الوحدة الثالثة

التحليل والمعادلات والمتباينات والحدوديات النسبية

توضّح المعلومات المتضمنة في هذه الصفحة استخدام التحليل والمعادلات والمتباينات والحدوديات النسبية في بعض المواقف الحياتية.

شعوب العالم

اسأل الطلاب إذا كان لديهم آلة تصوير. ثم بيِّن لهم أن الحدوديات النسبية تستخدم في عملية التصوير.

الدراسات الاجتماعية

اطلب إلى الطلاب أن يقدموا تقريرًا عن طريقة لخفض استهلاك الطاقة الكهربائية في منطقة معينة. زوّدهم ببعض الأفكار عن المعادلات والمتباينات التي سوف تساعدهم في هذا التقرير.

العلوم

اطلب إلى الطلاب أن يقوموا بالبحث عن نوع واحد من الانفلونزا الذي ينتشر في الكويت، ثم اشرح لهم كيفية استخدام المعادلات لإيجاد تكلفة اللقاح.

الهندسة

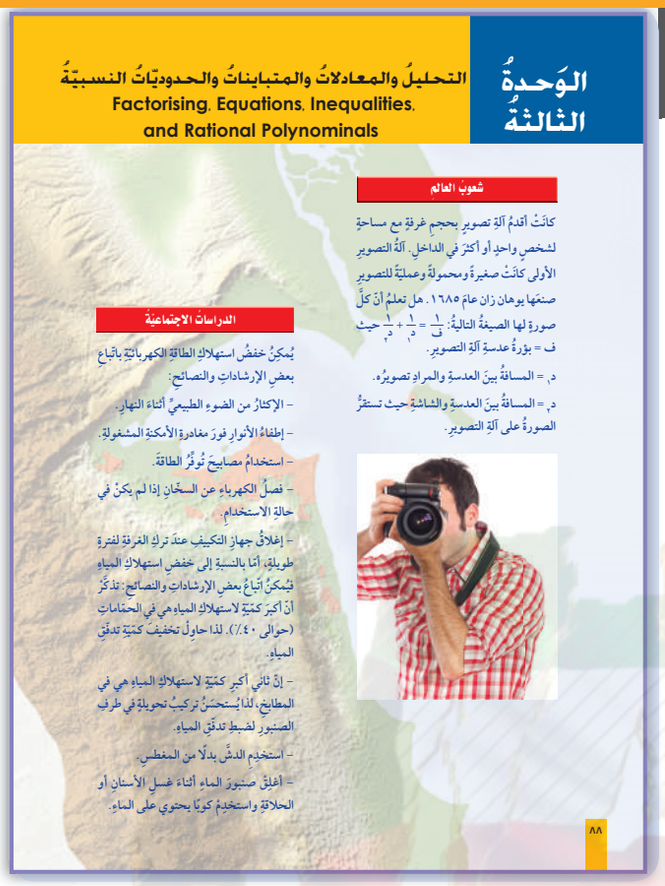
اطلب إلى الطلاب أن يقوموا بالبحث عن أول قمر صناعي، ثم ناقش معهم أهمية المعادلات في هندسة الاتصالات.

مشروع الوحدة

يعد الطلاب دراسة عن استهلاك الطاقة الكهربائية والمياه في مجمع تجاري لكتابة تقرير مفصل عن الحلول الممكنة لتخفيف الهدر الحاصل.

دع الطلاب يعملون في مجموعات صغيرة لمناقشة المعلومات المفيدة للقيام بهذه الدراسة.

يضمن الطلاب في هذا التقرير أسئلة بحيث أن إجاباتها تكون عبارة عن معادلات ومتباينات.



مرشد تخطيط الوحدة

كتاب الطالب			
الدرس	الأدوات المستخدمة	المصطلحات الأساسية	رقم الدرس
افتتاحية الوحدة الثالثة			
التركيز على حل المسائل			
افتتاحية الوحدة الثالثة (أ)			
تحليل الفرق بين مربعين	مسطرة، مقص	الفرق بين مربعين	٣-١
تحليل الفرق بين مكعبين أو مجموعهما	مقص	فرق المكعبين، مجموع المكعبين	٣-٢
تحليل حدودية ثلاثية على الصورة: $س^{٢} + ب س + جـ$		حدودية ثلاثية	٣-٣
تحليل حدودية ثلاثية على الصورة: $أ س^{٢} + ب س + جـ ، أ \neq ٠$			٣-٤
افتتاحية الوحدة الثالثة (ب)			
حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بالتحليل		معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد، حل معادلة	٣-٥
حل متباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد		متباينة	٣-٦
افتتاحية الوحدة الثالثة (جـ)			
الحدوديات النسبية وتبسيطها		حدودية نسبية	٣-٧
جمع الحدوديات النسبية			٣-٨
طرح الحدوديات النسبية			٣-٩
ضرب الحدوديات النسبية وقسمتها			٣-١٠

KuwaitMath.com

التركيز على حل المسائل

تفسير العبارات الرياضية

الغاية

يركز الطلاب على الخطوة الأولى في عملية حل المسألة وهي قراءة وفهم المسألة.

كيفية التعامل مع الصفحة

استخدام عملية حل المسائل

ناقش الخطوات التالية عند قراءة المسألة:

- اقرأ المسألة لعدة مرات.
- اسأل نفسك عددًا من الأسئلة لتتوضح لك الصورة.

اسأل...

ما الخطوة الأولى المهمة في هذه المسألة؟

إجابة محتملة: تحديد المعطيات غير الضرورية.

إجابات المسائل

١ **زراعة قطعة أرض.**

٢ **طول وعرض قطعة الأرض.**

٣ **(٢س + ٢)(س + ٢)**

٤ **٢س^{٢}**

٥ **٦س + ٤**

٦ **س = ٦**

٧ **الطول = ١٢، العرض = ٦**

٨ **سعر الطماطم والخيار وسعر متر الأرض.**

حلُّ المسائل

افهم

خطِّط

حُلّ

تحقّق

قراءةُ المسألةِ

عندَ قراءةِ المسألةِ قد تجدُ صعوبةً في فهمِ المسألةِ. أوّلًا احذفِ المعطياتِ غيرَ الضروريّةِ، ثمّ قسِّمِ المسألةَ إلى مسائلَ صغيرةٍ. تأكّدْ من فهمِ كلِّ جزءٍ من المسألةِ.

التركيزُ على حلِّ المسائلِ

تتضمّنُ هذه المسألةُ معطياتٍ غيرَ ضروريّةٍ. أشِرْ إليها. وقسِّمِ المسألةَ إلى مسائلَ بسيطةٍ. وأجِبْ عن الأسئلةِ التاليةِ:

يُخطِّطُ أحمدُ لزراعةِ قطعةِ أرضٍ مستطيلةِ الشكلِ في حديقةِ منزلِهِ ويُريدُ زراعةَ نصفِ مساحتِها بالطماطمِ، والنصفِ الآخرِ منها بالخيارِ ليبيعها في السوقِ بسعرِ دينارٍ لكلِّ كيلوجرامٍ. طولُ قطعةِ الأرضِ المرادِ زراعتُها ضعفُ عرضِها، والذي يُساوي س مترٍ. وسعرُ كلِّ مترٍ مربّعٍ ٤٠٠ دينارٍ. إذا أرادَ أحمدُ أن يُحيطَ قطعةَ الأرضِ بممرٍّ عرضُه مترٌ واحدٌ من الجهاتِ الأربعِ لقطعةِ الأرضِ بحيثُ يرصفُه بالحصى بمساحةِ ٤٠ مترًا مربّعًا، فأوجِدْ طولَ وعرضَ قطعةِ الأرضِ المرادِ زراعتُها.

١ علامَ تُركِّزُ المسألةُ؟

٢ ما المطلوبُ إليكَ إيجادُه؟

٣ أوجِدْ مساحةَ الممرِّ مع قطعةِ الأرضِ المزروعةِ بدلالةِ س.

٤ أوجِدْ مساحةَ قطعةِ الأرضِ المزروعةِ بدلالةِ س.

٥ أوجِدْ مساحةَ الممرِّ بدلالةِ س.

٦ أوجِدْ قيمةَ س.

٧ أوجِدْ طولَ الحديقةِ وعرضَها.

٨ ما المعطياتُ غيرُ الضروريّةِ في المسألةِ؟

٩٠

مسائل إضافية

يريد أحمد، صاحب مزرعة صغيرة مستطيلة الشكل أن يحيطها بسور حديدي بسماكة ٥ سم. أوجد محيط المزرعة علمًا أن مساحتها هي ١٠٠ م^{٢} وطولها هو أربعة أضعاف عرضها.

١ ما المطلوب إليك إيجاده؟ **محيط المزرعة.**

٢ ما المعلومات غير الضرورية؟ **سماكة السور.**

٣ ما محيط المزرعة؟ **٥٠ م.**

المجلّة

اسأل الطلاب أن يكتبوا الأسئلة التي يمكن أن يطرحوها ليفهموا المسألة بشكل جيّد.

KuwaitMath.com

الموضوع: إنتاج المصانع

كيفية التعامل مع الصفحة

تقدم هذه الصفحة موضوع هذا الجزء «التحليل»، وتناقش الأرباح في أحد المصانع.

اسأل...

- ما هي عائدات المصنع؟

هي مجموع مداخيل المصنع عن طريق بيع منتج أو خدمات أخرى.

- هل دائمًا تربح المصانع؟

لا، يتأثر ربح المصانع بمبدأ العرض والطلب وكلفة الإنتاج.

الترابط والتداخل

الاقتصاد

تتأثر المصانع سلبًا أو إيجابًا من خلال مؤشر العرض والطلب، فكلما زاد الطلب تحسن وضع المصانع وكلما قلّ الطلب تتأثر المصانع سلبًا بحيث إذا طالت فترة الركود يكون من الممكن أن تتعرض للإفلاس.

الدراسات الاجتماعية

تزداد نسبة العاملين في المصانع عندما تربح ويسرّح عدد من الموظفين عندما يتعرض المصنع للإفلاس.

إجابات الأسئلة

١ لا، لا ربح ولا خسارة أي كلفة الإنتاج = ثمن المبيع، ٥ آلاف، ٩ آلاف، ٨ آلاف، لا ربح ولا خسارة.

٢ (س – ٧)(–س + ١)

KuwaitMath.com

٣-١

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحلل الفرق بين مربعين.

المصطلحات الأساسية

- الفرق بين مربعين.

الأدوات المستخدمة

- مسطرة، مقص.

مراجعة

أوجد الناتج:

١ $س^{٢} + ٣س + ٢س^{٢} - ٢س - ١$

$٣س^{٢} + س - ١$

٢ $ص^{٢} + ٢ص - س^{٢} - ٢ص$

$ص^{٢} - س^{٢}$

صلة الدرس ناقش مع الطلاب عمليات جمع وطرح المقادير الجبرية.

١ - التمهيد

استكشف

الغاية

يعرف الطلاب طريقة لتحليل الفرق بين مربعين.

التقييم المستمر

تابع وتحقق من عمل الطلاب في هذه الفقرة للتأكد من فهمهم للمسألة.

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

اكتب أمثلة إضافية يمكن الإجابة عنها باستخدام المعادلة في (٥).

المتابعة

دع الطلاب يناقشون إجاباتهم لكي يصححوا أخطاءهم.

٣-١

تحليلُ الفرقِ بينَ مربّعين

Factorising the Difference betweenTwo Squares

◄ صلةُ الدرسِ تعرّفتَ في السابقِ على المقاديرِ الجبريّةِ، وتحليلَ الفرقِ بينَ مربّعين. ►

سوف تتعلّمُ
- تحليلَ الفرقِ بينَ مربّعين.

