الوحدة السابعة

هندسة المثلث

تساعد المعلومات المتضمنة في هذه الصفحات الطالب على تعرف أنواع المثلثات، وخصائص المحاور، ومنصفات الزوايا الداخلية، والأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على القواعد المقابلة والقطع المتوسطة.

علوم

اطلب إلى الطلاب القيام بأبحاث حول شبكة العنكبوت.
اسألهم كتابة فقرة عن حدث مهم جدًّا في تاريخ الإسلام له علاقة بشبكة العنكبوت.

جغرافيا

اشرح للطلاب معنى شبه مثلث، ثم اطلب إليهم البحث عن خرائط دول لها أشكال شبه مثلث أو إلى حد ما مثلثية الشكل.

تسلية

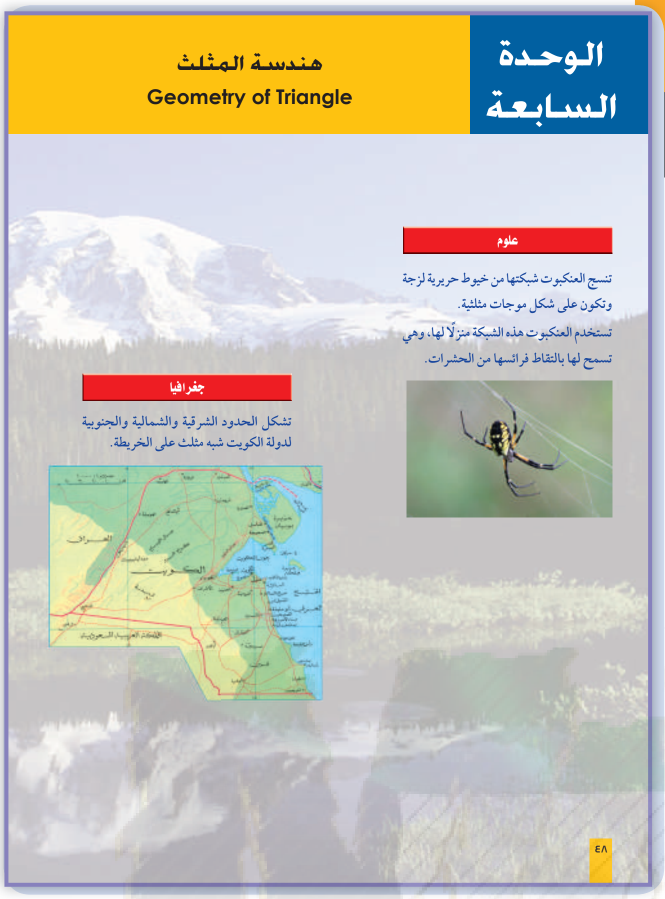
تعتبر لعبة البليارد واحدة من الألعاب التي تحتاج إلى أعصاب هادئة، ودقة في التركيز، ورسم خطة عمل واضحة في التعامل مع العصا والطابات ليكون التصويب جيّدًا.

فنون قتالية

كثير من الألعاب الرياضية والفنون القتالية يأخذ فيها اللاعب وضعية تشبه إلى حد كبير شكل مثلث. دع الطلاب يقومون بأبحاث تؤكد هذه الوضعية.

مشروع الوحدة

اعرض أمام الطلاب تصميمًا أو صورة لواحد من المتنزهات في المدينة، وناقش معهم أفضل الأماكن للترفيه والاستراحة.



الوحدة السابعة

هندسة المثلث

Geometry of Triangle

علوم

تنسج العنكبوت شبكتها من خيوط حريرية لزجة وتكون على شكل موجات مثلثية.
تستخدم العنكبوت هذه الشبكة منزلًا لها، وهي تسمح لها بالتقاط فرائسها من الحشرات.

جغرافيا

تشكل الحدود الشرقية والشمالية والجنوبية لدولة الكويت شبه مثلث على الخريطة.

٤٨

تسلية

أحرزت الكويت بطولة البليارد العربية الرابعة عن فئة (٩ كرات) سنة ٢٠٠٧ في الدوحة.
تبدأ هذه اللعبة بضرب كرة البليارد بمجموعة كرات موضوعة بشكل مثلث.

فنون قتالية

تعبر هذه الصورة عن الوضعية الهجومية في أحد فنون القتال، وتأخذ الوضعية شكل المثلث.

مفاهيم رياضية أساسية

متباينة المثلث: في كل مثلث، طول كل ضلع هو أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين.

في المثلث حاد الزوايا، يكون مجموع مربعي طولي ضلعين أكبر من مربع طول الضلع الثالث.

تتقاطع محاور المثلث في نقطة واحدة. هذه النقطة تقع على أبعاد متساوية من رؤوس المثلث الثلاثة.

تتقاطع منصفات زوايا المثلث في نقطة واحدة. تقع هذه النقطة على أبعاد متساوية من أضلاعه الثلاثة.

الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة.

القطع المتوسطة للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة تقسم كلًّا منها نسبة ٢ : ١ من جهة الرأس.

مشروع الوحدة

حل المسائل

افهم
خطط
حل
تحقق

مع غروب شمس نهار حار، تحتاج إلى الخروج. إلى أين ستذهب؟ إلى المتنزه! لأجيال، لجأ الناس في المدن إلى المتنزهات للاسترخاء ومقابلة الأصدقاء، حيث يكونون محاطين بالطبيعة. سوف تضع في هذا المشروع تصميمًا لمتنزه صغير تقدمه إلى البلديّة في مدينتك. نتاج عملك سوف يكون تصميمًا مفصلًا للمتنزه.

٤٩

مرشد تخطيط الوحدة

كتاب الطالب

الدرس	الأدوات المستخدمة	المصطلحات الأساسية	رقم الدرس
افتتاحية الوحدة السابعة			
التركيز على حل المسائل			
افتتاحية الوحدة السابعة: هندسة المثلث			
متباينة المثلث وأنواعه	مقص، مسطرة، عيدان	متباينة المثلث	٧ – ١
القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث	مقص، مسطرة		٧ – ٢
القطعة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر	مسطرة		٧ – ٣
محاور أضلاع المثلث	مقص	محور القطعة المستقيمة	٧ – ٤
منصفات الزوايا الداخلية للمثلث	مقص	منصفات الزوايا	٧ – ٥
الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه	فرجار، مسطرة	الأعمدة، الارتفاع	٧ – ٦
القطع المتوسطة للمثلث	فرجار، مسطرة	القطعة المتوسطة	٧ – ٧
اختبار الوحدة السابعة			

التركيز على حل المسائل

يواجه الطلاب في كل مسألة جدولًا يتألف من ثلاثة أعمدة وكل عمود يتضمن إجابة عن الأسئلة.

إجابة واحدة فقط صحيحة. على الطالب اختيار الإجابة الصحيحة التي تتوافق مع المعطيات.

لذا من المهم جدًّا قراءة المسألة مرات عديدة واختيار الإستراتيجية المناسبة لإيجاد الحل الصحيح.

في المسألة الأولى، لدينا أربعة أشخاص ركضوا مجتمعين ٣٥ كم ولكن كل واحد منهم ركض مسافة تختلف عن الآخر.

في المسألة الثانية دفعوا ثمن العصير ١٩,٥٠٠ دينارًا ولكن لم يدفعوا بالتساوي.

اطرح أسئلة تساعد الطلاب على فهم الفروقات في المسافة التي ركضها كل شخص، وأسئلة تساعد على فهم الفروقات في المبالغ التي دفعها كل شخص ثمنًا للعصير.

التركيز على حل المسائل

لكل مسألة مما يلي ثلاث إجابات. حدد الإجابة الصحيحة، ثم حدد الجمل المعطاة في المسألة والتي لا تتفق مع الإجابتين الأخريين:

اختبر القواعد المستخدمة في حل المسائل

عند حل المسائل، فإنه من الأهمية أن تتحقق من مدى صحة إجابتك. مثلًا، تحقق من أن حلك يتفق مع كل الحقائق الواردة في المسألة.

١ ركض أربعة أشخاص مجتمعين مسافة ٣٥ كم. ركض ناصر ١ كم أكثر من حمد، وركض مبارك ١٠٠٠ متر أقل من ناصر، أما أحمد فركض ربع المسافة التي ركضها الآخرون مجتمعين. كم ركض كل منهم؟

إجابة ١	إجابة ٢	إجابة ٣
ناصر ٩	ناصر ٩	ناصر ١٠
حمد ١٠	حمد ٩	حمد ٩
مبارك ١٢	مبارك ١٠	مبارك ٩
أحمد ٤	أحمد ٩	أحمد ٧

٢ بعد مسابقة الركض، تقابلوا في محل العصائر. دفع ناصر ٣ دنانير أكثر من مبارك، ودفع حمد مرة ونصف مما دفعه مبارك، أما مبارك فدفع ٣ دنانير أقل من أحمد. كم دفع كل منهم إذا كان مجموع فاتورتهم ١٩,٥٠٠ دينارًا.

إجابة ١	إجابة ٢	إجابة ٣
ناصر ١٠	ناصر ٦	ناصر ٦
حمد ١,٥٠٠	حمد ٤,٥٠٠	حمد ٣
مبارك ٦	مبارك ٣	مبارك ٦
أحمد ٦	أحمد ٦	أحمد ٤,٥٠٠

٥٠

إجابات الأسئلة

١ إجابة ١: خطأ، لأن المعطيات تقول إن ناصر ركض ١ كم أكثر من حمد، ولكن في الجدول نجد أن ناصر ركض ٩ كم وحمد ركض ١٠ كم.

إجابة ٢: خطأ، لأن الجدول يبين أن ناصر ركض ٩ كم وحمد ركض ٩ كم، وهذا لا يتناسب مع المعطيات.

إجابة ٣: صحيحة، لأن ناصر ركض ١٠ كم، وهذا أكثر من حمد الذي ركض ٩ كم ومبارك ركض أيضًا ٩ كم وهو أقل من ناصر، وركض أحمد ربع المسافة أي ٢٨ ÷ ٤ = ٧ كم.

٢ إجابة ١: خطأ، لأن المعطيات تقول إن ناصر دفع ٣ دنانير أكثر من مبارك بينما الجدول يبين أنه دفع ٤ دنانير أكثر من مبارك.

إجابة ٢: صحيحة، لأن الفرق بين ما دفعه ناصر وما دفعه مبارك هو ٣ دنانير، وإن ما دفعه حمد ٤,٥٠٠ دنانير يزيد ١,٥ عما دفعه مبارك، والمجموع يساوي ١٩,٥٠٠ دينارًا.

إجابة ٣: خطأ، لأن ناصر دفع ٦ دنانير، ومبارك دفع ٦ دنانير وهذا يخالف المعطيات.


الوحدة السابعة
هندسة المثلث
Geometry Of Triangle

شبكات العناكب

تنسج العناكب أنواعًا مختلفة من الشبكات كالشبكة المثلثية والشبكة المدارية. ولهاتين الشبكتين نمط مثلثي.
العناكب التي تنسج شبكة مثلثية الشكل تنتظر فريستها في آخر الشبكة.

أما العناكب التي تنسج الشبكات المدارية، فيكون مدى الرؤية لديها ضعيف نسبيًّا.
تنسج العناكب شبكات جميلة ومعقدة بخيوط من الحرير اللاصق لاصطياد الفرائس. تشعر العناكب بفرائسها من خلال موجات تصدرها عند التصاقها بالشبكة.

١ علام تتغذى العناكب؟
٢ كيف تساعد الشبكة العناكب على اصطياد فرائسها؟
٣ ما هي الأشكال الهندسية التي تراها في شبكات العناكب ؟

٥١

الموضوع: شبكات العنكبوت

كيفية التعامل مع هذه الصفحة

تقدم هذه الصفحة موضوع هذا الجزء الصفة الأساسية لشبكات العناكب، وهي الشكل الهندسي الذي هو شبه مثلث أو أحيانًا أخرى مثلث.

اسأل ...

- اسأل الطلاب ما إذا كانوا قد شاهدوا في البرية أو في الطرقات شبكات عناكب. اطلب إليهم مراقبة شبكة عناكب، وإن أمكنهم التقاط صورة لعنكبوت تلتقط فريستها.

إجابات الأسئلة

١ تتغذى على الحشرات كالذباب والبرغش...

٢ إن خيوط الشبكة مصنوعة من مادة لزجة، عندما تحط الحشرة على الشبكة تلتصق بها فتلتقطها العنكبوت.

٣ نرى على شبكة العنكبوت مثلثات تتقاطع رؤوسها في نقطة واحدة، كما ونرى أيضًا مضلعات تكبر كلما ابتعدنا عن مركز الشبكة.

١–٧

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يستخدم متباينة المثلث.
- يحدّد نوع المثلث.

المصطلحات الأساسية

- متباينة المثلث.

الأدوات المستخدمة

- مقص، مسطرة، عيدان.

مراجعة

❶ نأخذ النقاط أ، ب، جـ على الترتيب التالي:

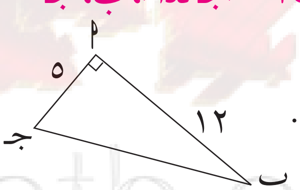
أب = ٦ سم، ب جـ = ٨ سم، أجـ = ١٤ سم.

أثبت أن أ، ب، جـ على خط مستقيم واحد.

أب + ب جـ = ٦ + ٨ = ١٤ = أجـ لذا أ، ب، جـ على مستقيم واحد

❷ أب جـ مثلث قائم الزاوية.

أوجد طول ب جـ.



باستخدام نظرية فيثاغورث نكتب

(١٢)^2 + (٥)^2 = (ب جـ)^2، ب جـ = ١٣.

◄ صلة الدّرس في السابق، تعرفت حل المتباينات.
في هذا الدرس سوف تستخدم متباينة المثلث لحل مسائل متعلقة بأطوال أضلاعه أو قياس زواياه.

١ – التمهيد

استكشف

الغاية

يتأكد الطلاب من وجود المثلث من خلال استخدام

١–٧

متباينة المثلث وأنواعه
Triangle Inequality and Types of Triangles

◄ صلة الدرس في السابق تعرفت حل المتباينات. في هذا الدرس سوف تستخدم متباينة المثلث لحل مسائل متعلقة بأطوال أضلاعه أو قياس زواياه. ►

سوف تتعلم
- استخدام متباينة المثلث.
- تحديد نوع المثلث.

من الاستخدامات
- يستخدم مصممو الخيم متباينة المثلث عند وضع تصاميم لخيمهم بهدف اختيار الشكل الأفضل.

استكشف متباينات في مثلث

الأدوات المستخدمة: مقص، مسطرة، عيدان.

اعمل ضمن مجموعة لجمع عيدان من مختلف الأطوال (٢، ٣، ٤، ٥ و٦ سم).

① اختر ثلاثة عيدان عدة مرات لتبين ما إذا كانت تشكل مثلثًا أو لا، وأكمل الجدول.
كرر العملية عدة مرات.

طول العود: عود ١	طول العود: عود ٢	طول العود: عود ٣	تشكل مثلث
٢	٣	٤	نعم
٢	٣	٥	لا
٥	٤	٣	نعم

② اختر مجموعة عيدان تشكل مثلثًا وقارن الأطوال. أكمل:
(أ) طول عود ١ + طول عود ٢ ...... طول عود ٣
(ب) طول عود ١ + طول عود ٣ ...... طول عود ٢
(جـ) طول عود ٢ + طول عود ٣ ...... طول عود ١

③ اختر مجموعة عيدان لا تشكل مثلثًا، وأكمل (أ)، (ب)، (جـ)، من ② . هل النتائج هي نفسها؟

④ ماذا تستنتج من ② و ③ بمقارنة مجموع طولي ضلعين مع طول الضلع الثالث من مثلث؟

المصطلحات الأساسية
◄ متباينة المثلث
Triangle Inequality

معلومة رياضية
إذا كان أب + ب جـ = أجـ، فإن النقاط الثلاث أ، ب، جـ، على استقامة واحدة.

تعلم متباينة المثلث وأنواعه

متباينة المثلث:
مجموع طولي أي ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

هذه الخاصية تسمى **متباينة المثلث**.
مثلاً في المثلث أ ب جـ يكون: ب جـ + أب > أجـ
أجـ + ب جـ > أب
أب + أجـ > جـ ب

٥٢

متباينة المثلث، ويحددون أنواع المثلثات من خلال المتباينة التي تربط بين مربع الأضلاع في كل مثلث.

التقييم المستمر

راقب الطلاب وهم يحاولون استخدام متباينة المثلث للتأكد من وجوده، ثم ساعدهم على اختيار مربع الضلع الأطول، ومقارنته بمجموع مربع طولي الضلعين الآخرين لتحديد نوعية المثلث لجهة كونه حاد الزوايا أو قائم الزاوية أو منفرج الزاوية.

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

أعطهم المثلث أب جـ حيث أب = ٧ سم، أجـ = ٩ سم، ب جـ = ١٢ سم، واسألهم تحديد ما إذا كان حاد الزوايا أو قائم الزاوية أو منفرج الزاوية.

(ب جـ)^{٢} = (١٢)^{٢} = ١٤٤، (أجـ)^{٢} + (أب)^{٢}

= ٨١ + ٤٩ = ١٣٠

ب جـ^{٢} > أجـ^{٢} + أب^{٢}

لذا أب جـ هو مثلث منفرج الزاوية في أ.


مثال (١)

هل يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث كما يلي؟ فسر.

(أ) ٣سم، ٧سم، ٨سم.

(ب) ٣سم، ٦سم، ١٠سم.

(أ) المعطيات: الأطوال هي ٣سم، ٧سم، ٨سم.

المطلوب: التحقق من وجود مثلث مع الأطوال المعطاة.

البرهان: باستخدام متباينة المثلث: ٣ + ٧ > ٨؛ ٨ + ٧ > ٣؛ ٨ + ٣ > ٧.

الأطوال: ٣سم، ٧سم، ٨سم يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث.

(ب) المعطيات: الأطوال هي ٣ سم، ٦ سم، ١٠ سم

المطلوب: التحقق من وجود مثلث مع الأطوال المعطاة

البرهان: ٣ + ٦ < ١٠

الأطوال ٣ سم، ٦ سم، ١٠ سم لا يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث.

ملاحظة:
يمكن الاكتفاء باختيار أكبر الأضلاع طولًا ومقارنته بمجموع طولي الضلعين الآخرين.

حاول أن تحل

١ هل يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث ٤سم، ٦سم، ١٠سم؟ فسر.

يمكن التعرف على نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه، بمقارنة مربع طول الضلع الأكبر بمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين.

إذا كان أب جـ مثلثًا فيه أجـ أكبر الأضلاع طولًا فيكون المثلث أب جـ:

حاد الزوايا إذا كان:
(أجـ)^{٢} < (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

مثلث حاد الزوايا

منفرج الزاوية في ب إذا كان:
(أجـ)^{٢} > (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

مثلث منفرج الزاوية

قائم الزاوية في ب إذا كان:
(أجـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

مثلث قائم الزاوية

٥٣

إجابات «استكشف»

يحاول الطلاب مقارنة طول عود بمجموع طولي عودين آخرين، والتأكد من تشكيل مثلث عند ربط أطراف العيدان الثلاثة ببعضها بعضًا.

١

طول العود	عود (١)	عود (٢)	عود (٣)	مثلث
	٢	٣	٤	نعم
	٢	٣	٥	لا
	٥	٤	٣	نعم
	٣	٥	٦	نعم
	٢	٣	٦	لا
	٢	٥	٦	نعم

٢ (أ) >، (ب) >، (جـ) >.

٣ تختلف الإجابات بحسب الأطوال.

٤ يجب أن يكون مجموع طولي أي ضلعين دائمًا أكبر من طول الضلع الثالث كي نحصل على مثلث.

٢ – التعليم

تعلم

من المهم جدًّا أن يفهم الطالب أهمية المتباينة التي تؤكد وجود المثلث، ومن المهم أيضًا معرفة المتباينة التي تحدد نوع المثلث.

أمثلة بديلة

❶ ٲب = ٤ سم، ٲجـ = ٦ سم ، ب جـ = ١١ سم.

هل هذه الأطوال تصلح أن تكون مثلثًا؟

∵ ٲب + ٲجـ = ١٠

∵ ب جـ = ١١

∴ ٲب + ٲجـ < ب جـ

∴ هذه الأطوال لا تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

❷ هل الأطوال: ٤ سم، ٧ سم، ١٠ سم يمكن أن تكون أضلاع مثلث؟

∵ مجموع ضلعين ٤ سم + ٧ سم = ١١

∵ الضلع الثالث = ١٠ سم

∵ مجموع طول ضلعين > طول الضلع الثالث

∴ ٤ سم، ٧ سم، ١١ سم تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث.

❸ ما نوع المثلث ٲب جـ حيث أطوال أضلاعه:

ٲب = ٤ سم، ٲجـ = ٦ سم ، ب جـ = ٧ سم.

(ب جـ)^{٢} = (٧)^{٢} = ٤٩، (ٲب)^{٢} + (ٲجـ)^{٢} = ١٦ + ٣٦، (ٲب)^{٢} + (ٲجـ)^{٢} = ٥٢

أي أن (ب جـ)^{٢} > (ٲب)^{٢} + (ٲجـ)^{٢} لذا فالمثلث ٲب جـ هو حاد الزوايا.

إجابات «حاول أن تحل»

❶ كلا، ∵ مجموع ضلعين = ٤ سم + ٦ سم = ١٠ سم

∵ الضلع الثالث = ١٠ سم

∴ ٤ سم، ٦ سم، ١٠ سم لا تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث.

❷ (أ) (س ع)^{٢} = (١٢)^{٢} = ١٤٤

(ص س)^{٢} + (ص ع)^{٢} = (١١)^{٢} + (٤)^{٢} = ١٢١ + ١٦ = ١٣٧

أي أن (س ع)^{٢} > (ص س)^{٢} + (ص ع)^{٢}

مثال (٢)

حدد نوع المثلث ٲب جـ بالنسبة إلى زواياه.

∵ تقرأ بما أن

∴ تقرأ إذن

(أ) إذا كان ٲب = ٥ سم ، ب جـ = ١١ سم ، ٲجـ = ١٠ سم

المعطيات: ٲب = ٥ سم، ب جـ = ١١ سم، ٲجـ = ١٠ سم.

المطلوب: تحديد نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه.

البرهان:

$\overline{\text{ب جـ}}$ أكبر الأضلاع طولًا في المثلث ٲب جـ: (ب جـ)^{٢} = (١١)^{٢} = ١٢١

(ٲب)^{٢} + (ٲجـ)^{٢} = (٥)^{٢} + (١٠)^{٢}

= ٢٥ + ١٠٠

= ١٢٥

∵ ١٢١ < ١٢٥

أي أن: (ب جـ)^{٢} < (ٲب)^{٢} + (ٲجـ)^{٢}

∴ المثلث ٲب جـ حاد الزوايا.

(ب) إذا كان ٲب = ٢ سم ، ب جـ = ٦ سم، ٲجـ = ٧ سم.

المعطيات: ٲب = ٢ سم، ب جـ = ٦ سم، ٲجـ = ٧ سم.

المطلوب: تحديد نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه.

البرهان: $\overline{\text{ٲجـ}}$ أكبر الأضلاع طولًا في المثلث ٲب جـ .

(ٲجـ)^{٢} = (٧)^{٢} = ٤٩

(ب ٲ)^{٢} + (ب جـ)^{٢} = (٢)^{٢} + (٦)^{٢}

= ٤ + ٣٦

= ٤٠

∵ ٤٩ > ٤٠

أي أن: (ٲجـ)^{٢} > (ب ٲ)^{٢} + (ب جـ)^{٢}، ∴ المثلث ٲب جـ منفرج الزاوية.

حيث إن الضلع $\overline{\text{ٲجـ}}$ الضلع الأكبر طولًا في المثلث، فتكون الزاوية ب المقابلة له الزاوية الأكبر قياسًا.

المثلث ٲب جـ منفرج الزاوية في ب.

(جـ) إذا كان ٲب = ٣ سم ، ٲجـ = ٤ سم، ب جـ = ٥ سم.

المعطيات: ٲب = ٣ سم، ٲجـ = ٤ سم، ب جـ = ٥ سم.

المطلوب: تحديد نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه.

البرهان: $\overline{\text{ب جـ}}$ أكبر الأضلاع طولًا في المثلث ٲب جـ.

(ب جـ)^{٢} = (٥)^{٢} = ٢٥

(ٲب)^{٢} + (ٲجـ)^{٢} = (٣)^{٢} + (٤)^{٢}

= ٩ + ١٦ = ٢٥

∵ ٢٥ = ٢٥

أي أن: (ب جـ)^{٢} = (ٲب)^{٢} + (ٲجـ)^{٢}، ∴ المثلث ٲب جـ قائم الزاوية.

حيث إن الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$ الضلع الأكبر طولًا في المثلث، فتكون الزاوية ٲ المقابلة له الزاوية الأكبر قياسًا.

المثلث ٲب جـ قائم الزاوية في ٲ.

٥٤

لذا يكون المثلث س ص ع منفرج الزاوية في ص.

(ب) (ل م)^{٢} = (٧)^{٢} = ٤٩

(م ن)^{٢} + (ل ن)^{٢} = (٦)^{٢} + (٥)^{٢} = ٣٦ + ٢٥ = ٦١

أي أن (ل م)^{٢} < (ن ل)^{٢} + (ن م)^{٢}

لذا يكون المثلث ل م ن حاد الزوايا.

(جـ) (ٲجـ)^{٢} = (١٠)^{٢} = ١٠٠

(ٲب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} = (٦)^{٢} + (٨)^{٢} = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠

أي أن (ٲجـ)^{٢} = (ب ٲ)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

لذا يكون المثلث ٲب جـ قائم الزاوية في ب.

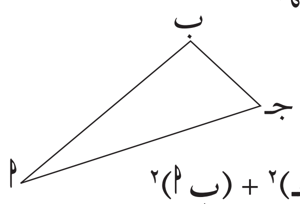
٣- التدريب والتقييم

تحقق من فهمك

تأكد من فهم الطلاب لمتباينة وجود المثلث، ولمتباينة نوع المثلث.

