يتعرف الطلاب في هذه الوحدة إلى شروط تطابق مثلثين. وسوف يميزون بين حالات تطابق مثلثين مختلفي الأضلاع وبين تطابق مثلثين قائمي الزاوية.

شعوب العالم

اسأل الطلاب إذا كانوا قد تعاملوا مع لعبة «التنغرام». وما إذا كانوا قد أنشأوا أشكالاً هندسية باستخدام مثلثات متطابقة أو غير ذلك.

العلوم

شجع الطلاب الدخول إلى مختبر العلوم مع معلم (معلمة) الفصل لكي يشاهدوا المنشور ثلاثي القاعدة وكيف يعكس الضوء ويفككه.

تسلية

اطلب إلى الطلاب القيام بأبحاث عن مثلث «سربنسكي». أين يوجد ؟ ما هي أطوال أضلاعه؟ لماذا يستخدم؟ هل له غايات تعليمية وتربوية؟

هندسة

شجع الطلاب على القيام برحلة لمشاهدة أبراج الكويت والتقاط الصور لها، ثم عرضها في غرفة الفصل لدراسة الأشكال الهندسية المكونة لهذه الأبراج وخاصة المثلثات المتطابقة.

مشروع الوحدة

ساعد الطلاب على فهم فكرة المشروع وأهمية إنشاء جسر كرتوني، وذلك باستخدام دعائم من مثلثات أو رباعيات. تأكد من أنهم حافظوا على فكرة التطابق.

مرشد تخطيط الوحدة

كتاب الطالب			
الدرس	الأدوات المستخدمة	المصطلحات الأساسية	رقم الدرس
افتتاحية الوحدة الثامنة			
التركيز على حل المسائل			
افتتاحية الوحدة الثامنة (٢) تطابق المثلثات			
تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع	مسطرة، فرجار، ورق، مقص، منقلة	رمز التطابق ≅، ضلع: ض، زاوية:ز، تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع.	(٨-١)
تطابق مثلثين بضلعين والزاوية المحددة بهما	مسطرة، منقلة، ورق، مقص		(٨-٢)
تطابق مثلثين بزاويتين وضلع واصل بين رأسيهما	مسطرة، منقلة، ورق، مقص		(٨-٣)
تطابق مثلثين قائمي الزاوية	مسطرة، فرجار، ورق، مقص، منقلة	زاوية قائمة، مثلث قائم الزاوية	(٨-٤)
إجابات اختبار الوحدة الثامنة			

KuwaitMath.com

التركيز على حل المسائل

مراجعة المسألة

الغاية

«قد يكون من المهم جدًّا الطريقة التي اتبعها الطالب في حلّ المسألة وليس الإجابة بحد ذاتها».

لذا يجب الانتباه دائمًا إلى أداء الطالب في التعامل مع حل المسائل وليس النظر إلى النتيجة التي حصل عليها فقط.

كيفية التعامل مع الصفحة

- في المسألة الأولى، لم ينتبه الطالب أن زاوية واحدة قياسها ٧٠°، وبالتالي يوجد أيضًا زاوية ثانية قياسها ٧٠°، حيث إن المثلث متطابق الضلعين لذا كانت النتيجة لديه أن قياس الزاوية الثالثة ١١٠° وهذا خطأ.
- في المسألة الثانية، الإجابة صحيحة حيث إن المثلث متطابق الضلعين وفيه زاوية قياسها ٦٠°، فيكون المثلث متطابق الأضلاع، وبالتالي أطوال الأضلاع متساوية.
- في المسألة الثالثة، لا يوجد في المعطيات شيء يدل إلى أن المثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين وبالتالي فالإجابة خطأ.
- في المسألة الرابعة، الإجابة صحيحة لأن مساحة المثلث تساوي $\frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{٢} = \frac{١٠ \times ١٠}{٢} = ٥٠$ سم^٢.

إجابات الأسئلة

❶ خطأ، بما أن المثلث متطابق الضلعين لذا:

٧٠° + ٧٠° = ١٤٠° ويبقى للزاوية الثالثة

١٨٠° – ١٤٠° = ٤٠°

❷ صح، طول الضلع الثالث في المثلث متطابق الأضلاع هو ١٥ سم.

❸ خطأ، إذا كان مجموع طولي ضلعين في المثلث ٢٠سم، ومحيطه ٦٠سم هذا يعني أن طول الضلع الثالث يساوي: ٦٠ – ٢٠ = ٤٠سم أي أن طول الضلع الثالث أكبر من طولي الضلعين معًا وبالتالي لا وجود لمثلث.

التركيز على حل المسائل

لكل من المسائل التالية إجابة. لكنها ليست بالضرورة إجابة صحيحة. اشرح سبب صحة الإجابة أو خطئها.

❶ يريد أحمد أن يرسم مثلثًا متطابق الضلعين. إذا تساوت زاويتان بقياس ٧٠° لكل منهما، أوجد قياس الزاوية الثالثة.
الإجابة: ١١٠°

❷ قاس حمد ضلعي مثلث. فوجد أن طول كل منهما يساوي ١٥ سم. وكان قياس إحدى زواياه ٦٠°. فما هو قياس الضلع الثالث لهذا المثلث؟
الإجابة: ١٥سم

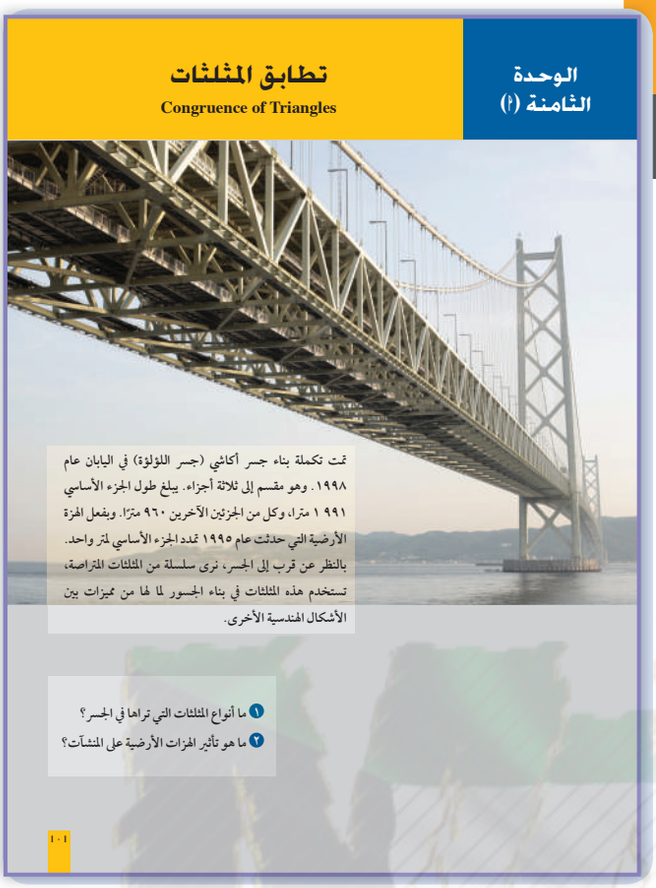
❸ محيط مثلث يساوي ٦٠سم. ما نوع هذا المثلث إذا كان طولا ضلعين يساويان ٢٠ سم.
الإجابة: قائم متطابق الضلعين

❹ أوجد مساحة مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين، طول ضلعه ١٠ سم وطول وتره ١٠√٢ سم.
الإجابة: ٥٠ سم٢

مراجعة المسألة
راجع خطوات الحل للتأكد من معقولية الإجابة في كل مسألة.

❹ صح، بما أن المثلث هو قائم الزاوية متطابق الضلعين، لذا طولا ضلعي القائمة هما ١٠ سم لكل واحد وبالتالي فالمساحة = $\frac{١٠ \times ١٠}{٢} = \frac{١٠٠}{٢} =$ ٥٠ سم^٢

KuwaitMath.com



الموضوع: جسر أكاشي

كيفية التعامل مع الصفحة

تعتبر الأشكال الهندسية البسيطة مثل المثلثات بكافة أنواعها، والرباعيات بكافة أنواعها من الدعائم الأساسية في بناء الجسور الحديدية، والأبراج، والأعمدة الكهربائية، وغير ذلك.

يمكن مشاهدة نماذج متعددة من الإنشاءات تتضمن هذه الأشكال الهندسية المميزة.

إجابات الأسئلة

١ تبدو المثلثات في الجسر متطابقة الأضلاع ولكن على العمود يوجد مثلثات قائمة الزاوية ومتطابقة الضلعين، ويوجد مربعات أيضًا.

٢ كلما زادت قوة الهزات الأرضية تزعزعت ركائز المنشآت وقد تصل إلى حالة الدمار.

KuwaitMath.com

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يطابق مثلثين بثلاثة أضلاع.

المصطلحات الأساسية

- رمز التطابق: ≅ ، ضلع: ض، زاوية: ز، تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع.

الأدوات المستخدمة

- مسطرة، فرجار، ورق، مقص، منقلة.

١-٨

تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع
Congruent Triangles with SSS

سوف تتعلّم
• تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع.

من الاستخدامات
• يستخدم مصممو الواجهات الزجاجية الملونة المثلثات المتطابقة في الإنشاءات.

صلة الدرس سبق أن تعرّفت إلى المضلعات المتطابقة ومنها المثلثات المتطابقة، والآن سوف تتعلم حالة تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع.

استكشف تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع

الأدوات المستخدمة: مسطرة، فرجار، ورق، مقص، منقلة

١ يرسم كل طالب مثلثًا أطوال أضلاعه ٣ سم، ٤ سم، ٦ سم مستخدمًا المسطرة والفرجار.
٢ يقص كل طالب المثلث الذي رسمه.
٣ هل تتطابق المثلثات التي رسمها الطلاب؟

تعلّم تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع

عند كتابة رموز مثلثين متطابقين يراعى الترتيب في كتابة الرؤوس المتناظرة.

إذا كان مثلثان متطابقين، فإن الأضلاع المتناظرة تكون متطابقة، كذلك تتطبق الرؤوس المتناظرة على بعضها بعضًا، أي أن الزوايا المتناظرة لها القياس نفسه.

مثال (١)

المثلثان أ ب جـ، د هـ ز متطابقان. اكتب أزواج العناصر المتناظرة والمتطابقة.

الحل:

العناصر المتناظرة والمتطابقة:

أ ≅ د ب ≅ هـ جـ ≅ ز

أ ب ≅ د هـ

ب جـ ≅ هـ ز

أ جـ ≅ د ز

حاول أن تحلّ

١ ارسم مثلثين متطابقين، واكتب أزواج الأضلاع المتطابقة.
٢ Δ س هـ م ≅ Δ ل ع ب. دون رسم المثلثين، نظم قائمة بالعناصر المتناظرة والمتطابقة.

يتطابق المثلثان إذا تساوى طول كل ضلع في المثلث الأول مع طول نظيره في المثلث الثاني. يعبّر عن ذلك بحالة (ضلع، ضلع، ضلع) (ض. ض. ض).

المصطلحات الأساسية
رمز التطابق هو: ≅
Congruence Symbol: ≅
Side: S ضلع: ض
Angle: A زاوية: ز
تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع
Congruent Triangles with 3 Corresponding Sides

تذكر
للمثلث ستة عناصر: ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا.

معلومة مفيدة
الحالة (ض.ض.ض) تعني أن طول كل ضلع في المثلث الأول يساوي طول الضلع المناظر له في المثلث الثاني.

١٠٣

مراجعة

❶ استخدم مسطرة لترسم قطعة مستقيمة $\overline{أب}$ طولها ٧سم.

❷ استخدم الفرجار لترسم قطعة مستقيمة متطابقة مع القطعة $\overline{أب}$.

❸ استخدم المنقلة لترسم زاوية قياسها معلوم.

تحقق من عمل الطلاب

١ – التمهيد

استكشف

الغاية

يتعرف الطلاب من خلال هذا الدرس على تطابق مثلثين باستخدام أطوال محددة لكل ضلع من أضلاعهما.

التقييم المستمر

راقب الطلاب وهم يحاولون مطابقة المثلثات مع بعضها بعضًا. تأكد من أنهم يطابقون الأضلاع ذات الأطوال المتساوية في القياس. اشرح لهم بالتفصيل ما المقصود بالأضلاع المتناظرة والزوايا المتناظرة.

KuwaitMath.com

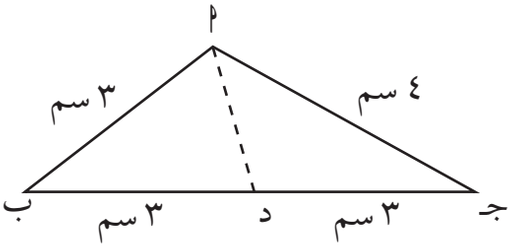
للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

اطلب إليهم أن يرسموا على ورقة مثلثًا أ ب جـ حيث أطوال أضلاعه على التوالي: ٣ سم، ٤ سم، ٦ سم.

ولتكن د نقطة على الضلع $\overline{ب جـ}$ بحيث جـ د = د ب = ٣ سم.

اطلب إليهم أن يقطعوا بواسطة المقص هذا المثلث على طول $\overline{د أ}$ إلى مثلثين

أ د جـ ، أ د ب .



اسأل: هل المثلث أدب متطابق مع المثلث أ د جـ؟ اشرح إجابتك.

لا يتطابق المثلثان لأن المثلث أ د ب لديه: أ ب = د ب = ٣ سم، ثم الضلع أ د مشترك، والمثلث أ جـ د لديه:

أ جـ = ٤ سم، د جـ = ٣ سم، والضلع أ د مشترك.

إجابات «استكشف»

١ – ٣ قد تتنوع الإجابات.

تابع عمل الطلاب وناقشهم في ما توصلوا إليه.

٢ – التعليم

تعلم

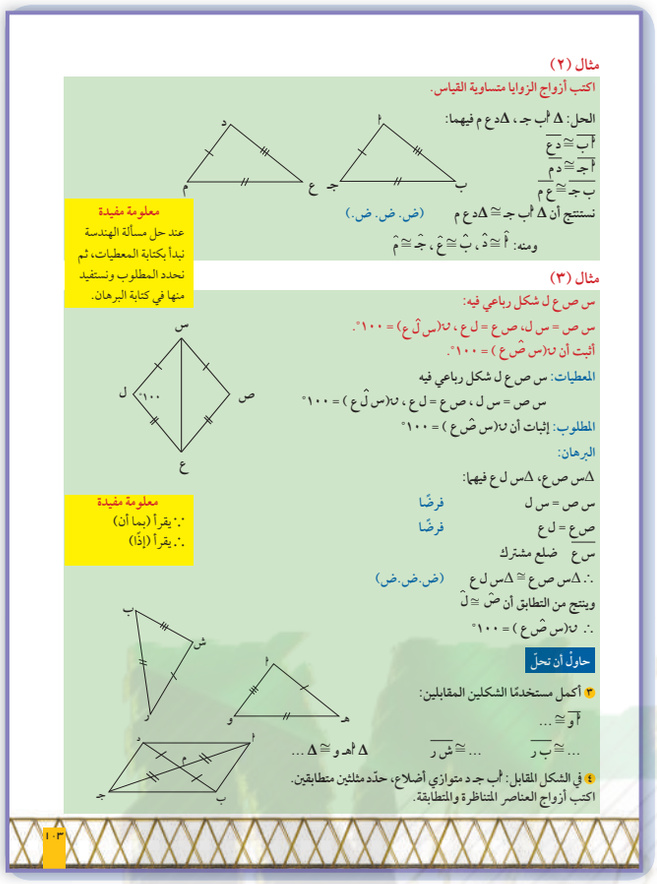
تأكد من فهم الطلاب تطابق مثلثين إذا كانت أضلاعهم متطابقة. ساعدهم على فهم علاقة الأضلاع المتناظرة والرؤوس المتناظرة بين المثلثين.