من الاستخداماتِ
- يستخدمُ الباحثون العلميّون تحليلَ المقاديرِ الجبريّةِ في حلِّ الكثيرِ من المسائلِ الفيزيائيّةِ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ
◄ الفرقُ بينَ مربّعين
Difference between Two Squares

استكشف — تحليلُ الفرقِ بينَ مربّعين

مستلزماتٌ: مسطرةٌ - مقصٌّ

في الرسمِ: ا ب جـ د مربّعٌ طولُ ضلعِهِ س، ا ل ر ن مربّعٌ طولُ ضلعِهِ ص.

١ (أ) أوجدْ مساحةَ كلٍّ من المربّعين.
(ب) ما الفرقُ بينَ مساحتي المربّعين؟

٢ في الشكلِ (١)، حدّدِ المنطقةَ التي تُمثّلُ الفرقَ بينَ مساحتي المربّعين.

٣ عيّنِ النقطةَ ع على $\overline{دجـ}$ حيث د ع = ا ل.

٤ قُصَّ المستطيلَ ن ر ع د وألصِقْه على الضلعِ ع جـ كما هو مبيَّنٌ في الشكلِ المقابلِ.
(أ) ما أبعادُ المستطيلِ ل ب ن' د'؟
(ب) ما مساحةُ المستطيلِ ل ب ن' د'؟

٥ تحقّقْ من صحّةِ العلاقةِ:
$س^{٢} - ص^{٢} = (س - ص)(س + ص)$

شكلُ (١)

شكلُ (٢)

تعلّمْ — تحليلُ الفرقِ بينَ مربّعين

يُمكِنُك استخدامُ الفرقِ بينَ مربّعين لتحليلِ تعابيرَ جبريّةٍ إلى عواملِها الأوّليّةِ.

$س^{٢} - ص^{٢} = (س - ص)(س + ص)$

مثالٌ (١)

حلِّلْ تحليلًا تامًّا: $س^{٢} - ١$.

الحلُّ: $س^{٢} - ١ = س^{٢} - ١^{٢}$

$= (س - ١)(س + ١)$

٩٣

إجابات «استكشف»

١ (أ) مساحة ا ب جـ د = $س^{٢}$

مساحة ا ل ر ن = $ص^{٢}$

(ب) $س^{٢} - ص^{٢}$

٢ ل ب جـ د ن ر

٤ (أ) (س - ص)، (س + ص)

(ب) $س^{٢} - ص^{٢}$

٥ بمعادلة المساحة فإن:

$س^{٢} - ص^{٢} = (س - ص)(س + ص)$

KuwaitMath.com

٢ – التعليم

تعلم

تأكد من إدراك الطلاب مفهوم الفرق بين مربعين. واطلب إليهم تنظيم قائمة من مقادير ذات حدين على الشكل التالي: $س^{٢} - ن$، $أ^{٢}س^{٢} - ن$

حيث أ، ن مربع كامل

أمثلة بديلة

حلّل المقادير التالية إلى عواملها الأولية:

١ $٩س^{٢} - ٤$

$٩س^{٢} - ٤ = (٣س)^{٢} - (٢)^{٢}$

$= (٣س - ٢)(٣س + ٢)$

٢ $١٦ص^{٣} - ص$

$١٦ص^{٣} - ص = ص(١٦ص^{٢} - ١)$

$= ص((٤ص)^{٢} - (١)^{٢})$

$= ص(٤ص - ١)(٤ص + ١)$

٣ $\frac{١}{٤}س^{٢} - \frac{١}{١٦}ص^{٢}$

$\frac{١}{٤}س^{٢} - \frac{١}{١٦}ص^{٢}$

$= \left(\frac{١}{٢}س\right)^{٢} - \left(\frac{١}{٤}ص\right)^{٢}$

$= \left(\frac{١}{٢}س - \frac{١}{٤}ص\right)\left(\frac{١}{٢}س + \frac{١}{٤}ص\right)$

إجابات «حاول أن تحل»

١ $(١ - ٢م)(١ + ٢م)$

٢ (أ) $(و - ٦)(و + ٦)$

(ب) $(٨س - ١١)(٨س + ١١)$

(جـ) $(٤ - ص)(٤ + ص)$

٣ $٢(٥ - ٣ك)(٥ + ٣ك)$

حاوِلْ أن تحلَّ

١ حلِّلْ تحليلًا تامًّا: $١ - ٤م^{٢}$

مثالٌ (٢)

حلِّلْ تحليلًا تامًّا: $٤ - ٤٩و^{٢}$

الحلُّ: $٤ - ٤٩و^{٢} = (٢)^{٢} - (٧و)^{٢}$

$= (٢ - ٧و)(٢ + ٧و)$

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ حلِّلْ كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا:

(أ) $و^{٢} - ٣٦$ (ب) $٦٤س^{٢} - ١٢١$ (جـ) $١٦ - ص^{٢}$

مثالٌ (٣)

حلِّلْ تحليلًا تامًّا: $٨ - ٢س^{٢}$

الحلُّ: $٨ - ٢س^{٢} = ٢ \times ٤ - ٢س^{٢}$

$= ٢(٤ - س^{٢})$

$= ٢(٢ - س)(٢ + س)$.

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ حلِّلْ تحليلًا تامًّا: $٥٠ - ١٨ك^{٢}$

مثالٌ (٤)

مربّعان يزيدُ طولُ ضلعِ أحدِهما عن الآخرِ بمقدارِ وَحدةِ طولٍ واحدةٍ، وتزيدُ مساحتُه ٧ وَحداتٍ مربّعةٍ عن مساحةِ الآخرِ. أوجِدْ طولَ ضلعِ المربّعِ الأصغرِ.

الحلُّ: ليكنْ س طولَ ضلعِ المربّعِ الأصغرِ.

المعادلةُ: $(س + ١)^{٢} - س^{٢} = ٧$

$(س + ١ - س)(س + ١ + س) = ٧$

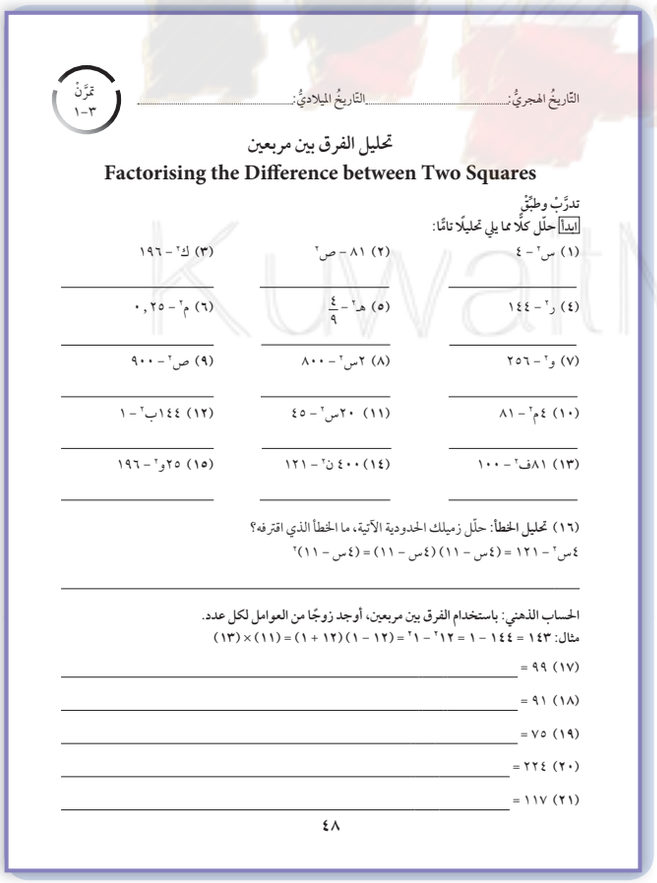
$(١)(٢س + ١) = ٧$

$٢س = ٦$

$س = ٣$

يبلغُ طولُ ضلعِ المربّعِ الأصغرِ ٣ وَحداتٍ.

٩٣



تمرّنْ ٣-١

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

تحليل الفرق بين مربعين

Factorising the Difference between Two Squares

تدرَّبْ وطبِّقْ

ابدأْ حلِّل كلًّا مما يلي تحليلًا تامًّا:

(١) $س^{٢} - ٤$ (٢) $٨١ - ص^{٢}$ (٣) $ك^{٢} - ١٩٦$

(٤) $ر^{٢} - ١٤٤$ (٥) $هـ^{٢} - \frac{٤}{٩}$ (٦) $م^{٢} - ٠,٢٥$

(٧) $و^{٢} - ٢٥٦$ (٨) $٢س^{٢} - ٨٠٠$ (٩) $ص^{٢} - ٩٠٠$

(١٠) $٤م^{٢} - ٨١$ (١١) $٢٠س^{٢} - ٤٥$ (١٢) $١٤٤ب^{٢} - ١$

(١٣) $٨١ف^{٢} - ١٠٠$ (١٤) $٤٠٠ن^{٢} - ١٢١$ (١٥) $٢٥و^{٢} - ١٩٦$

(١٦) **تحليل الخطأ:** حلّل زميلك الخدودية الآتية، ما الخطأ الذي اقترفه؟

$٤س^{٢} - ١٢١ = (٤س - ١١)(٤س - ١١) = (٤س - ١١)^{٢}$

الحساب الذهني: باستخدام الفرق بين مربعين، أوجد زوجًا من العوامل لكل عدد.

مثال: $١٤٣ = ١٤٤ - ١ = ١٢^{٢} - ١^{٢} = (١٢ - ١)(١٢ + ١) = (١١) \times (١٣)$

(١٧) ٩٩ = _____

(١٨) ٩١ = _____

(١٩) ٧٥ = _____

(٢٠) ٢٢٤ = _____

(٢١) ١١٧ = _____

٤٨

KuwaitMath.com

٣ – التدريب والتقييم

تحقّق من فهمك

إجابات «تحقق من فهمك»

١ كلا

٢ كتب ٤س بدلًا من ٢س.

٣ كلا لا يمكننا الانتقال من $أ^{٢} - ب^{٢}$ إلى $أ^{٢} + ب^{٢}$.

تقييم بديل

يمكن استخدام الفرق بين مربعين لحساب فرق مربعات أعداد كبيرة ذهنيًّا مثلًا:

$(٣٠٠)^{٢} - (٢٩٩)^{٢} = (٣٠٠ - ٢٩٩)(٣٠٠ + ٢٩٩)$

$= ١ \times ٥٩٩ = ٥٩٩$

المجلّة: اطلب إلى الطلاب إيجاد ناتج (٥٩×٦١) باستخدام فرق المربعين. ٣٥٩٩

اختبار سريع

١ حلّل:

$٧٢س^{٥} - ٢س^{٣}$

$٧٢س^{٥} - ٢س^{٣} = ٢س^{٣}(٦س - ١)(٦س + ١)$

٢ أوجد الناتج بالحساب الذهني.