إجابات «تحقق من فهمك»

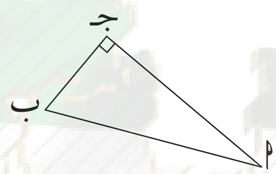
❶



(أجـ)٢ < (ب جـ)٢ + (ب أ)٢

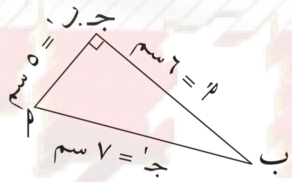
أي أن (أجـ)٢ − (أب)٢ < (ب جـ)٢ وبالتالي المتباينة صحيحة.

❷



(أب)٢ = (جـأ)٢ + (جـ ب)٢ وبالتالي المعادلة المعطاة ليست صحيحة.

❸



ليس دائمًا. نأخذ مثلًا: أ' = ٦ سم، ب' = ٥ سم، جـ' = ٧ سم.

لدينا أ' + ب' = ٦ + ٥ = ١١ < جـ' = ٧.

ولكن: أ' + جـ' = ٦ + ٧ = ١٣ < ب' = ٥.

تقييم بديل

المجلة: اطلب إلى الطلاب العمل ضمن مجموعات من اثنين. يكتب أحدهم أطوال ثلاث قطع مستقيمة ويطلب إلى الآخر إثبات ما إذا كانت تشكل مثلثًا أم لا. وفي حال وجود مثلث، يجب تحديد نوعه، ثم يتبادلان الأدوار.

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٧-١

متباينة المثلث وأنواعه

Triangle Inequality and Types of Triangles

تدرَّبْ وطبِّقْ

(١) ابدأْ أب = ٦سم، ب جـ = ١٠سم، أجـ = ١٣سم.

(أ) قارن أب بـ (ب جـ + أجـ). ____________

(ب) قارن ب جـ بـ (أب + أجـ). ____________

(جـ) قارن أجـ بـ (أب + ب جـ). ____________

(د) هل النقاط أ، ب، جـ تشكل رؤوس مثلث؟ ____________

هل يمكن أن تكون الأطوال التالية أطوال أضلاع مثلث؟

(٢) أب = ٢سم، أجـ = ٩سم، ب جـ = ٥ سم. ____________

(٣) ب جـ = ٩سم، أجـ = ٧سم، أب = ٨سم. ____________

حدّد نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه:

(٤) أب = ٦سم، أجـ = ٤سم، ب جـ = ٥سم.

(٥) أب = ٨سم، أجـ = ١٠سم، ب جـ = ٦سم.

(٦) أب = ١٣سم، أجـ = ١١سم، ب جـ = ٥سم.

(٧) أب = ٢سم، أجـ = ٥سم، ب جـ = ٤سم.

(٨) التحضير للاختبار: أب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، أب = ٦ سم، أجـ = ٨ سم، د ∈ جـأ، (د ∌ $\overline{أجـ}$) بحيث أد = ٥٫٤ سم. فالزاوية جـ بَ د: ____________

(أ) حادة (ب) قائمة (جـ) منفرجة (د) قياسها يساوي صفر

٢٨

اختبار سريع

❶ هل الأطوال: ٥ سم، ٤ سم، ١١ سم تشكل مثلثًا؟

كلا، لأن ٥ سم + ٤ سم = ٩ سم < ١١ سم

❷ أثبت أن الأطوال: ٧ سم، ٨ سم، ١٣ سم تشكل مثلثًا منفرج الزاوية.

مجموع أي طولين أكبر من الثالث لذا فهو مثلث.

١٣٢ = ١٦٩ < ٤٩ + ٦٤ = ١١٣، لذا فهو مثلث منفرج الزاوية.

حاول أن تحل

٢ حدد نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه إذا كان:

(أ) س ص = ١١ سم ، ص ع = ٤ سم ، س ع = ١٢ سم.

(ب) ل م = ٧ سم ، م ن = ٦ سم ، ل ن = ٥ سم.

(جـ) أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، أ جـ = ١٠ سم.

تحقق من فهمك

١ مثلث منفرج الزاوية في ب، هل من الممكن أن تكون $(أ جـ)^٢ - (أ ب)^٢ < (ب جـ)^٢$؟

٢ مثلث قائم الزاوية في جـ، هل من الممكن أن تكون $(ب جـ)^٢ = (أ جـ)^٢ + (أ ب)^٢$؟

٣ أ' ، ب' ، جـ' أطوال ثلاثة أضلاع في مثلث حيث أ' + ب' > جـ' . هل تستنتج أن أ' + جـ' > ب'؟

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ في الشكل المقابل، إذا كان:

ب ن = ٩ سم، ب ك = ١٥ سم، ك ل = ٢٠ سم، $\overline{ك ن} \perp \overline{ب ل}$.

أثبت أن المثلث ب ك ل قائم الزاوية في ك.

٢ في الشكل المقابل، إذا كان:

أ د = د جـ = ٣ سم، أ ب = ٥ سم ، $\overline{ب د} \perp \overline{أ جـ}$.

هل المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب؟

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظّم قائمة.
- كوّن جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حلّ مسألة أبسط.

٥٥

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

❶ في المثلث ك ب ن القائم الزاوية في ن

$ك ن^٢ = ١٥^٢ - ٩^٢ = ٢٢٥ - ٨١ = ١٤٤$

أي ك ن = ١٢ سم

في المثلث ك ن ل القائم الزاوية في ن: $ن ل^٢ = ٢٠^٢ - ١٢^٢$

$= ٤٠٠ - ١٤٤ = ٢٥٦$

ن ل = ١٦ سم

ب ل = ٩ + ١٦ = ٢٥ سم

$ب ل^٢ = ٢٥ = ٦٢٥$

$ك ب^٢ + ك ل^٢ = ١٥^٢ + ٢٠^٢ = ٢٢٥ + ٤٠٠ = ٦٢٥$

أي أن: $ب ل^٢ = ك ب^٢ + ك ل^٢$

وبالتالي فالمثلث ك ب ل قائم الزاوية في ك.

❷ أ جـ = ٦ سم، أ ب = ب جـ = ٥ سم

$أ جـ^٢ = ٦^٢ = ٣٦$

$أ ب^٢ + ب جـ^٢ = ٢٥ + ٢٥ = ٥٠$

∴ $أ ب^٢ + ب جـ^٢ \neq أ جـ^٢$ والمثلث أ ب جـ ليس قائم الزاوية.

٧–٢

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث
Midsegment of Triangle

سوف تتعلم
- استخدام خصائص القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث لحل مسائل هندسية.

من الاستخدامات
- يستخدم ماسحو الأراضي خاصية القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين لإيجاد طول بحيرة ما.

◄ **صلة الدرس** في هذا الدرس سوف تتعرف خصائص القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث. ►

استكشف منتصفات القطعة المستقيمة

الأدوات المستخدمة: مقص، مسطرة.

يقص كل طالب في مجموعتك عددًا من المثلثات (قائمة الزاوية، حادة الزوايا، منفرج الزاوية).

ليكن مثلثك ؟ ب جـ. اطو ؟ على جـ لإيجاد منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{؟ جـ}}$، وبالمثل لـ $\overline{\text{ب جـ}}$

ليكن ل ، ن المنتصفين. صل بينهما لتحصل على $\overline{\text{ل ن}}$.

اطو مثلثك عند $\overline{\text{ل ن}}$.

تابع الطي كما في الرسم المرفق.

١ ما نوع الرباعي الذي يتشكل من طي المثلث ل جـ ن؟

٢ ماذا تستنتج بالنسبة إلى $\overline{\text{ل ن}}$ ، $\overline{\text{؟ ب}}$؟

٣ اذكر خاصية تربط القطعة المستقيمة المشكلة من منتصفي ضلعين بالنسبة إلى الضلع الثالث في المثلث.

تعلم القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث

نظرية (١)

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث، وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع.

٥٦

٧–٢

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف خصائص القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث ويستخدمها لحل مسائل هندسية.

الأدوات المستخدمة

- مقص، مسطرة.

مراجعة

١ اذكر نوع كل مثلث بحسب أطوال الأضلاع المعطاة.

(أ) ٤ سم، ٦ سم، ٨ سم.

منفرج الزاوية لأن: $٨^٢ = ٦٤ > ٤^٢ + ٦^٢ = ٥٢$.

(ب) ٦ سم، ٧ سم، ٨ سم.

حاد الزوايا لأن: $٨^٢ = ٦٤ < ٦^٢ + ٧^٢ = ٨٥$.

(جـ) ٢٠ سم، ١٥ سم، ٢٥ سم.

قائم الزاوية لأن: $٢٥^٢ = ٦٢٥ = ١٥^٢ + ٢٠^٢$.

◄ **صلة الدّرس** في هذا الدرس، سوف تتعرف خصائص القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث.

١ – التمهيد

استكشف

الغاية

يتعرف الطلاب خصائص القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في أي مثلث لتساعدهم في حل مسائل هندسية وحياتية.

مثال (١)

أوجد قيمة س في الحالات التالية: (بالبرهان)

(أ)

(أ) المعطيات: أو = و جـ ، أهـ = هـ ب ،
ب جـ = ١٥ سم
المطلوب: إيجاد قيمة س.
البرهان:
∵ و منتصف أجـ ، هـ منتصف أب (معطى)
∴ وهـ // جـ ب ، و هـ = $\frac{١}{٢}$ جـ ب نظرية (١)
س = $\frac{١}{٢}$ × ١٥ بالتعويض
أي أن س = ٧,٥ سم.

(ب)

(ب) المعطيات: ل ك = ك م = ل هـ = هـ ن،
ق (م̂) = ٦٠° ؛ هـ ك = ٥ سم
المطلوب: إيجاد قيمة س.
البرهان:
∵ هـ منتصف ل ن ، ك منتصف ل م (معطى)
∴ هـ ك // ن م ، هـ ك = $\frac{١}{٢}$ ن م نظرية (١)
٥ = $\frac{١}{٢}$ ن م بالتعويض
ن م = ١٠ سم
∵ ل ك = ك م = ل هـ = هـ ن (معطى)
∴ ل م = ل ن
ويكون المثلث ل ن م متطابق الضلعين؛
وبما أن إحدى زواياه قياسها ٦٠°، فيصبح متطابق الأضلاع
وبالتالي: س = ١٠ سم.

ملاحظة:
في المثلث متطابق الضلعين إذا كان قياس إحدى زوايا القاعدة يساوي ٦٠° فإن المثلث يكون متطابق الأضلاع.

حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل، أوجد قيمة س. (بالبرهان)

٥٧

التقييم المستمر

تابع عمل الطلاب وهم يحاولون إيجاد منتصف كل قطعة مستقيمة في المثلث وساعدهم في استخدام طرائق هندسية معروفة، ثم أرشدهم إلى إيجاد العلاقة بين القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي الضلعين والضلع المقابل لها إن لجهة الطول أو التوازي.

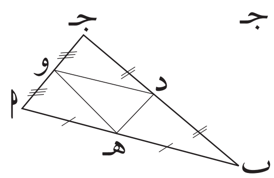
للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

في المثلث أ ب جـ لدينا: د منتصف ب جـ

هـ منتصف أب، و منتصف أجـ.

محيط المثلث أ ب جـ يساوي ٢٦ سم.

اطلب إليهم إيجاد محيط المثلث د هـ و.



محيط المثلث د هـ و يساوي ٢٦ ÷ ٢ = ١٣ سم.

المتابعة

من المهم جدًّا متابعة نشاط «استكشف» مع الطلاب ومناقشة كل خطوة يقومون بها.

تأكد من أنهم توصلوا إلى النتائج التي تربط بين القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث والضلع الثالث المقابل لها.

إجابات «استكشف»

❶ - ❸ تحقق من إجابات الطلاب.

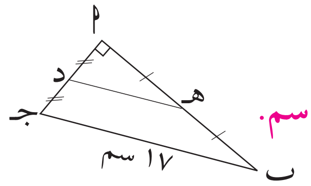
٢- التعليم

تعلم

تأكد من فهم الطلاب لخصائص القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث. اسألهم ما علاقة هذه القطعة المستقيمة بالضلع الثالث.

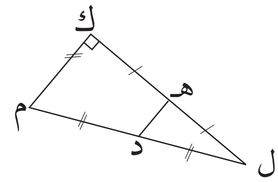
أمثلة بديلة

❶ أوجد طول هـ د في المثلث.



هـ د = $\frac{١}{٢}$ جـ ب، هـ د = ٥ , ٨ سم.

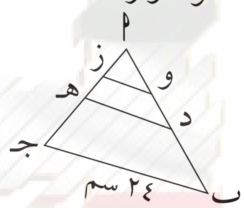
❷ هـ د = (٢ س − ٧) وحدة طول، ك م = (٣ س − ٥) وحدة طول. أوجد قيمة س، ثم طول هـ د، ك م.



س = ٩؛ هـ د = ١١ وحدة طول؛ ك م = ٢٢ وحدة طول.

❸ في المثلث ﻡ ب جـ نأخذ د منتصف ﻡ ب ؛ و منتصف ﻡ د؛ هـ منتصف ﻡ جـ ؛ ز منتصف ﻡ هـ .

أوجد طول و ز .



في المثلث ﻡ ب جـ نكتب: د هـ = $\frac{١}{٢}$ جـ ب = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤؛

د هـ = ١٢ سم.

في المثلث ﻡ د هـ نكتب: وز = $\frac{١}{٢}$ د هـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢؛

و ز = ٦ سم.


مثال (٢)

في الشكل الرباعي ﻡ ب جـ د. إذا كان هـ ، ف ، ز، ق منتصفات الأضلاع ب ﻡ ، ﻡ د ، د جـ ، جـ ب على الترتيب.
ب د = ١٨ سم. أوجد هـ ف ، ق ز.

المعطيات: هـ منتصف ب ﻡ
ف منتصف ﻡ د
ز منتصف د جـ
ق منتصف جـ ب
ب د = ١٨ سم

المطلوب: إيجاد طول هـ ف ، ق ز.

البرهان: في المثلث د ب جـ :

∵ ق منتصف ب جـ (معطى)
∵ ز منتصف جـ د (معطى)
∴ ق ز // ب د ، ق ز = $\frac{١}{٢}$ ب د نظرية (١)
ق ز = $\frac{١}{٢}$ × ١٨ بالتعويض
ق ز = ٩ سم

في المثلث ﻡ ب د:

∵ هـ منتصف ﻡ ب (معطى)
∵ ف منتصف ﻡ د (معطى)
∴ هـ ف // ب د ، هـ ف = $\frac{١}{٢}$ ب د نظرية (١)
هـ ف = $\frac{١}{٢}$ × ١٨ بالتعويض
هـ ف = ٩ سم

حاول أن تحل

٢ في المثال (٢)، إذا كانت ﻡ جـ = ٢٠ سم، فأوجد ق هـ ، ز ف.

٥٨

إجابات «حاول أن تحل»

❶ س + ٧ = ٢(٢س − ٤)؛ س = ٥.

❷ في المثلث ﻡ ب جـ نكتب: ق هـ = $\frac{١}{٢}$ ﻡ جـ

ق هـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢٠ = ١٠ سم.

في المثلث ﻡ د جـ نكتب: زف = $\frac{١}{٢}$ × ٢٠ = ١٠ سم

❸ في المثلث ﻡ ب جـ نكتب هـ ء = $\frac{١}{٢}$ ﻡ جـ

هـ د = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ = ٨ سم

في المثلث ب هـ ء نكتب ك ل = $\frac{١}{٢}$ هـ ء

ك ل = $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٤ سم.

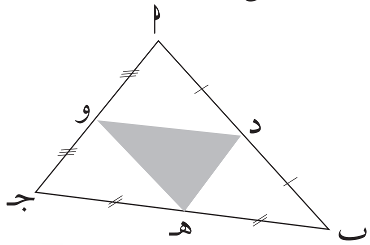
٣- التدريب والتقييم

تحقق من فهمك

تأكد من أن الطلاب قد فهموا وجود ثلاث قطع مستقيمة تصل بين منتصفي ضلعين في كل مثلث والناتج هو مثلث رؤوسه منتصفات الأضلاع الثلاثة في المثلث الأساسي.

إجابات «تحقق من فهمك»

❶



د و = $\frac{١}{٢}$ ب جـ؛ د هـ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ؛ هـ و = $\frac{١}{٢}$ أ ب.

أي أن: محيط المثلث د هـ و = $\frac{١}{٢}$ محيط المثلث أ ب جـ.

مساحة المثلث د هـ و = $\frac{١}{٤}$ مساحة المثلث أ ب جـ.

❷ ٢ س سنتيمتر.

مثال (٣)

في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث فيه د، و، هـ منتصفات $\overline{أب}$، $\overline{ب جـ}$، $\overline{جـ أ}$ على الترتيب.

إذا كان ب جـ = ١٠ سم فأوجد د هـ، ثم أثبت أن د و جـ هـ متوازي أضلاع.

المعطيات: أ ب جـ مثلث حيث:

أ د = د ب ؛ ب و = و جـ

أ هـ = هـ جـ

ب جـ = ١٠ سم

المطلوب: (١) إيجاد د هـ.

(٢) إثبات أن د و جـ هـ متوازي أضلاع.

البرهان: (١) ∵ د منتصف $\overline{أب}$، هـ منتصف $\overline{أ جـ}$ (معطى)

∴ $\overline{د هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ؛ د هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ نظرية (١)

∴ د هـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ٥ سم بالتعويض

(٢) ∵ جـ و = ٥ سم (جـ و = و ب)

لذا يكون: د هـ = جـ و = ٥ سم

ولدينا $\overline{د هـ}$ // $\overline{جـ و}$

∴ د و جـ هـ متوازي أضلاع (رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان في الطول).

حاول أن تحل

٣ في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث، أ جـ = ١٦ سم. هـ منتصف $\overline{أب}$، ء منتصف $\overline{جـ ب}$، ك منتصف $\overline{ب هـ}$، ل منتصف $\overline{ء ب}$. أوجد طول ك ل.

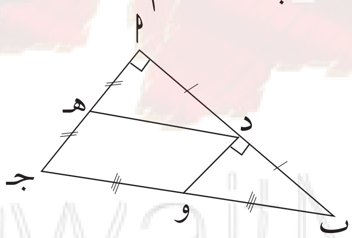
تحقق من فهمك

١ إذا وصلت المنتصفات بين كل زوجين من أضلاع في مثلث، فما علاقة محيط المثلث الذي تحصل عليه بمحيط المثلث الأساسي؟

٢ إذا كان طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين يساوي س سنتيمتر، فكم يساوي طول الضلع الثالث في المثلث؟

٥٩

❷ أ ب = ١٢ سم، أ جـ = ٥ سم.



(أ) أوجد طول د هـ.

(ب جـ)^٢ = (١٢)^٢ + (٥)^٢ = ١٦٩

ب جـ = ١٣ سم

د هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٣ = ٦,٥

د هـ = ٦,٥ سم

(ب) ما نوع المثلث ب د و؟

$\overline{د و}$ // $\overline{أ جـ}$ لذا $\overline{د و}$ ⊥ $\overline{ب أ}$

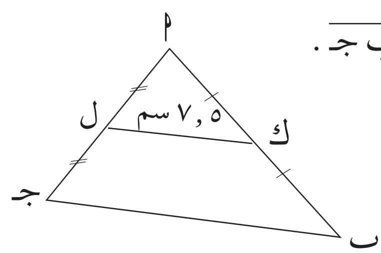
و بالتالي فالمثلث ب د و قائم الزاوية في د.

تقييم بديل

المجلة: شجع الطلاب على استخدام الفرجار أو المسطرة المرقمة لإيجاد طول القطعة المستقيمة الواصلة بين ضلعين في المثلث، ثم إيجاد طول الضلع الثالث المقابل لهما والمقارنة بينهما.

اختبار سريع

❶ أوجد طول $\overline{ب جـ}$.



ب جـ = ٢ × ٧,٥ = ١٥ سم.

إجابات «المرشد لحل المسائل»

❶ ؟، ب، جـ، د هي نقاط منتصفات $\overline{\text{ف و}}$، $\overline{\text{ف ق}}$، $\overline{\text{ق هـ}}$، $\overline{\text{هـ و}}$ على الترتيب.

❷ تحديد نوع الشكل الرباعي ؟ب جـ د.

❸ المثلث ف ق و.

❹ المثلث ق هـ و.

❺ $\overline{\text{؟ب}}$ موازية للضلع $\overline{\text{ق و}}$.

؟ب = $\frac{1}{2}$ ق و.

أيضًا $\overline{\text{جـ د}}$ موازية للضلع $\overline{\text{ق و}}$.

جـ د = $\frac{1}{2}$ ق و .

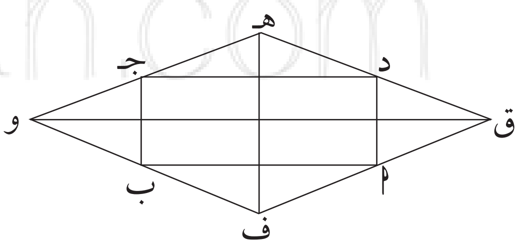
❻ $\overline{\text{؟ب}}$ // $\overline{\text{ق و}}$ // $\overline{\text{جـ د}}$

؟ب = جـ د = $\frac{1}{2}$ ق و.

❼ الشكل الرباعي ؟ب جـ د له ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان إذًا فهو متوازي أضلاع.

❽ $\overline{\text{جـ ب}}$ // $\overline{\text{د؟}}$ لأنهما موازيان للضلع $\overline{\text{هـ ف}}$.

❾

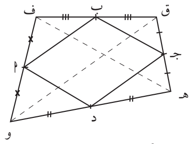


في المعين يتقاطع قطراه في منتصف كل منهما ويتعامدان عند نقطة التقاطع، لذا يكون الشكل الرباعي ؟ ب جـ د مستطيلًا.

المرشد لحل المسائل (٧-٢)

حلّ المسائل
افهمْ
خطِّطْ
حُلَّ
تحقَّقْ

في الشكل الرباعي المقابل، ؟، ب، جـ، د منتصفات الأضلاع:
$\overline{\text{ف و}}$، $\overline{\text{ف ق}}$، $\overline{\text{ق هـ}}$، $\overline{\text{هـ و}}$ على الترتيب.
حدد نوع الشكل الرباعي ؟ب جـ د.



افهم

١ ما العلاقة التي تربط النقاط ؟، ب، جـ، د بالشكل الرباعي و ف ق هـ ؟ ....

٢ ما المطلوب إليك إيجاده؟ ....

خطط

٣ سمّ مثلثًا يكون ؟، ب منتصفين لضلعين من أضلاعه. ....

٤ سمّ مثلثًا يكون جـ، د منتصفين لضلعين من أضلاعه. ....

....

حل

٥ مستخدمًا القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث، أوجد العلاقة بين $\overline{\text{؟ب}}$، $\overline{\text{و ق}}$ وبين $\overline{\text{د جـ}}$، $\overline{\text{و ق}}$.

....

....

٦ استنتج علاقة بين $\overline{\text{؟ب}}$، $\overline{\text{د جـ}}$. ....

٧ حدد نوع الشكل الرباعي ؟ب جـ د . ...

تحقق

٨ تحقق من النتيجة مستخدمًا الضلعين الآخرين (أي $\overline{\text{جـ ب}}$، $\overline{\text{د؟}}$) من الشكل الرباعي ؟ب جـ د . ...

....

حل مسألة أخرى

٩ في المعين ق ف و هـ منتصفات الأضلاع هي: ؟، ب، جـ، د. حدد نوع الشكل الرباعي ؟ب جـ د.

....

٦٠

تمرَّنْ ٧-٢

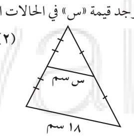
التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث
Midsegment of Triangle

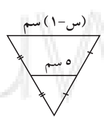
تدرَّبْ وطبِّقْ

ابدأْ أوجد قيمة «س» في الحالات التالية:

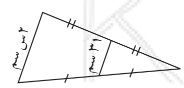
(١)

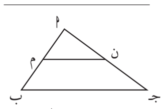


(٢)



(٣)

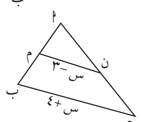




(٤) $\overline{\text{م ن}}$ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي $\overline{\text{؟ب}}$، $\overline{\text{؟جـ}}$ في المثلث ؟ب جـ .

(أ) إذا كان ب جـ = ١٧ سم، أوجد م ن. ________

(ب) إذا كان ؟جـ = ١٣ سم، ؟ب = ١٠ سم، أوجد محيط المثلث ؟م ن . ________



(٥) $\overline{\text{م ن}}$ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي $\overline{\text{؟ب}}$، $\overline{\text{؟جـ}}$ في المثلث ؟ب جـ.

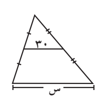
(أ) أوجد قيمة س.

____

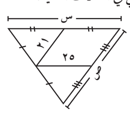
(ب) استنتج $\overline{\text{ن م}}$، $\overline{\text{جـ ب}}$. ________

أوجد قيم المتغيرات باستخدام الحساب الذهني في الحالات التالية:

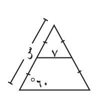
(٦)



(٧)



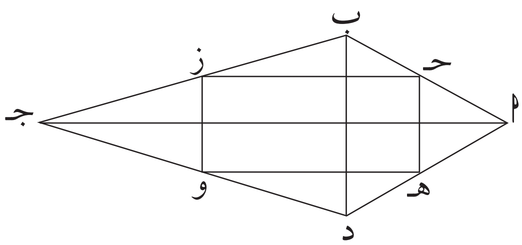
(٨)



٢٩

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

❶



لدينا أجـ = ٩٠ سم، ب د = ٦٤ سم

هـ و = ح ز = $\frac{١}{٢}$ أ جـ؛

هـ و = ح ز = $\frac{١}{٢}$ × ٩٠ = ٤٥ سم

هـ ح = و ز = $\frac{١}{٢}$ ب د؛ هـ ح = و ز = $\frac{١}{٢}$ × ٦٤ = ٣٢ سم

طول شرائط الزينة = هـ و + و ز + ز ح + ح هـ =

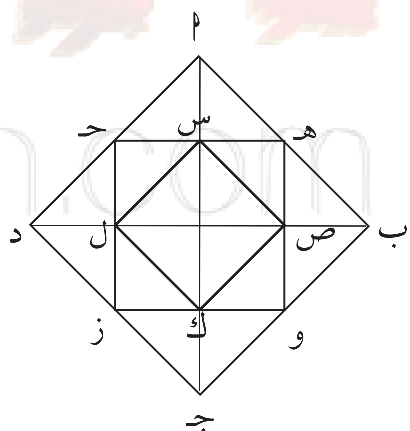
٤٥ + ٣٢ + ٤٥ + ٣٢ = ١٥٤ سم.