أمثلة بديلة

١ لدينا أ ب جـ مثلث متطابق الأضلاع، حيث:

أ ب = أ جـ = ب جـ = ١٠ سم.

نأخذ د نقطة على $\overline{جـ ب}$، حيث: جـ د = د ب = ٥ سم


مثال (٢)

اكتب أزواج الزوايا متساوية القياس.

الحل: Δ أ ب جـ ، Δ د ع م فيهما:

$\overline{أ ب} \cong \overline{د ع}$

$\overline{أ جـ} \cong \overline{د م}$

$\overline{ب جـ} \cong \overline{ع م}$

نستنتج أن Δ أ ب جـ ≅ Δ د ع م (ض. ض. ض.)

ومنه: أ̂ ≅ د̂ ، ب̂ ≅ ع̂ ، جـ̂ ≅ م̂

معلومة مفيدة

عند حل مسألة الهندسة نبدأ بكتابة المعطيات، ثم نحدد المطلوب ونستفيد منها في كتابة البرهان.

مثال (٣)

س ص ع ل شكل رباعي فيه:

س ص = س ل ، ص ع = ل ع ، ق(س ل̂ ع) = ١٠٠°.

أثبت أن ق(س ص̂ ع) = ١٠٠°.

المعطيات: س ص ع ل شكل رباعي فيه

س ص = س ل ، ص ع = ل ع ، ق(س ل̂ ع) = ١٠٠°

المطلوب: إثبات أن ق(س ص̂ ع) = ١٠٠°

البرهان:

Δ س ص ع، Δ س ل ع فيها:

س ص = س ل فرضًا

ص ع = ل ع فرضًا

س ع ضلع مشترك

∴ Δ س ص ع ≅ Δ س ل ع (ض. ض. ض)

وينتج من التطابق أن ص̂ ≅ ل̂

∴ ق(س ص̂ ع) = ١٠٠°

معلومة مفيدة

∵ يقرأ (بما أن)

∴ يقرأ (إذًا)

حاولْ أن تحلّ

٣ أكمل مستخدمًا الشكلين المقابلين:

أ̂ ≅ ...

... ≅ ب ر̄ ... ≅ ش ر̄ Δ أ هـ و ≅ Δ ...

٤ في الشكل المقابل: أ ب جـ د متوازي أضلاع، حدّد مثلثين متطابقين. اكتب أزواج العناصر المتناظرة والمتطابقة.

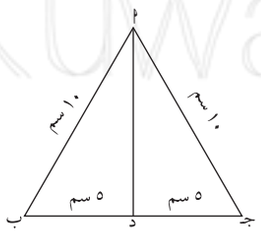
١٠٣

أثبت أن المثلث أ جـ د متطابق مع المثلث أ ب د .

أ جـ = أ ب = ١٠ سم (معطى)

جـ د = ب د = ٥ سم (معطى)

$\overline{أ د}$ ضلع مشترك.



وبالتالي فالمثلثان متطابقان لأن الأضلاع الثلاثة في المثلث أ جـ د متطابقة مع الأضلاع الثلاثة في المثلث أ ب د .

(ض . ض . ض)

KuwaitMath.com

❷ لدينا المثلث أ ب جـ حيث:

أ ب = أ جـ = ١٢ سم،

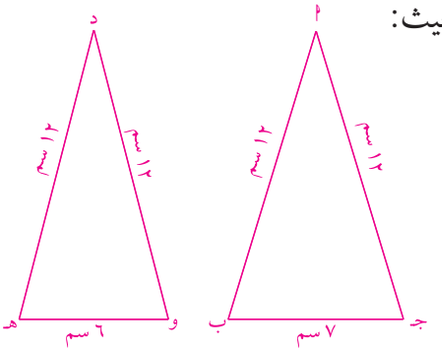
ب جـ = ٧سم

والمثلث د هـ و حيث:

د هـ = د و = ١٢ سم ،

هـ و = ٦ سم

هل هما متطابقان؟ اشرح.



من المعطيات: أ ب = أ جـ = د هـ = د و = ١٢ سم.

ولكن ب جـ = ٧سم ≠ هـ و = ٦ سم

وبالتالي فالمثلثان غير متطابقين .

إجابات «حاول أن تحل»

❶ قد تتنوع الإجابات. مثلاً:

$\overline{أجـ} \cong \overline{هـز}$

$\overline{أب} \cong \overline{هـو}$

$\overline{جـب} \cong \overline{زو}$

❷ $\overline{سهـ} \cong \overline{لع}$، $\overline{سم} \cong \overline{لب}$ $\overline{هـم} \cong \overline{عب}$.

ق (سهـم) = ق (لعب)،

ق (هـمس) = ق (عبل)،

ق (مسهـ) = ق (بلع)

❸ $\overline{أو} \cong \overline{شب}$، $\overline{هـو} \cong \overline{بر}$، $\overline{أهـ} \cong \overline{شر}$.

وبالتالي △ أهـو ≅ △ شرب (ض . ض . ض)

❹ ب م جـ، د م أ هما مثلثان متطابقان حيث إن:

م ب = م د، م جـ = م أ، ب جـ = د أ (ض . ض . ض)

٣- التدريب والتقييم

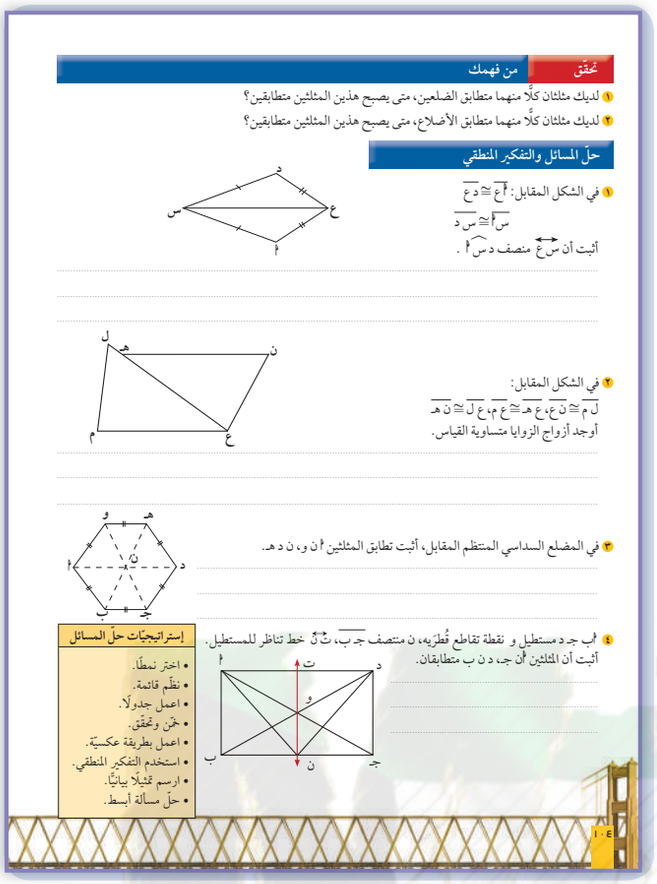
تحقق من فهمك

تأكد من فهم الطلاب لتطابق مثلثين في حالة تطابق الأضلاع الثلاثة.

إجابات «تحقق من فهمك»

❶ يتطابق المثلثان إذا تطابقت الأضلاع الثلاثة.

❷ يتطابق المثلثان إذا تطابقت الأضلاع الثلاثة.



تحقّق من فهمك

❶ لديك مثلثان كلٌّ منهما متطابق الضلعين، متى يصبح هذين المثلثين متطابقين؟

❷ لديك مثلثان كلٌّ منهما متطابق الأضلاع، متى يصبح هذين المثلثين متطابقين؟

حلّ المسائل والتفكير المنطقي

❶ في الشكل المقابل: $\overline{أع} \cong \overline{دع}$، $\overline{سأ} \cong \overline{سد}$

أثبت أن $\overleftrightarrow{سع}$ منصف د س أ .

❷ في الشكل المقابل:

$\overline{لم} \cong \overline{نع}$، $\overline{عهـ} \cong \overline{عم}$، $\overline{عل} \cong \overline{نهـ}$

أوجد أزواج الزوايا متساوية القياس.

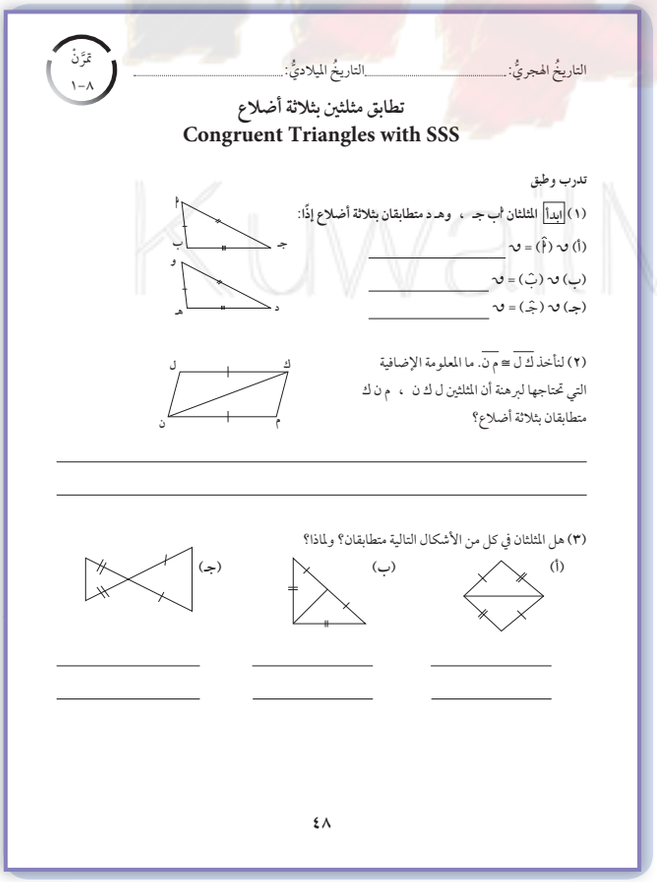
❸ في المضلع السداسي المنتظم المقابل، أثبت تطابق المثلثين أ ن و، ن د هـ.

❹ أ ب جـ د مستطيل و نقطة تقاطع قُطريه، ن منتصف جـ ب، ت ث خط تناظر للمستطيل.

أثبت أن المثلثين أن جـ، د ن ب متطابقان.

إستراتيجيّات حلّ المسائل

- اختر نمطًا.
- نظّم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمّن وتحقّق.
- اعمل بطريقة عكسيّة.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حلّ مسألة أبسط.



تمرّن ١-٨

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع

Congruent Triangles with SSS

تدرب وطبق

(١) ابدأ المثلثان أ ب جـ ، وهـ د متطابقان بثلاثة أضلاع إذًا:

(أ) ق (أ) = ق (_____)

(ب) ق (ب) = ق (_____)

(جـ) ق (جـ) = ق (_____)

(٢) لنأخذ $\overline{كل} \cong \overline{مـن}$. ما المعلومة الإضافية التي تحتاجها لبرهنة أن المثلثين ل ك ن ، م ن ك متطابقان بثلاثة أضلاع؟

(٣) هل المثلثان في كل من الأشكال التالية متطابقان؟ ولماذا؟

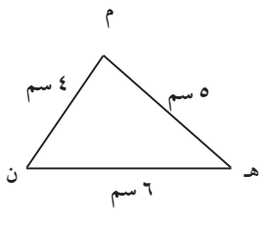
(أ) (ب) (جـ)

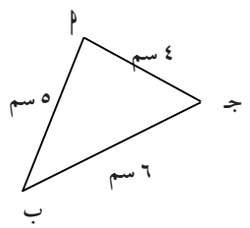
تقييم بديل

دع الطلاب يعملون في مجموعات من اثنين. يقطع أحد الطالبين بواسطة المقص مثلثين بأضلاع محددة الطول، ويطلب إلى الطالب الآخر مطابقتهما ثم يتبادلان الأدوار.

اختبار سريع

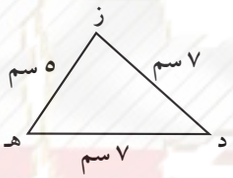
❶ هل المثلثان أ ب جـ ، م ن هـ متطابقان؟

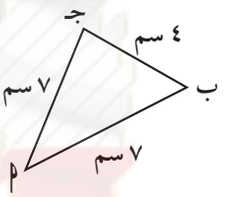




نعم، لأن أ ب = م هـ = ٥ سم، أ جـ = م ن = ٤ سم، جـ ب = هـ ن = ٦ سم. (تطابق الأضلاع)

❷ هل المثلثان أ ب جـ ، د ز هـ متطابقان؟





كلا، لأن ب جـ = ٤ سم، ز هـ = ٥ سم أي لا تطابق بين الضلعين $\overline{\text{جـ ب}}$ ، $\overline{\text{ز هـ}}$.

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

❶ نأخذ المثلثان: س د ع، س أ ع حيث $\overline{\text{س د}} \cong \overline{\text{س أ}}$ ، $\overline{\text{د ع}} \cong \overline{\text{أ ع}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ ضلع مشترك.

لذا فالمثلثان متطابقان، وبالتالي، فالزوايا المتناظرة هي متساوية القياس ونكتب ق (د $\hat{\text{س}}$ ع) = ق (أ $\hat{\text{س}}$ ع) وبالتالي $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$ منصف الزاوية د س أ.

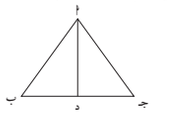
❷ في المثلثين ل م ع، ن ع هـ الأضلاع متطابقة، لذا فالمثلثان متطابقان وبالتالي فالزوايا المتناظرة متساوية القياس:

ق (ل $\hat{\text{م}}$ ع) = ق (ن $\hat{\text{ع}}$ هـ)

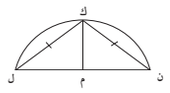
ق (م $\hat{\text{ل}}$ ع) = ق (ع $\hat{\text{ن}}$ هـ)

ق (م $\hat{\text{ع}}$ ل) = ق (ع $\hat{\text{هـ}}$ ن)

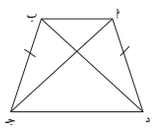
(٤) في الشكل المقابل ق (جـ) = ق (ب) ، د منتصف $\overline{\text{جـ ب}}$. برهن أن المثلثين أ د ب ، أ د جـ متطابقان.