$(٥٤)^{٢} - (٤٦)^{٢}$

٨٠٠

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

١ ٣٣

٢ ١٥

٣ (أ) $\left(\frac{١}{٢}م - \frac{١}{٣}ب\right)\left(\frac{١}{٢}م + \frac{١}{٣}ب\right)$

(ب) $(٥حـ د - ١)(٥حـ د + ١)$

(جـ) $(٢ص - ١)(٢ص + ١)(٤ص^{٢} + ١)$

٤ ٤٨ سم

تحقّق من فهمك

١ هل يُمكِنُ تحليلُ مجموعِ المربّعين $أ^{٢} + ب^{٢}$؟

٢ حلّلَ زميلُك $٤س^{٢} - ١٢١$، وحصلَ على $(٤س + ١١)(٤س - ١١)$. ما الخطأُ الذي وقعَ فيه؟

٣ هل يُمكِنُك تحليلُ مجموعِ مربّعين؟

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ أوجِدْ قيمةَ $١٧^{٢} - ١٦^{٢}$ بالتحليلِ.

٢ ع ن د مثلّثٌ قائمُ الزاويةِ في ن. إذا كانَ ع د = ٢٥سم، ع ن = ٢٠سم، فأوجِدْ طولَ دَنّ.

٣ حلّلْ كلًّا ممّا يلي:

(أ) $\frac{١}{٤}م^{٢} - \frac{١}{٩}ب^{٢}$

(ب) $٥^{٢}حـ^{٢}د^{٢} - ١$

(جـ) $١٦ص^{٤} - ١$

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظّمْ قائمةً.
- كوّنْ جدولًا.
- خمّنْ وتحقّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

معلومةٌ مفيدةٌ

مركزُ المعيّنِ هو نقطةُ تلاقي قطريه.

٤ أ ب جـ د معيّنٌ. م نقطةُ تلاقي قطريه. د م = ٧سم، أ د = ٢٥سم. أوجِدْ طولَ أجـ.

حلّل كلًّا مما يلي تحليلًا تامًّا:

(٢٢) $\frac{١}{٤}م^{٢} - \frac{١}{٩}$. _____

(٢٣) $٣س^{٢} - ٧٥$. _____

(٢٤) $(س - ٣)^{٢} - ١٦$. _____

(٢٥) **التحدي:** اكتب التعبير $١٦ - ٨١ن^{٤}$ في صورة ضرب ثلاثة عوامل. _____

(٢٦) يمكن تحليل $٨١س^{٢} - ٣٦$ على الصورة: $٩(أ س + ب)(أ س - ب)$، ما المتوسط الحسابي لـ أ، ب؟

_____

(٢٧) **التحضيرُ للاختبارِ** اختر الإجابة الصحيحة.

ناتج تحليل $(\frac{١}{٤}س^{٢} - \frac{١}{٩}) \times \frac{١}{س}$، إلى عوامله هو _____

(أ) $\frac{١}{س}(\frac{١}{٣}س - \frac{١}{٢})(\frac{١}{٣}س + \frac{١}{٢})$

(ب) $\frac{١}{س^{٢}}(\frac{١}{٢}س - \frac{١}{٣})^{٢}$

(جـ) $\frac{١}{س}(\frac{١}{٢}س - \frac{١}{٣})(\frac{١}{٢}س + \frac{١}{٣})$

(د) $\frac{١}{س^{٢}}(\frac{١}{٢}س - \frac{١}{٣})(\frac{١}{٢}س + \frac{١}{٣})$

٣-٢

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحلّل الفرق بين مكعبين.
- يحلّل مجموع مكعبين.

المصطلحات الأساسية

- فرق المكعبين، مجموع المكعبين.

الأدوات المستخدمة

- مقص.

مراجعة

حلّل إلى العوامل الأولية:

١ ١٤س^{٢} – ٢٧س – ٢٠

(٧س + ٤)(٢س – ٥)

٢ –١٢س^{٢} + ٧س – ١

(–٣س + ١)(٤س – ١)

صلة الدرس سوف يساعدنا تحليل الحدودية الثلاثية أس^{٢} + ب س + جـ في تحليل فرق المكعبين ومجموعها.

١ – التمهيد

استكشف

الغاية

يستخدم الطلاب القوانين لتحليل فرق المكعبين ومجموعهما.

التقييم المستمر

تابع إجابات الطلاب لتصحيح الأخطاء وخاصة في قوانين فرق المكعبين ومجموعهما.

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

ادع الطلاب للإجابة عن السؤال أدناه.

حلِّل: ٢٧س^{٤} – ٨س

س(٣س – ٢)(٩س^{٢} + ٦س + ٤)

٣-٢

تحليلُ الفرقِ بينَ مكعّبين أو مجموعِهما

Factorising the Difference between Two Cubes or their Sum

صلةُ الدرس حلَلْتَ في الدرسِ السابقِ الفرقَ بينَ مربّعين. الآن سوف تتعلّمُ تحليلَ الفرقِ بينَ مكعّبين أو مجموعِهما.

سوف تتعلّمُ
- تحليلَ الفرقِ بينَ مكعّبين.
- تحليلَ مجموعِ مكعّبين.

من الاستخداماتِ
- يستخدمُ مهندسو البناءِ الفرقَ بينَ المكعّبين أو مجموعِهما لمعرفةِ كمّيّةِ الأسمنتِ المستخدَمةِ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ
- فرقُ المكعّبين
  Difference between Two Cubes
- مجموعُ المكعّبين
  Sum of Two Cubes

استكشِفْ تحليلُ الفرقِ بينَ مكعّبين

مستلزماتُ الدرسِ: مقصٌّ

١ (أ) خُذْ مكعّبًا طولُ ضلعِهِ أ وانزعْ من إحدى رؤوسِه مكعّبًا صغيرًا طولُ ضلعِه ب.
في الرسم: أ = ٣، ب = ١ (شكلُ ١).
(ب) أوجِدْ حجمَ المجسَّمِ الناتجِ بدلالةِ أ، ب.

٢ اقطعِ المجسَّمَ الناتجَ إلى ثلاثةِ مجسَّماتٍ كلٌّ منها على شكلِ شبهِ مكعّبٍ كما في الرسمِ.

شكلُ (١)

٣ اكتبْ حجمَ كلِّ قطعةٍ بدلالةِ أ، ب.

٤ حدِّدِ العاملَ المشتركَ بينَ الأحجامِ الثلاثةِ.

٥ (أ) أوجِدْ ناتجَ جمعِ أحجامِ المجسَّماتِ الثلاثةِ.
(ب) حلِّلِ الناتجَ مستخدِمًا العاملَ المشتركَ في ٤.

٦ اكتبِ العلاقةَ بينَ ما حصلْتَ عليه في ١(ب)، ٥(ب).

تعلَّمْ تحليلُ الفرقِ بينَ مكعّبين وتحليلُ الجمعِ بينَ مكعّبين

أ^{٣} – ب^{٣} تُسمّى الفرقَ بينَ مكعّبين.

القانونُ: أ^{٣} – ب^{٣} = (أ – ب)(أ^{٢} + أب + ب^{٢})

عندَ تحليلِ الفرقِ بينَ مكعّبين يُمكِنُ استخدامُ القانونِ:

الفرقُ بينَ مكعّبي كمّيّتين = (الكمّيّةُ الأولى – الكمّيّةُ الثانية)(مربّعُ الكمّيّةِ الأولى + ناتجُ ضربِ الكمّيّتين + مربّعُ الكمّيّةِ الثانية).

مثالٌ (١)

حلِّلْ: س^{٣} – ٢٧.

الحلُّ: س^{٣} – ٢٧ = س^{٣} – (٣)^{٣}
= (س – ٣)(س^{٢} + س × ٣ + ٣^{٢})
= (س – ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)

حاوِلْ أن تحلَّ

١ حلِّلْ: أ^{٣} – ١٢٥.

يُمكِنُ استخدامُ قانونِ الفرقِ بينَ مكعّبين لتحليلِ المقدارِ أ^{٣} + ب^{٣}.
يُكتَبُ المقدارُ أ^{٣} + ب^{٣} على الصورةِ أ^{٣} – (–ب)^{٣}.
أ^{٣} + ب^{٣} = أ^{٣} – (–ب)^{٣}
= (أ – (–ب))(أ^{٢} + أ(–ب) + (–ب)^{٢})
= (أ + ب)(أ^{٢} – أب + ب^{٢})

القانونُ: أ^{٣} + ب^{٣} = (أ + ب)(أ^{٢} – أب + ب^{٢})

مجموعُ مكعّبي كمّيّتين = (الكمّيّةُ الأولى + الكمّيّةُ الثانية)(مربّعُ الكمّيّةِ الأولى – ناتجُ ضربِ الكمّيّتين + مربّعُ الكمّيّةِ الثانية).

مثالٌ (٢)

حلِّلْ: ص^{٣} + ٦٤.

الحلُّ: ص^{٣} + ٦٤ = ص^{٣} + (٤)^{٣}
= (ص + ٤)(ص^{٢} – ص × ٤ + ٤^{٢})
= (ص + ٤)(ص^{٢} – ٤ص + ١٦)

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ حلِّلْ: (أ) م^{٣} + ٨.
(ب) ع^{٣} + ١.

المتابعة

بيِّن أهمية معرفة القوانين لحل المسائل.

إجابات «استكشف»

١ (ب) $أ^{٣} - ب^{٣}$

٣ $ب^{٢}(أ - ب)$، $أب(أ - ب)$

$أ^{٢}(أ - ب)$

٤ $(أ - ب)$

٥ (أ) $ب^{٢}(أ - ب) + أب(أ - ب) + أ^{٢}(أ - ب)$

(ب) $(أ - ب)(أ^{٢} + أب + ب^{٢})$

٦ $أ^{٣} - ب^{٣} = (أ - ب)(أ^{٢} + أب + ب^{٢})$

٢ – التعليم

تعلم

اطلب إلى الطلاب متابعة حل التمارين ووضّح لهم الطريقة الصحيحة لإظهار مكعبات الأعداد أو المقادير.

وضح للطلاب أن تحليل جمع مكعبين هي نفسها تحليل الفرق بين مكعبين مع استخدام عملية الطرح المتكرر

$أ^{٣} + ب^{٣} = أ^{٣} - (-ب)^{٣}$

$= [أ - (-ب)][أ^{٢} + أ(-ب) + (-ب)^{٢}]$

$= (أ + ب)(أ^{٢} - أب + ب^{٢})$

أمثلة بديلة

حلّل التعابير:

١ $س^{٣} + \frac{٨}{٢٧}$

$س^{٣} + \frac{٨}{٢٧} = س^{٣} + (\frac{٢}{٣})^{٣}$

$= (س + \frac{٢}{٣})(س^{٢} - \frac{٢س}{٣} + \frac{٤}{٩})$

٢ $٢س^{٣}ص^{٣} - ١٦$

$= ٢(س^{٣}ص^{٣} - ٨)$

$= ٢[(س ص)^{٣} - (٢)^{٣}]$

$= ٢(س ص - ٢)(س^{٢}ص^{٢} + ٢س ص + ٤)$

مثالٌ (٣)

حلِّلْ: $٨أ^{٢} - ٣٤٣$.

الحلُّ: $٨أ^{٢} - ٣٤٣ = ٢(٢أ)^{٢} - (٧)^{٣}$

$= (٢أ - ٧)((٢أ)^{٢} + ٧ \times ٢أ + ٧^{٢})$

$= (٢أ - ٧)(٤أ^{٢} + ١٤أ + ٤٩)$

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ حلِّلْ: $٢٧ + ٦٤ك^{٣}$.

مثالٌ (٤)

حلِّلْ: $٣ع^{٣} + ١٩٢$ تحليلًا كاملًا.

الحلُّ: $٣ع^{٣} + ١٩٢ = ٣(ع^{٣} + ٦٤)$

$= ٣(ع^{٣} + ٤^{٣})$

$= ٣(ع + ٤)(ع^{٢} - ٤ع + ١٦)$

حاوِلْ أن تحلَّ

٤ $أ^{٣} - ٢٧ب^{٣}$.