❷ (أ) جـ ب = ٢ د هـ = ٢ × ٧ = ١٤ سم.

(ب) محيط المثلث أ د هـ = أد + د هـ + أهـ .

محيط المثلث أ د هـ = ٦,٥ + ٥ + ٧ = ١٨,٥ سم.

❸



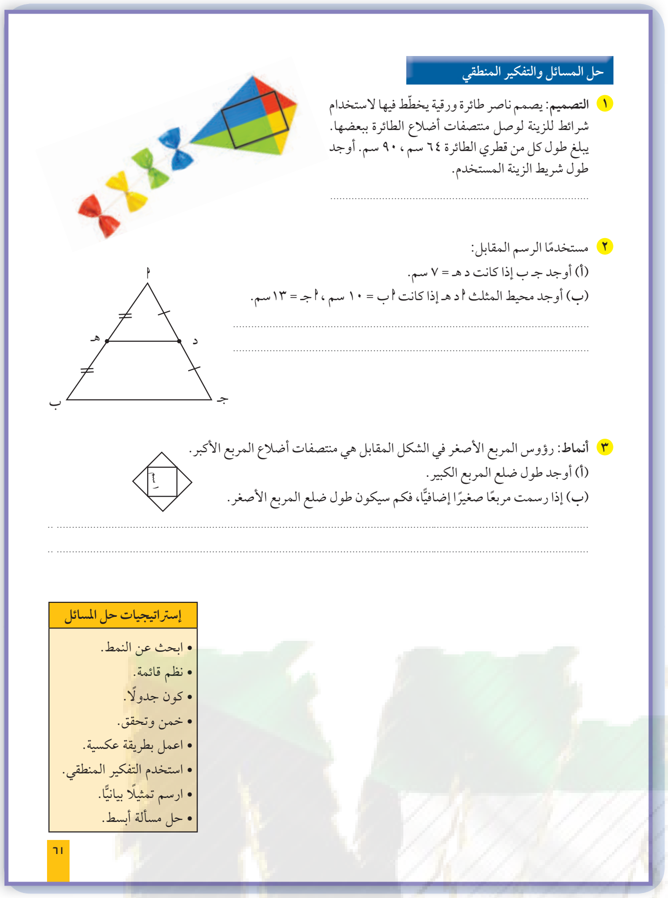
(أ) هـ و = ١ سم لذا أ جـ = ٢ سم

وباستخدام نظرية فيثاغورث في المثلث قائم الزاوية والمتطابق الضلعين أ ب جـ تكتب: (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢}

٢(أب)^{٢} = ٤، (أب)^{٢} = ٢، أ ب = $\sqrt{٢}$ سم

(ب) طول ضلع المربع س ص ك ل

هو $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ سم. (انظر إلى الصورة).



حل المسائل والتفكير المنطقي

١ **التصميم**: يصمم ناصر طائرة ورقية يخطّط فيها لاستخدام شرائط للزينة لوصل منتصفات أضلاع الطائرة ببعضها. يبلغ طول كل من قطري الطائرة ٦٤ سم ، ٩٠ سم. أوجد طول شريط الزينة المستخدم.

٢ مستخدمًا الرسم المقابل:

(أ) أوجد جـ ب إذا كانت د هـ = ٧ سم.

(ب) أوجد محيط المثلث أ د هـ إذا كانت أ ب = ١٠ سم ، أ جـ = ١٣ سم.

٣ **أنماط**: رؤوس المربع الأصغر في الشكل المقابل هي منتصفات أضلاع المربع الأكبر.

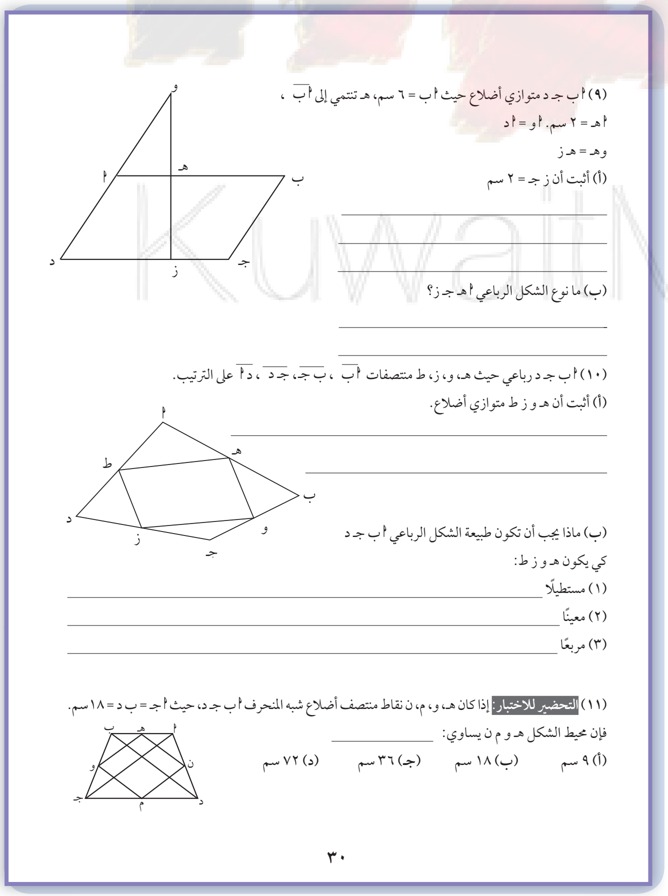
(أ) أوجد طول ضلع المربع الكبير.

(ب) إذا رسمت مربعًا صغيرًا إضافيًّا، فكم سيكون طول ضلع المربع الأصغر.

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- كون جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٦١



(٩) أ ب جـ د متوازي أضلاع حيث أ ب = ٦ سم، هـ تنتمي إلى $\overline{أب}$ ،

أ هـ = ٢ سم. أ و = أ د

وهـ = هـ ز

(أ) أثبت أن ز جـ = ٢ سم

(ب) ما نوع الشكل الرباعي أ هـ جـ ز؟

(١٠) أ ب جـ د رباعي حيث هـ، و، ز، ط منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{ب جـ}$، $\overline{جـ د}$ ، $\overline{د أ}$ على الترتيب.

(أ) أثبت أن هـ و ز ط متوازي أضلاع.

(ب) ماذا يجب أن تكون طبيعة الشكل الرباعي أ ب جـ د كي يكون هـ و ز ط:

(١) مستطيلًا

(٢) معينًا

(٣) مربعًا

(١١) التحضير للاختبار: إذا كان هـ، و، م، ن نقاط منتصف أضلاع شبه المنحرف أ ب جـ د، حيث أ جـ = ب د = ١٨ سم.

فإن محيط الشكل هـ و م ن يساوي: ______

(أ) ٩ سم (ب) ١٨ سم (جـ) ٣٦ سم (د) ٧٢ سم

٣٠

٧–٣

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحدد خواص القطعة المستقيمة التي تصل رأس زاوية قائمة بمنتصف الوتر.

الأدوات المستخدمة

- مسطرة.

مراجعة

❶ ما خاصية القطرين في المستطيل؟
يكون القطران في المستطيل متطابقين ويتقاطعان في منتصف كل منهما.

❷ ما خاصية القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث؟
تكون موازية للضلع الثالث وطولها يساوي نصف طوله.

◄ صلة الدّرس في السابق، تعرفت القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث. في هذا الدرس، سوف تتعرف خصائص القطعة المستقيمة التي تصل رأس زاوية قائمة بمنتصف الوتر.

١ – التمهيد

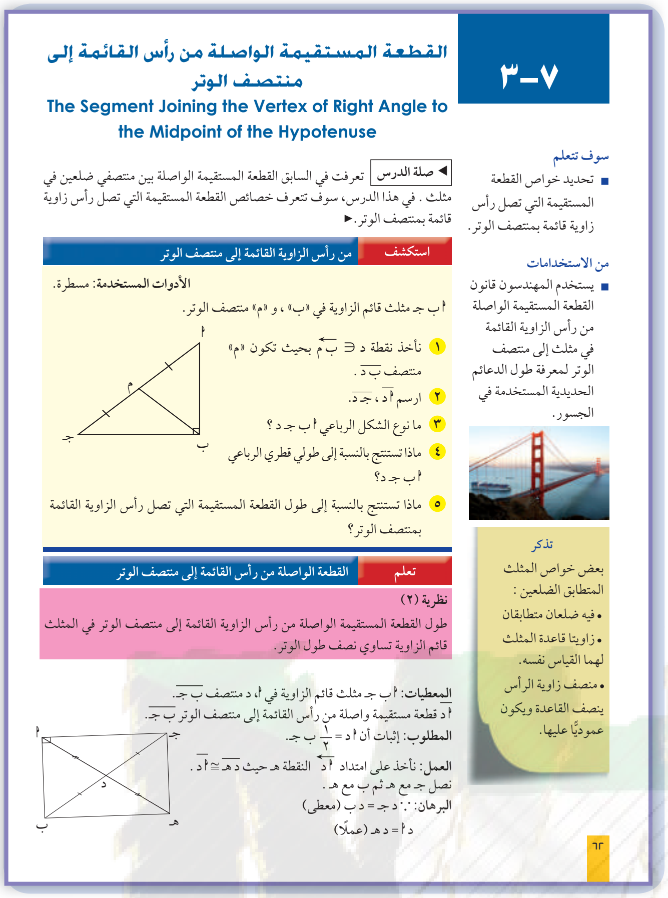
استكشف

الغاية

يتعرّف الطلاب خاصية القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر في المثلث قائم الزاوية فقط ويستخدمونها في مواقف حياتية هندسية.

التقييم المستمر

تابع مع الطلاب نشاط فقرة «استكشف» وتأكد من أنهم تعرفوا شكل الرباعي المطلوب.



٧–٣

القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر

The Segment Joining the Vertex of Right Angle to the Midpoint of the Hypotenuse

سوف تتعلم

- تحديد خواص القطعة المستقيمة التي تصل رأس زاوية قائمة بمنتصف الوتر.

من الاستخدامات

- يستخدم المهندسون قانون القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة في مثلث إلى منتصف الوتر لمعرفة طول الدعائم الحديدية المستخدمة في الجسور.

◄ صلة الدرس تعرفت في السابق القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث . في هذا الدرس، سوف تتعرف خصائص القطعة المستقيمة التي تصل رأس زاوية قائمة بمنتصف الوتر.►

استكشف من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر

الأدوات المستخدمة: مسطرة.

ﺃ ب جـ مثلث قائم الزاوية في «ب» ، و «م» منتصف الوتر.

١ نأخذ نقطة د ∈ ب م بحيث تكون «م» منتصف ب د .

٢ ارسم ﺃ د ، جـ د.

٣ ما نوع الشكل الرباعي ﺃ ب جـ د ؟

٤ ماذا تستنتج بالنسبة إلى طولي قطري الرباعي ﺃ ب جـ د؟

٥ ماذا تستنتج بالنسبة إلى طول القطعة المستقيمة التي تصل رأس الزاوية القائمة بمنتصف الوتر؟

تعلم القطعة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر

نظرية (٢)

طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر في المثلث قائم الزاوية تساوي نصف طول الوتر.

تذكر

بعض خواص المثلث المتطابق الضلعين :

- فيه ضلعان متطابقان
- زاويتا قاعدة المثلث لهما القياس نفسه.
- منصف زاوية الرأس ينصف القاعدة ويكون عموديًا عليها.

المعطيات: ﺃ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ﺃ، د منتصف ب جـ.
ﺃ د قطعة مستقيمة واصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر ب جـ.

المطلوب: إثبات أن ﺃ د = $\frac{1}{2}$ ب جـ.

العمل: نأخذ على امتداد ﺃ د النقطة هـ حيث د هـ ≅ ﺃ د .
نصل جـ مع هـ ثم ب مع هـ .

البرهان: ∵ د جـ = د ب (معطى)
د ﺃ = د هـ (عملًا)

٦٢

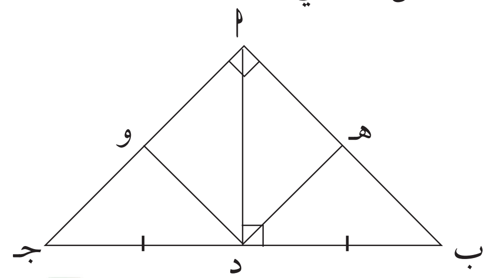
للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

أعطهم المسألة التالية واطلب إليهم إيجاد الحل:

ٲب جـ مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين.

$\overline{ٲب} \cong \overline{ٲجـ}$، هـ، د، و منتصفات $\overline{ٲب}$، $\overline{ب جـ}$، $\overline{جـ ٲ}$ على الترتيب.

ما شكل الرباعي ٲهـ د و؟



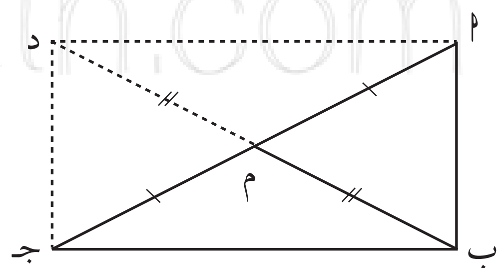
دهـ = $\frac{١}{٢}$ ٲب؛ دو = $\frac{١}{٢}$ ٲجـ ، لذا د هـ = هـ ٲ = ٲو = ود، يوجد أيضًا زاوية قائمة لذا يكون الشكل الرباعي ٲهـ د و مربعًا.

المتابعة

تابع الطلاب وهم يرسمون النقطة الرابعة ليحصلوا على الشكل الرباعي.

إجابات «استكشف»

❶ ، ❷ انظر إلى الرسم



❸ مستطيل.

❹ يكون القطران في المستطيل متطابقين.

❺ ب م = م د = مٲ = م جـ ، لذا ب م = $\frac{١}{٢}$ ٲجـ.

∴ الشكل الرباعي ٲب هـ جـ متوازي أضلاع (القطران ينصف كلًّا منهما الآخر).

ٲب هـ جـ مستطيل (متوازي أضلاع يتضمن زاوية قائمة).

ٲهـ = ب جـ (تساوي القطرين في المستطيل).

∵ ٲد = $\frac{١}{٢}$ ٲهـ

∴ ٲد = $\frac{١}{٢}$ ب جـ (وهو المطلوب)

مثال (١)

ٲب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، ق ($\hat{ٲ}$) = ٦٠°، د منتصف $\overline{ٲجـ}$. أثبت أن: ٲب د مثلث متطابق الأضلاع، وأن ٲب = $\frac{١}{٢}$ ٲجـ .

تذكر
ٲ ب جـ مثلث متطابق الضلعين رأسه ٲ :
ٲب = ٲجـ
ق ($\hat{ب}$) = ق($\hat{جـ}$)

المعطيات: ٲب جـ مثلث قائم الزاوية في ب.

ق ($\hat{ٲ}$) = ٦٠°، د نقطة منتصف $\overline{ٲجـ}$.

المطلوب: إثبات أن المثلث ٲب د متطابق الأضلاع وأن ٲب = $\frac{١}{٢}$ ٲجـ

البرهان: ∵ ٲب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، د منتصف $\overline{ٲجـ}$.

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ ٲجـ (نظرية)

ب د = دٲ = د جـ (د منتصف $\overline{ٲجـ}$)

ب دٲ مثلث متطابق الضلعين (د ب = د ٲ)

ق ($\hat{ٲ}$) = ق (ٲ $\hat{ب}$ د) = ٦٠° (الزوايا في القاعدة متساوية القياس)

ق (ب $\hat{د}$ ٲ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٦٠°) (مجموع زوايا المثلث ١٨٠°)

ق (ب $\hat{د}$ ٲ) = ٦٠°

∴ المثلث ٲب د متطابق الأضلاع.

∴ ٲب = $\frac{١}{٢}$ ٲجـ .

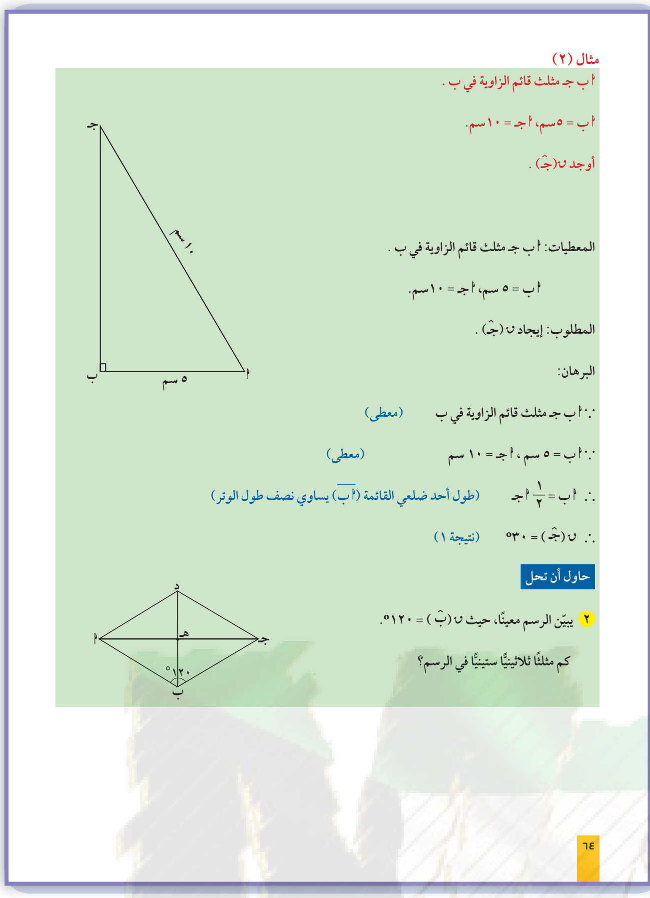
حاول أن تحل

١ أوجد ق ($\hat{جـ}$) في المثال (١).

نتيجة (١)

إذا كان في المثلث القائم الزاوية طول أحد ضلعي القائمة مساويًا نصف طول الوتر، فإن قياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع ٣٠° ويسمّى المثلث ثلاثينيًّا ستينيًّا.

٦٣



مثال (٢)

ﺃ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب .

ﺃ ب = ٥سم، ﺃ جـ = ١٠سم.

أوجد ق(جـ^) .

المعطيات: ﺃ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب .

ﺃ ب = ٥ سم، ﺃ جـ = ١٠سم.

المطلوب: إيجاد ق (جـ^) .

البرهان:

∵ ﺃ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب (معطى)

∵ ﺃ ب = ٥ سم ، ﺃ جـ = ١٠ سم (معطى)

∴ ﺃ ب = $\frac{1}{2}$ ﺃ جـ (طول أحد ضلعي القائمة ($\overline{\text{ﺃ ب}}$) يساوي نصف طول الوتر)

∴ ق (جـ^) = ٣٠° (نتيجة ١)

حاول أن تحل

٢ يبيّن الرسم معينًا، حيث ق (ب^) = ١٢٠°.

كم مثلثًا ثلاثينيًّا ستينيًّا في الرسم؟

٦٤

٢- التعليم

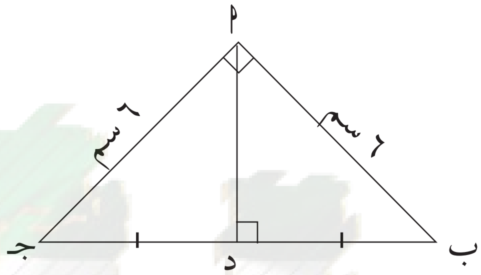
تعلم

ركز مع الطلاب على أن القطعة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر يساوي طولها نصف طول هذا الوتر، وإن هذه الخاصية لا تصلح إلا في المثلث قائم الزاوية.

أمثلة بديلة

❶ ﺃ ب جـ مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين،

ﺃ ب = ﺃ جـ = ٦ سم. أوجد طول $\overline{\text{ﺃ د}}$.



نظرية فيثاغورث: (ب جـ)^2 = (ﺃ ب)^2 + (ﺃ جـ)^2

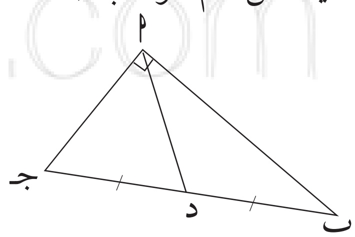
(ب جـ)^2 = ٣٦ + ٣٦ = ٧٢

ب جـ = ٦$\sqrt{2}$ سم

ﺃ د = $\frac{1}{2}$ ب جـ ؛ ﺃ د = ٣$\sqrt{2}$ سم

❷ ب جـ = (٣س + ٨) وحدة؛ ﺃ د = (س + ٧) وحدة.

أوجد قيمة س، ثم طول $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{ﺃ د}}$.

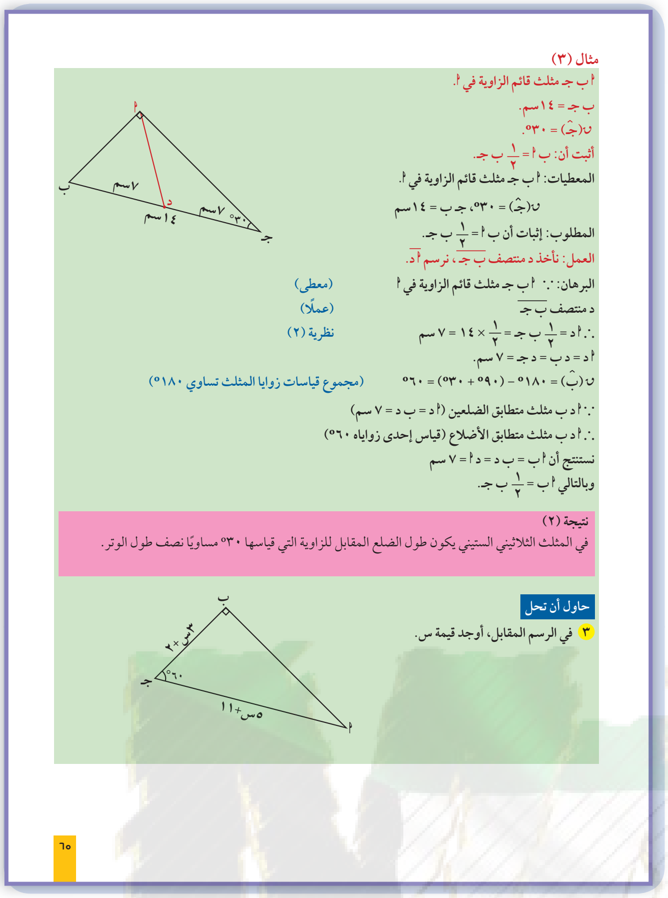


ب جـ = ٢ × ﺃ د

٣س + ٨ = ٢(س + ٧)

٣س + ٨ = ٢س + ١٤؛ س = ٦

ب جـ = ٢٦ وحدة؛ ﺃ د = ١٣ وحدة.


مثال (٣)

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ.

ب جـ = ١٤سم.

ق(جـ^) = ٣٠°.

أثبت أن: ب أ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ.

المعطيات: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ.

ق(جـ^) = ٣٠°، جـ ب = ١٤سم

المطلوب: إثبات أن ب أ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ.

العمل: نأخذ د منتصف ب جـ، نرسم أ د.

البرهان: ∵ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ	(معطى)
د منتصف ب جـ	(عملًا)
∴ أ د = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٤ = ٧ سم	نظرية (٢)
أ د = د ب = د جـ = ٧ سم.	
ق(ب^) = ١٨٠° − (٩٠° + ٣٠°) = ٦٠°	(مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي ١٨٠°)

∵ أ د ب مثلث متطابق الضلعين (أ د = ب د = ٧ سم)

∴ أ د ب مثلث متطابق الأضلاع (قياس إحدى زواياه ٦٠°)

نستنتج أن أ ب = ب د = د أ = ٧ سم

وبالتالي أ ب = $\frac{١}{٢}$ ب جـ.

نتيجة (٢)

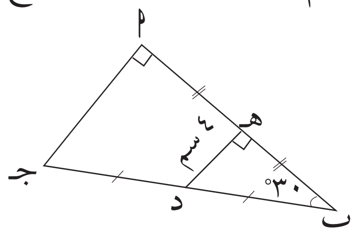
في المثلث الثلاثيني الستيني يكون طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° مساويًا نصف طول الوتر.

حاول أن تحل

٣ في الرسم المقابل، أوجد قيمة س.

٦٥

٣ في الرسم أدناه أوجد أطوال أضلاع المثلث أ ب جـ.



أ جـ = ٢ × هـ د؛ أ جـ = ٨ سم

ب جـ = ٢ × أ جـ؛ ب جـ = ١٦ سم

$(\text{ب أ})^٢ = (\text{ب جـ})^٢ - (\text{أ جـ})^٢$

$(\text{ب أ})^٢$ = ٢٥٦ − ٦٤ = ١٩٢؛ أ ب = ٨$\sqrt{٣}$ سم.

إجابات «حاول أن تحل»

١ ق(جـ^) = ١٨٠° − [ق(أ^) + ق(أ ب^ جـ)]

= ١٨٠° − [٦٠° + ٩٠°] = ٣٠°

٢ في المعين كل قطر هو منصف داخلي للزاويتين المتقابلتين

لذا يوجد في الرسم ٤ مثلثات ثلاثينية ستينية وهي:

د هـ جـ، د هـ أ، جـ هـ ب، أ هـ ب.

٣ المثلث قائم الزاوية ثلاثيني ستيني لذا أ جـ = ٢ × ب جـ

٥س + ١١ = ٢(٣س + ٢)؛ س = ٧.

٤ ز هـ // و د لذا الشكل الرباعي هـ و د ز شبه منحرف.

ثم ز و = $\frac{١}{٢}$ أ ب.

في المثلث قائم الزاوية أ د ب نجد أيضًا د هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب

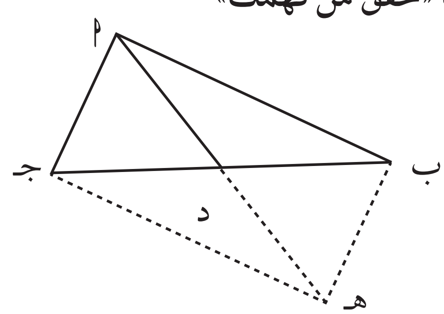
لذا: ز و = د هـ ،وبالتالي هـ ز و د شبه منحرف متطابق الضلعين.