(٥) في نصف الدائرة في الشكل إلى اليسار، م هي مركز الدائرة، ك ن = ك ل. برهن أن المثلثين ك م ل ، ك م ن متطابقان.



(٦) أ ب جـ د شبه منحرف متطابق الضلعين. أثبت أن: أ ب جـ ، ب أ د هما مثلثان متطابقان. (علمًا بأن قطرا شبه المنحرف المتطابق الضلعين متطابقان).



٤٩

❸ في المضلع السداسي المنتظم جميع الأضلاع متطابقة، وكل مثلث مثل ن و أ هو متطابق الأضلاع وبالتالي جميع المثلثات متطابقة.

❹ بما أن أ ب جـ د هو مستطيل لذا يكون أ جـ = د ب. وبما أن النقطة ن هي منتصف $\overline{\text{جـ ب}}$ فإن: جـ ن = ن ب ومن المعطيات أن $\overleftrightarrow{\text{ن ت}}$ هو خط تناظر في المستطيل فيكون د ن = أ ن وبالتالي يكون المثلثان: أ ن جـ، د ن ب متطابقان استنادًا إلى الحالة (ض . ض . ض).

KuwaitMath.com

٨-٢

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يطابق مثلثين بضلعين والزاوية المحددة بهما.

الأدوات المستخدمة

مسطرة، ورق، مقص، منقلة.

٨-٢

تطابق مثلثين بضلعين والزاوية المحددة بهما

Congruent Triangles with SAS

سوف تتعلّم
• تطابق مثلثين بضلعين والزاوية المحددة بهما.

من الاستخدامات
• يستخدم النجارون الكثير من المثلثات المتطابقة في تنفيذ الديكور.

صلة الدرس سبق أن تعرّفت إلى تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع، والآن سوف تتعلم تطابق مثلثين بضلعين والزاوية المحددة بهما.

استكشف تطابق مثلثين بضلعين والزاوية المحددة بهما

الأدوات المستخدمة: مسطرة، ورق، مقص، منقلة

١ يرسم كل طالب مثلثًا طولا ضلعين فيه ٤ سم، ٥ سم وقياس إحدى زواياه ٦٠°. يختار كل طالب زاوية مختلفة عن زملائه.

٢ يقص كل طالب المثلث الذي رسمه.

٣ هل تتطابق المثلثات التي رسمها الطلاب؟

تعلّم تطابق مثلثين بضلعين والزاوية المحددة بهما

يتطابق المثلثان إذا تطابق ضلعان والزاوية المحددة بهما في أحد المثلثين مع نظائرها في المثلث الآخر. ونعبر عن ذلك بحالة (ضلع، زاوية، ضلع) (ض. ز. ض).

فمثلًا في الشكل المقابل:

$\overline{أب} \cong \overline{دهـ}$

$\overline{أجـ} \cong \overline{دو}$

$\angle ب أجـ \cong \angle هـ دو$

المثلثان أ ب جـ، د هـ و متطابقان.

نكتب: Δ أ ب جـ $\cong \Delta$ د هـ و.

مثال (١)

أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين. $\overline{أد}$ منصف زاوية الرأس ب أ جـ. أثبت أن المثلثين أ ب د، أ جـ د متطابقان.

المعطيات: أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين.

$\overline{أد}$ منصف زاوية الرأس ب أ جـ.

المطلوب: إثبات أن Δ أ جـ د $\cong \Delta$ أ ب د.

البرهان: Δ أ جـ د، Δ أ ب د فيهما:

أ جـ = أ ب (أ ب جـ متطابق الضلعين)

ق(جـ أ د) = ق(ب أ د) ($\overline{أد}$ منصف الزاوية ب أ جـ)

$\overline{أد}$ ضلع مشترك

∴ Δ أ جـ د $\cong \Delta$ أ ب د. (ض. ز. ض.)

١٠٥

> **مراجعة**
>
> استخدم المنقلة لترسم على الورقة زاويتين أ بَ جـ، د هَـ و حيث ق(أ بَ جـ) = ٦٠°، ق(د هَـ و) = ٦٠°.
>
> اقطع الزاويتين بواسطة المقص. ثم طابق رأس الزاوية الأولى على رأس الزاوية الثانية بحيث ينطبق $\overleftarrow{ب أ}$ مع $\overleftarrow{هـ د}$. هل ينطبق $\overleftarrow{ب جـ}$ مع $\overleftarrow{هـ و}$ ؟
>
> **نعم، سوف ينطبق $\overleftarrow{ب جـ}$ مع $\overleftarrow{هـ و}$ لأن الزاويتين متساويتا القياس.**

١ – التمهيد

استكشف

الغاية

يتعرف الطالب تطابق المثلثين من خلال تطابق ضلعين متتاليين على أن تكون الزاوية المحددة بينهما متساوية القياس في المثلثين.

التقييم المستمر

تابع الطلاب وهم يحاولون مطابقة المثلثين بعد أن يطابقوا رؤوس الزوايا المتساوية القياس.

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

اسأل الطلاب: هل تطابق المثلثين من خلال تطابق الضلعين وتطابق الزاوية المحددة بهما ينتج عنه تطابق كل الأضلاع وتطابق كل الزوايا في المثلثين؟

نعم، ينطبق الضلع الثالث في المثلث الأول مع الضلع الثالث في المثلث الثاني وبالتالي تنطبق أيضًا جميع الزوايا.

إجابات «استكشف»

١ – ٣ قد تتنوع الإجابات. تابع عمل الطلاب وتأكد من فهمهم معنى الزاوية المحددة بين ضلعين.

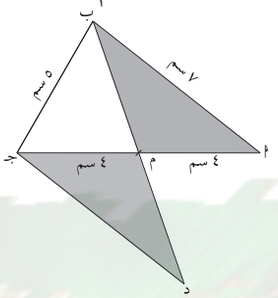
٢- التعليم

تعلم

تطابق المثلثين باستخدام ضلعين متطابقين والزاوية المحددة بهما هي واحدة من الطرائق الأكثر استخدامًا.

أمثلة بديلة

❶ نأخذ م نقطة على الضلع أ جـ حيث: أ م = م جـ = ٤ سم.
نقيس المسافة بين ب، م ونمد $\overline{ب م}$ بقطعة مستقيمة $\overline{م د}$ ،
حيث م د = م ب. أثبت أن المثلثين أ م ب، جـ م د متطابقان.



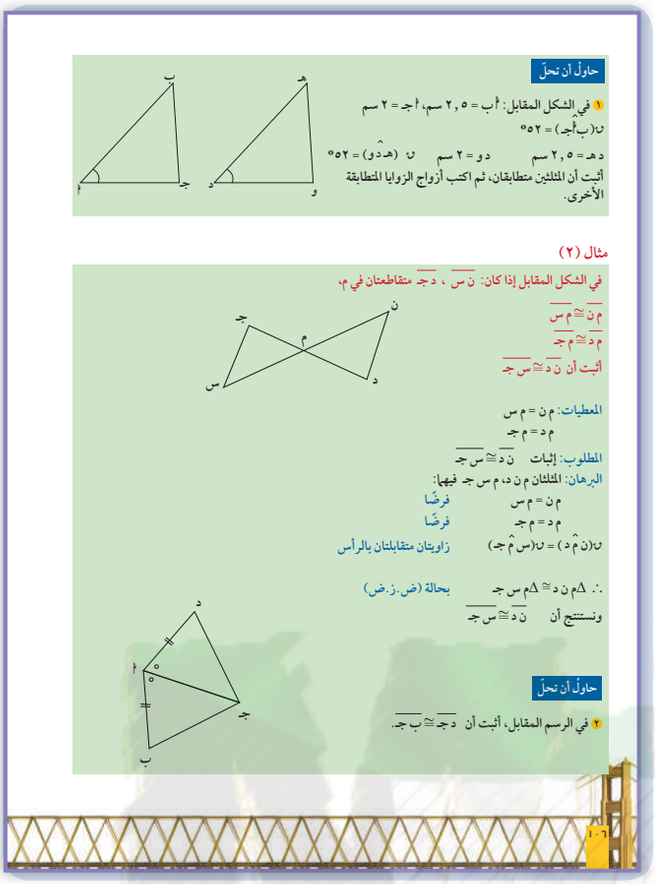
في المثلثين:
$\overline{م ب} \cong \overline{م د}$ (من الرسم)
$\overline{أ م} \cong \overline{جـ م}$ (معطيات)
ق(∠ أ م ب) = ق(∠ جـ م د) متقابلة بالرأس، وبالتالي
يكون المثلثان متطابقين لوجود تطابق بين ضلعين والزاوية المحددة بهما. (ض . ز . ض)

❷ استخدم السؤال (١) لتكتب الأضلاع والزوايا المتناظرة.
من تطابق المثلثين نستنتج:
$\overline{أ ب} \cong \overline{د جـ}$
ق(∠ ب أ م) = ق(∠ د جـ م)
ق(∠ م ب أ) = ق(∠ م د جـ)

إجابات «حاول أن تحل»

❶ لدينا أ ب = هـ د = ٢,٥ سم
أ جـ = و د = ٢ سم
ق(∠ ب أ جـ) = ق(∠ هـ د و) = ٥٢°
إذًا: المثلثان متطابقان حيث إن الضلعين متطابقان والزاوية المحددة بهما ومنه نستنتج أن: $\overline{ب جـ} \cong \overline{هـ و}$
ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ د هـ و)،
ق(∠ أ جـ ب) = ق(∠ د و هـ).

❷ $\overline{د أ} \cong \overline{ب أ}$ (معطى)، $\overline{أ جـ}$ (مشترك)
ق(∠ د أ جـ) = ق(∠ ب أ جـ) (معطيات)
إذًا المثلثان أ ب جـ، أ جـ د متطابقان من حيث تطابق ضلعين والزاوية المحددة بهما (ض . ز . ض).
وينتج من التطابق أن $\overline{د جـ} \cong \overline{ب جـ}$



حاول أن تحل

❶ في الشكل المقابل: أ ب = ٢,٥ سم، أ جـ = ٢ سم
ق(∠ ب أ جـ) = ٥٢°
د هـ = ٢,٥ سم د و = ٢ سم ق (∠ هـ د و) = ٥٢°
أثبت أن المثلثين متطابقان، ثم اكتب أزواج الزوايا المتطابقة الأخرى.

مثال (٢)

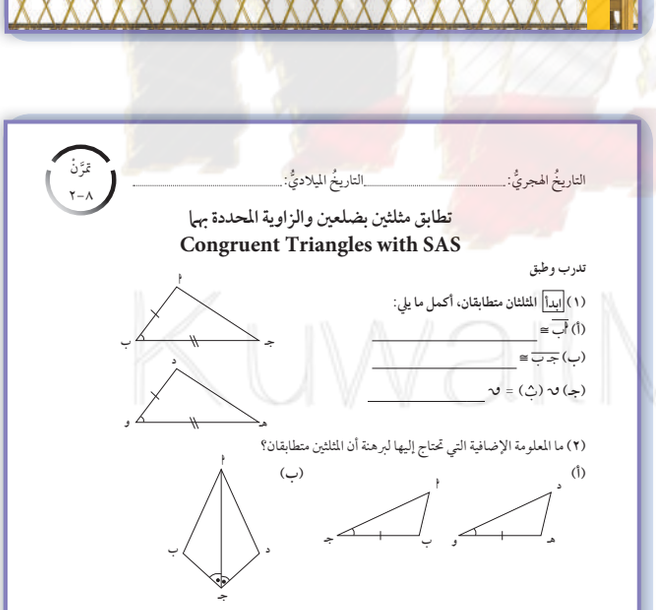
في الشكل المقابل إذا كان: $\overline{ن س}$ ، $\overline{د جـ}$ متقاطعتان في م،
$\overline{م ن} \cong \overline{م س}$
$\overline{م د} \cong \overline{م جـ}$
أثبت أن $\overline{ن د} \cong \overline{س جـ}$

المعطيات: م ن = م س
م د = م جـ
المطلوب: إثبات $\overline{ن د} \cong \overline{س جـ}$
البرهان: المثلثان م ن د، م س جـ فيهما:
م ن = م س فرضًا
م د = م جـ فرضًا
ق(∠ ن م د) = ق(∠ س م جـ) زاويتان متقابلتان بالرأس
∴ Δ م ن د ≅ Δ م س جـ بحالة (ض.ز.ض)
ونستنتج أن $\overline{ن د} \cong \overline{س جـ}$

حاول أن تحل

❷ في الرسم المقابل، أثبت أن $\overline{د جـ} \cong \overline{ب جـ}$.

١٠٦



التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

تمرّن ٨-٢

تطابق مثلثين بضلعين والزاوية المحددة بهما
Congruent Triangles with SAS

تدرب وطبق

(١) ابدأ المثلثان متطابقان، أكمل ما يلي:
(أ) $\overline{أ ب} \cong$ _____
(ب) $\overline{جـ ب} \cong$ _____
(جـ) ق(∠ ب) = ق(∠ _____)

(٢) ما المعلومة الإضافية التي تحتاج إليها لبرهنة أن المثلثين متطابقان؟

(أ) (ب)

(٣) هل المثلثان في الأشكال التالية متطابقان؟

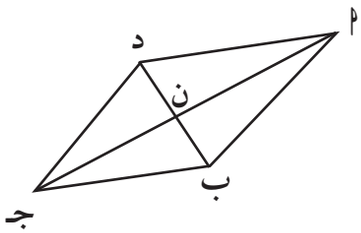
(أ) ٢ سم ٢ سم ٥٠° ٥٠°
(ب) (جـ)

٥٠

KuwaitMath.com

❸ بما أن أ ب جـ د متوازي أضلاع لذا: ن ب = ن د،
ن جـ = ن أ، ق∠(أ ن̂ ب) = ق∠(جـ ن̂ د) .

وبالتالي فالمثلثان:
أ ن ب، جـ ن د متطابقان
استنادًا إلى الحالة
(ض . ز . ض).



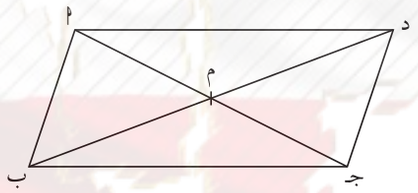
٣- التدريب والتقييم

تحقق من فهمك

إجابات «تحقق من فهمك»

❶ نعم، يتطابق المثلثان قائما الزاوية في حالة تطابق أي ضلعين والزاوية المحددة بهما.

❷ يمكن الحصول على زوجين من المثلثات المتطابقة:
(أ د م، جـ ب م) ثم (د م جـ، ب م أ)

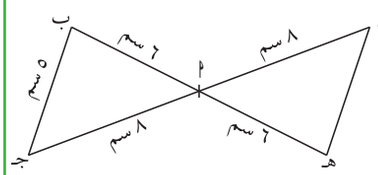


تقييم بديل

دع الطلاب يعملون في مجموعات من اثنين. يقطع أحدهما بواسطة مقص مثلثين لهما ضلعان متطابقان وزاوية محددة بينهما، والآخر يطابق المثلثين ثم يتبادلان الأدوار.