تحقَّقْ من فهمك

١ كيف يُمكِنُك تحويلُ قانونِ الفرقِ بينَ مكعّبين إلى الجمعِ بينَ مكعّبين؟

٩٧

التّاريخُ الهجريُّ: ..... التّاريخُ الميلاديُّ: .....

تمرّنْ ٣-٢

تحليل الفرق بين مكعبين أو مجموعهما

Factorising the Difference between Two Cubes or their Sum

تدرَّبْ وطبِّقْ

ابدأ حلِّل كلًّا من المقاديرِ التالية تحليلًا كاملًا:

(١) $س^{٣} - ١٢٥$

(٢) $س^{٤} - ٨س$

(٣) $س^{٣} + ٦٤$

(٤) $ص^{٣} + ١٢٥$

(٥) $١ - ٢٧س^{٣}$

(٦) $٢٧ - ع^{٣}$

(٧) $هـ^{٣}ك^{٣} - ١$

(٨) $١ - م^{٣}ن^{٦}$

(٩) $ر^{٩} + ٨$

(١٠) $٢٧ + هـ^{٩}$

(١١) $٨س^{٣} - ٢٧ص^{٣}$

(١٢) $٢٧س^{٣} - ٦٤م^{٣}ن^{٣}$

(١٣) $٢س^{٤} - ١٦س$

(١٤) $٤س^{٣} + ٤$

(١٥) $أص^{٣} + ٢٧أب^{٣}$

(١٦) $س^{٥} - ٢٧س^{٢}$

(١٧) $٢ص^{٣} - ٢٥٠$

(١٨) $٨س^{٣} - ١٢٥ص^{٣}$

٥٠

KuwaitMath.com

إجابات «حاول أن تحل»

١ $(أ - ٥)(أ^{٢} + ٥أ + ٢٥)$

٢ (أ) $(م + ٢)(م^{٢} - ٢م + ٤)$

(ب) $(ع + ١)(ع^{٢} - ع + ١)$

٣ $(٣ ك + ٤)(٩ - ١٢ك + ١٦ك^{٢})$

٤ $(أ - ٣ب)(أ^{٢} + ٣أب + ٩ب^{٢})$

٣ - التدريب والتقييم

تحقّق من فهمك

أشر للطلاب كيفية الحصول على مجموع المكعبين من فرق المكعبين.

إجابات «تحقق من فهمك»

١ **استبدل $(ب^{٣})$ في قانون الجمع $أ^{٣} + ب^{٣}$ لتصبح $أ^{٣} - (-ب)^{٣}$، ومن ثم طبق قانون الفرق.**

تقييم بديل

المجلّة: اطلب إلى الطلاب كتابة فقرة توضح كيفية تحليل الفرق بين مكعبين ومجموعهما.

اختبار سريع

حلّل المقادير التالية:

١ $٢٤س^{٣} - ١٩٢ص^{٣}$

$٢٤(س^{٣} - ٨ص^{٣}) = ٢٤(س - ٢ص)(س^{٢} + ٢سص + ٤ص^{٢})$

٢ $س^{٩} + ٨$

$(س^{٣} + ٢)(س^{٦} - ٢س^{٣} + ٤)$

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

١ (أ) $(٣س + ١)(٩س^{٢} - ٣س + ١)$

(ب) $\left(ل - \frac{١}{٤}\right)\left(ل^{٢} + \frac{ل}{٤} + \frac{١}{١٦}\right)$

(جـ) $(ن^{٢})^{٣} - ١^{٣} = (ن^{٢} - ١)(ن^{٤} + ن^{٢} + ١)$

$= (ن - ١)(ن + ١)(ن^{٤} + ن^{٢} + ١)$

٢ (أ) $(س - ص)(س^{٢} + سص + ص^{٢} + س + ص)$

(ب) $\left(\frac{١}{٥}أ - \frac{٣}{٤}ص\right)\left(\frac{١}{٢٥}أ^{٢} + \frac{٣}{٢٠}أص + \frac{٩}{١٦}ص^{٢}\right)$

حلّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ أكملْ لتُحقِّقَ التحليلَ.

(أ) $٢٧س^{٣} + ١ = (... + ١)(٩س^{٢} - .... + ...)$

(ب) $ل^{٣} - \frac{١}{٦٤} = (ل - ...)(ل^{٢} + ... + ...)$

(جـ) $ن^{٦} - ١ = (ن^{٢})^{...} - ١^{...} = (ن^{٢} - ..)(... + ... + ١)$

$= (ن - ...)(ن + ...)(... + ... + ...)$

٢ فكِّرْ: حلِّلْ تحليلًا تامًّا.

(أ) $س^{٣} - ص^{٣} + س^{٢} - ص^{٢}$

(ب) $\frac{١}{١٢٥}أ^{٣} - \frac{٢٧}{٦٤}ص^{٣}$

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

(١٩) $٢٤س^{٣} - ٣٧٥ص^{٣}$

(٢٠) **التفكيرالناقد:** حلِّل.

(أ) $أ^{٣} - ٢أب + ب^{٢} + (أ - ب)^{٢}$.

(ب) $\frac{٢٧}{٦٤}ك^{٣} + \frac{١}{١٢٥}ل^{٣}$.

(جـ) $٣ع^{٢} - ٨١س^{٣}ص^{٣}$.

(٢١) **التحضيرُ للاختبارِ** مكعب طول ضلعه (س + ٣)سم، حفر بداخله مكعب طول ضلعه (س - ١) سم، س > ١.

فإن حجم الجزء الباقي بعد عملية الحفر هو: _____

(أ) $٤(٣س^{٢} + ٦س + ٧)$ سم^{٣} (ب) $(٢س + ٢)(٣س^{٢} + ٦س + ٧)$ سم^{٣}

(جـ) $-٤(٣س^{٢} + ٦س + ٧)$ سم^{٣} (د) $-٤(س^{٢} + ٨س + ١٣)$ سم^{٣}

KuwaitMath.com

٣-٣

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحلّل الحدودية الثلاثية على الصورة س^{٢} + ب س + جـ .

المصطلحات الأساسية

- حدودية ثلاثية.

مراجعة

❶ حلّل المقدار التالي إلى عوامله الأولية:

ب^{٢} – جـ^{٢}

= (ب – جـ)(ب + جـ)

❷ أوجد الناتج.

٤٩٩ × ٥٠١

٢٤٩ ٩٩٩

صلة الدرس ذكر الطلاب لبعض الوقت عن تحليل الفرق بين مربعين وكيفية ترابطها مع هذا الدرس.

١ – التمهيد

استكشف

الغاية

يدرك الطلاب تحليل حدودية ثلاثية على الصورة التالية:

س^{٢} + ب س + جـ.

التقييم المستمر

تأكد من إدراك الطلاب لطريقة تحليل الحدودية الثلاثية وعدم الخلط بين الحد الذي يمثل ناتج جمع والذي يمثل ناتج ضرب.

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

ادع الطلاب إلى تحليل هذه الحدودية:

س^{٢} + ٣س + ٢.

(س + ١)(س + ٢)

٣-٣

تحليلُ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على الصورةِ: س^{٢} + ب س + جـ

Factorising Trinomials of the Form: $x^2 + bx + c$

صلةُ الدرسِ تعلّمْتَ في الدرسِ السابقِ كيفيّةَ التحليلِ باستخدامِ الفرقِ بينَ مربّعين، وتحليلُ الفرقِ بينَ مكعّبينِ ومجموعُ مكعّبينِ والآن سوف تُحلِّلُ حدوديّةً ثلاثيّةً على الصورة س^{٢} + ب س + جـ. ◄

سوف تتعلّمُ
- تحليلَ الحدوديّةِ الثلاثيّةِ على الصورة: س^{٢} + ب س + جـ.

من الاستخداماتِ
- يستخدمُ الفيزيائيّون تحليلَ الحدوديّاتِ الثلاثيّةِ لحلِّ مسائلِ السقوطِ الحرِّ أو القفزِ بالمظلّةِ.

استكشفْ | تحليلُ حدوديّةٍ على الصورةِ س^{٢} + ب س + جـ

لتحليلِ س^{٢} + ٦س + ٨ ابحثْ عن عددين يكونُ ناتجُ ضربِهما ٨ وناتجُ جمعِهما ٦.

❶ أكمِلِ الجدولَ:

العددان	ناتجُ الضربِ	ناتجُ الجمعِ
١، ٨	٨	٩
–١، –٨	٨	
٢، ٤		
–٢، –٤		

❷ ما العددان اللذان يُحقّقان الشرطين التاليين: ناتجُ ضربِهما ٨ وناتجُ جمعِهما ٦؟

❸ بسّطْ: (س + □)(س + ○) حيث □، ○ تُمثّلان العددين اللذين اخترتَهما.

❹ كرِّرِ الخطواتِ من: ١ إلى ٣ مع الحدوديّةِ: س^{٢} – ١٠س – ٢٤. أوجِدْ عددين يكونُ ناتجُ ضربِهما –٢٤ وناتجُ جمعِهما –١٠.

تعلّمْ | تحليلُ حدوديّةٍ على الصورةِ س^{٢} + ب س + جـ

لتحليلِ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ س^{٢} + ب س + جـ إلى عواملِها، ابحثْ عن عددين م، ن يُحقّقان: م × ن = جـ، م + ن = ب، ثمّ اكتبْ س^{٢} + ب س + جـ = (س + م)(س + ن).

المصطلحاتُ الأساسيّةُ
- حدوديّةٌ ثلاثيّةٌ Trinomial

٩٩

المتابعة

ادع الطلاب أن يتبادلوا جداولهم للتحقق من إجاباتهم.

إجابات «استكشف»

❶

	–٩
٨	٦
٨	–٦

❷ ٢، ٤

❸ (س + ٢)(س + ٤)

❹

العددان	ناتج الضرب	ناتج الجمع
١، –٢٤	–٢٤	–٢٣
٢، –١٢	–٢٤	–١٠
٣، –٨	–٢٤	–٥
٤، –٦	–٢٤	–٢

العددان هما ٢، –١٢

(س + ٢)(س – ١٢) = س^{٢} – ١٠س – ٢٤

٢ – التعليم

تعلم

وضِّح للطلاب أنهم سوف يدرسون حالة خاصة من تحليل حدودية ثلاثية: س^{٢} + ب س + جـ

ويمكن أن تكتب على الصورة = (س + ن)(س + م)

حيث ن، م عددين ناتج جمعهما يساوي ب وناتج ضربهما يساوي جـ.

أمثلة بديلة

حلّل المقادير التالية إلى عواملها الأولية:

١ ص^{٢} + ٨ص + ١٦

نوجد عددين ناتج جمعهما ٨، وناتج ضربهما ١٦ . وهما ٤، ٤ .

لذا ص^{٢} + ٨ص + ١٦ = (ص + ٤)(ص + ٤)

٢ س^{٢} – س – ١٢

نوجد عددين: مجموعهما –١، وناتج ضربهما –١٢

هما –٤، +٣، لذا س^{٢} – س – ١٢ = (س – ٤)(س + ٣)

إجابات «حاول أن تحل»

١ (س + ٣)(س + ٤)

٢ (م + ٧)(م – ٥)

٣ (س – ٧)(س + ٥)

مثالٌ (١)

حلِّلْ: ب^{٢} – ٥ب + ٦ إلى عواملها.

الحلُّ: ابحثْ عن عددين يكونُ ناتجُ ضربهما ٦ وجمعهما –٥.