٣- التدريب والتقييم

تحقق من فهمك

إجابات «تحقق من فهمك»

١

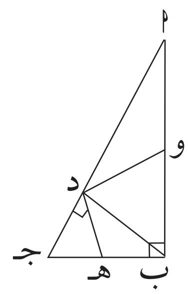


لنأخذ المثلث أ ب جـ حيث د منتصف ب جـ وأيضًا

أ د = $\frac{١}{٢}$ ب جـ، والسؤال هل أ ب جـ قائم الزاوية في أ؟

نكمل رسم متوازي الأضلاع أ ب هـ جـ على المثلث أ ب جـ فيكون أ، د، هـ على مستقيم واحد، وبما أن أ د = $\frac{١}{٢}$ ب جـ، لذا يكون القطران أ هـ، ب جـ متطابقين، وفي متوازي الأضلاع إذا كان القطران متطابقين يكون مستطيلًا، وبالتالي ق(ب أ جـ) = ٩٠° والمثلث أ ب جـ قائم الزاوية.

٢



د هـ + د و = $\frac{١}{٢}$ (جـ ب + أ ب)

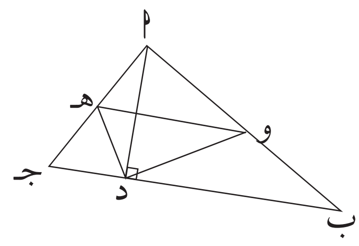
تقييم بديل

المجلة: شجع الطلاب على استخدام الفرجار أو مسطرة مرقمة لقياس طول الوتر في المثلث قائم الزاوية وقياس طول القطعة المستقيمة الواصلة بين القائمة ومنتصف الوتر، ثم المقارنة بين هذين الطولين.

اختبار سريع

أ ب جـ مثلث حيث أ ب = ٨ سم؛ أ جـ = ٦ سم؛ ب جـ = ٧ سم. $\overline{أد} \perp \overline{ب جـ}$. و منتصف $\overline{أب}$، هـ منتصف $\overline{أجـ}$.

أوجد محيط المثلث د و هـ.



و هـ = ٣,٥ سم، د و = ٤ سم، د هـ = ٣ سم.

محيط المثلث و د هـ = ٣,٥ + ٤ + ٣ = ١٠,٥ سم.

مثال (٤)

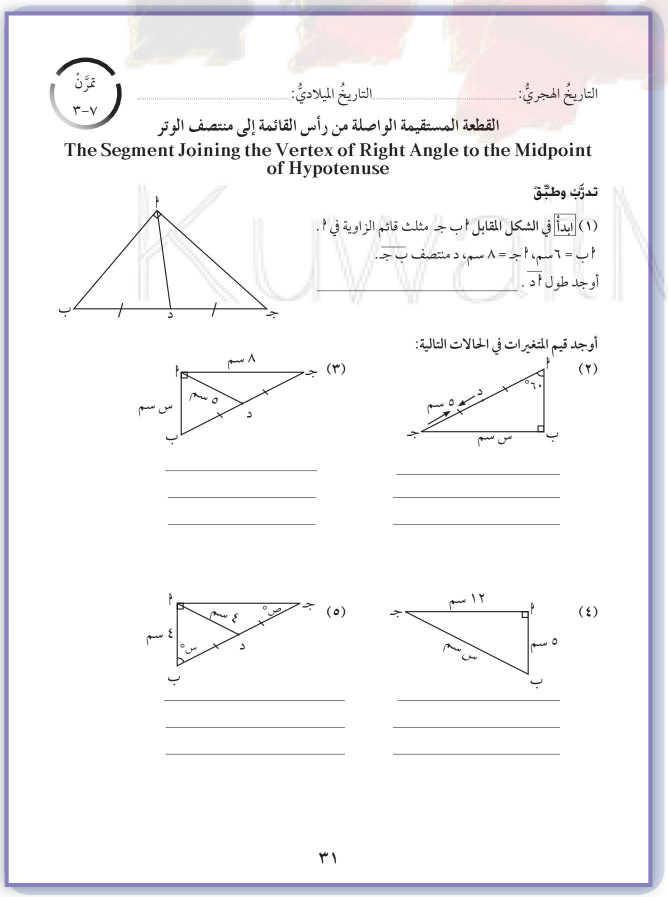
في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين ورأسه أ.
هـ نقطة منتصف $\overline{أب}$.
و نقطة منتصف $\overline{أجـ}$.
د نقطة منتصف $\overline{ب جـ}$.
أثبت أن الشكل الرباعي أ هـ د و معين .

المعطيات: أ ب = أ جـ
هـ منتصف $\overline{أب}$؛ و منتصف $\overline{أجـ}$
د منتصف $\overline{ب جـ}$.
المطلوب: إثبات أن الشكل الرباعي أ هـ د و معين.
البرهان: ∵ أ ب = أ جـ ، د منتصف $\overline{ب جـ}$ (معطى)
∴ أ د ب مثلث قائم الزاوية في د (خواص المثلث متطابق الضلعين)
هـ منتصف $\overline{أب}$ (معطى)
د هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب نظرية (٢)
∴ د هـ = هـ ب = هـ أ (١)
وبالمثل في المثلث أ د جـ
د و = $\frac{١}{٢}$ أ جـ نظرية (٢)
∴ د و = و جـ = و أ (٢)
ولكن أ هـ = هـ ب = أ و = و جـ (معطى)
من (١)، (٢) نستنتج أن:
أ هـ = هـ د = د و = و أ
∴ يكون أ هـ د و معينًا.

حاول أن تحل

٤ أ ب جـ مثلث، $\overline{أد} \perp \overline{ب جـ}$.
هـ ، و، ز منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ أ}$ على الترتيب.
أثبت أن الشكل الرباعي هـ ز و د شبه منحرف متطابق الضلعين.

٦٦



التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٧-٣

القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر

The Segment Joining the Vertex of Right Angle to the Midpoint of Hypotenuse

تدرَّبْ وطبِّقْ

(١) ابدأْ في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ.
أ ب = ٦ سم، أ جـ = ٨ سم، د منتصف $\overline{ب جـ}$.
أوجد طول $\overline{أد}$. ________

أوجد قيم المتغيرات في الحالات التالية:

(٢) (٣) (٤) (٥)

٣١

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

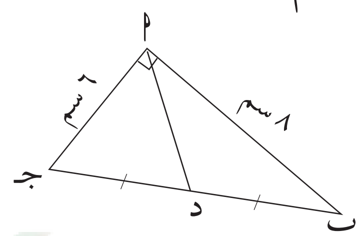
❶ النسبة ١ : ٢

❷ باستخدام نظرية فيثاغورث نجد أن:

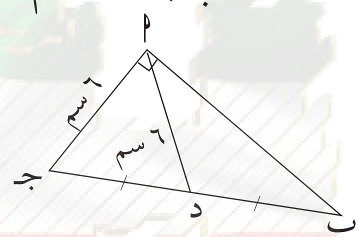
(ب جـ)^{٢} = ٨^{٢} + ٦^{٢} = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠.

ب جـ = ١٠ سم، ثم أ د = $\frac{١}{٢}$ ب جـ،

أ د = ٥ سم.



❸ ب جـ = ٢ × أ د؛ ب جـ = ١٢ سم.

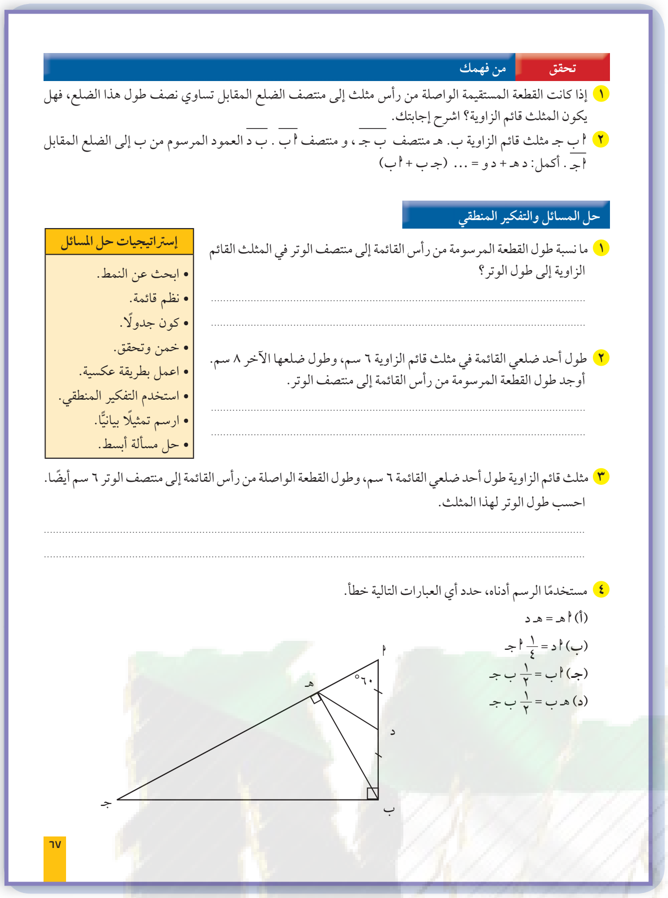


❹ (أ) صح.

(ب) صح.

(جـ) خطأ.

(د) صح.



تحقق من فهمك

١ إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة من رأس مثلث إلى منتصف الضلع المقابل تساوي نصف طول هذا الضلع، فهل يكون المثلث قائم الزاوية؟ اشرح إجابتك.

٢ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية ب. هـ منتصف ب جـ، و منتصف أ ب . ب د العمود المرسوم من ب إلى الضلع المقابل أ جـ . أكمل: د هـ + د و = ... (جـ ب + أ ب)

حل المسائل والتفكير المنطقي

إستراتيجيات حل المسائل
- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- كون جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

١ ما نسبة طول القطعة المرسومة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية إلى طول الوتر؟

٢ طول أحد ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية ٦ سم، وطول ضلعها الآخر ٨ سم. أوجد طول القطعة المرسومة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر.

٣ مثلث قائم الزاوية طول أحد ضلعي القائمة ٦ سم، وطول القطعة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر ٦ سم أيضًا. احسب طول الوتر لهذا المثلث.

٤ مستخدمًا الرسم أدناه، حدد أي العبارات التالية خطأ.

(أ) أ هـ = هـ د

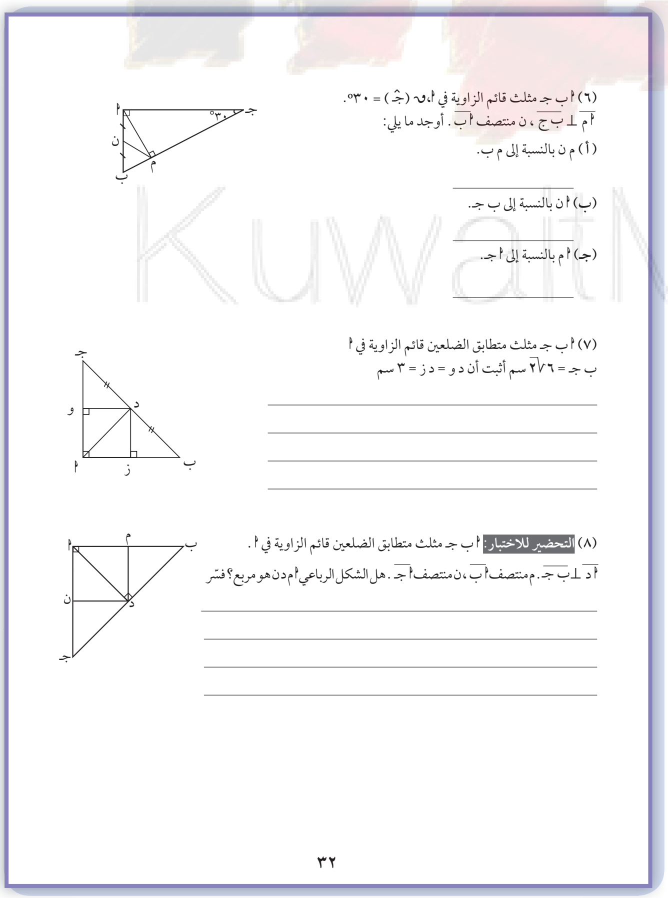
(ب) أ د = $\frac{١}{٤}$ أ جـ

(جـ) أ ب = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

(د) هـ ب = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

أ، هـ، ٦٠°، د، جـ، ب

٦٧



(٦) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، ق (جـ^) = ٣٠°.
أ م ⊥ ب ج ، ن منتصف أ ب . أوجد ما يلي:

(أ) م ن بالنسبة إلى م ب.

(ب) أ ن بالنسبة إلى ب جـ.

(جـ) أ م بالنسبة إلى أ جـ.

(٧) أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين قائم الزاوية في أ
ب جـ = ٦$\sqrt{٢}$ سم أثبت أن د و = د ز = ٣ سم

(٨) التحضير للاختبار: أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين قائم الزاوية في أ .
أ د ⊥ ب جـ. م منتصف أ ب ، ن منتصف أ جـ . هل الشكل الرباعي أ م د ن هو مربع؟ فسّر

٣٢


٧–٤
محاور أضلاع المثلث
Perpendicular Bisectors of a Triangle

سوف تتعلم
- إيجاد خصائص محاور أضلاع المثلث.

من الاستخدامات
- تستخدم خاصية تقاطع محاور أضلاع المثلث في نقطة واحدة في مجالات هندسة الديكور.

المصطلحات الأساسية
◄ محور القطعة المستقيمة Perpendicular Bisector

◄ **صلة الدرس** تعرفت في السابق منتصفات الأضلاع. في هذا الدرس ستتعرف محاور الأضلاع. ►

استكشف محاور أضلاع المثلث

الأدوات المستخدمة: مقص.

١ ارسم مثلثين أحدهما قائم الزاوية والآخر حاد الزوايا، ثم قصهما.
٢ اطو المثلث حاد الزوايا بحيث ينطبق رأسين من المثلث في كل مرة، وتتشكل فيه المنصفات العمودية (محاور) لكل ضلع. ماذا تلاحظ؟
٣ أعد الخطوة ٢ مع المثلث قائم الزاوية.
٤ ارسم مثلثًا منفرج الزاوية في وسط الورقة (لا تقصها)، ثم أعد الخطوة ٢. ماذا تلاحظ؟
٥ اذكر خاصية للمحاور في المثلث.

طي محور

تعلم محاور أضلاع المثلث تتلاقى في نقطة واحدة

إن محور القطعة المستقيمة هو العمود المنصف لها.

فمثلاً في الشكل: المستقيم ل محور $\overline{أب}$.

خاصية: أي نقطة تنتمي إلى محور قطعة مستقيمة تقع على بعدين متساويين من طرفيها.

في الشكل المقابل م أ = م ب.

نظرية (٣)
محاور الأضلاع الثلاثة في المثلث تتلاقى في نقطة واحدة.

٦٨

٧–٤

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يجد خصائص محاور أضلاع المثلث.

المصطلحات الأساسية

- محور القطعة المستقيمة.

الأدوات المستخدمة

- مقص.

مراجعة

❶ ما تعريف محور القطعة المستقيمة؟
هو العمود المنصف لها.

❷ ما خاصية كل نقطة على محور القطعة المستقيمة؟
كل نقطة على محور القطعة المستقيمة تكون متساوية البعد عن طرفيها.

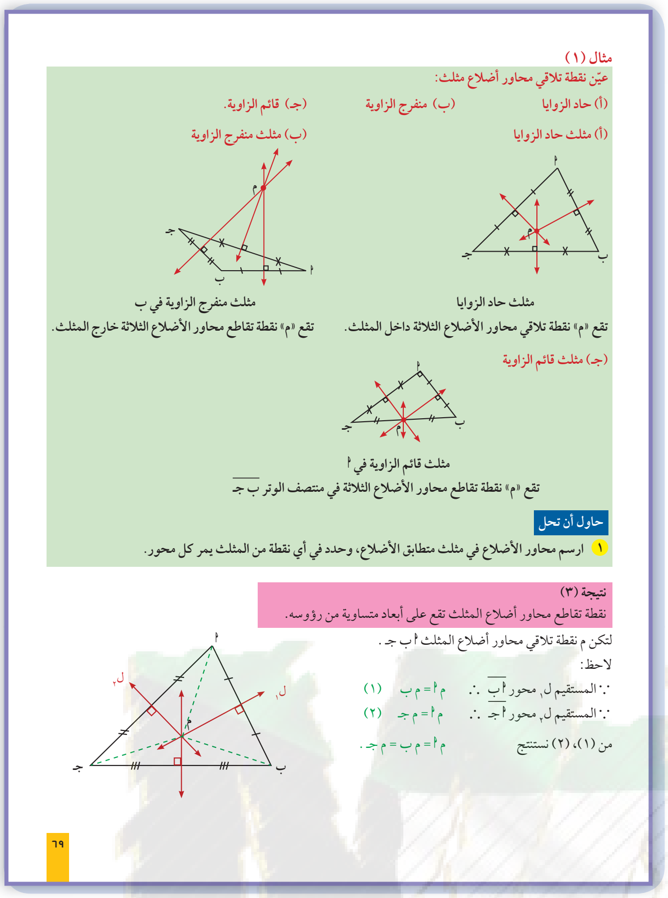
◄ **صلة الدّرس** في السابق، تعرفت منتصفات الأضلاع. في هذا الدرس ستتعرف محاور الأضلاع.

١ – التمهيد

استكشف

الغاية

يتعرف الطلاب محاور أضلاع المثلث الثلاثة ويستكشفون تلاقيها في نقطة واحدة تقع على البعد نفسه من الرؤوس الثلاثة للمثلث، ويطبقون هذه النتائج على مسائل متعددة.


مثال (١)

عيّن نقطة تلاقي محاور أضلاع مثلث:

(أ) حاد الزوايا (ب) منفرج الزاوية (جـ) قائم الزاوية.

(أ) مثلث حاد الزوايا

مثلث حاد الزوايا

تقع «م» نقطة تلاقي محاور الأضلاع الثلاثة داخل المثلث.

(ب) مثلث منفرج الزاوية

مثلث منفرج الزاوية في ب

تقع «م» نقطة تقاطع محاور الأضلاع الثلاثة خارج المثلث.

(جـ) مثلث قائم الزاوية

مثلث قائم الزاوية في أ

تقع «م» نقطة تقاطع محاور الأضلاع الثلاثة في منتصف الوتر $\overline{\text{ب جـ}}$

حاول أن تحل

١ ارسم محاور الأضلاع في مثلث متطابق الأضلاع، وحدد في أي نقطة من المثلث يمر كل محور.

نتيجة (٣)

نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث تقع على أبعاد متساوية من رؤوسه.

لتكن م نقطة تلاقي محاور أضلاع المثلث أ ب جـ .

لاحظ:

∵ المستقيم $ل_{١}$ محور $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ م أ = م ب (١)

∵ المستقيم $ل_{٢}$ محور $\overline{\text{أ جـ}}$ ∴ م أ = م جـ (٢)

من (١)، (٢) نستنتج م أ = م ب = م جـ .

٦٩

التقييم المستمر

راقب الطلاب وهم يحاولون رسم محور قطعة مستقيمة.
ساعدهم على استخدام أدوات هندسية مثل الفرجار والمسطرة أو بواسطة الطي كما ورد في فقرة «استكشف».

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

اطلب إليهم رسم مستطيل في داخله قطر واحد، ثم اطلب إليهم إيجاد نقطة تلاقي المحاور الثلاثة في كل مثلث حصلوا عليه.

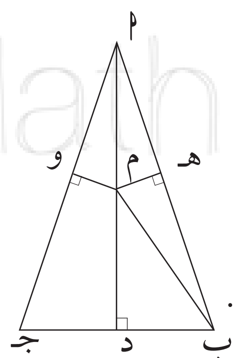
إجابات «استكشف»

تابع عمل الطلاب من الرقم ١ إلى الرقم ٥، ساعدهم في هذا النشاط حتى يتمكنوا من استكشاف أن المحاور الثلاثة تتلاقى في نقطة واحدة.

٢- التعليم

تعلم

من المهم جدًّا أن يفهم الطلاب خاصية تلاقي المحاور الثلاثة في المثلث، لأن ذلك سوف يساعدهم على حل مسائل متنوعة في الهندسة.



أمثلة بديلة

❶ المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين.
$\overline{\text{أ ب}} \cong \overline{\text{أ جـ}}$، م نقطة تلاقي محاوره.
نأخذ ب جـ = ١٢ سم، م د = ٨ سم.
أوجد طول $\overline{\text{م أ}}$، $\overline{\text{أ ب}}$.

في المثلث م د ب قائم الزاوية نكتب: (م ب)^{٢} = ٦^{٢} + ٨^{٢} = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠.

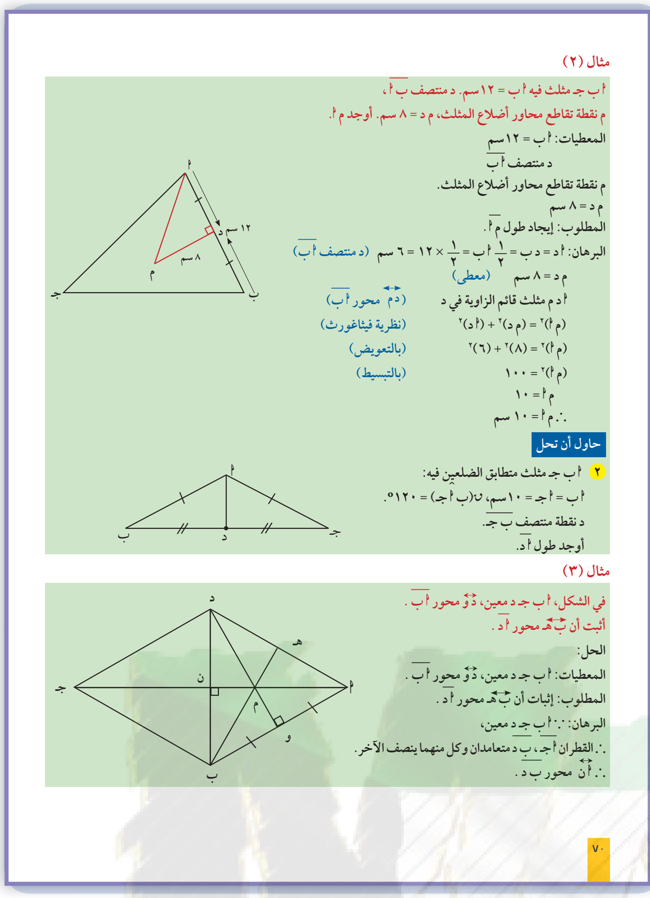
م ب = ١٠ سم ولكن م ب = م أ، لذا: م أ = ١٠ سم.

لإيجاد أ ب نحسب طول أ د = ١٠ + ٨ = ١٨ سم.

نأخذ المثلث أ ب د قائم الزاوية فنكتب:

(أ ب)^{٢} = (أ د)^{٢} + (د ب)^{٢} = ١٨^{٢} + ٦^{٢} = ٣٦٠

أ ب = ٦$\sqrt{١٠}$ سم.


مثال (٢)

أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ١٢ سم. د منتصف ب أ،
م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث، م د = ٨ سم. أوجد م أ.

المعطيات: أ ب = ١٢ سم
د منتصف أ ب
م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث.
م د = ٨ سم
المطلوب: إيجاد طول م أ.
البرهان: أ د = د ب = $\frac{١}{٢}$ أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ = ٦ سم (د منتصف أ ب)
م د = ٨ سم (معطى)
أ د م مثلث قائم الزاوية في د (د م محور أ ب)
(م أ)^{٢} = (م د)^{٢} + (أ د)^{٢} (نظرية فيثاغورث)
(م أ)^{٢} = (٨)^{٢} + (٦)^{٢} (بالتعويض)
(م أ)^{٢} = ١٠٠ (بالتبسيط)
م أ = ١٠
∴ م أ = ١٠ سم

حاول أن تحل

٢ أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين فيه:
أ ب = أ جـ = ١٠ سم، ق(ب أ جـ) = ١٢٠°.
د نقطة منتصف ب جـ.
أوجد طول أ د.

مثال (٣)

في الشكل، أ ب جـ د معين، د و محور أ ب.
أثبت أن ب هـ محور أ د.

الحل:
المعطيات: أ ب جـ د معين، د و محور أ ب.
المطلوب: إثبات أن ب هـ محور أ د.
البرهان: ∵ أ ب جـ د معين،
∴ القطران أ جـ، ب د متعامدان وكل منهما ينصف الآخر.
∴ أ ن محور ب د.

٧٠

❷ المثلث أ ب جـ متطابق الأضلاع.

أ ب = ب جـ = جـ أ = ١٦ سم

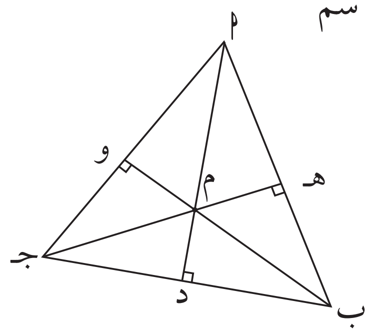
م هي نقطة تلاقي

المحاور الثلاثة في المثلث

بحيث إن

م أ = ٢ × م د.

أوجد طول م ب.



في المثلث أ ب د قائم

الزاوية نكتب: (أ د)^{٢} = (أ ب)^{٢} − (ب د)^{٢} = ١٦^{٢} − ٨^{٢}

= ١٩٢.

أ د = ٨$\sqrt{٣}$ سم.

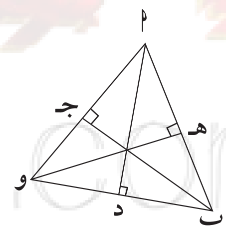
ولكن: م أ = م ب = م جـ.

لذا: م أ = م ب = $\frac{٨\sqrt{٣} \times ٢}{٣}$.

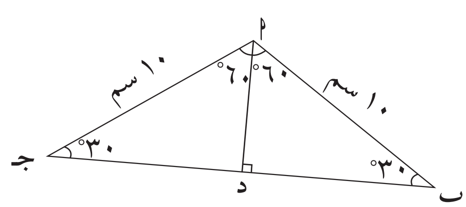
م ب = $\frac{١٦\sqrt{٣}}{٣}$ سم.