اختبار سريع

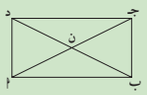
لدينا مثلث أ ب جـ حيث
أ ب = ٦ سم،
ب جـ = ٥ سم،
أ جـ = ٨ سم
نأخذ على المستقيم $\overleftrightarrow{أ جـ}$ نقطة د حيث أ جـ = أ د = ٨ سم
ونأخذ على المستقيم أ ب نقطة هـ حيث
أ هـ = أ ب = ٦ سم أثبت أن ب جـ = د هـ = ٥ سم.



المثلثان أ ب جـ ، أ هـ د متطابقان باستخدام (ض . ز . ض)
وبالتالي فالأضلاع المتناظرة متطابقة لذا:
ب جـ = د هـ = ٥ سم.

مثال (٣)

أ ب جـ د مستطيل، ن نقطة تقاطع قطريه.
أثبت أن المثلثين ن د أ، ن ب جـ متطابقان.



المعطيات: أ ب جـ د مستطيل يتقاطع قطراه في ن.
المطلوب: إثبات أن Δ ن د أ ≅ Δ ن ب جـ
البرهان:
في المثلثين ن د أ، ن ب جـ:

ن ب = ن د	قطرا المستطيل ينصف كلّ منهما الآخر
ن جـ = ن أ	قطرا المستطيل ينصف كلّ منهما الآخر
ق∠(جـ ن̂ ب) = ق∠(أ ن̂ د)	زاويتان متقابلتان بالرأس
نستنتج: Δ ن ب جـ ≅ Δ ن د أ	بحالة (ض.ز.ض)

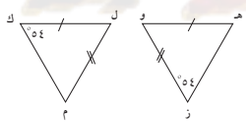
حاولْ أن تحلّ

❸ أ ب جـ د متوازي أضلاع، ن نقطة تلاقي قطريه.
أثبت أن: Δ أ ن ب ≅ Δ جـ ن د.

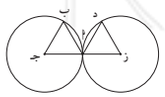
تحقّق من فهمك

❶ هل يتطابق مثلثان قائما الزاوية في حالة (ض.ز.ض)؟
❷ كم زوجًا من المثلثات المتطابقة يمكن الحصول عليها باستخدام رؤوس متوازي أضلاع ونقطة تلاقي قطريه؟

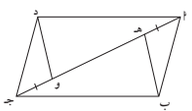
(٤) لنأخذ: $\overline{ك ل} \cong \overline{هـ و}$ ، $\overline{ل م} \cong \overline{و ز}$
ق∠(ك̂) = ق∠(ز̂) = ٥٤°.
هل تستطيع أن تبرهن
أن المثلثين ك ل م ، وزهـ متطابقان؟ فسر إجابتك.



(٥) في الرسم المقابل، ز، جـ مركزان لدائرتان قطراهما متساويان في الطول
ق∠(ز̂) = ق∠(جـ̂).
برهن أن المثلثين أ ب جـ ، أ د ز متطابقان.



(٦) في الشكل المقابل أ ب جـ د متوازي أضلاع، $\overline{أ جـ}$ قطر فيه،
أ هـ = جـ و اثبت أن: ب هـ = د و



إجابات «المرشد لحل المسائل»

❶ في كل مثلث ضلع واحد طوله ٢٠م، ضلع آخر طوله ٥٠م، زاوية واحدة قياسها ٧٠°، وأخرى زاوية قائمة.

❷ جميع الزوايا متطابقة حيث يبقى في كل مثلث زاوية واحدة قياسها ٢٠°.

❸ في المثلثين ضلعان متطابقان أطوالهما ٢٠م، ٥٠م، وزاوية محددة بينهما قياسها ٧٠°.

❹ الزوايا المتطابقة هي تقابل الأضلاع المتطابقة.

❺ في المثلثين ضلعان متطابقان وزاوية متطابقة محددة بهما، لذا يكون المثلثان متطابقين (ض . ز . ض). ومن تطابق المثلثين نحصل على تطابق الأضلاع وبالتالي المسافة المجتازة هي نفسها.

❻ يمكن استخدام المسطرة لقياس هذه المسافة أو نظرية فيتاغورث حيث إن المثلثين قائما الزاوية.

❼ المثلثان متطابقان (ض . ز . ض) حيث يوجد ضلعان متطابقان ٣ سم في كل مثلث، ٥سم في كل مثلث، وزاوية محددة بينهما ٥٠°. لذا يكون الضلع الثالث في كل مثلث متطابقًا مع الآخر.

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

❶ لدينا: ن أ = ن ب = س في الدائرة

ن جـ = ن د = س في الدائرة

ق(أ ن جـ) = ق(ب ن د) تقابل بالرأس

لذا يكون المثلثان متطابقين (ض . ز . ض).

❷ (أ) في المثلثين: س ل ي، ي م س لدينا س ل ≅ م ي (معطيات)

س ي ضلع مشترك في المثلثين

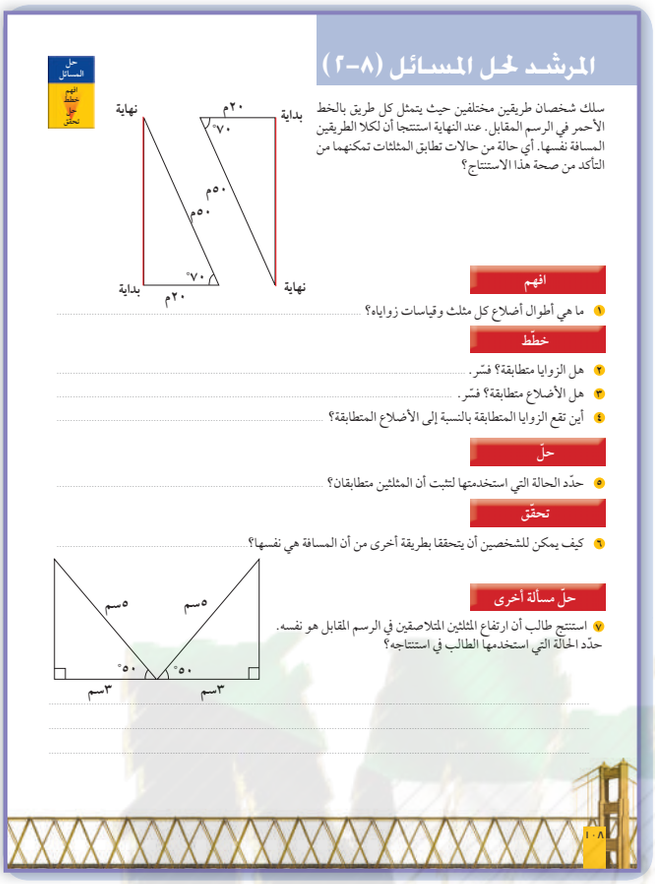
ق(م ي س) = ق(ي س ل) = ٩٠° (معطى)

لذا يتطابق المثلثان (ض . ز . ض)

(ب) ق(م) = ق(ل)

❸ بما أن: أ ب = أ جـ ، أ م = أ ن والزاوية (ب أ جـ) مشتركة

لذا يكون المثلثان أ م ب ، أ ن جـ متطابقين استنادًا إلى الحالة (ز . ض . ز).



المرشد لحل المسائل (٨-٢)

حل المسائل: افهم، خطّط، حلّ، تحقّق

سلك شخصان طريقين مختلفين حيث يتمثل كل طريق بالخط الأحمر في الرسم المقابل. عند النهاية استنتجا أن لكلا الطريقين المسافة نفسها. أي حالة من حالات تطابق المثلثات تمكنهما من التأكد من صحة هذا الاستنتاج؟

بداية ٢٠م ٧٠° نهاية
٥٠م ٥٠م
نهاية ٧٠° بداية ٢٠م

افهم

١ ما هي أطوال أضلاع كل مثلث وقياسات زواياه؟

خطّط

٢ هل الزوايا متطابقة؟ فسّر.

٣ هل الأضلاع متطابقة؟ فسّر.

٤ أين تقع الزوايا المتطابقة بالنسبة إلى الأضلاع المتطابقة؟

حلّ

٥ حدّد الحالة التي استخدمتها لتثبت أن المثلثين متطابقان؟

تحقّق

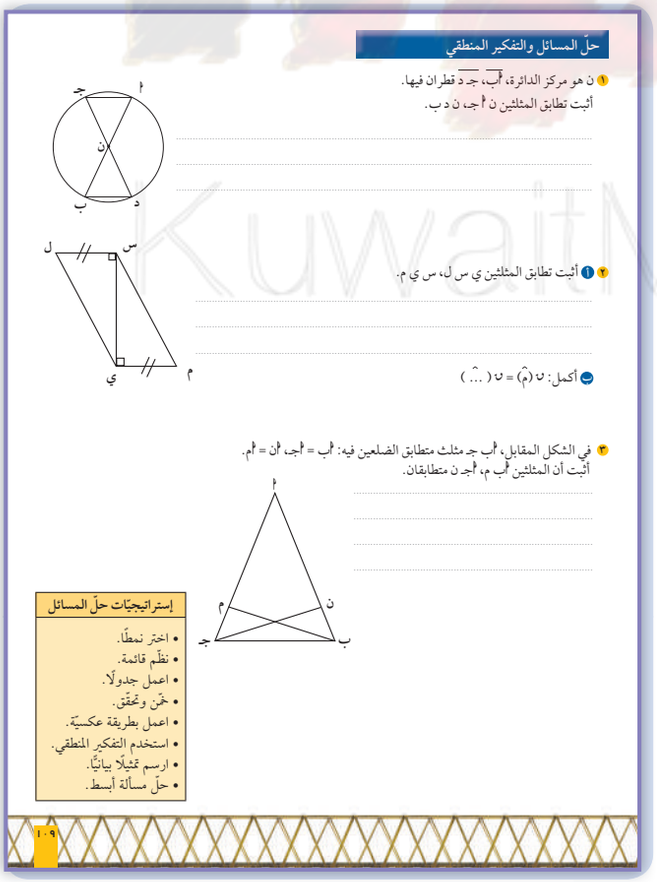
٦ كيف يمكن للشخصين أن يتحققا بطريقة أخرى من أن المسافة هي نفسها؟

حلّ مسألة أخرى

٧ استنتج طالب أن ارتفاع المثلثين المتلاصقين في الرسم المقابل هو نفسه. حدّد الحالة التي استخدمها الطالب في استنتاجه؟

٥سم ٥سم ٥٠° ٥٠° ٣سم ٣سم

١٠٨



حلّ المسائل والتفكير المنطقي

١ ن هو مركز الدائرة، أب، جـ د قطران فيها.
أثبت تطابق المثلثين ن أ جـ، ن د ب.

أ جـ ن ب د

٢ أثبت تطابق المثلثين ي س ل، س ي م.

س ل ي م

أكمل: ق(م) = ق(...)

٣ في الشكل المقابل، أب جـ مثلث متطابق الضلعين فيه: أب = أجـ، أن = أم.
أثبت أن المثلثين أب م، أجـ ن متطابقان.

أ م ن ب جـ

إستراتيجيّات حلّ المسائل

- اختر نمطًا.
- نظّم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمّن وتحقّق.
- اعمل بطريقة عكسيّة.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًا.
- حلّ مسألة أبسط.

١٠٩

KuwaitMath.com

٣-٨

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يطابق مثلثين بتطابق زاويتين والضلع الواصل بين رأسيهما.

الأدوات المستخدمة

- مسطرة، ورق، مقص، منقلة.

مراجعة

ارسم بواسطة المسطرة قطعة مستقيمة طولها ١٠ سم ولتكن $\overline{أب}$.

ارسم بواسطة المنقلة من النقطة أ زاوية قياسها ٤٠° وأحد أضلاعها $\overleftarrow{أب}$، ثم زاوية من النقطة ب قياسها ٧٠° وأحد أضلاعها $\overleftarrow{بأ}$ على أن تكون الزاويتان من جهة واحدة بالنسبة إلى المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$.

تحقق من عمل الطلاب.

١ - التمهيد

استكشف

الغاية

يتعرف الطلاب من خلال هذا الدرس على تطابق مثلثين في حال تطابقت زاويتان مع تطابق الضلع الواصل بين رأسيهما.

التقييم المستمر

تابع مع الطلاب كيفية استخدامهم لتطابق المثلثين. ناقش معهم فكرة قياس الزاوية الثالثة، وهل يمكن استخدامها مع زاوية ثانية وضلع واصل بين رأسيهما؟

وهل يمكن أن يتطابق المثلثان إذا كان لدينا زاويتان متطابقتان ولكن دون وجود ما يؤكد تطابق الضلع الواصل بين رأسيهما؟

٣-٨

تطابق مثلثين بزاويتين وضلع واصل بين رأسيهما
Congruent Triangles with ASA

صلة الدرس سبق أن تعرّفت تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع وتطابق مثلثين بضلعين والزاوية المحددة بهما، والآن سوف تتعلم تطابق مثلثين بزاويتين وضلع واصل بين رأسيهما.

سوف تتعلّم
• تطابق مثلثين بتطابق زاويتين وضلع واصل بين رأسيهما.

من الاستخدامات
• يستخدم البلاطون المثلثات المتطابقة في تنفيذ الفسيفساء.

تذكر
مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي ١٨٠°.

استكشف | تطابق مثلثين بتطابق زاويتين والضلع الواصل بين رأسيهما

الأدوات المستخدمة: مسطرة، ورق، مقص، منقلة

١ يرسم كل طالب مثلثًا، مستخدمًا البيانات التالية: طول أحد الأضلاع ٤ سم، وقياس زاويتين من زواياه ٦٠°، ٤٥°.

٢ يقص كل طالب المثلث الذي رسمه.

٣ يحاول الطلاب مطابقة المثلثات التي حصلوا عليها. هل تتطابق كل المثلثات؟

تعلّم | تطابق مثلثين بتطابق زاويتين والضلع الواصل بين رأسيهما

يتطابق المثلثان إذا تطابقت زاويتان والضلع الواصل بين رأسيهما في أحد المثلثين مع الزاويتين والضلع المناظر لها في المثلث الآخر. ونعبر عن ذلك بحالة (زاوية، ضلع، زاوية) (ز.ض.ز).

أمثلة

١ في الرسم المقابل، ك ت ز ي متوازي الأضلاع.
أثبت أن المثلثين ت ك ز، ي ز ك متطابقان.

المعطيات: ك ت ز ي متوازي أضلاع.

المطلوب: إثبات أن Δت ك ز ≅ Δي ز ك.

البرهان: المثلثان ت ك ز، ي ز ك فيهما:

ق (ت ك̂ ز) = ق (ي ز̂ ك) بالتبادل والتوازي

ق (ت ز̂ ك) = ق (ي ك̂ ز) بالتبادل والتوازي

ك ز ضلع مشترك

∴ المثلثان ت ك ز، ي ز ك متطابقان بحالة (ز.ض.ز).