–١، –٦: (–١) × (–٦) = ٦ ، (–١) + (–٦) = –٧ كلّا

–٢، –٣: (–٢) × (–٣) = ٦ ، (–٢) + (–٣) = –٥ نعم

إذًا: ب^{٢} – ٥ب + ٦ = (ب – ٢)(ب – ٣)

تحقَّقْ: (ب – ٢)(ب – ٣) = ب^{٢} – ٣ب – ٢ب + ٦

= ب^{٢} – ٥ب + ٦

حاوِلْ أن تحلَّ

١ حلِّلْ: س^{٢} + ٧س + ١٢ .

لاحِظْ في مثالِ (١) أنّ ناتجَ الضربِ هو ٦، عددٌ موجَبٌ، وبالتالي العددان لهما الإشارةُ نفسُها. وبما أنّ ناتجَ الجمعِ هو –٥ سالبٌ نستنتجُ أنّ العددين سالبان.

مثالٌ (٢)

حلِّلْ: س^{٢} – ١٤س – ٣٢ إلى عواملِها.

الحلُّ: ابحثْ عن عددين ناتجُ ضربِهما –٣٢ وناتجُ جمعِهما –١٤.

العددان +٢، –١٦ يُحقِّقان: ٢ × (–١٦) = –٣٢ ، +٢ – ١٦ = –١٤

إذًا: س^{٢} – ١٤س – ٣٢ = (س + ٢)(س – ١٦)

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ حلِّلْ: م^{٢} + ٢م – ٣٥

لاحِظْ أنّ في المثالِ (٢) ناتجُ الضربِ سالبٌ، إذًا للعددين إشارتان مختلِفتان.

مثالٌ (٣)

حلِّلْ: س^{٢} – ١٢س + ٣٥ إلى عواملِها.

الحلُّ: ابحثْ عن عددين ناتجُ ضربِهما ٣٥ وناتجُ جمعِهما –١٢.

العددان –٥، –٧ يُحقِّقان: (–٥) × (–٧) = ٣٥، (–٥) + (–٧) = –١٢

∴ س^{٢} – ١٢س + ٣٥ = (س – ٥)(س – ٧)

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ حلِّلْ: س^{٢} – ٢س – ٣٥ إلى عواملِها.

١٠٠

التّاريخُ الهجريُّ: ..... التّاريخُ الميلاديُّ: .....

تمرّنْ ٣-٣

تحليل حدودية ثلاثية على الصورة: س^{٢} + ب س + جـ

Factorising Trinomials of the Form: $x^2 + bx + c$

تدرَّبْ وطبِّقْ

ابدأ أكمل.

(١) س^{٢} + ٧س + ١٠ = (س + ٢)(س + __)

(٢) ص^{٢} – ١٣ص + ٣٦ = (ص – ٤)(ص – __)

(٣) –س^{٢} + ٨س – ٧ = –(س – ١)(س – __)

(٤) –س^{٢} + ٩س – ١٨ = –(س – ٣)(س – __)

حلّل كل تعبير مما يلي. تحقق من إجابتك.

(٥) ر^{٢} + ٤ر + ٣

(٦) ن^{٢} – ٣ن + ٢

(٧) ك^{٢} + ٥ك + ٦

(٨) ص^{٢} + ٦ص + ٨

(٩) س^{٢} – ٢س + ١

(١٠) ب^{٢} + ١٩ب + ١٨

(١١) ك^{٢} – ١٦ك + ٢٨

(١٢) و^{٢} + ٦و + ٥

(١٣) م^{٢} – ٩م + ٨

(١٤) د^{٢} + ٢١د + ٣٨

(١٥) س^{٢} – ١٣س + ٤٢

(١٦) ق^{٢} – ١٨ق + ٤٥

(١٧) ص^{٢} + ص – ٢٠

(١٨) هـ^{٢} + ١٦هـ – ١٧

(١٩) س^{٢} – ١٤س – ٣٢

اختر التحليل الصحيح لكل مما يلي.

(٢٠) ب^{٢} + ١٠ب ك + ٩ك^{٢} ____ (أ) (ب + ٩ك)(ب + ك) (ب) (ب + ٩)(ب + ك^{٢})

(٢١) م^{٢} + ٤م ن + ٣ن^{٢} ____ (أ) (م + ن)(٣م + ن) (ب) (م + ٣ن)(م + ن)

(٢٢) س^{٢} + ٨س ص + ١٥ص^{٢} ____ (أ) (س + ١٥ص^{٢})(س + ١) (ب) (س + ٥ص)(س + ٣ص)

٥٢

KuwaitMath.com

٣ – التدريب والتقييم

تحقّق من فهمك

لتتحقق من صحة تحليلك للحدودية عليك أن تعيد ضرب العاملين باستخدام الخاصية التوزيعية.

إجابة «تحقق من فهمك»

٤ ، لأن العددين الذين ناتج ضربهما ٢٤ وناتج مجموعها ١١ هما ٣، ٨. كما أننا نستطيع ضرب العاملين لنحصل على الحدودية الثلاثية.

تقييم بديل

المجلّة: اطلب إلى الطلاب أن يعطوا مثالاً على صورة هذه الحدودية الثلاثية بمتغيرين معًا.

$أ^{٢}ب^{٢} - أب - ٢ = (أب - ٢)(أب + ١)$

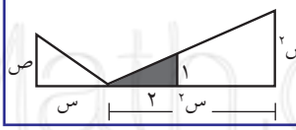
اختبار سريع

حلّل التعبير التالي إلى عوامله الأولية:

١ $أ^{٢}ب^{٢}جـ^{٢} - ٧ أب جـ + ١٠$

$(أب جـ - ٢)(أب جـ - ٥)$

٢ أوجد ضعف مساحة الشكل أدناه غير المظلل على صورة عاملين.



$(س ص - ١)(س ص + ٢)$

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

١ (أ) (س – ٣)

(ب) (ل + ١٢)

(جـ) ١١

٢ لا نستطيع إيجاد عددين يكون مجموعهما ٥ وناتج ضربهما ٨٠، لذا لا يمكن تحليل هذه الحدودية.

٣ ناتج جمعهما هو ب عدد موجب لذا م + ن عدد موجب وهذا لا يعني أن م عدد موجب ون عدد موجب لأنه من الممكن أن يكون م > ٠ وَن < ٠ حيث م + ن > ٠ .
لذا ليس من الضرورة أن يكون م، ن عددين موجبين.

تحقّق من فهمك

أيٌّ ممّا يلي هو تحليلٌ للمقدارِ ل^{٢} + ١١ل + ٢٤؟ فسّرْ.

(١) (ل – ٨)(ل – ٣)　(٢) (ل – ٨)(ل + ٣)

(٣) (ل + ٢)(ل + ١٢)　(٤) (ل + ٨)(ل + ٣)

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ أكمِلْ، مستبدلًا ▭ بالعاملِ الناقصِ أو العواملِ الناقصةِ لتحصلَ على عبارةٍ صحيحةٍ.

(أ) س^{٢} + ٢س – ١٥ = (س + ٥)(▭).

(ب) ل^{٢} + ١٠ل – ٢٤ = (ل – ٢)(▭).

(جـ) ب^{٢} + ▭ب + ٣٠ = (ب + ٥)(ب + ٦).

٢ هل يُمكِنُ التأكيدُ أنّه لا يُمكِنُ تحليلُ الحدوديّةِ س^{٢} + ٥س + ٨٠ إلى عواملَ؟ فسّرْ.

٣ في الحدوديّةِ الثلاثيّةِ س^{٢} + ب س + جـ ، ب عددٌ موجَبٌ، م، ن ناتجُ ضربِهما هو جـ وناتجُ جمعِهما هو ب. هل يُمكِنُك التأكيدُ أنّ العددين م، ن هما عددان موجَبان؟ فسّرْ. أعطِ مثالًا على ذلك.

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

١٠١

حلّل كلًّا من التعابير التالية:

(٢٣) س^{٢} + ٧س ف – ١٨ف^{٢}

(٢٤) س^{٢} + ١٢س ص + ٣٥ص^{٢}

(٢٥) ب^{٢} – ١٠ب ك + ١٦ك^{٢}

(٢٦) م^{٢} – ٣م ن – ٥٤ن^{٢}

(٢٧) هـ^{٢} + ١٨هـ جـ + ١٧جـ^{٢}

أوجد ٣ قيم لتكمل كل تعبير بحيث يمكن تحليله إلى عوامل، ثم حلّله.

(٢٨) س^{٢} – ٣س – ...

(٢٩) س^{٢} + س – ...

(٣٠) **التفكير المنطقي:** إذا كان: س^{٢} – ١٢س – ٢٨ = (س + أ)(س + ب).

(أ) ما الذي تعرفه حول إشارتي أ، ب ؟

(ب) لنفرض أن |أ| > |ب|. أي من أ، ب هو سالب؟

(٣١) **التفكير المنطقي:** إذا كان: س^{٢} + ١٢س – ٢٨ = (س + أ)(س + ب).

(أ) ما الذي تعرفه حول إشارتي أ، ب؟

(ب) لنفرض أن |أ| > |ب|. أي من أ، ب هو سالب؟

(٣٢) **التحدي:** حلّل التعبير ص^{٨} + ٥ص^{٤} – ٢٤.

(٣٣) **التحضيرُ للاختبار** قيمة ب التي تسمح بتحليل المقدار الجبري س^{٢} + ب س – ٣٦ إلى عوامل هي:

(أ) ٥　(ب) ٤　(جـ) ٣　(د) ٢

(٣٤) قيمة جـ التي لا تسمح بتحليل المقدار الجبري س^{٢} + ١٠س + جـ إلى عوامل هي: _____

(أ) ٢٥　(ب) ٢٤　(جـ) ٢١　(د) ٢٨

٥٣

٤-٣

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحلّل الحدودية الثلاثية على الصورة $أس^{٢} + ب س + جـ$.

مراجعة

حلّل التعابير التالية إلى عواملها الأولية:

١ $س^{٢} - ٨س + ١٢$ $(س - ٢)(س - ٦)$

٢ $س^{٢} + ١٠س + ٢١$ $(س + ٣)(س + ٧)$

صلة الدرس نتبع الطريقة نفسها لتحليل الحدودية الثلاثية $س^{٢} + ب س + جـ$ مع فارق الانتباه إلى معامل $س^{٢}$ في الحدودية $أس^{٢} + ب س + جـ$.

١ – التمهيد

استكشف

الغاية

يستخدم الطلاب تحليل الحدودية $س^{٢} + ب س + جـ$ لتحليل الحدودية $أس^{٢} + ب س + جـ$.

التقييم المستمر

اختبر الطلاب في مسألة إيجاد معاملات س في العاملين.

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

أعط الطلاب مثالًا لاستكشاف حالات وطرائق أخرى لتحليل الحدوديات الثلاثية.

مثال:

$٤س^{٢} - ٧س + ٣$

٤ س	٣-
١ س	١-

$(٤س - ٣)(س - ١)$

المتابعة

على الطلاب التحقق من إجاباتهم بضرب العاملين.

٤-٣

تحليلُ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على الصورةِ:

$أ س^{٢} + ب س + جـ$ ، $أ \neq ٠$

Factorising Trinomials of the Form:

$ax^{2} + bx + c$, $a \neq 0$

صلةُ الدرسِ في الدرسِ السابقِ، حلّلْتَ حدوديّاتٍ ثلاثيّةً على الصورةِ $س^{٢} + ب س + جـ$. والآن، سوف تُحلِّلُ حدوديّاتٍ على الصورةِ: $أس^{٢} + ب س + جـ$ ►

سوف تتعلّمُ

- تحليلَ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على الصورةِ $أس^{٢} + ب س + جـ$.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ سلاحُ المدفعيّةِ تحليلَ الحدوديّاتِ الثلاثيّةِ لدراسةِ موقعِ وزمانِ سقوطِ القذيفةِ.