إجابات «حاول أن تحل»

❶ في المثلث متطابق الأضلاع يمر كل محور في رأس المثلث المقابل لكل ضلع، انظر إلى الرسم.



❷



المثلث أ د ب قائم الزاوية ثلاثيني ستيني لذا تكون

أ د = $\frac{١}{٢}$ أ ب؛ أ د = ٥ سم.

❸ بما أن المحاور الثلاثة تمر في رؤوس المثلث لذا يكون المثلث متطابق الأضلاع.

٣- التدريب والتقييم

تحقق من فهمك

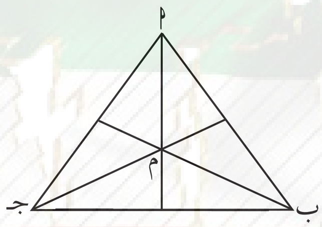
تعتبر محاور المثلث مهمة جدًّا كعناصر مميزة في كل مثلث ونقطة تلاقي هذه المحاور لها دور كبير بالنسبة إلى الدائرة التي تمر بالرؤوس الثلاثة للمثلث.

إجابات «تحقق من فهمك»

١ في المثلث المتطابق الضلعين يمر محور الضلع (قاعدة المثلث) برأس المثلث المقابل لهذه القاعدة، وذلك لأن كل نقطة موجودة على محور قطعة مستقيمة لها البعد نفسه عن طرفي هذه القطعة.

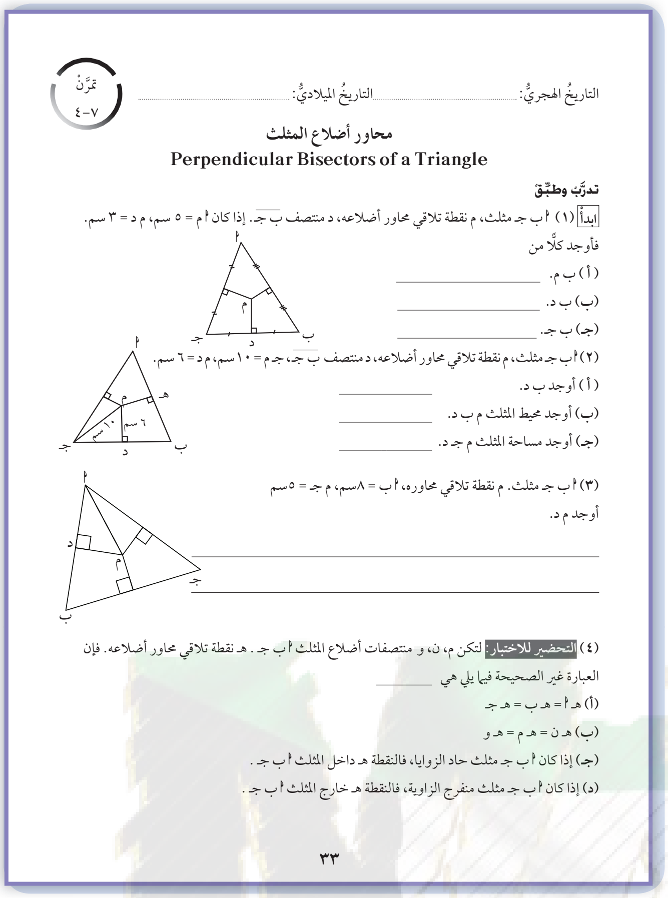
٢ لتكن م نقطة داخل المثلث أ ب جـ بحيث إن:

م أ = م ب = م جـ



- المثلث أ م ب متطابق الضلعين (م أ = م ب) لذا تكون م على محور $\overline{\text{أ ب}}$.
- المثلث ب م جـ متطابق الضلعين (م ب = م جـ) لذا تكون م على محور $\overline{\text{ب جـ}}$.
- المثلث جـ م أ متطابق الضلعين (م جـ = م أ) لذا تكون م على محور $\overline{\text{أ جـ}}$.

وبالتالي، م هي نقطة تلاقي محاور المثلث.



التاريخُ الهجريُّ:............ التاريخُ الميلاديُّ:............

تمرَّنْ ٤-٧

محاور أضلاع المثلث
Perpendicular Bisectors of a Triangle

تدرَّبْ وطبِّقْ

ابدأْ (١) أ ب جـ مثلث، م نقطة تلاقي محاور أضلاعه، د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$. إذا كان أ م = ٥ سم، م د = ٣ سم.

فأوجد كلًّا من

(أ) ب م. ____________

(ب) ب د. ____________

(جـ) ب جـ. ____________

(٢) أ ب جـ مثلث، م نقطة تلاقي محاور أضلاعه، د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$، جـ م = ١٠ سم، م د = ٦ سم.

(أ) أوجد ب د. ____________

(ب) أوجد محيط المثلث م ب د. ____________

(جـ) أوجد مساحة المثلث م جـ د. ____________

(٣) أ ب جـ مثلث. م نقطة تلاقي محاوره، أ ب = ٨سم، م جـ = ٥سم

أوجد م د.

____

____

(٤) التحضير للاختبار: لتكن م، ن، و منتصفات أضلاع المثلث أ ب جـ . هـ نقطة تلاقي محاور أضلاعه. فإن العبارة غير الصحيحة فيما يلي هي ________

(أ) هـ أ = هـ ب = هـ جـ

(ب) هـ ن = هـ م = هـ و

(جـ) إذا كان أ ب جـ مثلث حاد الزوايا، فالنقطة هـ داخل المثلث أ ب جـ .

(د) إذا كان أ ب جـ مثلث منفرج الزاوية، فالنقطة هـ خارج المثلث أ ب جـ .

٣٣

تقييم بديل

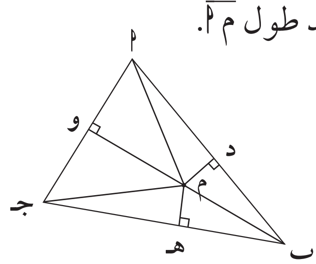
شجع الطلاب على رسم عدد من المثلثات بأبعاد مختلفة وبأنواع مختلفة وقياس زوايا معروفة، واطلب إليهم رسم محاور هذه المثلثات والتأكد من خاصية هذه المحاور.

اختبار سريع

❶ م هي نقطة تلاقي محاور المثلث ؐب جـ.

ب جـ = ١٢ سم، م هـ = ٤ سم.

أوجد طول $\overline{\text{مؐ}}$.



في المثلث ب م هـ نكتب: (ب م)^{٢} = ٦^{٢} + ٤^{٢} = ٥٢

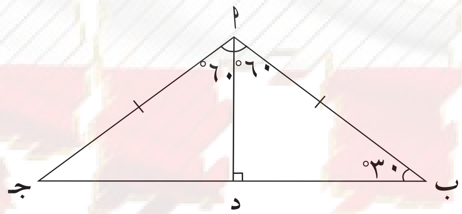
ب م = مؐ = م جـ = ٢$\sqrt{١٣}$ سم.

❷ ؐب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث:

ق(ب ؐ جـ) = ١٢٠°

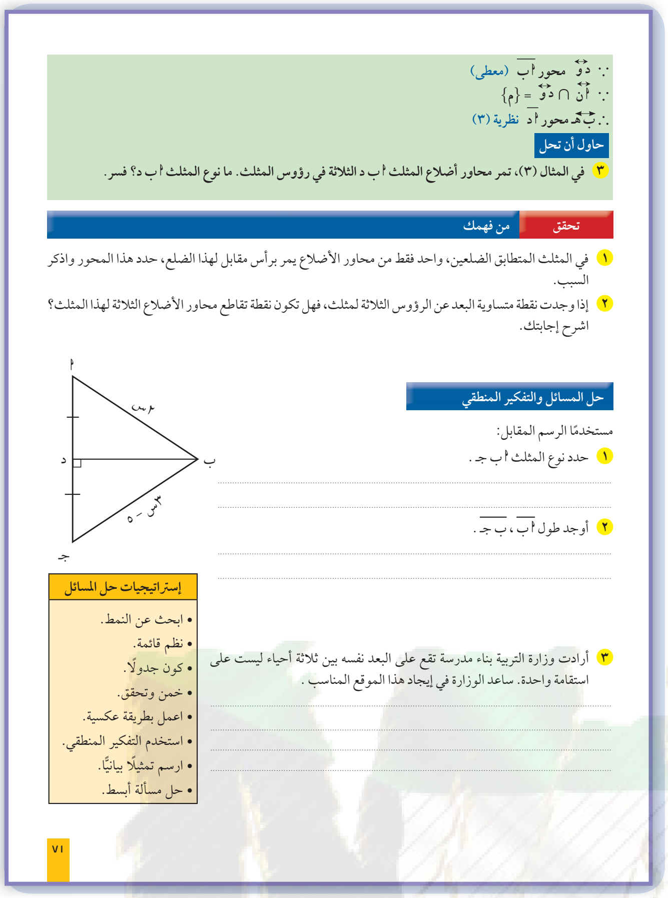
$\overleftrightarrow{\text{ؐد}}$ محور $\overline{\text{ب جـ}}$. أوجد قيمة س إذا كان:

ؐب = ٣س − ٥؛ ؐد = س + ٤.



ؐب = ٢ × ؐد؛ ٣س − ٥ = ٢(س + ٤)

س = ١٣.



إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

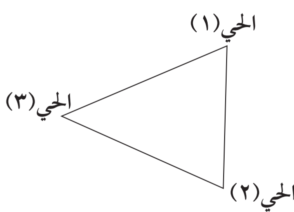
❶ بما أن محور $\overline{\text{ؐجـ}}$ يمر بالرأس المقابل له في المثلث، فإن هذا المثلث هو متطابق الضلعين.

❷ ؐب = جـ ب؛ ٢س = ٣س − ٥

س = ٥

لذا يكون: ؐب = جـ ب = ١٠

❸



سوف يكون موقع البناء على
نقطة تقاطع المحاور الثلاثة للمثلث المكون من الأحياء الثلاثة.

٥-٧ منصفات الزوايا الداخلية للمثلث
Interior Angle Bisectors of a Triangle

سوف تتعلم
- أن منصفات الزوايا الداخلية للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة.
- أن نقطة تلاقي المنصفات هي على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث.

من الاستخدامات
- يستخدم مهندسو الميكانيك خاصية منصفات الزوايا للمحافظة على توازن الأجسام.

المصطلحات الأساسية
◄ منصفات الزوايا Angle Bisectors

◄ **صلة الدرس** تعرفت في السابق على منصفات الزوايا. في هذا الدرس سوف تتعرف خاصية تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث في نقطة واحدة. ►

استكشف منصفات الزوايا الداخلية في المثلث

الأدوات المستخدمة: مقص.

١ ارسم ثلاثة مثلثات (قائم الزاوية، حاد الزوايا، منفرج الزاوية) بقياس كبير لطيِّهما بشكل أفضل ثم قصهما.
٢ اطو المثلث حاد الزوايا بشكل تتكون فيه منصفات الزوايا. ماذا تلاحظ؟
٣ أعد الخطوة ٢ مع المثلثين الآخرين. ماذا تلاحظ؟
٤ اذكر خاصية لمنصفات الزوايا الداخلية للمثلث مستخدمًا (٢)، (٣).

طي منصف الزاوية

تعلم تتلاقى منصفات الزوايا الداخلية للمثلث في نقطة واحدة

نظرية (٤) منصفات الزوايا الداخلية للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة.

مثال (١)

أ ب جـ مثلث، م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية. إذا كان ق(م أ̂ جـ) = ٤٠°، ق(ب جـ̂ م) = ٣٥°.
أوجد: (١) ق(م ب̂ أ) (٢) ق(ب م̂ جـ).

المعطيات: أم منصف داخلي للزاوية أ.
ب م منصف داخلي للزاوية ب.
جـ م منصف داخلي للزاوية جـ.
م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث أ ب جـ.
ق(م أ̂ جـ) = ٤٠°
ق(ب جـ̂ م) = ٣٥°

المطلوب: إيجاد (١) ق(م ب̂ أ)؛ (٢) ق(ب م̂ جـ)

البرهان: (١) ق(أ̂) = ٢ ق(م أ̂ جـ) = ٢ × ٤٠° = ٨٠° (أم منصف داخلي للزاوية أ)
ق(جـ̂) = ٢ ق(ب جـ̂ م) = ٢ × ٣٥° = ٧٠° (جـ م منصف داخلي للزاوية جـ)
ق(ب̂) = ١٨٠° − (٨٠° + ٧٠°) = ٣٠° (مجموع قياس زوايا المثلث ١٨٠°)
ق(م ب̂ أ) = $\frac{1}{2}$ ق(ب̂) = $\frac{1}{2}$ × ٣٠ = ١٥° (ب م منصف داخلي للزاوية ب)
∴ ق(م ب̂ أ) = ١٥°

٧٢

٥-٧

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف أن المنصفات الداخلية لزوايا المثلث تتلاقى في نقطة واحدة تقع على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث.

المصطلحات الأساسية

- منصفات الزوايا.

الأدوات المستخدمة

- مقص.

مراجعة

❶ ما منصف الزاوية؟ **شعاع يبدأ من رأس الزاوية ويقسمها إلى زاويتين متطابقتين، أي لهما القياس نفسه.**

❷ ما خاصية كل نقطة على منصف زاوية؟ **لها البعد نفسه عن ضلعي الزاوية.**

❸ ما عدد المنصفات الداخلية في المثلث؟ **يوجد ثلاث زوايا داخلية، لذا يوجد ثلاثة منصفات داخلية.**

◄ **صلة الدّرس** في السابق، تعرفت على منصفات الزوايا. في هذا الدرس سوف تتعرف خاصية تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث في نقطة واحدة.

١ - التمهيد

استكشف

الغاية

يتعرف الطالب المنصفات الداخلية لزوايا المثلث، ويتأكد من أنها تتلاقى في نقطة واحدة تقع على البعد نفسه من الأضلاع الثلاثة للمثلث.

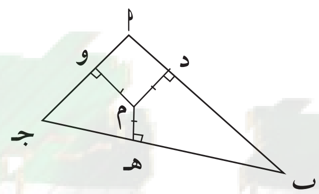
التقييم المستمر

تابع عمل الطلاب وهم يحاولون طي المثلثات لاستكشاف منصف الزاوية. ساعدهم على فهم هذه العملية. استخدم، إذا اقتضى الأمر، طريقة هندسية أخرى بواسطة الفرجار والمسطرة لرسم منصف الزاوية.

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

اطلب إليهم حل المسألة التالية:

م نقطة داخل المثلث أ ب جـ بحيث م د = م هـ = م و. أثبت أن النقطة م هي نقطة تلاقي المنصفات الداخلية للزوايا في المثلث.



لدينا م د = م و، لذا تكون م على المنصف الداخلي للزاوية أ.

م د = م هـ، لذا تكون م على المنصف الداخلي للزاوية ب.

م هـ = م و، لذا تكون م على المنصف الداخلي للزاوية جـ.

وبالتالي، م هي نقطة تلاقي المنصفات الداخلية للزوايا الثلاث.

إجابات «استكشف»

تجول بين الطلاب عند قيامهم بهذا النشاط لاستكشاف خاصية المنصفات الداخلية لزوايا المثلث، وناقش معهم النتائج التي توصلوا إليها في الخطوات من (١) إلى (٤).

٢ – التعليم

تعلم

من المهم جدًّا أن يتوصل الطلاب إلى خاصية تلاقي المنصفات الداخلية لزوايا المثلث في نقطة واحدة وأن يثبتوا أن هذه النقطة تقع على البعد نفسه من الأضلاع الثلاثة.

(٢) ق(م ب̂ جـ) = ق(م ب̂ أ) = ١٥°

في المثلث م ب جـ نجد:

ق(ب م̂ جـ) = ١٨٠° – (٣٥° + ١٥°) = ١٣٠° (مجموع قياس زوايا المثلث ١٨٠°)

∴ ق(ب م̂ جـ) = ١٣٠°.

حاول أن تحل

١ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية. أوجد ق (ب م̂ جـ).

مثال (٢)

أ ب جـ مثلث ، أم ، ب م ، جـ م ثلاثة منصفات داخلية لزواياه الثلاث تتقاطع في نقطة م.

م د ⊥ أ ب ، م هـ ⊥ أ جـ ، م و ⊥ ب جـ .

أثبت أن م د = م هـ = م و.

المعطيات: أم منصف داخلي للزاوية أ.

ب م منصف داخلي للزاوية ب .

جـ م منصف داخلي للزاوية جـ.

م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث.

م د ⊥ أ ب؛ م هـ ⊥ أ جـ؛ م و ⊥ ب جـ.

المطلوب: إثبات أن م د = م هـ = م و.

البرهان: نأخذ المثلثين: أ د م، أ هـ م.

ق (١̂) = ق (٢̂) (أم منصف داخلي للزاوية أ)

أم (ضلع مشترك في المثلثين)

ق (أ د̂ م) = ق (أ هـ̂ م) = ٩٠° (معطى)

لذلك المثلثان: أ د م، أ هـ م متطابقان

ونستنتج أن م د = م هـ. (١)

ثم نأخذ المثلثين: ب د م، ب و م.

وبالطريقة نفسها نثبت أنهما متطابقان ونستنتج أيضًا أن: م د = م و (٢)

من (١) ، (٢) نحصل على: م د = م هـ = م و (المطلوب)

نتيجة (٤) نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث تقع على أبعاد متساوية من أضلاعه الثلاثة. أي م د = م هـ = م و

حاول أن تحل

٢ مستخدمًا الرسم في المثال (٢)، أوجد طول م و إذا كان ب م = ١٣ سم، ب د = ١٢ سم.

تحقق من فهمك

١ هل نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث متساوية الأبعاد من رؤوسه؟

٢ في رسم المثال (٢)، ماذا تمثل النقطة «م» بالنسبة إلى النقاط د، و، هـ؟

٧٣

أمثلة بديلة

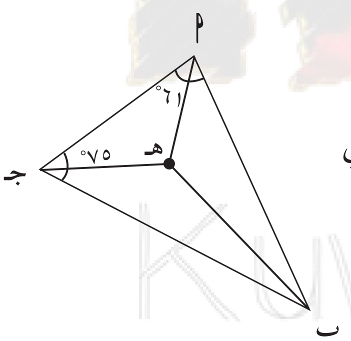
❶ تتلاقى المنصفات الداخلية لزوايا المثلث في النقطة هـ.

ق(أ̂) = ٦١°،

ق(جـ̂) = ٧٥°

أوجد ق(جـ ب̂ هـ)،

ق(ب هـ̂ جـ).



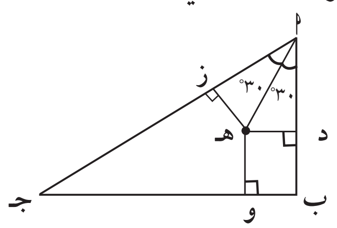
ق(ب̂) = ١٨٠° – (٦١° + ٧٥°) = ٤٤°.

ق(جـ ب̂ هـ) = $\frac{١}{٢}$ × ٤٤° = ٢٢°.

ق(ب هـ̂ جـ) = ١٨٠° – (٢٢° + ٣٧,٥°)

= ١٢٠,٥°.

❷ تتلاقى المنصفات الداخلية لزوايا المثلث في النقطة هـ.



هـ د ⊥ ب أ،

هـ و ⊥ ب جـ،

هـ ز ⊥ أ جـ.

ق(أ̂) = ٦٠°، أهـ = ٤ سم.

أوجد: ق(د هـ ز) وطول هـ و.

ق(د هـ ز) = ٣٦٠° − (٦٠° + ٩٠° + ٩٠°) = ١٢٠°.

المثلث د أ هـ قائم الزاوية ثلاثيني ستيني لذا

د هـ = $\frac{١}{٢}$ × أ هـ ويكون د هـ = هـ و = ٢ سم.

إجابات «حاول أن تحل»

❶ المثلث قائم الزاوية في أ

لذا يكون: ق(ب̂) + ق(جـ̂) = ٩٠°

$\frac{١}{٢}$ ق(ب̂) + $\frac{١}{٢}$ ق(جـ̂) = ٤٥°

ق(ب م̂ جـ) = ١٨٠° − (٤٥°) = ١٣٥°

❷ في المثلث ب م د قائم الزاوية نكتب:

(م د)^{٢} = (١٣)^{٢} − (١٢)^{٢} = ١٦٩ − ١٤٤ = ٢٥.

إذًا م و = م د = ٥ سم.


المرشد لحل المسائل (٧-٥)

ارسم دائرة داخل المثلث أ ب جـ بحيث تكون مماسة لأضلاعه الثلاثة.

افهم

١ ما المطلوب إليك إيجاده؟ ....

٢ هل يمكن للدائرة أن:

(أ) تقطع أحد أضلاع المثلث؟ ....

(ب) تمر بأحد رؤوس المثلث؟ ....

خطط

٣ ما هي الخاصية الأساسية لمركز الدائرة؟ ....

٤ هل تتساوى الأبعاد بين مركز الدائرة والأضلاع الثلاثة؟ ....

....

٥ ما العلاقة بين هذه الأبعاد وطول نصف قطر الدائرة؟ ....

٦ ما هي النقطة التي تتساوى الأبعاد بينها و بين أضلاع المثلث؟ ....

حل

٧ ارسم منصفي الزاويتين أ، ب ولتكن م نقطة تقاطعهما. ....

....

٨ ارسم القطعة العمودية د م من النقطة م إلى أحد أضلاع المثلث. ....

٩ ارسم الدائرة التي مركزها م وتمر بالنقطة د. ....

تحقق

١٠ كيف تتحقق من أن الدائرة المرسومة هي مماسة للأضلاع الثلاثة؟ ....

....

حل مسألة أخرى

١١ ارسم مثلثًا تتقاطع منصفات زواياه الداخلية في مركز الدائرة المرسومة. ....

٧٤

٣- التدريب والتقييم

تحقق من فهمك

أكّد للطلاب أن نقطة تلاقي المنصفات الداخلية لزوايا المثلث لها البعد نفسه عن أضلاع المثلث الثلاثة، وهذه الخاصية سوف يكون لها أهمية كبرى في مجال الهندسة.

إجابات «تحقق من فهمك»

❶ ليس بالضرورة. نقطة تقاطع المنصفات الداخلية في المثلث تكون متساوية الأبعاد من رؤوس المثلث فقط في المثلث متطابق الأضلاع.

❷ النقطة م هي مركز الدائرة التي تمر بالنقاط د، و، هـ

لأن م د = م و = م هـ.

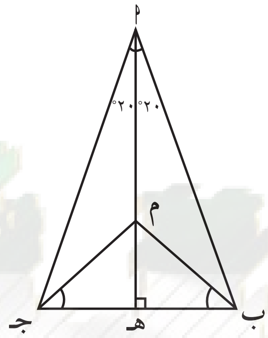
تقييم بديل

شجع الطلاب على استخدام الفرجار والمسطرة المرقمة لإعادة رسم المنصفات الداخلية لزوايا المثلث والتأكد من تلاقيهم في نقطة واحدة، وأن هذه النقطة تقع على البعد نفسه من الأضلاع الثلاثة للمثلث.

اختبار سريع

❶ ﻡ ب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث ق($\hat{ﻡ}$) = ٤٠°.

م نقطة تلاقي المنصفات الداخلية لزوايا المثلث.



(أ) ما نوع المثلث م ب جـ؟

ق($\hat{ب}$) = ق($\hat{جـ}$) = ٧٠°؛ $\frac{١}{٢}$ ق($\hat{ب}$) = $\frac{١}{٢}$ ق($\hat{جـ}$) = ٣٥° لذا ق(م $\hat{ب}$ جـ) = ق(م $\hat{جـ}$ ب) = ٣٥°

وبالتالي فالمثلث م ب جـ متطابق الضلعين:

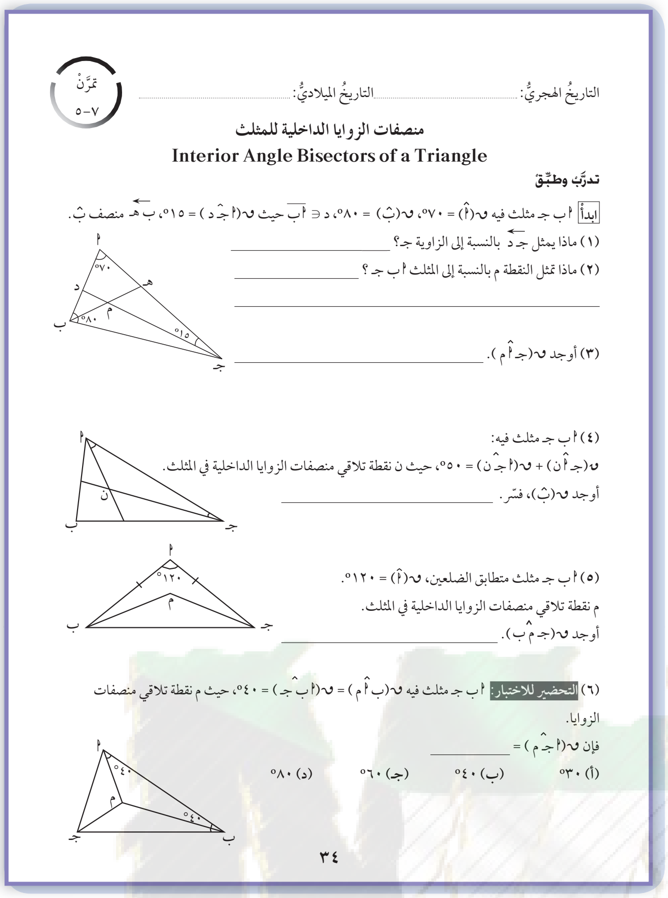
م ب = م جـ.

(ب) أوجد ق(ب $\hat{م}$ جـ).

ق(ب $\hat{م}$ جـ) = ١٨٠° − (٣٥° + ٣٥°) = ١١٠°.

(جـ) $\overleftrightarrow{ﻡم}$ يقطع $\overline{ب جـ}$ في النقطة هـ. أوجد ق(ﻡ $\hat{هـ}$ ب).

ق(ﻡ $\hat{هـ}$ ب) = ١٨٠° − (٧٠° + ٢٠°) = ٩٠°


التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٥-٧

منصفات الزوايا الداخلية للمثلث

Interior Angle Bisectors of a Triangle

تدرَّبْ وطبِّقْ

ابدأ ﻡ ب جـ مثلث فيه ق($\hat{ﻡ}$) = ٧٠°، ق($\hat{ب}$) = ٨٠°، د ∈ $\overline{ﻡب}$ حيث ق(ﻡ $\hat{جـ}$ د) = ١٥°، $\overleftarrow{ب هـ}$ منصف $\hat{ب}$.