حاول أن تحلّ

١ في الشكل كل من المثلثين أ ب جـ، ع ل م متطابق الضلعين.
ق (ل̂) = ق (ب̂)
م ل = جـ ب
أثبت أن ق (أ̂) = ق (ع̂).

KuwaitMathcom

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

اطلب إليهم الربط بين تطابق المثلثين في الحالات الثلاث (ض . ض . ض)، (ض . ز . ض)، (ز . ض . ز). اسألهم هل كل حالة تحقق الحالتين الأخريين.

إجابات «استكشف»

❶ – ❸ تحقق من عمل الطلاب.

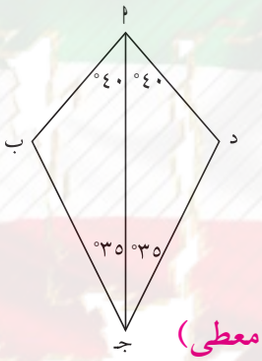
٢ – التعليم

تعلم

تأكد من فهم الطلاب لشروط تطابق المثلثين في هذه الحالة. ركّز على وجود ضلع واحد متطابق ويكون واصلاً بين زاويتين متساويتي القياس.

أمثلة بديلة

❶ في الرسم، أثبت أن: $\overline{أد} \cong \overline{أب}$ ، $\overline{دجـ} \cong \overline{بجـ}$.



نأخذ المثلثين أ د جـ ، أ ب جـ حيث

$\overline{أجـ}$ (مشترك في المثلثين)

ق(د أ̂ جـ) = ق(ب أ̂ جـ) = ٤٠° (معطى)

ق(ب جـ̂ أ) = ق(د جـ̂ أ) = ٣٥° (معطى)

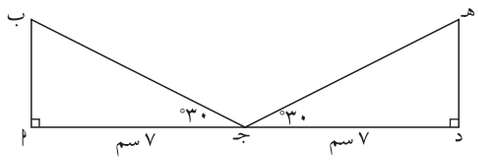
واعتمادًا على (ز . ض . ز) يكون المثلثان متطابقين ومنه

نستنتج أن: $\overline{أد} \cong \overline{أب}$ ، $\overline{دجـ} \cong \overline{بجـ}$.

❷ في الرسم أثبت أن: $\overline{دهـ} \cong \overline{أب}$

$\overline{جـهـ} \cong \overline{جـب}$

.



نأخذ المثلثين أ ب جـ ، د هـ جـ حيث:

أجـ = د جـ = ٧سم (معطيات)

ق(د̂) = ق(أ̂) = ٩٠° (معطى)

ق(د جـ̂ هـ) = ق(أ جـ̂ ب) = ٣٠° (معطى)

واعتمادًا على (ز . ض . ز) يكون المثلثان متطابقين ومنه

نستنتج أن: $\overline{دهـ} \cong \overline{أب}$ ، $\overline{جـهـ} \cong \overline{جـب}$

❷ في الشكل إذا كان: ق(ر̂) = ق(س̂)، ق(أ̂) = ق(ؤ̂)

أثبت تطابق Δ ر د ع، Δ س د ع

المعطيات: ق(ر̂) = ق(س̂)، ق(أ̂) = ق(ؤ̂).

المطلوب: إثبات أن Δ ر د ع ≅ Δ س د ع.

البرهان: في الشكل المثلثان ر د ع، س د ع فيهما:

$\overline{دع}$ ضلع مشترك (١)

ق(أ̂) = ق(ؤ̂) معطى (٢)

ق(ر̂) = ق(س̂) معطى

ق(أ̂) + ق(ر̂) = ق(ؤ̂) + ق(س̂)

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي ١٨٠°

يكون ق(ؤ̂) = ١٨٠° – [ق(أ̂) + ق(ر̂)]

ق(٤̂) = ١٨٠° – [ق(ؤ̂) + ق(س̂)]

وعليه تكون ق(ؤ̂) = ق(٤̂) (٣)

من (١)، (٢)، (٣) المثلثان ر د ع ، س د ع متطابقان بحالة (ز.ض.ز).

حاول أن تحلّ

❷ مستخدمًا الشكل المقابل، أثبت تطابق المثلثين جـ ن ل، ب م ك.

❸ التوازن شرط أساسي لارتفاع الطائرة الورقية. صنع فيصل طائرته وأراد إعطاءها شكلًا مختلفًا فاقتطع قسمًا منها لتصبح كما هو مبيّن في الشكل. إذا كان المثلثان أ ب د، جـ ب د كل منهما متطابق الضلعين في أ، جـ على الترتيب، م منتصف $\overline{بد}$.

فأثبت تطابق المثلثين ب م هـ ، د م و للتحقق من توازن الطائرة.

المعطيات: م منتصف $\overline{بد}$.

Δ جـ ب د متطابق الضلعين في جـ.

ق(هَ̂) = ق(وَ̂) = ٩٠°

المطلوب: إثبات أن Δ ب م هـ ≅ Δ د م و

البرهان: في الشكل المثلثان ب م هـ، د م و فيهما:

$\overline{بم} = \overline{دم}$ م منتصف $\overline{بد}$ (١)

ق(هَ̂) = ق(وَ̂) = ٩٠° فرضًا (٢)

ق(هـ ب̂ م) = ق(و د̂ م) خاصية المثلث متطابق الضلعين

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي ١٨٠°، ق(هَ̂) + ق(هـ ب̂ م) = ق(وَ̂) + ق(و د̂ م)

يكون ق(ب م̂ هـ) = ١٨٠° – [ق(هَ̂) + ق(هـ ب̂ م)]

ق(د م̂ و) = ١٨٠° – [ق(وَ̂) + ق(و د̂ م)]

وعليه يكون ق(ب م̂ هـ) = ق(د م̂ و) (٣)

من (١)، (٢)، (٣) المثلثان ب م هـ، د م و متطابقان بحالة (ز.ض.ز)، إذًا فالطائرة متوازنة.

تحقّق من فهمك

❶ إذا تطابقت ثلاث زوايا في أحد المثلثين مع نظائرها في المثلث الآخر، فهل يتطابق المثلثان؟ ارسم مثلثين لدعم إجابتك.

KuwaitMath.com

إجابات «حاول أن تحل»

❶ بما أن المثلثين متطابقا الضلعين في ⟨أ⟩، ⟨ع⟩ لذا تكون الزوايا في القاعدة متطابقة بما أن ق(∠ب) = ق(∠ل) فإن ق(∠جـ) = ق(∠م) .

ثم $\overline{\text{م ل}} \cong \overline{\text{جـ ب}}$ (معطيات) وباستخدام (ز . ض . ز) يكون المثلثان متطابقين

❷ ⟨أ⟩ ب جـ مثلث متطابق الضلعين لذا: ق(∠ب) = ق(∠جـ) في

المثلثين: ل جـ ن، ك ب م:

جـ ن = ب م (معطيات)

ق(∠جـ) = ق(∠ب) (نتيجة)

ق(∠جـ ن ل) = ق(∠ب م ك) (متتامتان مع زاويتان لهما القياس نفسه)

وبالتالي يكون المثلثان متطابقين استنادًا إلى الحالة (ز. ض. ز)

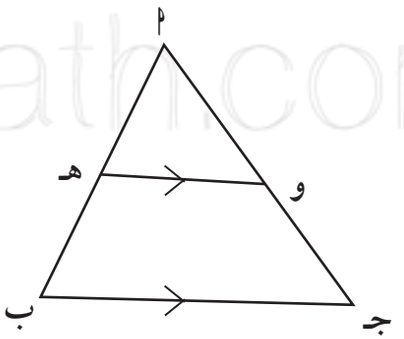
٣- التدريب والتقييم

تحقق من فهمك

تأكد من فهم الطلاب لتطابق المثلثين باستخدام تطابق زاويتين وتطابق الضلع الواصل بين رأسيهما.

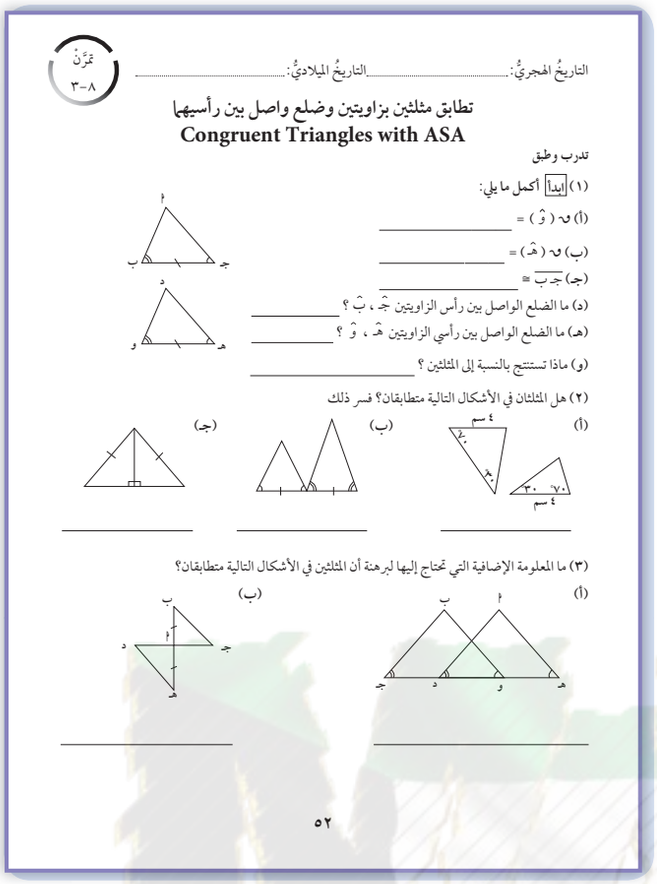
إجابة «تحقق من فهمك»

❶ ⟨أ⟩ ب جـ، ⟨أ⟩ هـ و مثلثان لهما زوايا متطابقة ولكنهما غير متطابقين.



تقييم بديل

وزع الطلاب في مجموعات من اثنين. اطلب إلى أحدهما أن يقطع بالمقص مثلثين يكون لهما ضلع متطابق وزاويتان على الضلع المشترك لهما القياس نفسه، ثم يطلب إلى زميله إثبات تطابق المثلثين وبعد ذلك يتبادلان الأدوار.



التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

تمرّن ٨-٣

تطابق مثلثين بزاويتين وضلع واصل بين رأسيهما
Congruent Triangles with ASA

تدرب وطبق

(١) ابدأ أكمل ما يلي:

(أ) ق (∠ و) = _____

(ب) ق (∠ هـ) = _____

(جـ) $\overline{\text{جـ ب}} \cong$ _____

(د) ما الضلع الواصل بين رأس الزاويتين جـ ، ب ؟ _____

(هـ) ما الضلع الواصل بين رأسي الزاويتين هـ ، و ؟ _____

(و) ماذا تستنتج بالنسبة إلى المثلثين ؟ _____

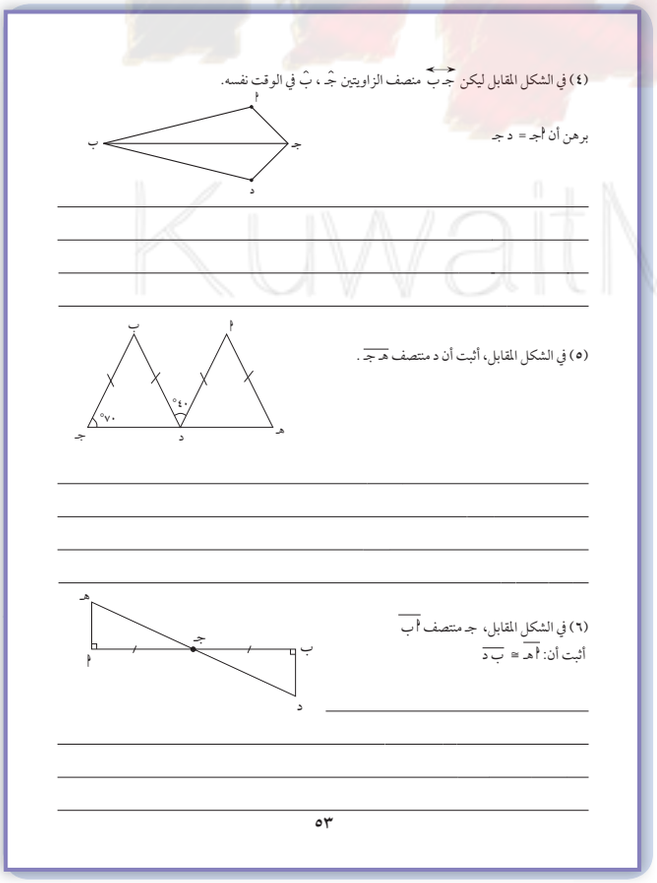
(٢) هل المثلثان في الأشكال التالية متطابقان؟ فسر ذلك

(أ) (ب) (جـ)

(٣) ما المعلومة الإضافية التي تحتاج إليها لبرهنة أن المثلثين في الأشكال التالية متطابقان؟

(أ) (ب)

٥٢



(٤) في الشكل المقابل ليكن $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ منصف الزاويتين جـ ، ب في الوقت نفسه.

برهن أن ⟨أ⟩جـ = ⟨د⟩جـ

(٥) في الشكل المقابل، أثبت أن د منتصف $\overline{\text{هـ جـ}}$.

(٦) في الشكل المقابل، جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

أثبت أن: $\overline{\text{أ هـ}} \cong \overline{\text{ب د}}$

٥٣

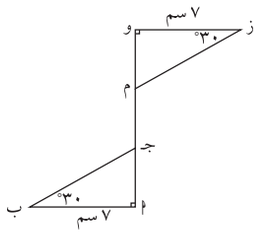
KuwaitMath.com

اختبار سريع

أثبت أن:

$\overline{\text{و م}} \cong \overline{\text{أ جـ}}$

$\overline{\text{م ز}} \cong \overline{\text{جـ ب}}$



نأخذ المثلثين أ ب جـ ، و ز م باستخدام

(ز . ض . ز)، نجد أنهما متطابقان، وبالتالي $\overline{\text{و م}} \cong \overline{\text{أ جـ}}$ ،

$\overline{\text{م ز}} \cong \overline{\text{ب جـ}}$.

إجابات «المرشد لحل المسائل»

❶ ق(∠أ بْ جـ) = ق(∠أ جـْ ب).

❷ ق(∠د أْ ب) = ق(∠هـ أْ جـ).

ق(∠أ بْ د) = ق(∠أ جـْ هـ).

❸ قياس الزاوية الخارجة في المثلث يساوي مجموع قياس الزاويتين الداخليتين غير المتجاورتين معها.

❹ ق(∠دْ) = ق(∠هـْ).