استكشِفْ تحليلُ حدوديّةٍ على الصورةِ: $أس^{٢} + ب س + جـ$

١ أوجِدْ ناتجَ ضربِ كلٍّ ممّا يأتي:

(أ) $(٢س + ١)(س + ٣) = ...$

(ب) $(٣س + ٢)(٤س + ١) = ...$

(جـ) $(٢س - ٣)(س + ١) = ...$

٢ ما العلاقةُ بينَ معاملِ $س^{٢}$ وناتجِ ضربِ معاملي س في العواملِ؟

٣ ما العلاقةُ بينَ الحدِّ الثابتِ في الصيغةِ المبسَّطةِ والحدّين الثابتين في الصيغةِ المحلَّلةِ إلى عواملَ؟

٤ كيف تحصلُ على معاملِ س في الصيغةِ المبسَّطةِ؟ على الصورةِ $أس^{٢} + ب س + جـ$؟

تعلَّمْ تحليلُ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على الصورةِ $أس^{٢} + ب س + جـ$

لتحليلِ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على الصورةِ $أس^{٢} + ب س + جـ$ إلى عواملَ، نبدأُ أوّلًا بكتابةِ أزواجِ الأعدادِ م، ن ناتجُ ضربِها يُساوي أ، ونكتبُ بالقربِ منها أزواجَ الأعدادِ ك، ل التي يُساوي ناتجُ ضربِها جـ. نختارُ من بينِ أزواجِ الأعدادِ المتوافقةِ التي مجموعُها ب.

ونُمثّلُ ذلك بالصورةِ:

$أس^{٢} + ب س + جـ = (م س + ك)(ن س + ل) = م ن س^{٢} + (م ل + ك ن)س + ك ل$

$م \times ن = أ$ (معاملُ $س^{٢}$) $م ل + ك ن = ب$ (معاملُ س) $ك \times ل = جـ$ (الحدُّ الثابتُ)

م س	ك
ن س	ل

$م س \times ل + ن س \times ك = ب س$ (الحدُّ الأوسطُ)

إجابات «استكشف»

١ (أ) $٢س^{٢} + ٧س + ٣$

(ب) $١٢س^{٢} + ١١س + ٢$

(جـ) $٢س^{٢} - س - ٣$

٢ متساويان.

٣ الحد الثابت في الصيغة المبسطة هو ناتج ضرب الحدين الثابتين في الصيغة المحللة إلى عوامل.

٤ نضرب معامل س في أحد العوامل في الصيغة المحللة إلى عوامل في الحد الثابت من العامل الثاني، ونضرب معامل س في العامل الثاني في الحد الثابت في العامل الأول، ونجمع ناتجي الضرب.

٢ – التعليم

تعلم

تحقق من أن الطلاب على معرفة بالطريقة الأسهل لتحليل هذه النوع من الحدوديات عبر النظر إلى عوامل معامل $س^{٢}$، وعوامل القيمة الثابتة في الحدودية.

KuwaitMath.com

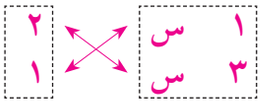
أمثلة بديلة

حلّل إلى العوامل الأولية:

❶ ٣س^{٢} + ٧س + ٢

س × ٣س = ٣س^{٢}

١ × ٢ = ٢

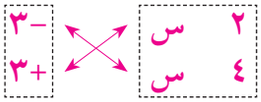


إذًا التحليل = (٣س + ١)(س + ٢).

❷ ٨س^{٢} − ٦س − ٩

٨س^{٢} = ٢س × ٤س

−٩ = −٣ × ٣



إذًا التحليل = (٢س − ٣)(٤س + ٣).

إجابات «حاول أن تحل»

❶ (٣س − ٢)(س + ٣)

❷ (٢س − ٣)(٣س + ٢)

❸ (٥س − ٣)(٢س + ٤)

❹ (٢س − ٣)(٢س − ٣) أو (٢س − ٣)^{٢}

مثالٌ (٢)

حلِّلْ: ٦س^{٢} − ١٩س + ١٠.

الحلُّ:

الطريقةُ الأولى:

نكتبُ: ٦س^{٢} − ١٩س + ١٠ = (م س + ك)(ن س + ل)

= م ن س^{٢} + (م ل + ك ن)س + ك ل

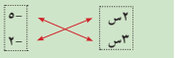
إذًا، نبحثُ عن العددين م، ن ناتجُ ضربِهما ٦ ونبحثُ عن عددين ك، ل ناتجُ ضربِهما ١٠ على أن يكونَ م ل + ك ن = −١٩

فنجدُ: م = ٢، ن = ٣، ك = −٥، ل = −٢.

وبالتحليلِ نكتبُ: ٦س^{٢} − ١٩س + ١٠ = (٢س − ٥)(٣س − ٢)

الطريقةُ الثانيةُ:

(معاملُ س^{٢}) = ٦ | (الحدُّ الثابتُ) = ١٠



حيث إنّ: ٢س × (−٢) + ٣س × (−٥) = −٤س − ١٥س = −١٩س = الحدَّ الأوسطَ

وبالتالي يكونُ: ٦س^{٢} − ١٩س + ١٠ = (٢س − ٥)(٣س − ٢)

حاوِلْ أن تحلّ

حلِّلْ:

١ ٣س^{٢} + ٧س − ٦.

٢ ٦س^{٢} − ٥س − ٦.

٣ ١٠س^{٢} + ١٤س − ١٢.

٤ ٤س^{٢} − ١٢س + ٩.

تحقَّقْ من فهمك

١ كيفَ تُحلِّلُ المقدارَ الثلاثيَّ أس^{٢} + ب س + جـ حيث أ ≠ ٠؟ فسِّرْ.

٢ ما الفرقُ بينَ طريقةِ تحليلِ كلٍّ من الحدوديّتين الثلاثيّتين: س^{٢} + ب س + جـ، أس^{٢} + ب س + جـ؟

٣ حلِّلِ الحدوديّةَ ٢س^{٢} + ٨س + ٦ بطريقتين مختلفتين.

مثالٌ (١)

حلِّلْ: ٥س^{٢} + ٧س − ٦.

الحلُّ:

الطريقةُ الأولى:

الحدوديّةُ الثلاثيّةُ: أس^{٢} + ب س + جـ

تُكتَبُ: (م س + ك)(ن س + ل) وبالمقارنةِ نجدُ أنّ:

م × ن = ٥؛ ك × ل = −٦، م × ل + ك × ن = ٧

نبحثُ عن عددين م، ن يكونُ ناتجُ ضربِهما ٥ ونبحثُ عن عددين ك، ل ناتجُ ضربِهما −٦ على أن يكونَ: م × ل + ك × ن = ٧

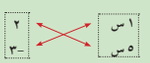
فنجدُ م = ١، ك = ٢، ن = ٥، ل = −٣

وبالتالي، تكونُ الحدوديّةُ بالتحليلِ تُساوي: (١س + ٢)(٥س − ٣)

أو (س + ٢)(٥س − ٣)

الطريقةُ الثانيةُ:

(معاملُ س^{٢}) = ٥ | (الحدُّ الثابتُ) = −٦



حيث إنّ:

١س × (−٣) + ٥س × ٢ = −٣س + ١٠س

= ٧س = الحدَّ الأوسطَ

وبالتالي يكونُ: ٥س^{٢} + ٧س − ٦ = (س + ٢)(٥س − ٣)

فكرةٌ مفيدةٌ — لحلِّ المسائل

(س + أ)(س + ب) = (س + أ)^{٢}

التاريخُ الهجريُّ:..... التاريخُ الميلاديُّ:.....

تمرَّنْ ٣-٤

تحليل حدودية ثلاثية على الصورة: أس^{٢} + ب س + جـ، أ ≠ ٠
Factorising Trinomials of the Form: $ax^2 + bx + c, a \neq 0$

تدرَّبْ وطبِّقْ

ابدأ حلِّل كلًّا مما يلي تحليلًا تامًّا:

(١) ٢ن^{٢} + ١٥ن + ٧

(٢) ٧د^{٢} + ٥٠د + ٧

(٣) ١١و^{٢} − ١٤و + ٣

(٤) ٣س^{٢} − ١٧س + ١٠

(٥) ٦س^{٢} + ٢٥س + ١١

(٦) ٣د^{٢} − ١٧د + ٢٠

(٧) ١٦م^{٢} + ٢٦م + ٩

(٨) ١٥ب^{٢} − ٢٦ب + ١١

(٩) ٨ص^{٢} + ٣٠ص + ١٣

(١٠) ٢ص^{٢} + ٣٥ص + ١٧

(١١) ٧س^{٢} − ٣٠س + ٢٧

(١٢) ٨س^{٢} + ١٨س + ٩

(١٣) ٢س^{٢} − س − ٣

(١٤) ٨ص^{٢} − ١٠ص − ٣

(١٥) ٢ك^{٢} − ١١ك − ٢١

(١٦) ٥ك^{٢} − ٢ك − ٧

(١٧) ١٠و^{٢} + ١١و − ٨

(١٨) ١٢د^{٢} − د − ٢٠

(١٩) ١٤ن^{٢} + ٢٣ن − ١٥

(٢٠) ٢٤م^{٢} − ٣٢م + ٨

(٢١) ٢١ف^{٢} − ٧٠ف + ٤٩

أوجد ٣ قيم تسمح بتحليل كل حدودية مما يلي، ثم حللها.

(٢٢) ٤س^{٢} + ... س + ١٠

(٢٣) ١٥م^{٢} + ... م − ٢٤

(٢٤) ٣٥جـ^{٢} + ... جـ − ١٦

٣ - التدريب والتقييم

تحقّق من فهمك

أشر للطلاب إلى تشابه واختلاف تحليل الحدوديتين الثلاثيتين: $س^{٢} + ب\ س + جـ$، $أ س^{٢} + ب\ س + جـ$.

إجابات «تحقق من فهمك»

١ نوجد العددين م، ن حيث ناتج ضربهما أ. والعددين ك، ل حيث ناتج ضربهما جـ. ومن بين هذه الأعداد نختار الأعداد التي مجموع ناتج ضربها م ل + ك ن أو م ك + ل ن يساوي ب.

٢ يجب الأخذ بعين الاعتبار قيمة أ .

٣ $٢(س^{٢} + ٤س + ٣) = ٢(س + ٣)(س + ١)$

أو $(٢س + ٢)(س + ٣) = ٢(س + ٣)(س + ١)$

تقييم بديل

المجلّة: شجّع الطلاب على كتابة موقف مناسب مع هذا الدرس في كراساتهم.