(١) ماذا يمثل $\overleftarrow{جـ د}$ بالنسبة إلى الزاوية جـ؟ ________

(٢) ماذا تمثل النقطة م بالنسبة إلى المثلث ﻡ ب جـ؟ ________

(٣) أوجد ق(جـ $\hat{ﻡ}$ م). ________

(٤) ﻡ ب جـ مثلث فيه:

ق(جـ $\hat{ﻡ}$ ن) + ق(ﻡ $\hat{جـ}$ ن) = ٥٠°، حيث ن نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية في المثلث.

أوجد ق($\hat{ب}$)، فسّر. ________

(٥) ﻡ ب جـ مثلث متطابق الضلعين، ق($\hat{ﻡ}$) = ١٢٠°.

م نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية في المثلث.

أوجد ق(جـ $\hat{م}$ ب). ________

(٦) التحضير للاختبار: ﻡ ب جـ مثلث فيه ق(ب $\hat{ﻡ}$ م) = ق(ﻡ $\hat{ب}$ جـ) = ٤٠°، حيث م نقطة تلاقي منصفات الزوايا.

فإن ق(ﻡ $\hat{جـ}$ م) = ________

(أ) ٣٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٦٠° (د) ٨٠°

٣٤

إجابات «المرشد لحل المسائل»

❶ رسم دائرة داخل المثلث تكون مماسة لأضلاعه الثلاثة.

❷ (أ) كلا. (ب) كلا.

❸ جميع النقاط على الدائرة تقع على البعد نفسه من مركزها.

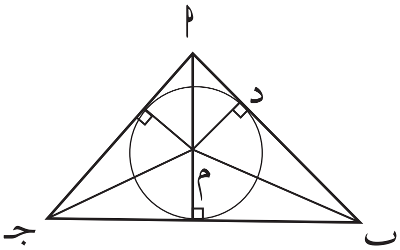
❹ نعم.

❺ الأبعاد الثلاثة تساوي طول نصف قطر الدائرة.

❻ نقطة تقاطع المنصفات الداخلية لزوايا المثلث.

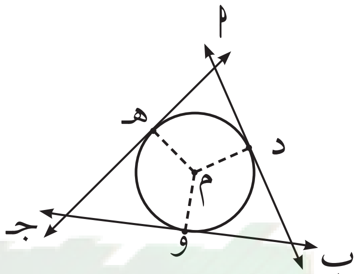
❼، ❽، ❾

انظر إلى الرسم.



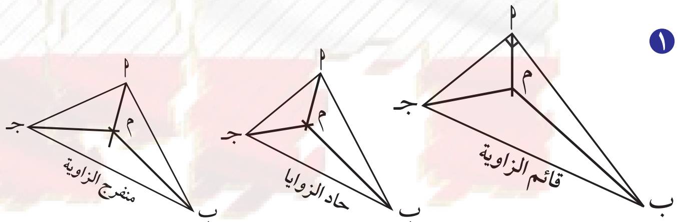
❿ نلاحظ أن الدائرة تقطع كل ضلع في نقطة واحدة فقط.

⓫ نأخذ من نقطة د على الدائرة مماسًّا، ثم من نقطة أ على هذا المماس نأخذ مماسًّا آخر على الدائرة يقطعها بالنقطة هـ. ومن نقطة جـ على هذا المماس نأخذ مماسًّا آخر على الدائرة يقطعها بالنقطة و، ويقطع المماس الأول في النقطة ب. أ ب جـ هو المثلث المطلوب.



إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

❶



نلاحظ أن نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية تكون دائمًا داخل المثلث مهما كان نوعه.

❷ (أ) دب = دجـ ، زو = هـ و. وبالتالي د لها البعد نفسه من ضلعي الزاوية كذلك بالنسبة إلى و.

تقع النقاط أ، د، و على استقامة واحدة.

(ب) س + ١٠ = ٢س؛ س = ١٠°.

(جـ) ق(هـ $\hat{أ}$ ز) = ٤٠°.

❸ (أ) أب = ٢٠سم + ٥سم = ٢٥ سم.

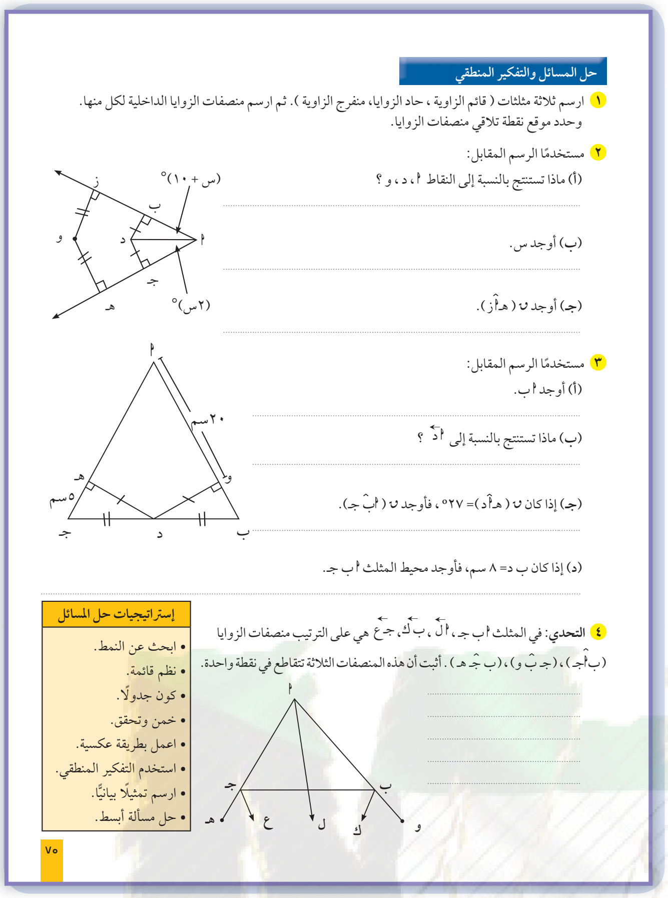
المثلثان: ب و د، جـ هـ د متطابقان.

(ب) المثلثان أ د و، أ د هـ متطابقان أيضًا، لذا يكون $\overleftarrow{أد}$ منصف داخلي للزاوية ب أ جـ.

(جـ) ق(جـ $\hat{أ}$ ب) = ٢ × ٢٧° = ٥٤°.

والمثلث أ ب جـ متطابق الضلعين، لذا يكون

ق(أ $\hat{ب}$ جـ) = $\frac{١٨٠° - (٥٤°)}{٢}$ = ٦٣°.



حل المسائل والتفكير المنطقي

❶ ارسم ثلاثة مثلثات (قائم الزاوية ، حاد الزوايا، منفرج الزاوية). ثم ارسم منصفات الزوايا الداخلية لكل منها. وحدد موقع نقطة تلاقي منصفات الزوايا.

❷ مستخدمًا الرسم المقابل:

(أ) ماذا تستنتج بالنسبة إلى النقاط أ ، د ، و ؟

(ب) أوجد س.

(جـ) أوجد ق (هـ $\hat{أ}$ ز).

❸ مستخدمًا الرسم المقابل:

(أ) أوجد أ ب.

(ب) ماذا تستنتج بالنسبة إلى $\overleftarrow{أد}$ ؟

(جـ) إذا كان ق (هـ $\hat{أ}$ د)= ٢٧° ، فأوجد ق (أ $\hat{ب}$ جـ).

(د) إذا كان ب د= ٨ سم، فأوجد محيط المثلث أ ب جـ.

❹ التحدي: في المثلث أ ب جـ ، $\overleftarrow{أل}$ ، $\overleftarrow{بك}$، $\overleftarrow{جع}$ هي على الترتيب منصفات الزوايا (ب $\hat{أ}$ جـ) ، (جـ $\hat{ب}$ و) ، (ب $\hat{جـ}$ هـ) . أثبت أن هذه المنصفات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة.

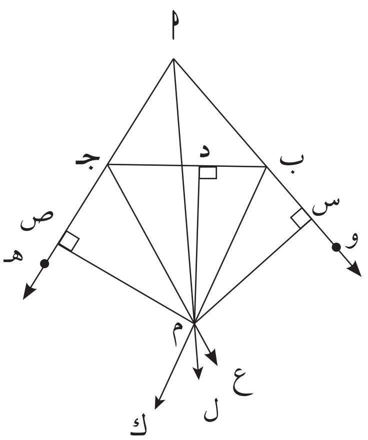
إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- كون جدولًا .
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٧٥

(د) محيط المثلث أ ب جـ = ٢٥ سم + ٢٥سم + ١٦ سم = ٦٦ سم.

❹ منصف الزاوية أ يتقاطع مع منصف الزاوية ب جـ هـ في النقطة م. نسقط أعمدة من النقطة م على كل من $\overline{ب جـ}$، $\overline{أهـ}$ ، $\overline{أو}$ فيكون لدينا م د = م س وأيضًا م د = م ص . وبالتالي، م س = م ص ، وعليه تكون م موجودة على منصف الزاوية جـ ب و. وبالتالي، تتلاقى المنصفات الثلاثة في النقطة م.



٧–٦

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يرسم الأعمدة من رؤوس المثلث على أضلاعه ويدرك أنها تتلاقى في نقطة واحدة.

المصطلحات الأساسية

- الأعمدة، الارتفاع.

الأدوات المستخدمة

- فرجار، مسطرة.

مراجعة

❶ عرّف الخطين المستقيمين المتعامدين.

مستقيمان يتقاطعان ويصنعان بينهما زاوية قائمة.

❷ كيف ترسم زاوية قائمة؟

بواسطة الأدوات الهندسية: الزاوية القائمة أو بواسطة الفرجار والمسطرة.

صلة الدرس في السابق تعرفت محاور أضلاع المثلث. في هذا الدرس سوف تتعرف الأعمدة المرسومة من رؤوس مثلث على أضلاعه وخاصيتها.

١ – التمهيد

استكشف

الغاية

يتعرف الطلاب الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ويتأكدون من أنهم يتقاطعون في نقطة واحدة لها أهمية في مجال الهندسة والمسائل الحياتية.


٧–٦ الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه
Altitudes from Vertices of a Triangle to its Sides

سوف تتعلم

- أن الأعمدة المرسومة من رؤوس مثلث على أضلاعه تتلاقى في نقطة واحدة.

من الاستخدامات

- يستخدم مهندسو التنظيم المدني خاصية الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه لمعرفة الطرق المختصرة بين الشوارع في المدن.

صلة الدرس في السابق تعرفت محاور أضلاع المثلث. في هذا الدرس سوف تتعرف الأعمدة المرسومة من رؤوس مثلث على أضلاعه وخاصيتها.

استكشف الأعمدة المرسومة من رؤوس مثلث على أضلاعه

الأدوات المستخدمة: فرجار، مسطرة.

١ ارسم مثلث أ ب جـ.

٢ ارسم دائرة بواسطة الفرجار مركزها أ وتمر بالنقطة ب. هذه الدائرة تقطع $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ في نقطة د مختلفة عن ب (انظر الشكل المقابل).

٣ ارسم قوسين من دائرتين مركزهما ب، د ويمران في أ. يتقاطع القوسان في نقطة ثانية ل.

٤ $\overleftrightarrow{\text{أ ل}}$ تقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في هـ. تحقق من أن $\overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$.

٥ نفذ الخطوات (٢)، (٣)، (٤) باستخدام كلّ من الرأسين ب، ج.

٦ ماذا تلاحظ بالنسبة للأعمدة المرسومة؟

تعلم الأعمدة المرسومة من رؤوس مثلث على أضلاعه

ارتفاع المثلث هو طول العمود المرسوم من رأس المثلث على قاعدته.

بما أن للمثلث ثلاثة رؤوس إذًا هناك ثلاثة أعمدة.

المثلث أ ب جـ حاد الزوايا فيه:

$\overline{\text{أ س}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ؛ أ س ارتفاع للمثلث.

$\overline{\text{ب ص}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ ؛ ب ص ارتفاع للمثلث.

$\overline{\text{أ س}}$ يقطع $\overline{\text{ب ص}}$ في م.

ارسم $\overrightarrow{\text{جـ م}}$ بحيث يقطع $\overline{\text{أ ب}}$ في ع.

هل $\overline{\text{م ع}} \perp \overline{\text{أ ب}}$؟ وهل جـ ع ارتفاع للمثلث؟

تحقق من صحة إجابتك باستخدام الأدوات الهندسية.

نظرية (٥) الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة.

المصطلحات الأساسية

- الأعمدة Altitudes
- الارتفاع Height

٧٦

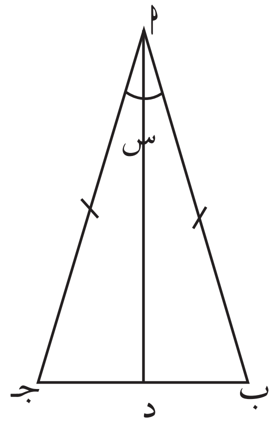
التقييم المستمر

راقب الطلاب وهم يعملون على نشاط «استكشف».
ساعدهم على إيضاح الخطوات من (١) إلى (٧). تأكد من أنهم يستخدمون الفرجار بشكل دقيق وضمن الشروط المطلوبة.

اطرح أسئلة تحاكي العصف الذهني عند الطلاب، وتساعد على إنجاز النشاط والوصول إلى النتيجة.

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

اطلب إليهم إثبات أن: المنصف الداخلي لزاوية رأس المثلث متطابق الضلعين هو نفسه محور القاعدة وهو نفسه العمود المرسوم من رأس المثلث إلى القاعدة.



أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين

أ ب ≅ أ جـ. أ د منصف داخلي للزاوية أ.

نأخذ ق(أ̂) = س°

فيكون ق(ب̂) = ق (جـ̂) = (١٨٠° − س°) / ٢

في المثلث أ ب د نجد أن:

ق (ب د̂ أ) = ١٨٠° − (س°/٢ + (١٨٠° − س°)/٢)

أي أن: ق (ب د̂ أ) = ٩٠°

وبالتالي فالمنصف أ د هو عمود مرسوم من أ على ب د، ثم نأخذ المثلثين أ د ب ، أ د جـ متطابقين

ونستنتج أن: ب د ≅ جـ د وبالتالي أ د هو محور ب جـ.

إجابات «استكشف»

❶ - ❸ انظر إلى الصورة.

❹ من الأسئلة (١)، (٢)، (٣) نحصل على:

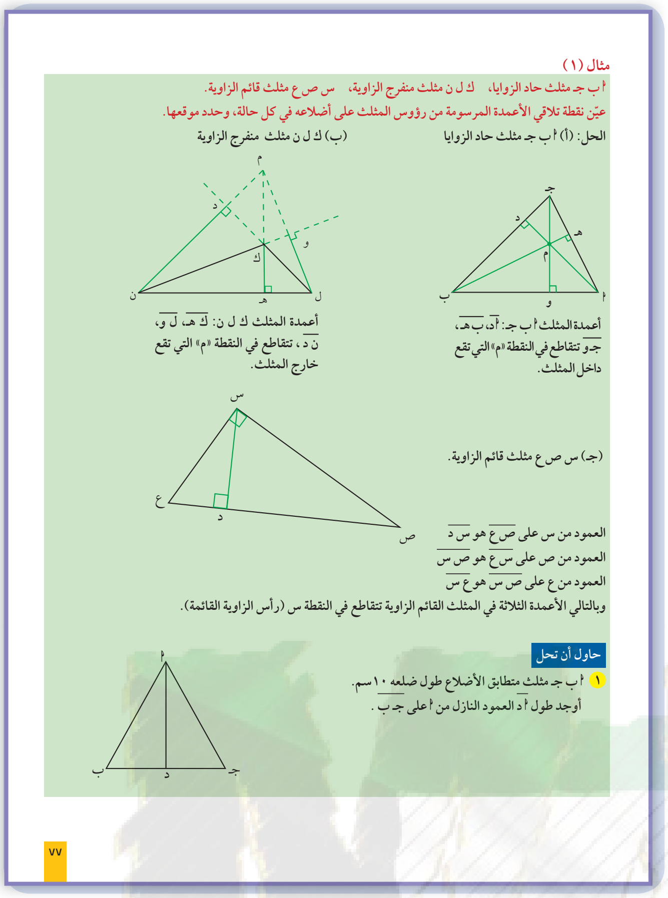
أب = أ د = ب ل = دل = نو

∴ أ ب ل د هو مربع وبالتالي أقطاره متعامدة

ومنه أ هـ ⊥ جـ ب أي أن أ هـ هو العمود المرسوم من أ على جـ ب

❺ تحقق من رسومات الطلاب.

❻ تتقاطع الأعمدة في نقطة واحدة.


مثال (١)

أ ب جـ مثلث حاد الزوايا، ك ل ن مثلث منفرج الزاوية، س ص ع مثلث قائم الزاوية.

عيّن نقطة تلاقي الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه في كل حالة، وحدد موقعها.

الحل: (أ) أ ب جـ مثلث حاد الزوايا

أعمدة المثلث أ ب جـ: أ د، ب هـ، جـ و تتقاطع في النقطة «م» التي تقع داخل المثلث.

(ب) ك ل ن مثلث منفرج الزاوية

أعمدة المثلث ك ل ن: ك هـ، ل و، ن د، تتقاطع في النقطة «م» التي تقع خارج المثلث.

(جـ) س ص ع مثلث قائم الزاوية.

العمود من س على ص ع هو س د

العمود من ص على س ع هو ص س

العمود من ع على ص س هو ع س

وبالتالي الأعمدة الثلاثة في المثلث القائم الزاوية تتقاطع في النقطة س (رأس الزاوية القائمة).

حاول أن تحل

١ أ ب جـ مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ١٠ سم.

أوجد طول أ د العمود النازل من أ على جـ ب .

٧٧

٢- التعليم

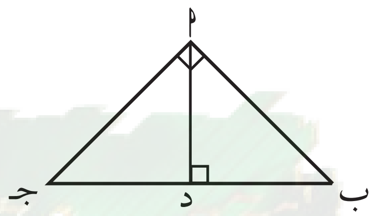
تعلم

من المهم جدًّا إيضاح الفرق بين محور القطعة المستقيمة في المثلث والعمود المرسوم من رأس المثلث على الضلع المقابل.

أمثلة بديلة

❶ ٲ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ٲ ومتطابق الضلعين (ٲب ≅ ٲجـ) .

ٲد العمود المرسوم من ٲ على الوتر ب جـ .



(أ) كم مثلثًا قائم الزاوية ومتطابق الضلعين يوجد في الصورة؟

ٲد = د ب = د جـ

فيكون ٲد ب مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين.

ٲد جـ مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين .

ٲب جـ مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين.

(ب) إذا كان ٲب = ٥ سم. فما طول ٲد.

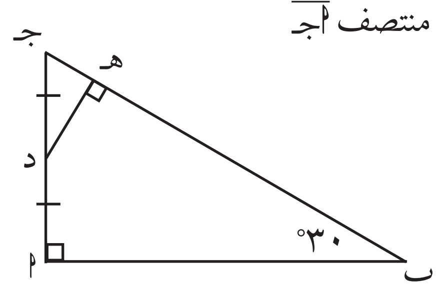
(ٲب)^{٢} + (ٲجـ)^{٢} = (ب جـ)^{٢} ؛ ٢٥ + ٢٥ = (ب جـ)^{٢}

ب جـ = ٥ √٢ سم.

ٲد = $\frac{١}{٢}$ ب جـ ؛ ٲد = $\frac{٥\sqrt{٢}}{٢}$ سم.

❷ ٲب جـ مثلث قائم الزاوية في ٲ ثلاثيني ستيني، كما هو موضح في الرسم د منتصف ٲجـ

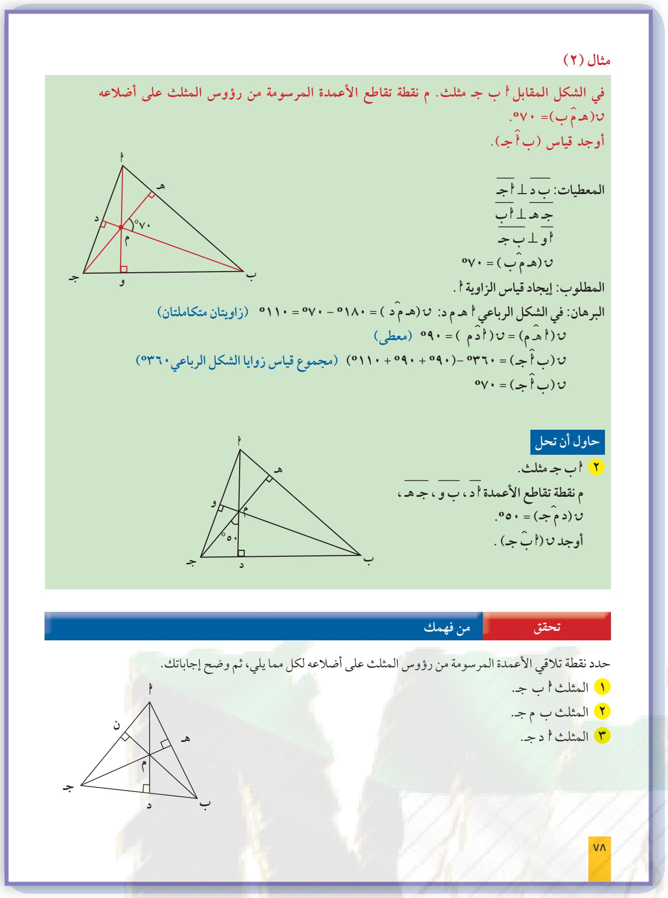
دهـ ⊥ ب جـ.



أوجد طول هـ جـ علمًا أن ب جـ = ٦ سم

ٲجـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = ٣ سم، لأن ٲب جـ مثلث قائم الزاوية ثلاثيني ستيني.

كذلك هـ جـ = $\frac{١}{٢}$ جـ د = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ سم، لأن هـ د جـ مثلث قائم الزاوية ثلاثيني ستيني.


مثال (٢)

في الشكل المقابل ٲ ب جـ مثلث. م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ق(هـ م̂ ب)= °٧٠.

أوجد قياس (ب ٲ̂ جـ).

المعطيات: ب د ⊥ ٲجـ

جـ هـ ⊥ ٲب

ٲو ⊥ ب جـ

ق(هـ م̂ ب) = °٧٠

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية ٲ .

البرهان: في الشكل الرباعي ٲ هـ م د: ق(هـ م̂ د) = °١٨٠ − °٧٠ = °١١٠ (زاويتان متكاملتان)

ق(ٲ هـ̂ م) = ق(ٲ د̂ م) = °٩٠ (معطى)

ق(ب ٲ̂ جـ) = °٣٦٠ −(°٩٠ + °٩٠ + °١١٠) (مجموع قياس زوايا الشكل الرباعي °٣٦٠)

ق(ب ٲ̂ جـ) = °٧٠

حاول أن تحل

٢ ٲب جـ مثلث.

م نقطة تقاطع الأعمدة ٲد ، ب و ، جـ هـ ،

ق(د م̂ جـ) = °٥٠.

أوجد ق(ٲ ب̂ جـ) .

تحقق من فهمك

حدد نقطة تلاقي الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه لكل مما يلي، ثم وضح إجاباتك.

١ المثلث ٲ ب جـ.

٢ المثلث ب م جـ.

٣ المثلث ٲ د جـ.

٧٨

إجابات «حاول أن تحل»

❶ في المثلث أ جـ د نكتب: أ جـ^{٢} = أ د^{٢} + جـ د^{٢} .

١٠^{٢} = أ د^{٢} + ٥^{٢}؛ أ د^{٢} = ١٠٠ − ٢٥ = ٧٥

أ د = ٥ $\sqrt{٣}$ سم.

❷ ق(أ ب̂ جـ) + ق(هـ م̂ د) = ١٨٠°

ق(د م̂ جـ) + ق(هـ م̂ د) = ١٨٠°

لذا: ق(أ ب̂ جـ) + ~~ق(هـ م̂ د)~~ = ٥٠° + ~~ق(هـ م̂ د)~~

ويكون ق(أ ب̂ جـ) = ٥٠°.

٣- التدريب والتقييم

تحقق من فهمك

من المهم جدًّا تحديد موقع نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على الأضلاع المقابلة بحسب نوعية المثلث لجهة زواياه.

إجابات «تحقق من فهمك»

❶ النقطة م (مثلث حاد الزوايا).

❷ النقطة أ (مثلث منفرج الزاوية).

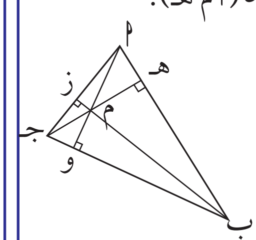
❸ النقطة د (مثلث قائم الزاوية في د).

تقييم بديل

اطلب إلى الطلاب العمل ضمن مجموعات من اثنين. يرسم أحدهما المثلثات التالية: قائم الزاوية، منفرج الزاوية، حاد الزوايا، ويطلب إلى زميله رسم الأعمدة في كل مثلث مع تحديد موقع نقطة التقاطع، ثم يتبادلان الأدوار.

اختبار سريع

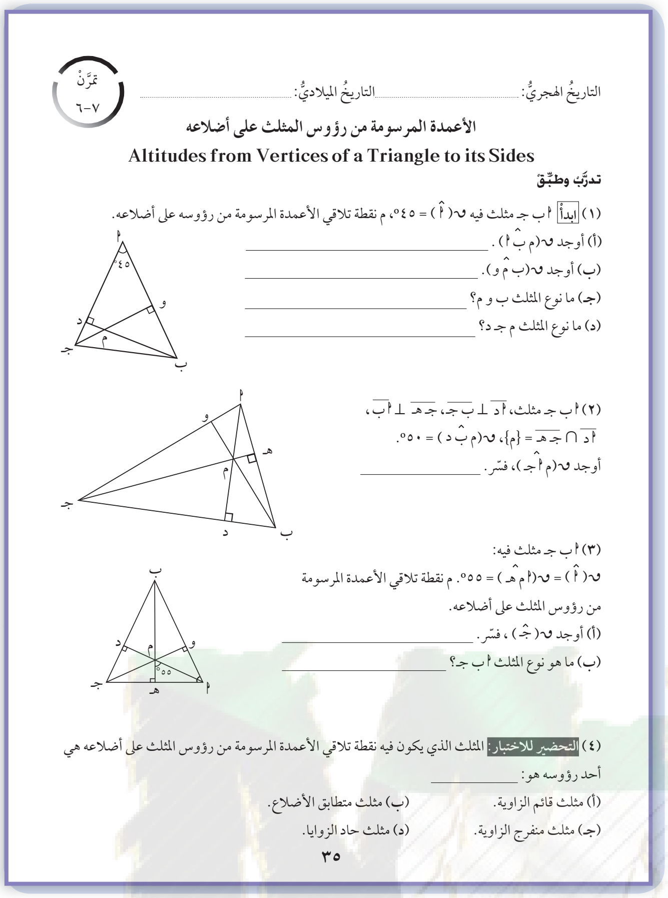
❶ أ ب جـ مثلث حاد الزوايا ؛ م نقطة تقاطع الأعمدة في المثلث. ق(ب̂) = ٤٥°. أوجد ق(أ م̂ هـ).