❺ ق(∠أ بْ د) = ق(∠أ جـْب) + ق(∠ب أْ جـ)

ق(∠أ جـْ هـ) = ق(∠أ بْ جـ) + ق(∠ب أْ جـ)

وبالتالي ق(∠أ بْ د) = ق(∠أ جـْ هـ)

❻ بما أن مجموع قياس الزوايا في المثلث هو ١٨٠° لذا يبقى ق(∠ب أْ د) = ق(∠جـ أْ هـ).

❼ نستخدم الحالة (ز . ض . ز) ونثبت أن المثلثين متطابقان.

❽ في المثلث أ د هـ الزاويتان في القاعدة متساويتان في القياس، وبالتالي فهو متطابق الضلعين ومنه نستنتج أن:

$\overline{\text{أ د}} \cong \overline{\text{أ هـ}}$.

❾ ض . ز . ض.

❿ يتطابق هذان المثلثان باستخدام الحالة (ض . ز . ض) حيث إن:

$\overline{\text{أ د}} \cong \overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}} \cong \overline{\text{أ جـ}}$

ثم ق(∠د أْ جـ) = ق(∠هـ أْ ب).

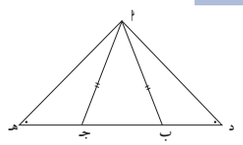
المرشد لحل المسائل (٨-٣)

حل المسائل
افهم
خطّط
حلّ
تحقّق

في الشكل المقابل:

أ ب = أ جـ ، ق(∠أ دْ ب) = ق(∠أ هـْ جـ).

أثبت أن المثلثين أ ب د ، أ جـ هـ متطابقان.



افهم

❶ المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين إذًا ق(.....) = ق(.....).

❷ ما عليك تبيانه لإثبات تطابق المثلثين؟ .....

خطّط

❸ ماذا تعرف عن الزوايا الخارجة في المثلث أ ب جـ؟ أثبت ذلك. .....

❹ هل هناك معطيات أخرى تساعد في الحل؟ .....

حلّ

❺ أثبت أن ق(∠أ بْ د) = ق(∠أ جـْ هـ). .....

❻ استنتج أن ق(∠ب أْ د) = ق(∠جـ أْ هـ). .....

❼ ما الحالة التي تسمح لك بتأكيد تطابق المثلثين أ ب د، أ جـ هـ؟ (ض.ض.ض)، (ض.ز.ض)، (ز.ض.ز)؟ .....

تحقّق

❽ أثبت أن أ د = أ هـ. .....

❾ بما أن ق(∠ب أْ د) = ق(∠جـ أْ هـ) (سؤال رقم ٦) إذًا الحالة ..... تسمح بتأكيد تطابق المثلثين أ ب د، أ جـ هـ.

حلّ مسألة أخرى

❿ أثبت تطابق المثلثين أ جـ د، أ ب هـ في الرسم أعلاه. .....

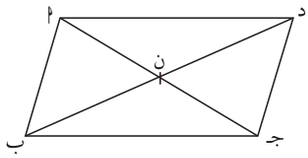
KuwaitMath.com

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

❶ لأن طول ضلع زاوية قائمة في المثلث د و هـ يساوي طول الوتر في المثلث أ ب جـ.

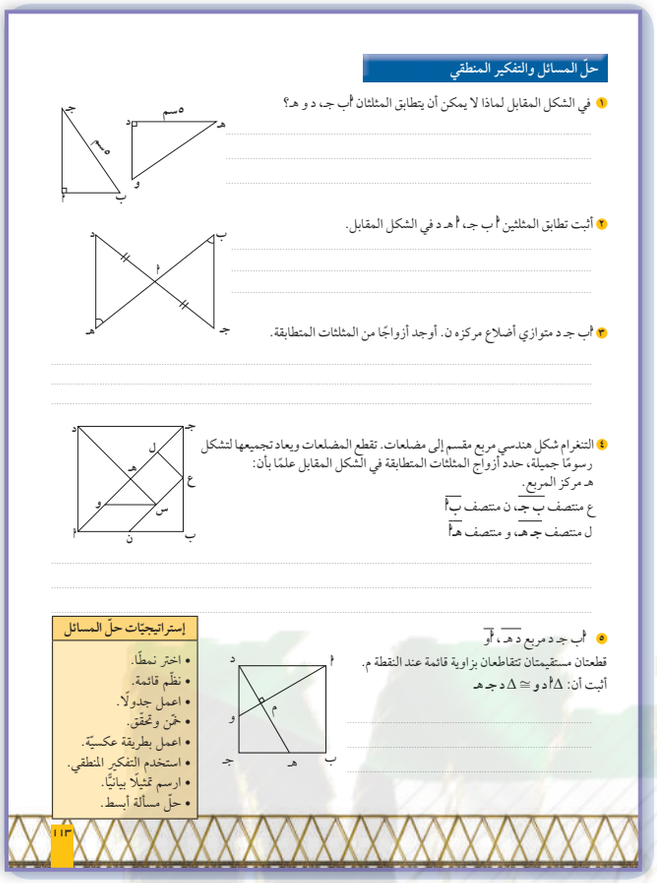
❷ بما أن ق(ب̂) = ق(هـ̂)، ثم ق(ب أ̂ جـ) = ق(هـ أ̂ د)
يبقى ق(أ جـ̂ ب) = ق(أ د̂ هـ)، وبالتالي نستخدم (ز . ض . ز) ويكون المثلثان متطابقين.

❸ Δ د ن أ ≅ Δ ب ن جـ
Δ د ن جـ ≅ Δ ب ن أ.



❹ Δ هـ س و ≅ Δ ل ع جـ
Δ ب أ جـ ≅ Δ د جـ أ
Δ جـ د هـ ≅ Δ أ د هـ.

❺ في المثلثين: أ د و، د جـ هـ
أ د = د جـ (ضلعان في المربع)
ق(أ د̂ و) = ق(د جـ̂ هـ) = ٩٠°
ق(د أ̂ و) = ق(جـ د̂ هـ) (زاويتان متتامتان مع أ د̂ هـ)
∴ المثلثان متطابقان استنادًا إلى الحالة ز . ض . ز.



حلّ المسائل والتفكير المنطقي

❶ في الشكل المقابل لماذا لا يمكن أن يتطابق المثلثان أ ب جـ، د و هـ؟

❷ أثبت تطابق المثلثين أ ب جـ، أ هـ د في الشكل المقابل.

❸ أ ب جـ د متوازي أضلاع مركزه ن. أوجد أزواجًا من المثلثات المتطابقة.

❹ التغرام شكل هندسي مربع مقسم إلى مضلعات. تقطع المضلعات ويعاد تجميعها لتشكل رسومًا جميلة، حدد أزواج المثلثات المتطابقة في الشكل المقابل علمًا بأن:
هـ مركز المربع.
ع منتصف ب جـ، ن منتصف ب أ
ل منتصف جـ هـ، و منتصف هـ أ

❺ أ ب جـ د مربع د هـ ⊥ أ و
قطعتان مستقيمتان تتقاطعان بزاوية قائمة عند النقطة م.
أثبت أن: Δ أ د و ≅ Δ د جـ هـ

إستراتيجيّات حلّ المسائل
- اختر نمطًا.
- نظّم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمّن وتحقّق.
- اعمل بطريقة عكسيّة.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حلّ مسألة أبسط.

١١٣

KuwaitMath.com

٤-٨

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يطابق مثلثين قائمي الزاوية.

المصطلحات الأساسية

- زاوية قائمة، مثلث قائم الزاوية.

الأدوات المستخدمة

- ورق، مسطرة، فرجار، مقص، منقلة.

مراجعة

❶ ما شروط تطابق قطعتين مستقيمتين؟

عندما يكون لهما الطول نفسه.

❷ ما شروط تطابق زاويتين؟

عندما يكون لهما القياس نفسه.

❸ ما شروط تطابق المثلثين؟

إذا تحققت واحدة من الحالات التالية:

(ض . ض . ض)، (ض . ز . ض)، (ز . ض . ز).

١ – التمهيد

استكشف

الغاية

يفهم الطلاب تطابق مثلثين قائمي الزاوية في حالة تطابق الوترين وتطابق واحد من الضلعين للزاوية القائمة.

التقييم المستمر

راقب الطلاب وهم يحاولون استخدام الفرجار لرسم أقواس من دوائر بشروط معينة. ساعدهم على رسم زاوية قائمة باستخدام المسطرة أو باستخدام الفرجار.

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

أعطِ الطلاب مثلثين قائمي الزاوية بأوتار متطابقة وزاوية حادة متساوية القياس في المثلثين.

اسألهم: أي حالة تطابق سبق أن تعلمتها يمكن أن تحقق تطابق المثلثين؟ (ز . ض . ز)

٤-٨

تطابق مثلثين قائمي الزاوية
Congruency of Right Triangles

صلة الدرس: سبق أن تعرّفت حالات تطابق المثلثين، والآن سوف تتعرف حالة تطابق مثلثين قائمي الزاوية.

سوف تتعلّم
- تطابق مثلثين قائمي الزاوية.

من الاستخدامات
- يستخدم الكشافة تطابق المثلثات القائمة الزاوية عند نصب خيمهم.

المصطلحات الأساسية
- زاوية قائمة Right Angle
- مثلث قائم الزاوية Right Triangle

استكشف: تطابق مثلثين قائمي الزاوية

الأدوات المستخدمة: ورق، مسطرة، فرجار، مقص، منقلة.

❶ يرسم كل طالب زاوية قائمة.
❷ يعيّن الطالب بواسطة الفرجار النقطة جـ التي تنتمي إلى أحد الضلعين بحيث يكون طول $\overline{أجـ}$ يساوي ٥ سم.
❸ يرسم قوسًا يقطع الضلع الآخر للزاوية في ب، بواسطة الفرجار أيضًا انطلاقًا من النقطة جـ وبفتحة قياسها ٧ سم.
❹ يصل بين النقطتين ب ، جـ. ثم يقص المثلث الناتج.
❺ هل تتطابق المثلثات التي تمّ رسمها؟

تعلّم: تطابق مثلثين قائمي الزاوية

تتطابق المثلثات قائمة الزاوية التي رسمها الطلاب، لكن هذا التطابق لا يتماشى مع الحالات الثلاث لتطابق المثلثات التي تم التعرف إليها سابقًا.

يتطابق مثلثان قائما الزاوية إذا تطابق وتر وضلع في أحدهما مع وتر وضلع في المثلث الثاني (ك. و. ض).

أمثلة

❶ أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين ($\overline{أجـ} \cong \overline{أب}$)، $\overline{أهـ} \perp \overline{جـب}$.

أثبت تطابق المثلثين أ هـ جـ، أ هـ ب.

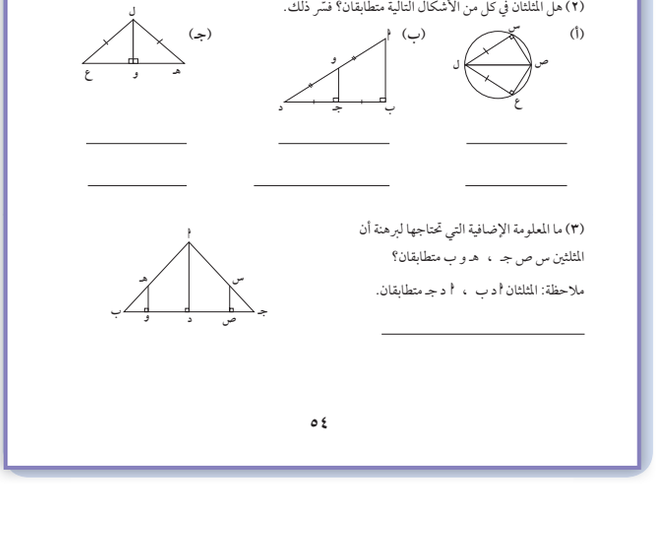
المعطيات: $\overline{أجـ} \cong \overline{أب}$؛ $\overline{أهـ} \perp \overline{جـب}$

المطلوب: إثبات تطابق المثلثين أهـ جـ، أهـ ب.

البرهان: المثلثان أهـ جـ، أهـ ب فيهما:

$\overline{أجـ} \cong \overline{أب}$ معطى

١١٤



تمرّن ٨-٤

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

تطابق مثلثين قائمي الزاوية
Congruency of Right Triangles

تدرب وطبق

(١) إبدأ أكمل ما يلي:

(أ) $\overline{ب جـ} \cong$ _____

(ب) $\overline{أجـ} \cong$ _____

(جـ) $\angle أ \cong$ _____ وهما زاويتان _____

(د) ماذا تستنتج بالنسبة إلى المثلثين؟

_____

(٢) هل المثلثان في كل من الأشكال التالية متطابقان؟ فسّر ذلك.

(أ) (ب) (جـ)

_____ _____ _____

_____ _____ _____

(٣) ما المعلومة الإضافية التي تحتاجها لبرهنة أن المثلثين س ص جـ ، هـ و ب متطابقان؟

ملاحظة: المثلثان أ د ب ، أ د جـ متطابقان.

_____

٥٤

KuwaitMath.com

إجابات «استكشف»

❶ – ❺ تحقق من عمل الطلاب.

ناقشهم في كيفية رسم الزاوية القائمة.

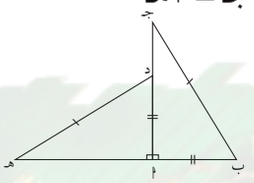
٢ – التعليم

تعلم

يعتبر تطابق وتر وضلع في مثلثين قائمي الزاوية حالة مهمة لتطابق المثلثين ومميزة عن بقية الحالات.

أمثلة بديلة

❶ في الرسم إلى اليسار، أثبت أن: $\overline{أجـ} \cong \overline{أهـ}$



نأخذ المثلثين أ ب جـ ، أ د هـ

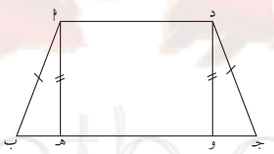
لدينا: $\overline{بجـ} \cong \overline{دهـ}$ (معطيات)

$\overline{أب} \cong \overline{أد}$ (معطيات)

ق(∠ ب أ جـ) = ق(∠ د أ هـ) = ٩٠°

وبالتالي المثلثان متطابقان نتيجة لتطابق وتر وضلع زاوية قائمة ومنه نستنتج: $\overline{أجـ} \cong \overline{أهـ}$

❷ في الرسم الرباعي أ ب جـ د هو شبه منحرف متطابق الضلعين، أثبت أن $\overline{هـب} \cong \overline{جـو}$



المثلثان: أ ب هـ ، د جـ و قائما الزاوية فيهما تطابق وتر وتطابق ضلع، إذًا هما متطابقان وبالتالي نحصل على:

$\overline{هـب} \cong \overline{جـو}$.