اختبار سريع

حلّل كل تعبير إلى عوامله الأولية:

١ $٥س^{٢} - ٢٣س + ١٢$

$(٥س - ٣)(س - ٤)$

٢ $٦س^{٢} - ٣٥س - ٦$

$(٦س + ١)(س - ٦)$

التحدي: حلّل كلًّا من التعابير التالية:

(٢٥) $٥٦س^{٢} + ٤٣س^{٢} + ٥س$ _____

(٢٦) $٤٩ب^{٢} + ٦٣ب ك - ٣٦ك^{٢}$ _____

(٢٧) $١٠٨جـ^{٢}هـ - ١٦٢ جـ هـ + ٥٤ هـ$ _____

(٢٨) الحدودية $١٢ن^{٢} + ٣٢ن - ١٤٠$ لا تساوي _____

(أ) $٤(ن + ٥)(٣ن - ٧)$ (ب) $(٤ن + ٢٠)(٣ن - ٧)$

(جـ) $(٢ن + ١٠)(٦ن - ١٤)$ (د) $(ن + ٥)(١٢ن - ٧)$

(٢٩) مستطيل مساحته $٣س^{٢} + ٢٢س + ٢٤$. فإن محيط هذا المستطيل يساوي: _____

(أ) $٤س + ١٠$ (ب) $٤س + ٢٥$

(جـ) $٨س + ٢٠$ (د) $٨س + ٥٠$

(٣٠) التحضير للاختبار القيمة التي تسمح بتحليل التعبير $٨ب^{٢} + ... ب + ١١$ هي: _____

(أ) ٢٤ (ب) ٤٦

(جـ) ٤٨ (د) ٥٢

مراجعة الوحدة الثالثة (أ)

(١) حلّل كلًّا مما يلي تحليلًا تامًّا.

(أ) $٣م^{٢} - ١٢$ (ب) $٥ك^{٢} - ٢٤٥$ (جـ) $٦ر^{٢} - ١٥٠$ (د) $\frac{١}{٩}ن^{٢} - \frac{١}{٢٥}$

(٢) حلّل كلًّا مما يلي. تحقق من إجابتك.

(أ) $س^{٢} + ٣س - ٤$ (ب) $ك^{٢} - ٢ك - ٨$ (جـ) $م^{٢} - ١٣م - ٣٠$ (د) $ب^{٢} + ٣ب - ٥٤$

(٣) أوجد ٣ قيم لتكمل التعبير التالي بحيث يمكن تحليله إلى عوامل، ثم حلّله.

$س^{٢} + ... س + ١٢$

(٤) حلّل كلًّا مما يلي تحليلًا تامًّا:

(أ) $٧س^{٢} - ٢٠س - ٣$ (ب) $١٣ب^{٢} + ٨ب - ٥$

(جـ) $٦ص^{٢} + ٢٦ص + ٢٤٥$ (د) $٢٥س^{٢} - ١٠س - ١٥$

(٥) أحد عوامل الحدودية $١٣س^{٢} + ٣٢س - ٢١$ هو: _____

(أ) $١٣س + ٣$ (ب) $١٣س + ٧$

(جـ) $١٣س + ٢١$ (د) $١٣س - ٧$

KuwaitMath.com

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

١ (أ) ٧

(ب) (٢س – ١)

(جـ) (٣ب – ١)(٢ب + ٥)

٢ قد تختلف الإجابات.

(أ) $٢س^{٢} - س - ١ = (٢س + ١)(س - ١)$

(ب) $٢ب^{٢} - ٧ب + ٥ = (٢ب - ٥)(ب - ١)$

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ أكمِلُ:

(أ) $س^{٢} - ٦س - ٧ = (س + ١)(س - ...)$

(ب) $٢س^{٢} - ١٥س + ٧ = (س - ٧)(.....)$

(جـ) $٦ب^{٢} + ١٣ب - ٥ = (.....)(.....)$

٢ أوجِدِ القيمةَ التي تُكمِلُ كلَّ مقدارٍ جبريٍّ بحيثُ يُمكِنُ تحليلُه إلى عاملين كلٌّ منهما مكوَّنٌ من حدّين. وضِّحْ كلَّ تحليلٍ.

(أ) $٢س^{٢} - س - ...$

.....

(ب) $٢ب^{٢} - ٧ب + ...$

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

١٠٥

(٦) حلِّل كلًّا مما يلي تحليلًا كاملًا:

(أ) $أ^{٣}ب^{٣} + ٢١٦$ _____

(ب) $٣٤٣ + جـ^{٣}د^{٣}$ _____

(جـ) $\frac{٨}{١٢٥}أ^{٣} - \frac{٢٧}{٦٤}ب^{٣}$ _____

(د) $٦٢٥ ب^{٣} + ٥أ^{٣}جـ^{٣}$ _____

حلِّل تحليلًا كاملًا كلًّا مما يلي:

(٧) $م^{٣}ن - ل^{٣}ن$ _____

(٨) $أ^{٣}س^{٣} + ٨أ^{٣} ص^{٣}$ _____

(٩) $أ^{٣}ب^{٣} - ٢٧أ^{٣}$ _____

(١٠) $أ^{٣}ب^{٣}جـ^{٣} + ٦٤أ^{٣}ب^{٣}$ _____

(١١) $٢٧س^{٣}ص - أ^{٣}ب^{٣}ص$ _____

(١٢) $٢١٦أ^{٣}ب + ٣٤٣ب^{٤}$ _____

(١٣) $٢٥٠س^{٣} - ٢$ _____

(١٤) $٥س^{٣}ص^{٣} + ٤٠$ _____

(١٥) $س^{٤} - ١٠٠٠ س ص^{٣}$ _____

٥٧

KuwaitMath.com

الموضوع: ما الفائدة؟

كيفية التعامل مع الصفحة

توضح هذه الصفحة موضوع الكهرباء ومدى اعتمادنا عليها.

اسأل...

- ما الآلات الموجودة في المنزل والمدرسة والتي لا تعمل على الكهرباء؟
- هل تعتقد أن الحياة تتغير إذا استهلكنا نصف الطاقة التي نستهلكها اليوم؟

الترابط والتداخل

الصناعة

ادع الطلاب إلى القيام بأبحاث عن التطور في مصادر الطاقة مثل الرياح والطاقة الشمسية.

العلوم

نظرية «أوم» هي من أهم مبادئ الفيزياء المتعلقة بدراسة الطاقة الكهربائية.

KuwaitMath.com

إجابات الأسئلة

١ **إجابات محتملة: مكيفات، فرن، نشافة.**

٢ **إجابات محتملة: براد، مكيفات، فرن.**

٣ **منشف الشعر، خلاط.**

٣–٥

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحل المعادلة التربيعية باستخدام التحليل.

المصطلحات الأساسية

- معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد، حل معادلة.

مراجعة

حلّل:

١ ٤ – س^{٢}

(٢ – س)(٢ + س)

٢ س^{٢} – ٥س + ٦

(س – ٢)(س – ٣)

٣ ٣س^{٣} – ٢٤

٣(س – ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)

صلة الدرس استخدم تحليل الحدوديات سابقًا لحل معادلات تربيعية.

١ – التمهيد

استكشف

الغاية

يحل الطلاب معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد بقوانين التحليل.

التقييم المستمر

اختبر فهم الطلاب للخطوة (٣).

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

أعطهم مثالًا أصعب لحله، حلّل التعبير:

$\frac{١}{٢}$س^{٢} – $\frac{٥}{٦}$ س + $\frac{١}{٣}$

$\left(\frac{١}{٢}\text{ س} - \frac{١}{٣}\right)$(س – ١)

٣–٥

حلُّ معادلةٍ من الدرجةِ الثانيةِ في متغيِّرٍ واحدٍ بالتحليلِ

Solving Second Degree Equation in One Variable by Factorising

صلةُ الدرسِ حلَلْتَ في الدرسِ السابقِ الفرقَ بينَ مربّعين وحدوديّاتٍ ثلاثيّةً، ومجموعَ مكعّبين، والفرقَ بينَ مكعّبين، والآن في هذا الدرسِ، سوف تحلُّ معادلاتٍ من الدرجةِ الثانيةِ في متغيِّرٍ واحدٍ بالتحليلِ. ◄

سوف تتعلّمُ

- حلَّ المعادلةِ التربيعيّةِ باستخدامِ التحليلِ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ البنّاؤون المعادلاتِ التربيعيّةَ عندَ رصفِ سقوفِ المنازلِ بقطعِ القرميدِ.

استكشفْ حلُّ معادلاتٍ من الدرجةِ الثانيةِ بالتحليلِ

الهدفُ من هذا النشاطِ إيجادُ قيمِ س التي تُحقّقُ المساواةَ بينَ المساحتين.

١ ما ارتفاعُ المثلّثِ بدلالةِ س؟

٢ ما طولُ المستطيلِ بدلالةِ س؟

٣ اكتبْ كلًّا من مساحةِ المثلّثِ ومساحةِ المستطيلِ بدلالةِ س.

٤ أيٌّ من قيمِ س تُحقّقُ المعادلةَ س^{٢} = ٥س:

س = ٣، س = ٤، س = ٥، س = ٦ ؟

تعلَّمْ خاصّيّةُ الضربِ في صفرٍ

إذا كانَ حاصلُ ضربِ عددين (عاملين) يُساوي صفرًا، فإنّ أحدَهما أو كلاهما يُساوي صفرًا، أي أنّ لكلِّ أ، ب عددين حقيقيّين، إذا كانَ أب = صفرًا، فإنّ أ = ٠ أو ب = ٠

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- معادلةٌ من الدرجةِ الثانيةِ في متغيّرٍ واحدٍ Second Degree Equation with One Variable
- حلُّ معادلةٍ Solving an Equation

مثالٌ (١)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المعادلةِ: (س + ٥)(س + ٦) = ٠، ثمّ تحقّقْ من صحّةِ الحلِّ.

الحلُّ:

(س + ٥)(س + ٦) = ٠

س + ٥ = ٠ أو س + ٦ = ٠ — استخدمُ خاصّيّةَ الضربِ في صفرٍ

س = –٥ أو س = –٦ — أوجِدْ قيمَ س

مجموعةُ الحلِّ = {–٥، –٦}

تحقّقْ: عوّضْ بـ –٥ بدلًا من س — عوّضْ بـ –٦ بدلًا من س

(–٥ + ٥)(–٥ + ٦) = صفرًا — (–٦ + ٥)(–٦ + ٦) = صفرًا

٠ × ١ = ٠ (عبارةٌ صحيحةٌ) — (–١) × ٠ = ٠ عبارةٌ صحيحةٌ

حاوِلْ أن تحلَّ

١ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ كلِّ معادلةٍ ممّا يلي:

(أ) (س + ٧)(س – ٤) = ٠ (ب) (٣ص – ٥)(ص – ٢) = ٠

مثالٌ (٢)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ كلِّ معادلةٍ ممّا يلي:

(أ) س^{٢} – ٥س = ٠ (ب) (س + ٢)^{٢} = ١٤٤

الحلُّ:

(أ) س^{٢} – ٥س = ٠

س(س – ٥) = ٠ — حلِّلْ

س = ٠ أو س – ٥ = ٠ — استخدمْ خاصّيّةَ الضربِ في صفرٍ

س = ٠ أو س = ٥ — أوجِدْ قيمَ س

مجموعةُ الحلِّ = {٠، ٥}

الحلُّ:

(ب) (س + ٢)^{٢} – ١٤٤ = ٠

(س + ٢ – ١٢)(س + ٢ + ١٢) = ٠ — الفرقُ بينَ مربّعين

(س – ١٠)(س + ١٤) = ٠ — بسّطْ

س – ١٠ = ٠ أو س + ١٤ = ٠ — استخدمْ خاصّيّةَ الضربِ في صفرٍ

س = ١٠ أو س = –١٤ — أوجِدْ قيمَ س

مجموعةُ الحلِّ = {١٠، –١٤}

هل تعلمُ؟ قدّمَ الخوارزميُّ في كتابِهِ «حسابُ الجبرِ والمقابلةِ» حوالي العامِ ٨٣٠ م، أوّلَ حلٍّ منهجيٍّ للمعادلاتِ التربيعيّةِ.