في الرباعي ب هـ م و نكتب:

ق (ب̂) + ق (هـ م̂ و) = ١٨٠°.

لذا يكون ق (أ م̂ هـ) = ق (ب̂) = ٤٥°.



التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٧-٦

الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه

Altitudes from Vertices of a Triangle to its Sides

تدرَّبْ وطبِّقْ

(١) $\boxed{\text{ابدأْ}}$ أ ب جـ مثلث فيه ق(أ̂) = ٤٥°، م نقطة تلاقي الأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه.

(أ) أوجد ق(م ب̂ أ) . ______

(ب) أوجد ق(ب م̂ و). ______

(جـ) ما نوع المثلث ب و م؟ ______

(د) ما نوع المثلث م جـ د؟ ______

(٢) أ ب جـ مثلث، $\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{جـ هـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$،

$\overline{\text{أ د}} \cap \overline{\text{جـ هـ}}$ = {م}، ق(م ب̂ د) = ٥٠°.

أوجد ق(م أ̂ جـ)، فسّر. ______

(٣) أ ب جـ مثلث فيه:

ق(أ̂) = ق(أ م̂ هـ) = ٥٥°. م نقطة تلاقي الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه.

(أ) أوجد ق(جـ̂) ، فسّر. ______

(ب) ما هو نوع المثلث أ ب جـ؟ ______

(٤) التحضير للاختبار: المثلث الذي يكون فيه نقطة تلاقي الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه هي أحد رؤوسه هو: ______

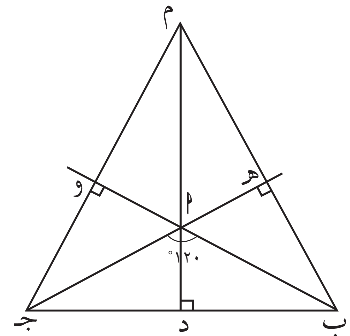
(أ) مثلث قائم الزاوية. (ب) مثلث متطابق الأضلاع.

(جـ) مثلث منفرج الزاوية. (د) مثلث حاد الزوايا.

٣٥

اختبار سريع (تابع)

❷ أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين ($\overline{أب} \cong \overline{أجـ}$)، ق(ب $\hat{أ}$ جـ) = ١٢٠°. تتقاطع أعمدته في النقطة م.
أثبت أن المثلث م ب جـ متطابق الأضلاع.

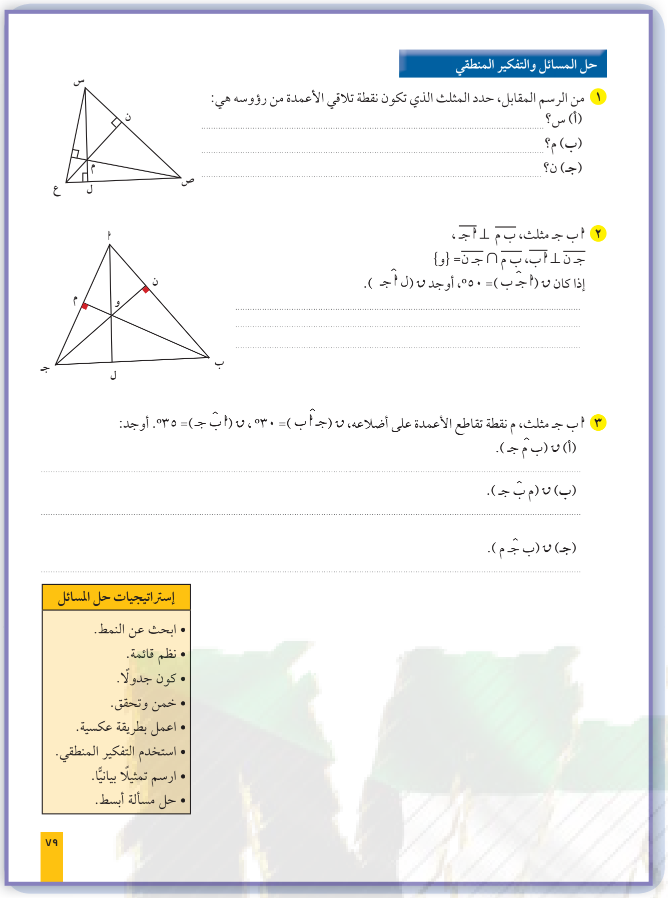


ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ق (أ $\hat{جـ}$ د) = ٣٠°

فتكون ق (هـ $\hat{ب}$ جـ) = ق (و $\hat{جـ}$ ب) = ٦٠°.

ويبقى: ق (ب $\hat{م}$ جـ) = ٦٠°

لذا فالمثلث م ب جـ متطابق الأضلاع.



حل المسائل والتفكير المنطقي

❶ من الرسم المقابل، حدد المثلث الذي تكون نقطة تلاقي الأعمدة من رؤوسه هي:
(أ) س؟ ....
(ب) م؟ ....
(جـ) ن؟ ....

❷ أ ب جـ مثلث، $\overline{ب م} \perp \overline{أ جـ}$،
$\overline{جـ ن} \perp \overline{أ ب}$، $\overline{ب م} \cap \overline{جـ ن} = \{و\}$
إذا كان ق (أ $\hat{جـ}$ ب) = ٥٠°، أوجد ق (ل $\hat{أ}$ جـ).

❸ أ ب جـ مثلث، م نقطة تقاطع الأعمدة على أضلاعه، ق (جـ $\hat{أ}$ ب) = ٣٠°، ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ٣٥°. أوجد:
(أ) ق (ب $\hat{م}$ جـ).
(ب) ق (م $\hat{ب}$ جـ).
(جـ) ق (ب $\hat{جـ}$ م).

إستراتيجيات حل المسائل
- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- كون جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

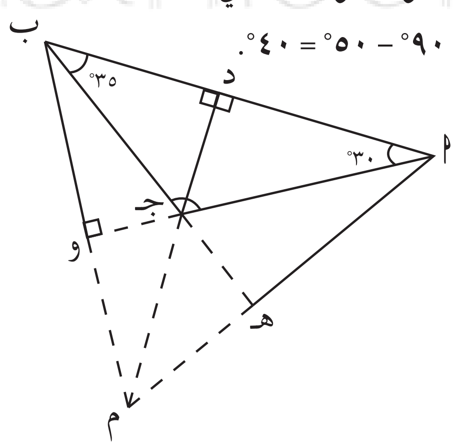
٧٩

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

❶ (أ) المثلث م ص ع.
(ب) المثلث س ص ع.
(جـ) المثلث ن ص ع أو المثلث ن س ع.

❷ $\overline{أن}$ يمر بالنقطة ولذا هو العمود الثالث في المثلث،
ويكون ق(ل $\hat{أ}$ جـ) = ٩٠° − ٥٠° = ٤٠°.

❸



(أ) ق(أ $\hat{ب}$ و) = ٩٠° − ٣٠° = ٦٠°، وفي المثلث ب م د نحصل على ق(ب $\hat{م}$ جـ) = ٣٠°.
(ب) ق(م $\hat{ب}$ جـ) = ٦٠° − ٣٥° = ٢٥°.
(جـ) ق(ب $\hat{جـ}$ م) = ١٨٠° − (٣٠° + ٢٥°) = ١٢٥°.

٧-٧

القطع المتوسطة للمثلث
Medians of a Triangle

سوف تتعلم
■ خواص القطع المتوسطة للمثلث.

من الاستخدامات
■ يستخدم رجال الإطفاء خطوطًا متقاطعة للتركيز على أماكن الحريق.

◄ صلة الدرس في السابق تعرفت المحاور في المثلث. في هذا الدرس سوف تتعرف القطع المتوسطة للمثلث. ►

استكشف القطع المتوسطة

الأدوات المستخدمة: فرجار، مسطرة.

أ ب جـ مثلث.

١ افتح الفرجار بطول أكبر من نصف طول أب.

٢ بدون تغيير فتحة الفرجار، من أ ارسم قوسًا في كل جهة من أب.

٣ بدون تغيير فتحة الفرجار ومن ب ارسم قوسًا في كل جهة من أب بحيث تتقاطع الأقواس في ٢ ، ٣.

٤ صل نقاط تقاطع الأقواس (هذه القطعة المستقيمة هي محور أب). سمِّ «م» نقطة تقاطع هذه القطعة مع أب.

٥ صل جـ ، م. ماذا تمثل القطعة المستقيمة جـ م؟

تعلم القطع المتوسطة للمثلث

القطعة المتوسطة للمثلث هي القطعة المستقيمة التي تصل أي رأس للمثلث بمنتصف الضلع المقابل.

المثلث س ص ع له ثلاثة رؤوس وثلاثة أضلاع، إذًا له ثلاث قطع متوسطة وهي: ع ل، ص ك، س ن.

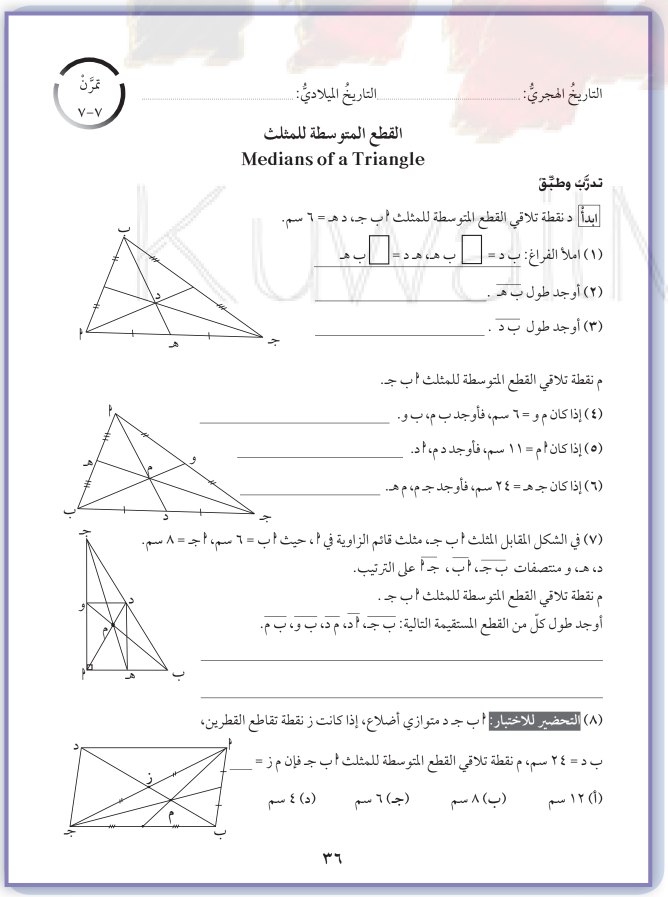
نظرية (٦) القطع المتوسطة للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة تقسم كلًّا منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس.

في الشكل المقابل ك ل ق مثلث فيه: ك ن ، ق ع ، ل ف ثلاث قطع متوسطة تتقاطع في م.

فيكون: $\frac{كم}{من} = \frac{لم}{مف} = \frac{قم}{مع} = \frac{٢}{١}$

المصطلحات الأساسية
◄ القطعة المتوسطة Median

٨٠



التاريخ الهجري: .... التاريخ الميلادي: .... تمرّن ٧-٧

القطع المتوسطة للمثلث
Medians of a Triangle

تدرّب وطبّق

ابدأ د نقطة تلاقي القطع المتوسطة للمثلث أ ب جـ، د هـ = ٦ سم.

(١) املأ الفراغ: ب د = □ ب هـ، هـ د = □ ب هـ

(٢) أوجد طول ب هـ.

(٣) أوجد طول ب د.

م نقطة تلاقي القطع المتوسطة للمثلث أ ب جـ.

(٤) إذا كان م و = ٦ سم، فأوجد ب م، ب و.

(٥) إذا كان أ م = ١١ سم، فأوجد د م، أ د.

(٦) إذا كان جـ هـ = ٢٤ سم، فأوجد جـ م، م هـ.

(٧) في الشكل المقابل المثلث أ ب جـ، مثلث قائم الزاوية في أ، حيث أ ب = ٦ سم، أ جـ = ٨ سم. د، هـ، و منتصفات ب جـ، أ ب، جـ أ على الترتيب. م نقطة تلاقي القطع المتوسطة للمثلث أ ب جـ. أوجد طول كلّ من القطع المستقيمة التالية: ب جـ، أ د، م د، ب و، ب م.

(٨) التحضير للاختبار: أ ب جـ د متوازي أضلاع، إذا كانت ز نقطة تقاطع القطرين، ب د = ٢٤ سم، م نقطة تلاقي القطع المتوسطة للمثلث أ ب جـ فإن م ز = ___

(أ) ١٢ سم (ب) ٨ سم (جـ) ٦ سم (د) ٤ سم

٣٦

٧-٧

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف خواص القطع المتوسطة في المثلث.

المصطلحات الأساسية

- القطعة المتوسطة.

الأدوات المستخدمة

- فرجار، مسطرة.

مراجعة

❶ كيف تجد منتصف قطعة مستقيمة؟ بالقياس بواسطة المسطرة المرقمة أو بالرسم الهندسي بواسطة الفرجار والمسطرة.

❷ هل نقطة تقاطع محاور الأضلاع في المثلث ونقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من الرؤوس إلى الأضلاع تكون دائمًا داخل المثلث؟ لا، تكون دائمًا داخل المثلث وذلك بحسب نوعه. فيمكن أن تكون على المثلث في المثلث القائم، داخل المثلث حاد الزوايا، خارج المثلث المنفرج الزاوية.

◄ **صلة الدّرس** في السابق، تعرفت المحاور في المثلث. في هذا الدرس سوف تتعرف القطع المتوسطة للمثلث.

١ – التمهيد

استكشف

الغاية

يتعرف الطالب القطع المتوسطة للمثلث، ويطبق خاصية نقطة تقاطعهم في مسائل هندسية وحياتية.

التقييم المستمر

ساعد الطلاب على استخدام الفرجار والمسطرة بشكل جيد كي يتمكنوا من تنفيذ النشاط في فقرة «استكشف»، وإيجاد نقطة المنتصف لكل ضلع، وبعد ذلك التأكد من أن القطع المتوسطة سوف تتقاطع في نقطة واحدة.

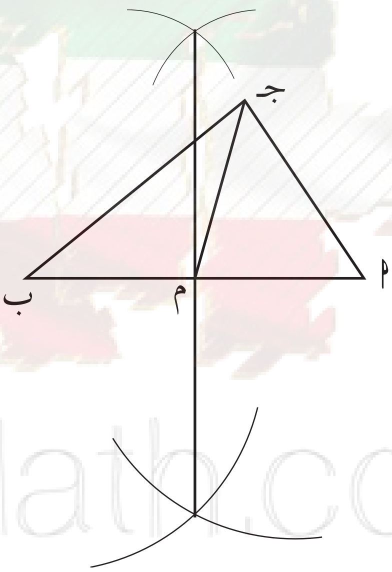
للمجموعات التي تنهي عملها باكرًا

اطلب إليهم استخدام الفرجار والمسطرة لإيجاد نسبة التقسيم على كل قطعة متوسطة في المثلث انطلاقًا من نقطة تقاطع القطع المتوسطة.

إجابات «استكشف»

يستخدم الطلاب الرسم الهندسي بواسطة الفرجار والمسطرة لإيجاد منتصف الضلع في المثلث بشكل دقيق.

❶ - ❹ انظر إلى الرسم.



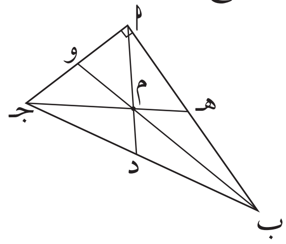
❺ النقطة م هي منتصف $\overline{\text{ﺍب}}$ وبالتالي $\overline{\text{جـ م}}$ تسمى القطعة المتوسطة التي تصل الرأس جـ بمنتصف $\overline{\text{ﺍب}}$.

٢- التعليم

تعلم

ركّز مع الطلاب على أهمية نقطة تقاطع القطع المتوسطة في المثلث لجهة نسبة التقسيم التي تحدثها على كل قطعة متوسطة من جهة الرأس ومن جهة الضلع المقابل له.

أمثلة بديلة

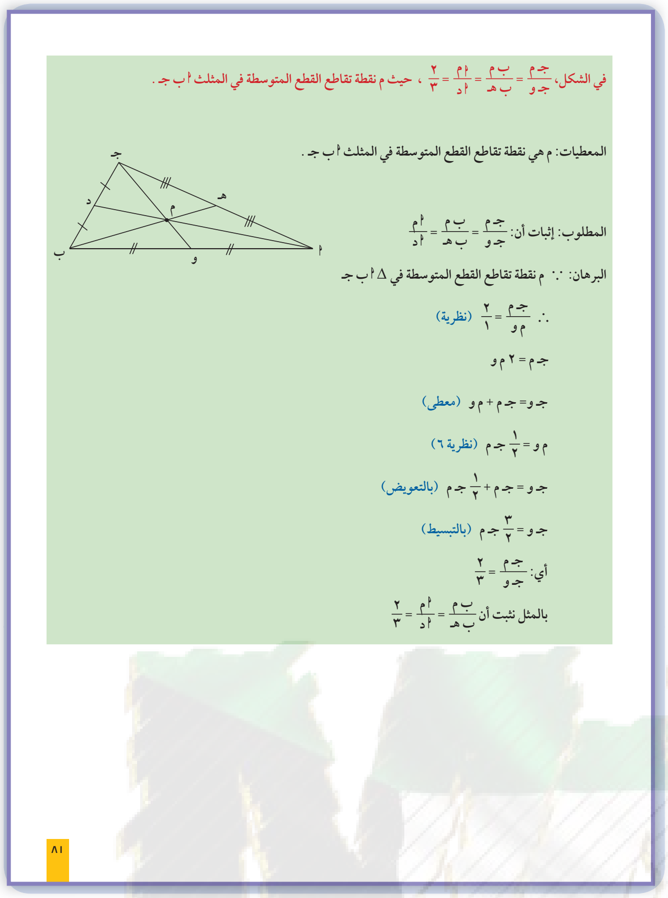


❶ ﺍب جـ مثلث قائم الزاوية في ﺍ

ﺍب = ١٦ سم،

ﺍجـ = ١٢ سم.

أوجد أطوال القطع المتوسطة الثلاث في المثلث.



في الشكل، $\frac{\text{جـ م}}{\text{جـ و}} = \frac{\text{ب م}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ﺍم}}{\text{ﺍد}} = \frac{٢}{٣}$ ، حيث م نقطة تقاطع القطع المتوسطة في المثلث ﺍب جـ .

المعطيات: م هي نقطة تقاطع القطع المتوسطة في المثلث ﺍب جـ .

المطلوب: إثبات أن: $\frac{\text{جـ م}}{\text{جـ و}} = \frac{\text{ب م}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ﺍم}}{\text{ﺍد}}$

البرهان: ∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة في Δ ﺍب جـ

∴ $\frac{\text{جـ م}}{\text{م و}} = \frac{٢}{١}$ (نظرية)

جـ م = ٢ م و

جـ و = جـ م + م و (معطى)

م و = $\frac{١}{٢}$ جـ م (نظرية ٦)

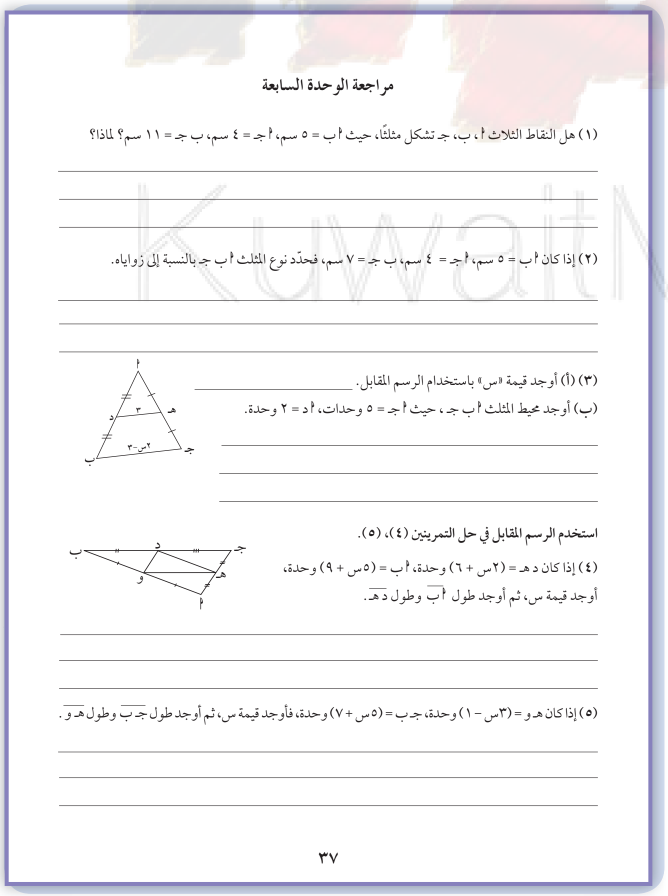
جـ و = جـ م + $\frac{١}{٢}$ جـ م (بالتعويض)

جـ و = $\frac{٣}{٢}$ جـ م (بالتبسيط)

أي: $\frac{\text{جـ م}}{\text{جـ و}} = \frac{٢}{٣}$

بالمثل نثبت أن $\frac{\text{ب م}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ﺍم}}{\text{ﺍد}} = \frac{٢}{٣}$

٨١



مراجعة الوحدة السابعة

(١) هل النقاط الثلاث ﺍ، ب، جـ تشكل مثلثًا، حيث ﺍب = ٥ سم، ﺍجـ = ٤ سم، ب جـ = ١١ سم؟ لماذا؟

(٢) إذا كان ﺍب = ٥ سم، ﺍجـ = ٤ سم، ب جـ = ٧ سم، فحدّد نوع المثلث ﺍب جـ بالنسبة إلى زواياه.

(٣) (أ) أوجد قيمة «س» باستخدام الرسم المقابل.

(ب) أوجد محيط المثلث ﺍب جـ ، حيث ﺍجـ = ٥ وحدات، ﺍد = ٢ وحدة.

استخدم الرسم المقابل في حل التمرينين (٤)، (٥).

(٤) إذا كان د هـ = (٢س + ٦) وحدة، ﺍب = (٥س + ٩) وحدة، أوجد قيمة س، ثم أوجد طول $\overline{\text{ﺍب}}$ وطول $\overline{\text{د هـ}}$.

(٥) إذا كان هـ و = (٣س − ١) وحدة، جـ ب = (٥س + ٧) وحدة، فأوجد قيمة س، ثم أوجد طول $\overline{\text{جـ ب}}$ وطول $\overline{\text{هـ و}}$.

٣٧


مثال (١)

أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين.
أ ب = أ جـ = ٢٤ سم
ق (جـ أ ب) = ١٢٠°
متوسطات المثلث أ هـ ، ب و ، جـ ز تتقاطع في النقطة م.
أوجد طول: أ هـ ، م أ ، م هـ .

المعطيات: أ ب = أ جـ = ٢٤ سم
ق (جـ أ ب) = ١٢٠°
أ هـ ، ب و ، جـ ز متوسطات في المثلث

المطلوب: إيجاد طول: أ هـ ، م هـ ، م أ .

البرهان: أ هـ متوسط في مثلث متطابق الضلعين حيث رأسه أ لذا يكون أ هـ ⊥ ب جـ
ق (أ هـ جـ) = ٩٠° (أ هـ محور ب جـ)
ق (جـ أ هـ) = ٦٠° (أ هـ منصف الزاوية أ)
ق (أ جـ هـ) = ٣٠° (مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°)
∴ المثلث أ هـ جـ ثلاثيني ستيني.
أ هـ = ١/٢ أ جـ (ضلع مقابل الزاوية ٣٠° في المثلث الثلاثيني الستيني)
أ هـ = ١/٢ × ٢٤ (بالتعويض)
أ هـ = ١٢ سم.
م أ / م هـ = ٢/١ نظرية(٦)
فيكون م أ = ٢/٣ أ هـ
م أ = ٢/٣ × ١٢ (بالتعويض)
م أ = ٨ سم
ثم م هـ = ١٢ − ٨ = ٤ سم. أو م هـ = ١/٣ أ هـ
م هـ = ١/٣ × ١٢ = ٤ سم

حاول أن تحل

١ أ ب جـ مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه ١٢ سم ،
هـ ، د ، و منتصفات أ جـ، جـ ب، أ ب على الترتيب.
أوجد طول أ د ، م أ ، م د .

٨٢

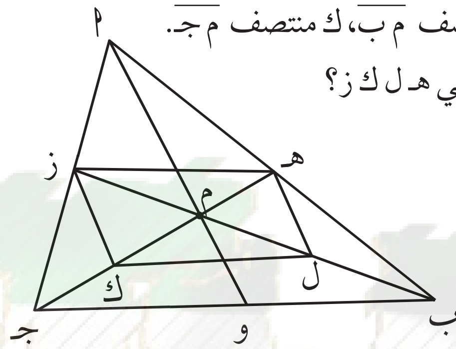
في المثلث أ جـ هـ قائم الزاوية، نكتب: (هـ جـ)^2 = (أ هـ)^2 + (أ جـ)^2
= ٨^2 + ١٢^2 = ٢٠٨؛ هـ جـ = ٤ $\sqrt{١٣}$ سم.