إجابات «حاول أن تحل»

❶ لدينا في المثلثين: $\overline{مل}$ (وتر مشترك)

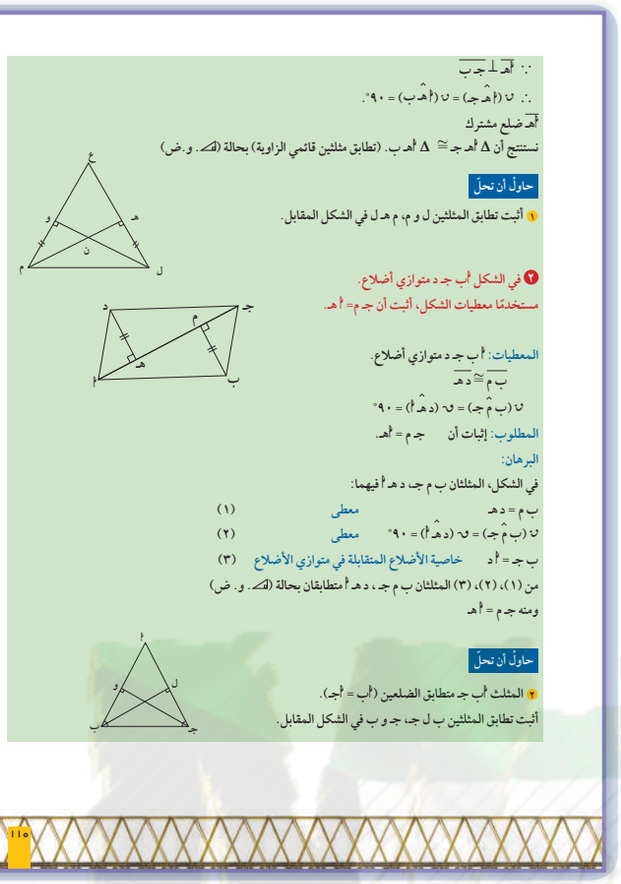
ق(∠ هـ) = ق(∠ و) = ٩٠°

$\overline{لهـ} \cong \overline{وم}$

وبالتالي فالمثلثان متطابقان.

❷ بما أن المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين لذا ق(∠ جـ) = ق(∠ ب) وبما أن ق(∠ ل) = ق(∠ و) = ٩٠°.

و $\overline{بجـ}$ ضلع مشترك وبالتالي يتطابق المثلثان جـ ل ب، ب و جـ نتيجة للحالة (ز . ض . ز).



∵ $\overline{أهـ} \perp \overline{جـب}$

∴ ق(∠ أهـ جـ) = ق(∠ أهـ ب) = ٩٠°.

$\overline{أهـ}$ ضلع مشترك

نستنتج أن Δ أهـ جـ ≅ Δ أهـ ب. (تطابق مثلثين قائمي الزاوية) بحالة (∠ . و . ض)

حاول أن تحل

❶ أثبت تطابق المثلثين ل و م، م هـ ل في الشكل المقابل.

❷ في الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع.

مستخدمًا معطيات الشكل، أثبت أن جـ م = أ هـ.

المعطيات: أ ب جـ د متوازي أضلاع.

$\overline{بم} \cong \overline{دهـ}$

ق(∠ ب م جـ) = ق(∠ د هـ أ) = ٩٠°

المطلوب: إثبات أن جـ م = أ هـ.

البرهان:

في الشكل، المثلثان ب م جـ، د هـ أ فيهما:

ب م = د هـ معطى (١)

ق(∠ ب م جـ) = ق(∠ د هـ أ) = ٩٠° معطى (٢)

ب جـ = أ د خاصية الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع (٣)

من (١)، (٢)، (٣) المثلثان ب م جـ ، د هـ أ متطابقان بحالة (∠ . و . ض)

ومنه جـ م = أ هـ

حاول أن تحل

❸ المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين (أ ب = أ جـ).

أثبت تطابق المثلثين ب ل جـ، جـ و ب في الشكل المقابل.

١١٥

(٤) في الشكل المقابل، أثبت أن $\overleftrightarrow{أجـ}$ ينصف ∠ أ

(٥) مستخدمًا الرسم المقابل، برهن أن $\overline{أب}$ // $\overline{جـد}$.

(٦) الشكل المقابل أ ب جـ د مستطيل، ب ن = د ط

أثبت أن:

أ ن = جـ ط

٥٥

KuwaitMath.com

❸ نأخذ المثلثين: ب جـ هـ، د أ ك.

ب جـ = أ د (خواص المستطيل).

ق(ب جَ هـ) = ق(د أَ ك) بالتبادل والتوازي

ق(ب هَ جـ) = ق(د كَ أ) = ٩٠°

وفيها ق(جـ بَ هـ) = ق(ك دَ أ) يتطابق المثلثان بحالة (ز . ض . ز) وينتج من التطابق أن ب هـ = د ك.

٣- التدريب والتقييم

تحقق من فهمك

تأكد من فهم الطلاب لحالة تطابق مثلثين قائمي الزاوية.

إجابات «تحقق من فهمك»

❶ نعم، إذا وجدت زاوية قائمة وتوافرت بقية الشروط في أي حالة من الثلاث.

❷ كلا، لا يمكن أن يتطابق مثلثان قائما الزاوية إذا اختلف طولا الوترين، فتطابق الوترين شرط أساسي.

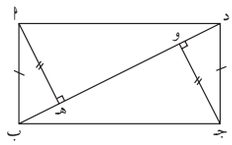
تقييم بديل

وزع الطلاب في مجموعات من اثنين. يرسم أحد الطلاب مثلثين قائمي الزاوية بطول وتر محدد لكل منهما وطول ضلع زاوية قائمة محدد لكل منهما. يطلب إلى زميله إثبات تطابق المثلثين، ثم يتبادلان الأدوار.

اختبار سريع

أ ب جـ د مستطيل. استخدم المعطيات لتثبت أن:

$\overline{ب هـ} \cong \overline{د و}$



نأخذ المثلثين أ ب هـ ، جـ د و قائما الزاوية حيث

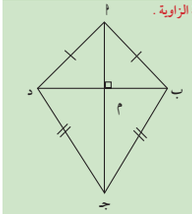
$\overline{د جـ} \cong \overline{أ ب}$ (معطيات)

$\overline{أ هـ} \cong \overline{جـ و}$ (معطيات). وبالتالي هما متطابقان ونستنتج

$\overline{ب هـ} \cong \overline{د و}$

مثال (٣)

في شكل الطائرة الورقية المقابل، أوجد زوجين متطابقين من المثلثات قائمة الزاوية.



المعطيات:

أ ب = أ د

ب جـ = د جـ

$\overline{أجـ} \perp \overline{ب د}$

المطلوب: إيجاد زوجين متطابقين من المثلثات قائمة الزاوية.

البرهان:

في المثلثين أ م ب، أ م د:

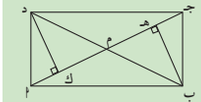
ق (أ م ب) = ق (أ م د) = ٩٠°

أ ب = أ د فرضًا

$\overline{أم}$ ضلع مشترك

∴ المثلثان أ م ب، أ م د قائما الزاوية ومتطابقان.

ونبرهن بالطريقة نفسها أن المثلثين ب م جـ، د م جـ متطابقان.



حاول أن تحلّ

❸ في الشكل المقابل، أ ب جـ د مستطيل م نقطة تقاطع قطريه. أثبت أن ب هـ = د ك.

تحقّق من فهمك

❶ هل يمكن تطبيق حالات تطابق المثلثين إذا كان المثلثان قائمي الزاوية؟

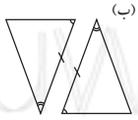
❷ إذا اختلف طولا الوترين في مثلثين قائمي الزاوية، فهل يمكن أن يتطابقا؟

مراجعة الوحدة الثامنة

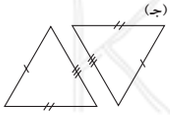
(١) تحوي أزواج من المثلثات معطيات كافية لإثبات التطابق بين المثلثين، اكتب الحالة التي يمكن بها إثبات التطابق.

(أ)

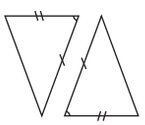
(ب)



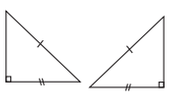
(جـ)



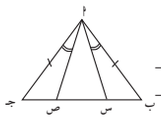
(د)



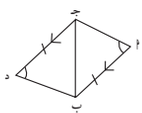
(هـ)



(٢) في الشكل المقابل: أثبت أن ب ص = جـ س



(٣) في الشكل المقابل ق (أ̂) = ق(د̂) أثبت أن أ جـ = ب د



٥٦

KuwaitMath.com

إجابات «المرشد لحل المسائل»

❶ بُعد النقطة أ عن النقطة ب.

❷ كلاهما قائم الزاوية.

❸ د هـ = ٥سم، د ب = ٦٦ ,٨سم، ب هـ = ١٠سم

جـ أ = ١٠سم، ب جـ = ٦٦ ,٨سم، أ ب = ؟

❹ نعم، ب هـ = أ جـ = ١٠سم.

❺ نعم ب د = ب جـ = ٦٦ ,٨سم

❻ نعم، المثلثان متطابقان لأن الوترين متطابقان ويوجد في كل مثلث قائم الزاوية ضلع متطابق مع ضلع في المثلث الآخر.

❼ نستنتج أن: $\overline{أ ب} \cong \overline{د هـ}$.

وبالتالي، تبعد النقطة أ عن النقطة ب مسافة ٥سم.

❽ $(أ ب)^{٢} = (أ جـ)^{٢} - (ب جـ)^{٢}$

$(أ ب)^{٢} = (١٠)^{٢} - (٨,٦٦)^{٢}$

$= ١٠٠ - ٧٤,٩٩٥٦$

$٢٥ \cong$

$أ ب = \sqrt{٢٥} = ٥سم$

❾ نأخذ المثلثين أ د جـ ، أ ب د

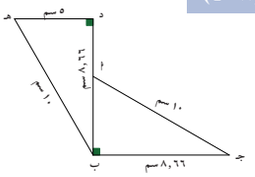
لدينا: أ جـ = أ ب = ٧ سم، $\overline{أ د}$ ضلع مشترك،

$ق(\angle أ د جـ) = ق(\angle أ د ب) = ٩٠^{\circ}$، بالتالي

فالمثلثان متطابقان ومنه نحصل على: جـ د = د ب = ٥سم.

المرشد لحل المسائل (٨-٤)

حل المسائل: افهم، خطط، حل، تحقق



كم تبعد النقطة أ عن النقطة ب؟

أجب عن السؤال أعلاه مستخدمًا الرسم المقابل.

افهم

١ ما المطلوب إليك إيجاده؟

خطّط

٢ ما الخاصية المشتركة بين المثلثين أ ب جـ، هـ د ب؟

٣ ما أطوال أضلاع كل مثلث؟

٤ هل الوتران متطابقان في كلا المثلثين؟ فسّر.

٥ هل للمثلثين ضلعان آخران متطابقان؟ ما هما؟

٦ هل المثلثان أ ب جـ، ب د هـ متطابقان؟ حدد أي حالة استخدمت.

حلّ

٧ ما هو الضلع المتطابق مع $\overline{أ ب}$؟ أوجد طوله.

تحقّق

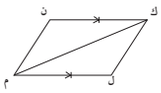
٨ تحقق من طول $\overline{أ ب}$ مستخدمًا نظرية فيثاغورث.

حلّ مسألة أخرى

٩ مستخدمًا معطيات الشكل أدناه، أوجد طول $\overline{جـ د}$.

١١٧

(٤) في كل مما يلي أثبت التطابق بين المثلثين مع ذكر السبب



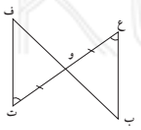
(أ) إذا كان: $\overline{ك ن} \parallel \overline{م ل}$

$\overline{ك ن} \cong \overline{م ل}$

أثبت أن: Δ ن ك م $\cong \Delta$ ل م ك.

(ب) و منتصف $\overline{ع ت}$ ، و $\in \overline{ب ف}$

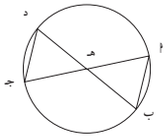
$ق(\angle غ) = ق(\angle ث)$



أثبت أن: (١) Δ ب و ع $\cong \Delta$ ف و ت.

(٢) و منتصف $\overline{ب ف}$.

(٥) في الشكل المقابل أ ، ب ، جـ ، د نقاط على دائرة مركزها هـ.



أثبت أن: (١) أ ب = جـ د.

(٢) $\overline{أ ب} \parallel \overline{جـ د}$.

٥٧

KuwaitMath.com

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

❶ في المثلثين ن أ و ، ر ي م لدينا $\overline{و ن} \cong \overline{م ر}$ (معطيات)

ق(ن و أ) = ق(ر م ي) معطيات

ق(ن أ و) = ق(ر ي م) = ٩٠° ويبقى ق(م ر ي) =

ق(و ن أ) وبالتالي المثلثان Δ ن أ و ≅ Δ ر ي م متطابقين

استنادًا الى الحالة (ز . ض . ز).

❷ Δ س ن د ≅ Δ س ن ع مثلثان قائما الزاوية حيث تطابق

وتر $\overline{س د} \cong \overline{س ع}$ وضلع مشترك ($\overline{س ن}$)

Δ ي ن د ≅ Δ ي ن ع متطابقان للأسباب السابقة الذكر

نفسها.

❸ Δ د جـ ب قائم الزاوية في جـ

Δ هـ أ ب قائم الزاوية في أ

لدينا: $\overline{ب د} \cong \overline{ب هـ}$ (معطى وهما أوتار)

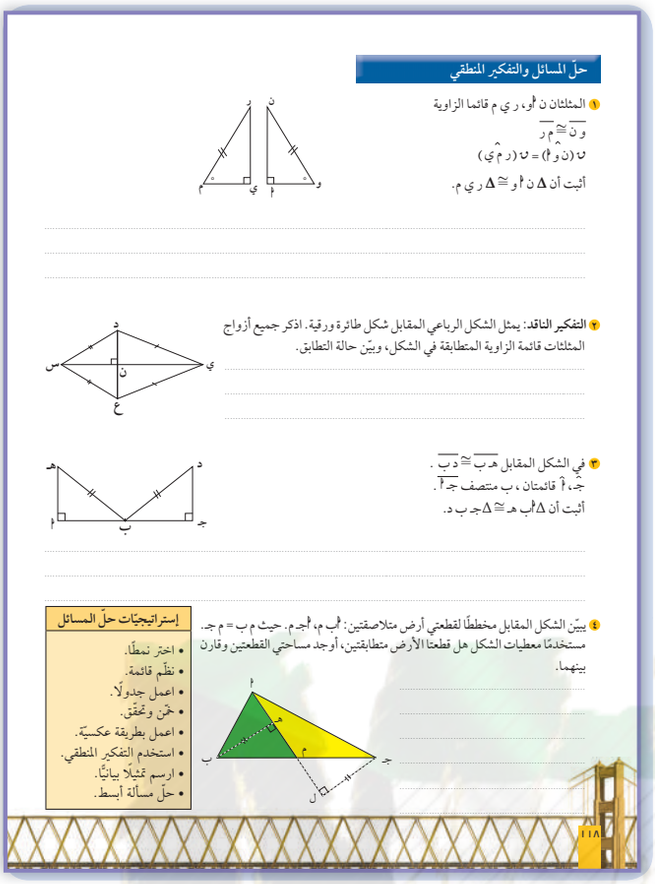
$\overline{ب جـ} \cong \overline{ب أ}$ (معطيات)

وبالتالي فالمثلثان متطابقان.

