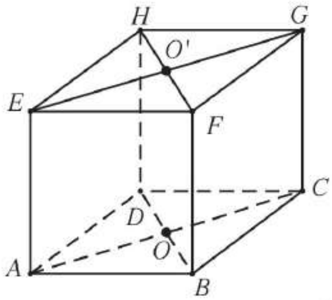
(a) متعامدان (b) متوازيان (c) منطبقان (d) ليس أيًّا مما سبق

(8) (*DBFH*)، (*ABCD*) هما:

(a) متوازيان (b) منطبقان (c) متعامدان (d) ليس أيًّا مما سبق

أسئلة التمرينين (10–9)، على الشكل المقابل حيث إن: $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a.

O مركز المربع $ABCD$، O' مركز المربع $EFGH$



(9) $(EACG)$، $(DHFB)$ هما:

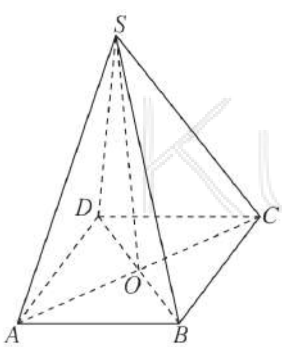
(a) منطبقان (b) متعامدان

(c) متوازيان (d) ليس أيًا مما سبق

(10)

(10)(HGE)، (OAB) هما:

(a) متعامدان (b) متوازيان (c) منطبقان (d) ليس أيًا مما سبق



(11) إذا كان $ABCD$ مربع مركزه O، $\overleftrightarrow{SO} \perp (ABCD)$ فإن:

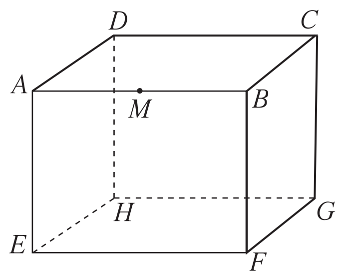
(a) $(SAB) \perp (SBC)$ (b) $(SAC) \perp (SBD)$

(c) $(SAB) \parallel (SCD)$ (d) $(SAD) \perp (ABCD)$

(12) إذا كان: $\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1$, $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_2$ فإن:

(a) $\pi_1 \parallel \pi_2$ (b) $\pi_1 \perp \pi_2$ (c) $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$ (d) $\pi_1 = \pi_2$

اختبار الوحدة العاشرة



(1) $ABCDEFGH$ مكعب، M منتصف $\overline{AB}$

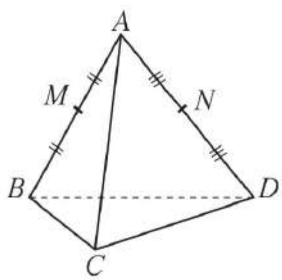
(a) هل $\overleftrightarrow{AB}$ والنقطة M تعينان مستويًا واحدًا؟

(b) هل $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{GH}$ يعينان مستويًا واحدًا؟

(c) سمّ ثلاثة مستويات تحتوي كل منها على النقطة M

اختبار الوحدة العاشرة

(2) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة. النقطة M منتصف $\overline{AB}$ والنقطة N منتصف $\overline{AD}$



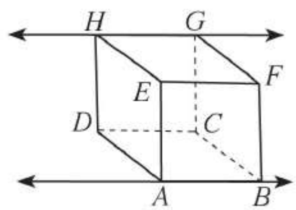
أكمل:

(a) $\overleftrightarrow{NM}$ .... $\overleftrightarrow{BD}$

(b) $(ABD) \cap (CNM) =$ ....

(c) $(CNB) \cap (ABD) =$ ....

اختبار الوحدة العاشرة



(3) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

(b) أثبت أن: $BDHF$ هو مستطيل.

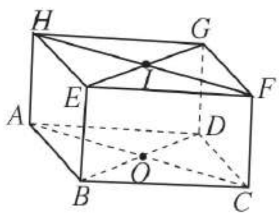
(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{HF}$ موازٍ للمستوي $ABCD$

اختبار الوحدة العاشرة

(4) $ABCDHEFG$ شبه مكعب.

النقطة O مركز المربع $ABCD$،

النقطة I مركز المربع $EFGH$

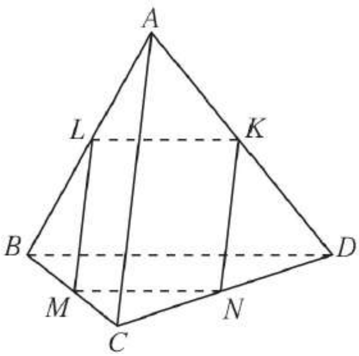


(a) أثبت أن النقاط: D، G، E تقع في المستوي $EGDB$

(b) أكمل: $(BEGD) \cap (AHFC) =$ ....