في المثلث أ ب و قائم الزاوية، نكتب: (ب و)^2 = (أ ب)^2 + (أ و)^2
= ١٦^2 + ٦^2 = ٢٩٢؛ ب و = ٢ $\sqrt{٧٣}$ سم.

في المثلث أ ب جـ قائم الزاوية، نكتب: (ب جـ)^2 = (أ ب)^2 +
(أ جـ)^2 = ١٦^2 + ١٢^2 = ٤٠٠؛ ب جـ = ٢٠ سم

أ د = $\frac{١}{٢}$ ب جـ ، لذا أ د = ١٠ سم.

❷ أ ب جـ مثلث، النقطة م تقاطع القطع المتوسطة في المثلث.
نأخذ ل منتصف م ب، ك منتصف م جـ.
ما نوع الرباعي هـ ل ك ز؟



ب م = ٢ م ز، لذا $\frac{١}{٢}$ ب م = $\frac{١}{٢}$ × ٢ م ز أي أن: م ل = م ز ،

وأيضًا جـ م = ٢ م هـ ، لذا $\frac{١}{٢}$ جـ م = $\frac{١}{٢}$ × ٢ م هـ

أي أن م ك = م هـ.

في الشكل الرباعي إذا تقاطع القطرين في منتصف كل منهما يكون متوازي أضلاع ، وبالتالي هـ ل ك ز هو متوازي أضلاع.

❷ $\frac{\text{و ب}}{\text{و د}} = \frac{\frac{٢}{٣}\text{ م ب}}{\frac{٤}{٣}\text{ م ب}} = \frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{٤}{٣}} = \frac{١}{٢}$.

إجابات «حاول أن تحل»

❶ (أ د)^2 = (أ جـ)^2 − (جـ د)^2

= (١٢)^2 − (٦)^2 = ١٠٨

أ د = ٦ $\sqrt{٣}$ سم.

م أ = $\frac{٢}{٣}$ × ٦ $\sqrt{٣}$ = ٤ $\sqrt{٣}$ سم.

م د = $\frac{١}{٣}$ × ٦ $\sqrt{٣}$ = ٢ $\sqrt{٣}$ سم.

٣- التدريب والتقييم

تحقق من فهمك

تأكد من فهم الطلاب للقطع المتوسطة في المثلث. ركز على أن القطعة المتوسطة تصل رأس المثلث بمنتصف الضلع المقابل لهذا الرأس.

إجابات «تحقق من فهمك»

١ القطعة المتوسطة تصل رأس المثلث بمنتصف الضلع المقابل أما المحور فهو الخط المستقيم العمودي في منتصف ضلع المثلث.

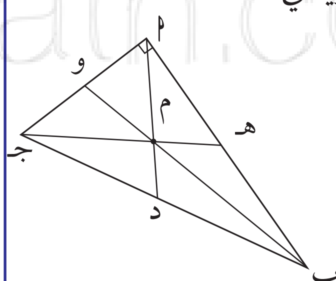
٢ في المثلث متطابق الضلعين القطعة المتوسطة من الرأس إلى القاعدة هي في الوقت نفسه منصف داخلي للزاوية والعمود المرسوم من الرأس إلى القاعدة ومحور القاعدة.

تقييم بديل

شجّع الطلاب على العمل ضمن مجموعات من اثنين. يرسم أحدهما أنواعًا مختلفة من المثلثات مع القطع المتوسطة ويطلب إلى زميله تأكيد النسبة عند نقطة التقاطع باستخدام الفرجار والمسطرة، ثم يتبادلان الأدوار.

اختبار سريع

١ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، م نقطة تقاطع القطع المتوسطة.



نأخذ: م د = ٣ سم،
م هـ = ٤ سم ،
م و = ٥ سم.

أوجد أطوال: م جـ ، م أ ، م ب ، أ د ، ب و ، جـ د .

م جـ = ٨ سم؛ م أ = ٦ سم ؛ م ب = ١٠ سم ؛
أ د = ٩ سم ؛ ب و = ١٥ سم ؛ جـ د = ٩ سم.

مثال (٢)

أ ب جـ د متوازي أضلاع، فيه د ب = ١٨ سم.
يتقاطع قطراه في م. النقطة هـ منتصف أ ب.
أوجد طول ب و ، و م.

المعطيات: م نقطة تقاطع القطرين في متوازي الأضلاع.
هـ منتصف أ ب
ب د = ١٨ سم

المطلوب: إيجاد طول ب و ، م و.

البرهان: م ب = م د ، م جـ = م أ (يتقاطع القطران في نقطة منتصف كليهما في متوازي الأضلاع)
م د = م ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٨
م ب = ٩ سم (بالتعويض)
$\frac{\text{و ب}}{\text{و م}} = \frac{٢}{١}$ (نظرية (٦)، حيث إن و نقطة تقاطع القطع المتوسطة في المثلث أ ب جـ)
فيكون و ب = ٦ سم، و م = ٣ سم

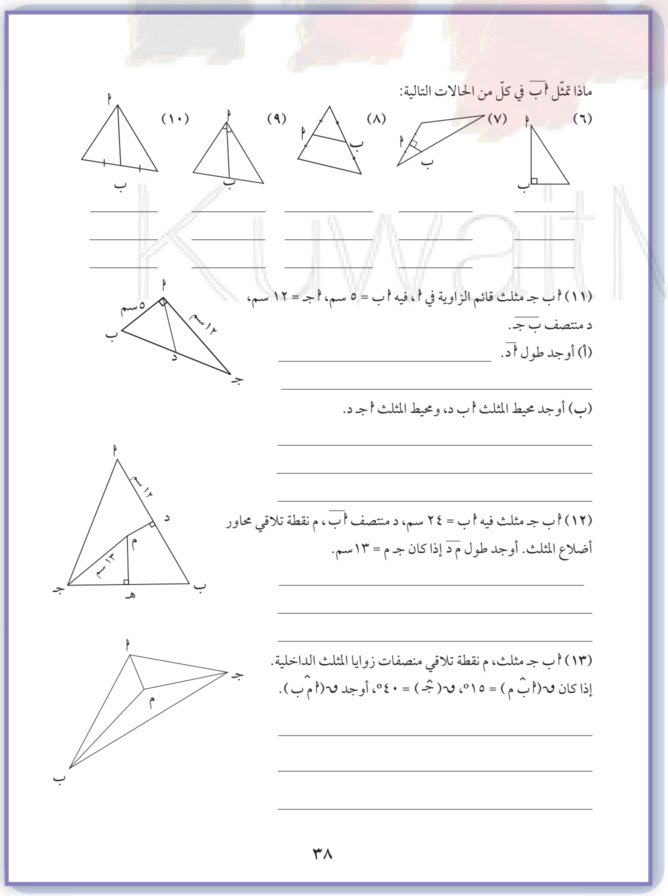
حاول أن تحل

٢ في المثال (٢)، أوجد: $\frac{\text{و ب}}{\text{و د}}$.

تحقق من فهمك

١ ما وجه الاختلاف والتشابه بين القطع المتوسطة والمحاور في المثلث؟
٢ في أي نوع من المثلثات ينطبق محور واحد مع القطعة المتوسطة. فسر؟

٨٣



ماذا تمثّل أ ب في كلّ من الحالات التالية:
(٦) (٧) (٨) (٩) (١٠)

(١١) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، فيه أ ب = ٥ سم، أ جـ = ١٢ سم،
د منتصف ب جـ.
(أ) أوجد طول أ د.
(ب) أوجد محيط المثلث أ ب د، ومحيط المثلث أ جـ د.

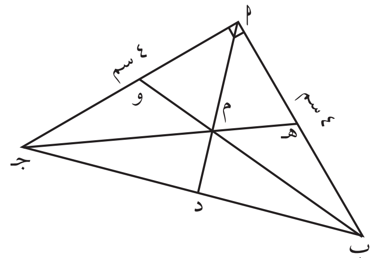
(١٢) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٢٤ سم، د منتصف أ ب، م نقطة تلاقي محاور أضلاع المثلث. أوجد طول م د إذا كان جـ م = ١٣ سم.

(١٣) أ ب جـ مثلث، م نقطة تلاقي منصفات زوايا المثلث الداخلية.
إذا كان ق(أ ب̂ م) = ١٥°، ق(جـ̂) = ٤٠°، أوجد ق(أ م̂ ب).

٣٨

اختبار سريع (تابع)

❷ ؟ب جـ مثلث قائم الزاوية في ؟ متطابق الضلعين حيث ؟ب = ؟جـ = ٤ سم . م نقطة تقاطع القطع المتوسطة. أوجد أطوال القطع المتوسطة.



ب جـ = ٤ $\sqrt{٢}$ سم؛ ؟د = ٢ $\sqrt{٢}$ سم؛

جـ هـ = ٢ $\sqrt{٥}$ سم؛ ب و = ٢ $\sqrt{٥}$ سم.

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

❶ ب و = $\frac{١}{٣}$ ب د ∴ ب د = ٣ × ١٠ = ٣٠ سم.

❷ (أ) ؟م = ٢ م د ؛ ١٥س = ٢ (٥س + ٣)

س = ٢,١ .

(ب) ل جـ = ٣ ل م ؛ ل جـ = ١٦٢ سم.

❸ (ب جـ)^{٢} = (١٢)^{٢} + (٥)^{٢}

= ١٤٤ + ٢٥

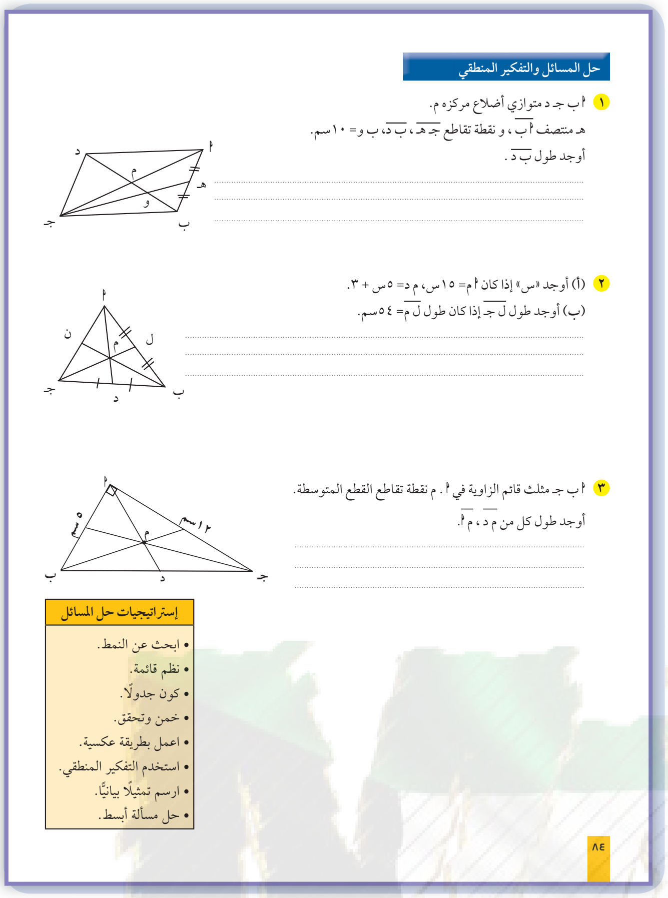
= ١٦٩

ب جـ = ١٣ سم

؟د = $\frac{١}{٢}$ × ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٣ = ٦,٥ سم

م د = $\frac{١}{٣}$ × ؟د = $\frac{١}{٣}$ × ٦,٥ سم ≈ ٢,١٧

؟م = $\frac{٢}{٣}$ × ؟د = $\frac{٢}{٣}$ × ٦,٥ سم ≈ ٤,١٣



حل المسائل والتفكير المنطقي

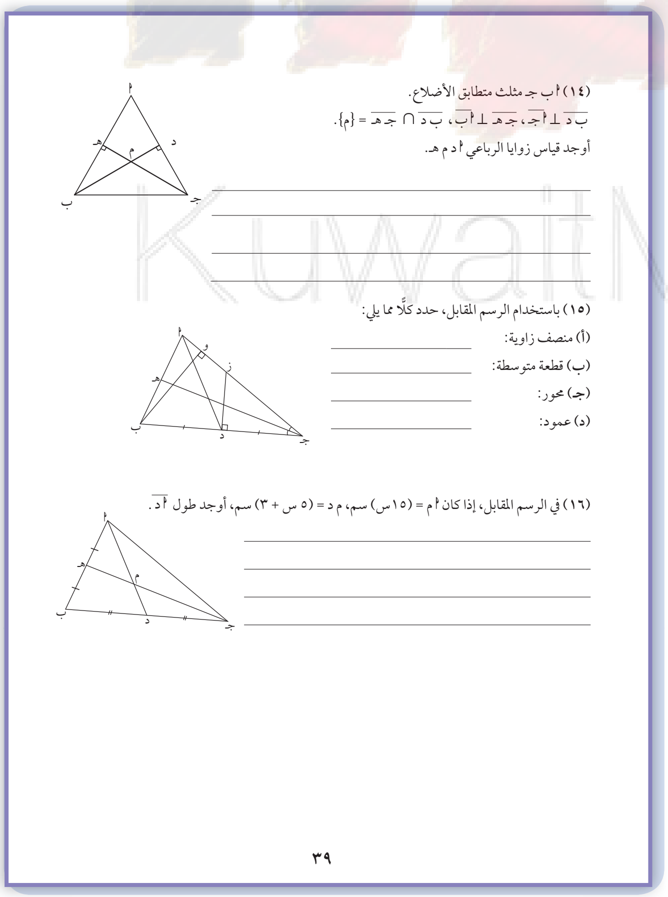
❶ ؟ب جـ د متوازي أضلاع مركزه م.
هـ منتصف ؟ب، و نقطة تقاطع جـ هـ، ب د، ب و = ١٠سم.
أوجد طول ب د .

❷ (أ) أوجد «س» إذا كان ؟م = ١٥س، م د= ٥س + ٣.
(ب) أوجد طول ل جـ إذا كان طول ل م= ٥٤سم.

❸ ؟ب جـ مثلث قائم الزاوية في ؟. م نقطة تقاطع القطع المتوسطة.
أوجد طول كل من م د ، م ؟.

إستراتيجيات حل المسائل
- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- كوّن جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًا.
- حل مسألة أبسط.

٨٤



(١٤) ؟ب جـ مثلث متطابق الأضلاع.
ب د ⊥ ؟جـ، جـ هـ ⊥ ؟ب، ب د ∩ جـ هـ = {م}.
أوجد قياس زوايا الرباعي ؟د م هـ.

(١٥) باستخدام الرسم المقابل، حدد كلًّا مما يلي:
(أ) منصف زاوية:
(ب) قطعة متوسطة:
(جـ) محور:
(د) عمود:

(١٦) في الرسم المقابل، إذا كان ؟م = (١٥س) سم، م د = (٥ س + ٣) سم، أوجد طول ؟د .

٣٩

إجابات اختبار الوحدة السابعة

❶ (ب جـ)^{٢} = ٩^{٢} = ٨١

(ﻫ جـ)^{٢} + (ﻫ ب)^{٢} = ٧^{٢} + ٣^{٢} = ٥٨

(ب جـ)^{٢} > (ﻫ جـ)^{٢} + (ﻫ ب)^{٢} لذا يكون المثلث ﻫ ب جـ منفرج الزاوية في ﻫ .

❷ هـ و = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠ سم　　　هـ د = $\frac{٩٠}{٢}$ = ٤٥ سم

ﻫ جـ = ٢ × و د = ٨٠ سم.

❸ هـ هي منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

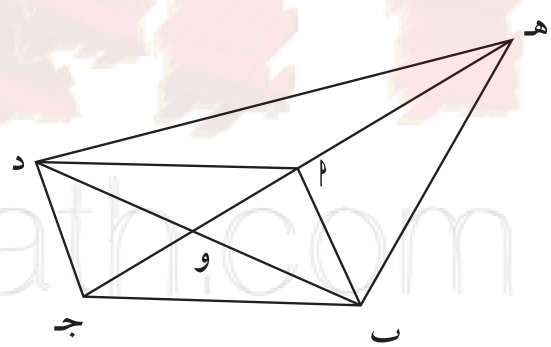
نكتب: (م جـ)^{٢} = (م هـ)^{٢} + (هـ جـ)^{٢} = ٦^{٢} + ١٠^{٢}

م جـ = ٢ $\sqrt{٣٤}$ سم.

❹ جـ د = ٢ ﻫ م؛ جـ د = ١٠ سم

(جـ ﻫ)^{٢} = ١٠^{٢} − ٦^{٢} ؛ جـ ﻫ = ٨ سم.

❺ في المثلث هـ ب د نجد أن و منتصف الضلع $\overline{\text{ب د}}$ لذا $\overline{\text{هـ و}}$ قطعة متوسطة في هذا المثلث، ثم هـ ﻫ = ٢ ﻫ و، فتكون النقطة ﻫ هي تقاطع القطع المتوسطة في المثلث.



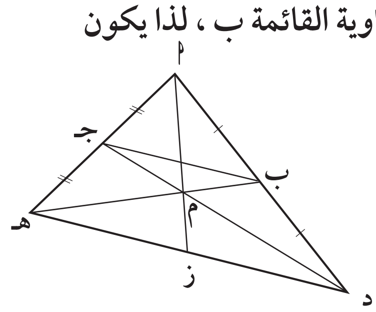
❻ $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ منصف داخلي للزاوية القائمة ب ، لذا يكون ق(هـ بَ جـ) = ٤٥°.

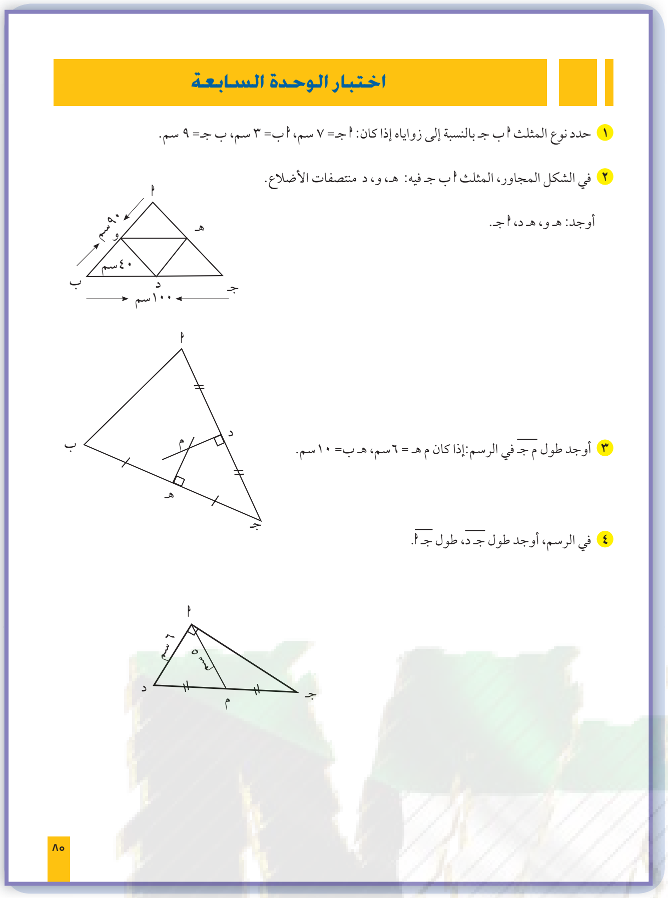
❼ $\overline{\text{هـ ب}}$ قطعة متوسطة،

$\overline{\text{د جـ}}$ قطعة متوسطة ،

م نقطة تقاطع القطعتين المتوسطتين $\overline{\text{هـ ب}}$ ، $\overline{\text{د جـ}}$.

$\overline{\text{ﻫ ز}}$ القطعة المتوسطة الثالثة.





اختبار الوحدة السابعة

❶ حدد نوع المثلث ﻫ ب جـ بالنسبة إلى زواياه إذا كان: ﻫ جـ = ٧ سم، ﻫ ب = ٣ سم، ب جـ = ٩ سم.

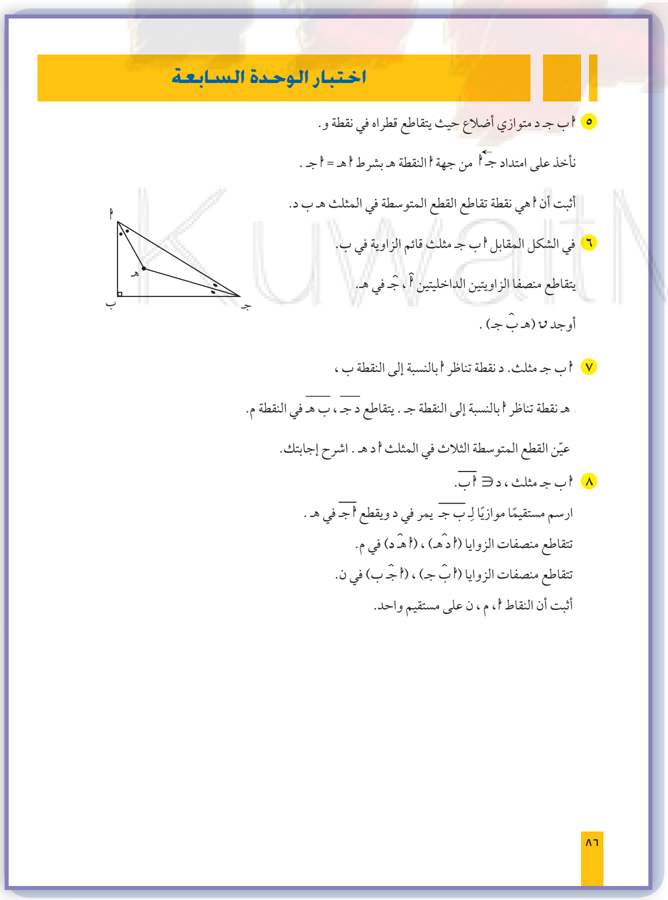
❷ في الشكل المجاور، المثلث ﻫ ب جـ فيه: هـ، و، د منتصفات الأضلاع.

أوجد: هـ و، هـ د، ﻫ جـ.

❸ أوجد طول $\overline{\text{م جـ}}$ في الرسم: إذا كان م هـ = ٦ سم، هـ ب = ١٠ سم.

❹ في الرسم، أوجد طول $\overline{\text{جـ د}}$، طول $\overline{\text{جـ ﻫ}}$.

٨٥



اختبار الوحدة السابعة

❺ ﻫ ب جـ د متوازي أضلاع حيث يتقاطع قطراه في نقطة و.

نأخذ على امتداد $\overleftarrow{\text{جـ ﻫ}}$ من جهة ﻫ النقطة هـ بشرط ﻫ هـ = ﻫ جـ .

أثبت أن ﻫ هي نقطة تقاطع القطع المتوسطة في المثلث هـ ب د.

❻ في الشكل المقابل ﻫ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب.

يتقاطع منصفا الزاويتين الداخليتين ﻫ̂ ، جـ̂ في هـ.

أوجد ق (هـ بَ جـ) .

❼ ﻫ ب جـ مثلث. د نقطة تناظر ﻫ بالنسبة إلى النقطة ب ،

هـ نقطة تناظر ﻫ بالنسبة إلى النقطة جـ . يتقاطع $\overline{\text{د جـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ في النقطة م.

عيّن القطع المتوسطة الثلاث في المثلث ﻫ د هـ . اشرح إجابتك.

❽ ﻫ ب جـ مثلث ، د ∈ $\overline{\text{ﻫ ب}}$.

ارسم مستقيمًا موازيًا لِـ $\overline{\text{ب جـ}}$ يمر في د ويقطع $\overline{\text{ﻫ جـ}}$ في هـ .

تتقاطع منصفات الزوايا (ﻫ دَ هـ) ، (ﻫ هَـ د) في م.

تتقاطع منصفات الزوايا (ﻫ بَ جـ) ، (ﻫ جَـ ب) في ن.

أثبت أن النقاط ﻫ ، م ، ن على مستقيم واحد.

٨٦

٨ في Δ أ د هـ

∵ $\overleftarrow{\text{د م}} \cap \overleftarrow{\text{هـ م}} = \{\text{م}\}$

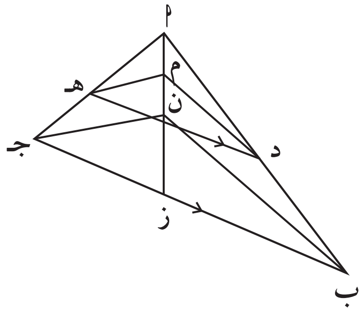
∴ $\overleftarrow{\text{أ م}}$ منصف $(\hat{\text{أ}})$

في Δ أ ب جـ

∵ $\overleftarrow{\text{ب ن}} \cap \overleftarrow{\text{جـ ن}} = \{\text{ن}\}$

∴ $\overleftarrow{\text{أ ن}}$ منصف $(\hat{\text{أ}})$

∴ أ ، م ، ن على استقامة واحدة



مخطط تنظيمي للوحدة السابعة

ملخص الوحدة السابعة: هندسة المثلث

- في المثلث، مجموع طول ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث وهذه الخاصية تسمى متباينة المثلث.
- في المثلث مختلف الأضلاع، تكون الزاوية الأكبر مقابلة للضلع الأكبر.
- إذا لم تتساو زاويتان في مثلث، يكون الضلع الأكبر مقابلًا للزاوية الكبرى.
- إن القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث موازية للضلع الثالث، ويساوي طولها نصف طوله.
- إن طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر.
- في المثلث الثلاثيني الستيني يكون طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° مساويًا لنصف طول الوتر، والعكس صحيح.
- إن محور القطعة المستقيمة هو العمود المنصف لها، وتتلاقى محاور الأضلاع الثلاثة في المثلث بالنقطة نفسها.
- إن نقطة تقاطع المحاور لأضلاع المثلث هي على أبعاد متساوية من رؤوسه.
- تتلاقى منصفات الزوايا الثلاث الداخلية للمثلث في نقطة واحدة. وتقع نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث على أبعاد متساوية من أضلاعه الثلاثة.
- إن ارتفاع المثلث هو طول العمود المرسوم من رأس المثلث على قاعدته وتتلاقى هذه الأعمدة في النقطة نفسها.
- إن القطعة المتوسطة للمثلث هي القطعة المستقيمة التي تصل أي رأس للمثلث بمنتصف الضلع المقابل. تتقاطع هذه القطع المتوسطة في نقطة واحدة وتقسم نقطة التقاطع هذه القطع المتوسطة بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس.

٨٧