❹ مساحة المثلث أ ب م = $\frac{\text{أ م} \times \text{ب هـ}}{٢}$

ومساحة المثلث أ جـ م = $\frac{\text{أ م} \times \text{جـ ل}}{٢}$ ومنه يكون للمثلثين

المساحة نفسها ولكن قطعتا الأرض غير متطابقتين.



حلّ المسائل والتفكير المنطقي

❶ المثلثان ن أ و، ر ي م قائما الزاوية

و ن ≅ م ر

ق(ن و أ) = ق(ر م ي)

أثبت أن Δ ن أ و ≅ Δ ر ي م.

❷ التفكير الناقد: يمثل الشكل الرباعي المقابل شكل طائرة ورقية. اذكر جميع أزواج المثلثات قائمة الزاوية المتطابقة في الشكل، وبيّن حالة التطابق.

❸ في الشكل المقابل هـ ب ≅ د ب .

جـ، أ قائمتان ، ب منتصف جـ أ .

أثبت أن Δ أ ب هـ ≅ Δ جـ ب د.

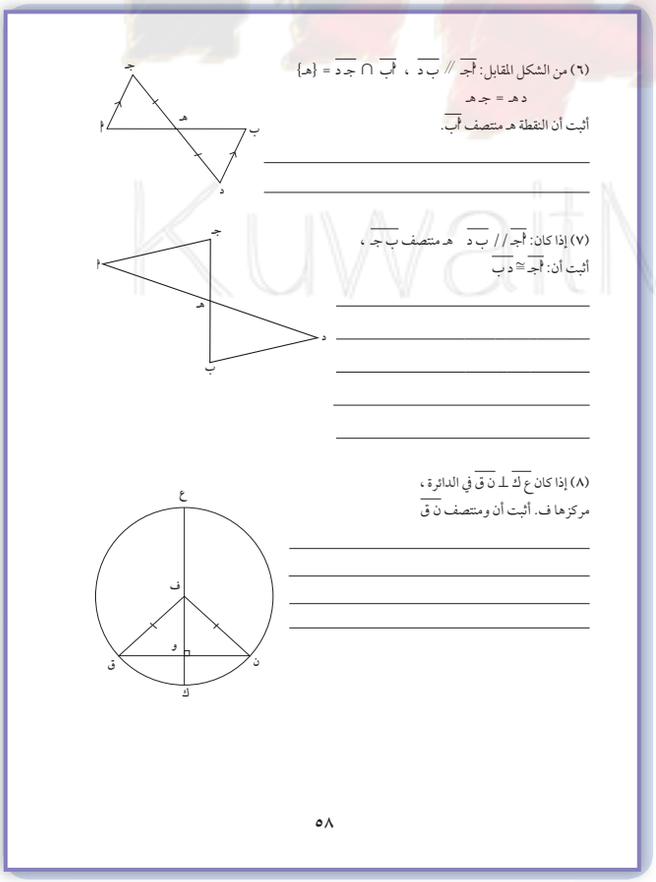
❹ يبيّن الشكل المقابل مخططًا لقطعتي أرض متلاصقتين: أ ب م، أ جـ م. حيث م ب = م جـ.

مستخدمًا معطيات الشكل هل قطعتا الأرض متطابقتين، أوجد مساحتي القطعتين وقارن بينهما.

إستراتيجيّات حلّ المسائل

- اختر نمطًا.
- نظّم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمّن وتحقّق.
- اعمل بطريقة عكسيّة.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلا بيانيًّا.
- حلّ مسألة أبسط.

١١٨



(٦) من الشكل المقابل: أ جـ // ب د ، أ ب ∩ جـ د = {هـ}

د هـ = جـ هـ

أثبت أن النقطة هـ منتصف أ ب.

(٧) إذا كان: أ جـ // ب د هـ منتصف ب جـ ،

أثبت أن: أ جـ ≅ د ب

(٨) إذا كان ع ك ⊥ ن ق في الدائرة ،

مركزها ف. أثبت أن ك منتصف ن ق

٥٨

KuwaitMath.com

إجابات اختبار الوحدة الثامنة

❶ (أ) صحيحة. زاويتا القاعدة متساوية القياس.
(ب) صحيحة. زاويتا القاعدة متساوية القياس.
(جـ) صحيحة. ضلعان متطابقان وزاوية محددة بينهما
(د) صحيحة. ضلعان متطابقان وزاوية محددة بينهما.

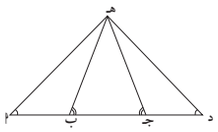
❷ لا يتطابق المثلثان لأنّ أ جـ = ١٠ سم هي الوتر في المثلث أ ب جـ، ولكن د هـ = ١٠ سم هي ضلع زاوية قائمة في المثلث د هـ ك.

❸ المثلثان س جـ أ، س د ب متطابقان، لأنّ $\overline{\text{س د}} \cong \overline{\text{س جـ}}$، $\overline{\text{د ب}} \cong \overline{\text{جـ أ}}$، ثمّ ق(جـ) = ق(د) وذلك استنادًا إلى: (ض . ز . ض)، ومنه نستنتج أن: $\overline{\text{س ب}} \cong \overline{\text{س أ}}$. أي أن س منتصف $\overline{\text{ب أ}}$.

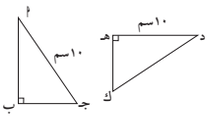
❹ (أ) في المثلث ق د ك لدينا:
ق(∠ د ق ك) + ق(∠ ق د ك) + ق(∠ ق ك د) = ١٨٠° (١)
في المثلث ق ز ح لدينا:
ق(∠ ز ق ح) + ق(∠ ق ز ح) + ق(∠ ق ح ز) = ١٨٠° (٢)
من (١) ، (٢) نكتب:
ق(∠ ق د ك) = ق(∠ ق ز ح)
ق(∠ د ق ك) = ق(∠ ز ق ح)
ومنه نستنتج: ق(∠ ق ك د) = ق(∠ ق ح ز)
ولكن: ق(∠ ق ك د) + ق(∠ ق ك ح) = ١٨٠° (٣)
ق(∠ ق ح ز) + ق(∠ ق ح ك) = ١٨٠° (٤)
من (٣) ، (٤) نستنتج: ق(∠ ق ك ح) = ق(∠ ق ح ك)
وبالتالي المثلث ق ك ح متطابق الضلعين في ق.
(ب) المثلثان ق د ك ، ق ز ح متطابقان بحسب الحالة
ز . ض . ز وبالتالي: د ك = ز ح
ومنه: د ك + ك ح = ز ح + ح ك
أي أن: د ح = ك ز

اختبار الوحدة الثامنة

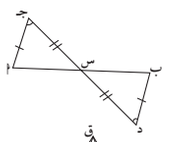
❶ مستخدمًا الرسم المقابل، أي من الجمل التالية صحيحة؟ فسّر.
(أ) Δ أ د هـ متطابق الضلعين.
(ب) Δ أ ب هـ جـ متطابق الضلعين.
(جـ) Δ أ ب هـ ≅ Δ د جـ هـ.
(د) Δ هـ ب د ≅ Δ هـ جـ أ.



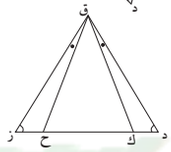
❷ هل يتطابق المثلثان أ ب جـ، هـ د ك؟ فسّر.



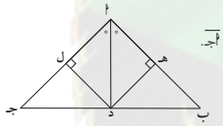
❸ في الرسم المقابل: إذا كان $\overline{\text{أ جـ}} \cong \overline{\text{ب د}}$
$\overline{\text{د س}} \cong \overline{\text{جـ س}}$
ق(∠ جـ) = ق(∠ د)
أثبت أن النقطة س تنصف $\overline{\text{أ ب}}$.



❹ إذا كان ق(∠ ق د ك) = ق(∠ ق ز ح)
ق(∠ د ق ك) = ق(∠ ز ق ح)
(أ) أثبت أن المثلث ك ق ح متطابق الضلعين في ق.
(ب) أثبت أن: د ح = ك ز.



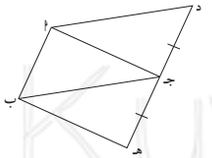
❺ في الشكل المقابل:
(أ) أثبت أن د هـ = د ل.
(ب) ضع النقطة م تنتمي إلى $\overline{\text{أ د}}$. أثبت تساوي البعد بين م والقطعتين $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{أ جـ}}$.



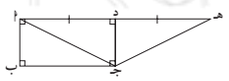
١١٩

اختبار الوحدة الثامنة

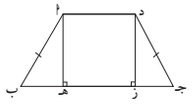
❻ أ ب جـ د متوازي أضلاع.
نأخذ هـ تنتمي إلى $\overleftarrow{\text{د جـ}}$ بحيث $\overline{\text{جـ هـ}} \cong \overline{\text{د جـ}}$.
أثبت أن: Δ ب هـ جـ ≅ Δ أ جـ د.



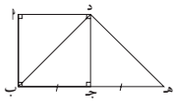
❼ أ ب جـ د مستطيل.
نأخذ هـ تنتمي إلى $\overleftarrow{\text{أ د}}$ بحيث د هـ = أ د.
أثبت أن: Δ د جـ هـ ≅ Δ ب أ جـ.



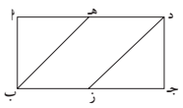
❽ أ ب جـ د شبه منحرف متطابق الضلعين.
أثبت أن: $\overline{\text{أ هـ}} \cong \overline{\text{د ز}}$.



❾ أ ب جـ د مربع.
النقاط ب، جـ، هـ على استقامة واحدة بحيث جـ هـ = جـ ب.
أثبت أن: Δ جـ هـ د ≅ Δ أ ب د.

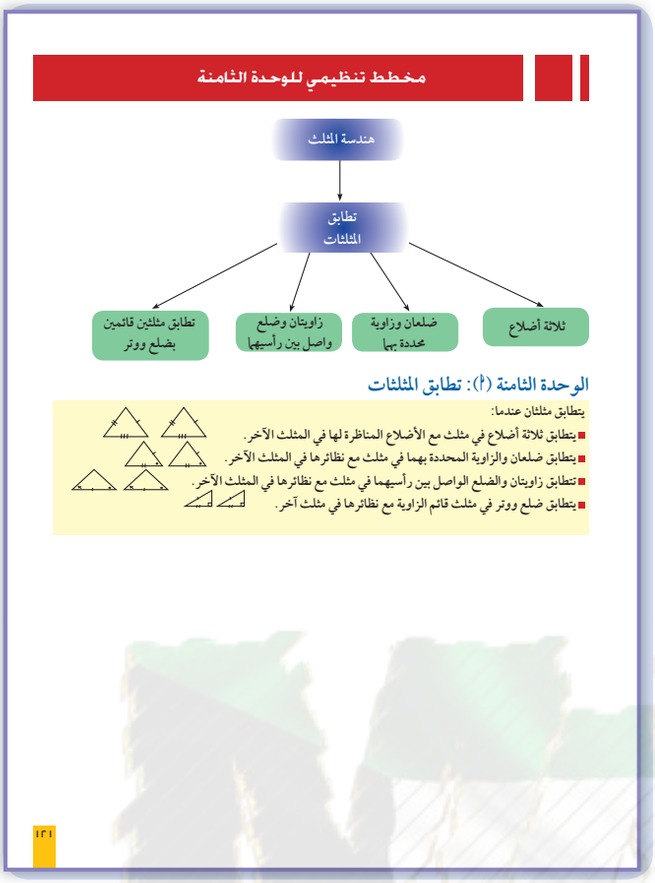


❿ أ ب جـ د مستطيل.
هـ منتصف $\overline{\text{أ د}}$.
ز منتصف $\overline{\text{جـ ب}}$.
أثبت أن: Δ جـ د ز ≅ Δ أ ب هـ.



١٢٠

KuwaitMathTeam



٥ (أ) المثلثان أ د هـ، أ د ل قائما الزاوية في هـ، ل ويوجد أيضًا
ق(هـ $\hat{أ}$ د) = ق(ل $\hat{أ}$ د)
يبقى أن ق(هـ $\hat{د}$ أ) = ق(ل $\hat{د}$ أ)
وبالتالي Δ أ د هـ ≅ Δ أ د ل، $\overline{أ د}$ وتر مشترك استنادًا إلى الحالة
(ز . ض . ز) . ومنه نستنتج أنّ: $\overline{د هـ} \cong \overline{د ل}$.
(ب) نأخذ $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$، $\overline{م ص} \perp \overline{أ جـ}$.
وبالتالي فالمثلثان أ م س، أ م ص متطابقان (ز . ض . ز) ومنه
نستنتج أن: $\overline{م س} \cong \overline{م ص}$.
٦ بما أن $\overline{جـ هـ} \cong \overline{جـ د}$.
نستنتج أن: $\overline{جـ هـ} \cong \overline{أ ب}$
وأن $\overline{جـ هـ} // \overline{أ ب}$.
وبالتالي، أ ب هـ جـ متوازي الأضلاع. ومنه يكون
Δ ب هـ جـ ≅ Δ ب أ جـ. وفي متوازي الأضلاع أ ب جـ د
لدينا: Δ ب أ جـ ≅ Δ د جـ أ
فيكون: Δ ب هـ جـ ≅ Δ أ جـ د.
٧ المثلثان أ د جـ ، هـ د جـ متطابقان استنادًا إلى
(ض . ز . ض)، ثم في المستطيل Δ أ د جـ ≅ Δ جـ ب أ.
وبالتالي يكون Δ هـ د جـ ≅ Δ جـ ب أ.

٨ أ ب جـ د شبه منحرف متطابق الضلعين إذًا
ق(جـ $\hat{}$) = ق(ب $\hat{}$) ولدينا ق(ز $\hat{}$) = ق(هـ $\hat{}$) = ٩٠° يبقى
في المثلثين أ هـ ب، د ز جـ أن ق(جـ $\hat{د}$ ز) = ق(هـ $\hat{أ}$ ب)
نستنتج أن المثلثين جـ د ز، ب أ هـ متطابقان استنادًا إلى
(ز . ض . ز) ومنه نحصل على: $\overline{د ز} \cong \overline{أ هـ}$.

٩ المثلثان د جـ هـ، د جـ ب متطابقان استنادًا إلى الحالة
(ض . ز . ض)
وفي المربع، المثلثان د جـ ب، د أ ب
متطابقان استنادًا إلى الحالة (ز . ض . ز)
وبالتالي يصبح Δ جـ هـ د ≅ Δ أ ب د .

١٠ لدينا: ق(جـ $\hat{}$) = ق(أ $\hat{}$) = ٩٠°.
$\overline{د جـ} \cong \overline{أ ب}$ (أضلاع متقابلة)
$\overline{ز جـ} \cong \overline{أ هـ}$ (نصف أضلاع متقابلة)
إذًا: فالمثلثان متطابقان استنادًا إلى (ض . ز . ض).

KuwaitMath.com