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AH} \parallel \overleftrightarrow{CF} \parallel \overleftrightarrow{OI}$

اختبار الوحدة العاشرة



(5) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة؛ L منتصف $\overline{AB}$، M منتصف $\overline{CB}$،

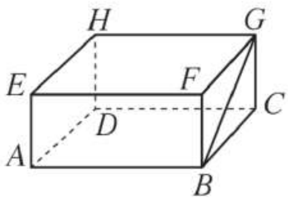
N منتصف $\overline{CD}$، K منتصف $\overline{AD}$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{NK} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{LM}$

(b) أثبت أن: $KLMN$ هو متوازي أضلاع.

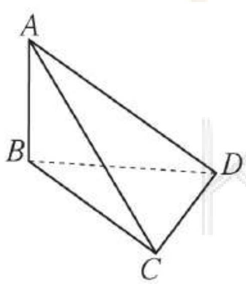
(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{NL}$ يتقاطع مع $\overleftrightarrow{KM}$

اختبار الوحدة العاشرة



(6) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

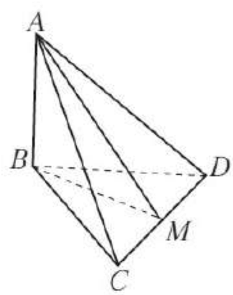
أثبت أن: $\overleftrightarrow{GH}$ متعامد مع $\overleftrightarrow{GB}$



(7) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة $BC = BD$، $\overleftrightarrow{AB}$ متعامد مع المستوي BCD

أثبت أن: $m(A\widehat{D}B) = m(A\widehat{C}B)$

اختبار الوحدة العاشرة



(8) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة، قاعدته BCD مثلث متطابق الأضلاع، $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ ؛

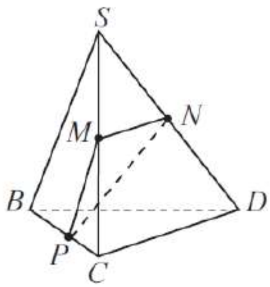
M منتصف $\overline{CD}$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{DC} \perp (ABM)$

(b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AM}$

اختبار الوحدة العاشرة

(9) $SBCD$ هرم ثلاثي قاعدته BCD، M منتصف $\overline{SC}$، N منتصف $\overline{SD}$ ، P نقطة على $\overline{BC}$



(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{MN}$ موازٍ للمستوي BCD

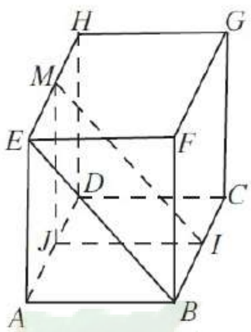
(b) إذا كان (PMN) يقطع $\overleftrightarrow{BD}$ في النقطة L

أثبت أن: $\overleftrightarrow{PL} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

اختبار الوحدة العاشرة

(10) $ABCDEFGH$ مكعب. I منتصف $\overline{BC}$،

J منتصف $\overline{AD}$، M منتصف $\overline{EH}$



(a) أثبت أن $\overline{AD} \perp (IJM)$

(b) أثبت أن $\overline{AD} \perp (AEB)$

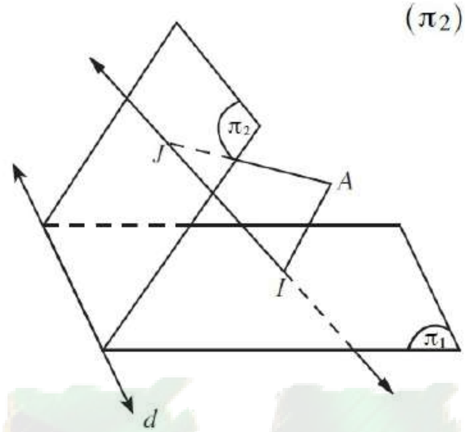
(c) أثبت أن (IJM)، (ABE) متوازيان

(d) أثبت أن: $\overline{IJ} \perp (ADHE)$

اختبار الوحدة العاشرة

(11) (π_1) ، (π_2) يتقاطعان في $\overleftrightarrow{d}$، A نقطة خارج (π_1) وخارج (π_2)

$\overleftrightarrow{AJ} \perp (\pi_2)$ ، $\overleftrightarrow{AI} \perp (\pi_1)$



(a) أثبت أن $(AIJ) \perp (\pi_1)$

وأن $(AIJ) \perp (\pi_2)$

(b) أثبت أن $\overleftrightarrow{d} \perp (AIJ)$

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{d} \perp \overleftrightarrow{IJ}$