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ كلِّ معادلةٍ ممّا يلي:

(أ) س^{٢} – ١٢س = ٠ (ب) ٣س^{٢} = ١٢

مثالٌ (٣)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المعادلةِ: ٦ص^{٢} + ١٢ص + ١٣ = ٢ص^{٢} + ٤.

الحلُّ:

٦ص^{٢} + ١٢ص + ١٣ = ٢ص^{٢} + ٤

KuwaitMath.com

المتابعة

تحقق من عمل الطلاب ومن فهمهم لمعنى حلول المعادلات.

إجابات «استكشف»

١ س

٢ ٢س

٣ مساحة المثلث: ١٠ س

مساحة المستطيل: ٢س^{٢}

٤ س = ٥

٢ – التعليم

تعلم

اكتب على السبورة (ب + ٤)(ب + ٥) = ٠، وضّح لهم أن أحد العوامل يساوي صفرًا ب + ٤ = ٠، ومن ثم ب = –٤، واطلب إليهم إيجاد قيمة أخرى تحقق المعادلة أعلاه.

أمثلة بديلة

حلّ المعادلات التالية:

١ س^{٣} – ٤س = ٠

س(س^{٢} – ٤) = ٠

س(س – ٢)(س + ٢) = ٠

هذا يعني أن س = ٠ أو س = ٢ أو س = –٢.

٢ س – ٢س^{٢} = ٠

س(١ – ٢س) = ٠

هذا يعني أن س = ٠ أو س = $\frac{١}{٢}$

إجابات «حاول أن تحل»

١ (أ) س = –٧ أو س = ٤ مجموعة الحل = {–٧، ٤}

(ب) ص = $\frac{٥}{٣}$ أو ص = ٢ مجموعة الحل = {$\frac{٥}{٣}$ ، ٢}

٢ (أ) س = ٠ أو س = ١٢ مجموعة الحل = {٠، ١٢}

(ب) س = –٢ أو س = ٢ مجموعة الحل = {–٢، ٢}

٣ (٥ س + ٧)^{٢} = ٠ مجموعة الحل = {$-\frac{٧}{٥}$}

٦ص^{٣} – ٢ص^{٢} + ١٢ص + ١٣ = ٤ ٠ أضِفِ المعكوسَ الجمعيَّ إلى كلٍّ من ٢ص^{٢}، ٤

٤ص^{٣} + ١٢ص + ٩ = ٠ بسِّطْ

(٢ص + ٣) (٢ص + ٣) = ٠

(٢ص + ٣)^{٢} = ٠ $أ^{٢}$ + ٢أب + ب^{٢} = (أ + ب)^{٢}

٢ص + ٣ = ٠ ∵ $أ^{٢}$ = ٠ ∴ أ = ٠

٢ص = –٣

ص = $-\frac{٣}{٢}$

مجموعةُ الحلِّ = {$-\frac{٣}{٢}$}

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المعادلةِ: ٣٥س^{٢} + ٤٥س – ١ = ١٠س^{٢} – ٢٥س – ٥٠

مثالٌ (٤)

يُوضِّحُ الرسمُ أدناه مخطَّطَ شبكةِ صندوقٍ مفتوحٍ من الواجهةِ العلويّةِ، المساحةُ الكلّيّةُ للوحةِ الورقِ المقوّى المصنوعِ منه الصندوقُ هي ١٤٤سم^{٢}، وارتفاعُ الصندوقِ ١سم، وقد تمَّ قطعُ ١سم × ١سم من كلِّ ركنٍ من أركانِ لوحةِ الورقِ المقوّى.

أوجِدْ أبعادَ الصندوقِ.

الحلُّ:

الشكلُ المرسومُ هو منطقةٌ مربّعةٌ

طولُ ضلعِها = س + ١ + ١ = س + ٢

مساحةُ المنطقةِ المربّعةِ = طولُ الضلعِ في نفسِه

١٤٤ = (س + ٢)(س + ٢)

أي أنّ (س + ٢)^{٢} = ١٤٤

(س + ٢)^{٢} – (١٢)^{٢} = ٠ ١٤٤ = ١٢^{٢}

(س + ٢ – ١٢)(س + ٢ + ١٢) = ٠ الفرقُ بينَ مربّعين

(س – ١٠)(س + ١٤) = ٠ بسِّطْ

س – ١٠ = ٠ أو س + ١٤ = ٠ خاصّيّةُ الضربِ في صفرٍ

س = ١٠ أو س = –١٤

وحيث إنّ الطولَ يجبُ أن يكونَ موجبًا، فالحلُّ هو ١٠. وعلى ذلك تكونُ أبعادُ الصندوقِ هي ١٠سم، ١٠سم، ١سم.

تحقَّقْ من فهمِك

١ ما خاصّيّةُ الضربِ في صفرٍ؟ أعطِ مثالًا على ذلك.

٢ هل يُمكِنُ تطبيقُ هذه الخاصّيّةِ إذا استُبدِلَ الصفرُ بـ ٥؟ فسِّرْ.

١٠٩

تمرّن ٥-٣

التّاريخُ الهجريُّ: ..... التّاريخُ الميلاديُّ: .....

حلّ معادلة من الدرجة الثانية في متغيِّر واحد بالتحليل

Solving Second Degree Equation by One Variable by Factorising

تدرَّبْ وطبِّقْ

(١) ابدأ حل (س – ٤) (س + ٢) = ٠

(أ) استخدم خاصيّة الضرب في صفر. _____

(ب) حل: _____

(جـ) مجموعة الحل = _____

أوجد مجموعة حلّ كلٍّ من المعادلات التالية:

(٢) (س – ٤) (س – ٦) = ٠

(٣) (س + ٤) (س + ٣) = ٠

(٤) (س – ٣) (٢س + ٥) = ٠

(٥) س^{٢} – ٨س – ٤٨ = ٠

(٦) ٢س^{٢} – ٥س = ٨٨

(٧) س^{٢} – ١٢ = +٢٤

(٨) س^{٢} – ١٦س + ٥٥ = ٠

(٩) ص^{٢} = ٦ص

(١٠) ١٢ = ٢س^{٢} + ٥س

(١١) ١٥ص^{٢} + ٤٥ص – ٩ = ٤ص – ٥ص^{٢}

(١٢) إذا أضفنا ٣ سم على طول ضلع مربع أصبحت مساحته ٦٤ سم^{٢}. ما طول الضلع الأساسي للمربع؟

(١٣) التحضيرُ للاختبار حل المعادلة: (س – ٧) (٢س + ٨) = ٠ هو: _____

(أ) ٧ أو ٨ (ب) ٧ أو ٤ (جـ) ٧ أو –٨ (د) ٧ أو –٤

٥٨

KuwaitMath.com

٣ – التدريب والتقييم

تحقّق من فهمك

تحقق من فهم الطلاب لخاصّيّة الضرب في الصفر وعدم التباسهم بتطبيق هذه الخاصّيّة على معادلات تتضمن عوامل ناتج ضربها لا يساوي صفرًا.

إجابات «تحقق من فهمك»

١ **لكل عددان حقيقيان أ، ب إذا كان أب = ٠ فإن أ = ٠ أو ب = ٠. مثلًا س(س – ١) = ٠ فإن س = ٠، س = ١.**

٢ **لا يمكن. مثلًا: س(س – ١) = ٥ هذا لا يعني أن س = ٥ أو س – ١ = ٥، يعطي ٥(٥ – ١) = ٥ وهذا خطأ.**

تقييم بديل

المجلّة: اطلب إلى الطلاب صنع لوحة تفصيلية بخطوات حل المعادلة التربيعية.

اختبار سريع

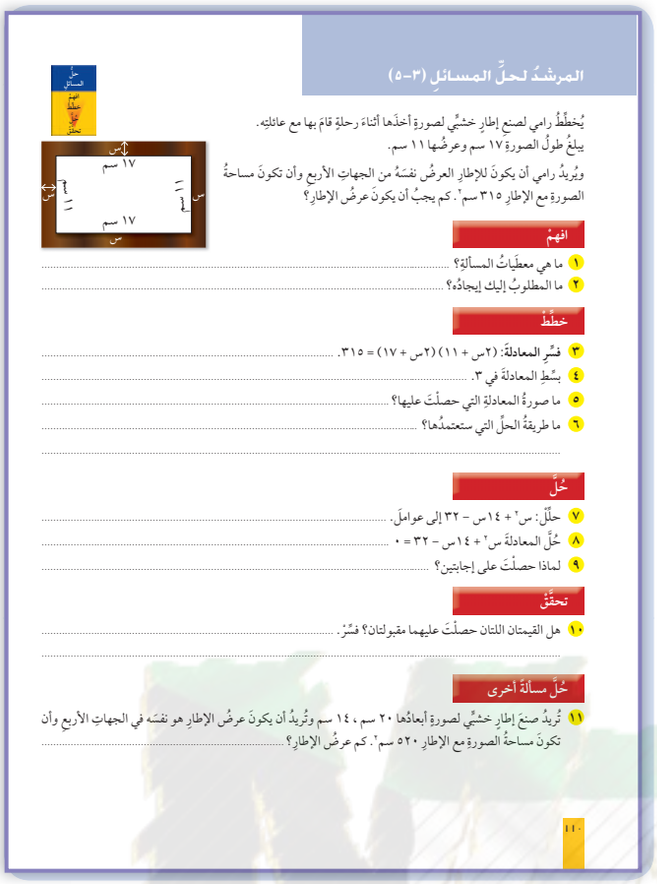
حل المعادلات التالية:

١ $٤س^{٢} = ٦٤$

س = ٤ أو س = –٤

٢ $٢س^{٢} – س – ٣ = ٠$

$س = \frac{٣}{٢}$ أو س = –١



المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٣-٥)

يُخطِّطُ رامي لصنعِ إطارٍ خشبيٍّ لصورةٍ أخذَها أثناءَ رحلةٍ قامَ بها مع عائلتِه. يبلغُ طولُ الصورةِ ١٧ سم وعرضُها ١١ سم.

ويُريدُ رامي أن يكونَ للإطارِ العرضُ نفسُهُ من الجهاتِ الأربعِ وأن تكونَ مساحةُ الصورةِ مع الإطارِ ٣١٥ سم٢. كم يجبُ أن يكونَ عرضُ الإطارِ؟

افهمْ

١ ما هي معطياتُ المسألةِ؟

٢ ما المطلوبُ إليك إيجادُه؟

خطِّطْ

٣ فسِّرِ المعادلةَ: (٢س + ١١) (٢س + ١٧) = ٣١٥.

٤ بسِّطِ المعادلةَ في ٣.

٥ ما صورةُ المعادلةِ التي حصلْتَ عليها؟

٦ ما طريقةُ الحلِّ التي ستعتمدُها؟

حُلَّ

٧ حلِّلْ: س٢ + ١٤س – ٣٢ إلى عواملَ.

٨ حُلَّ المعادلةَ س٢ + ١٤س – ٣٢ = ٠

٩ لماذا حصلْتَ على إجابتين؟

تحقَّقْ

١٠ هل القيمتان اللتان حصلْتَ عليهما مقبولتان؟ فسِّرْ.

حُلَّ مسألةً أخرى

١١ تُريدُ صنعَ إطارٍ خشبيٍّ لصورةٍ أبعادُها ٢٠ سم، ١٤ سم وتُريدُ أن يكونَ عرضُ الإطارِ هو نفسَه في الجهاتِ الأربعِ وأن تكونَ مساحةُ الصورةِ مع الإطارِ ٥٢٠ سم٢. كم عرضُ الإطارِ؟

١١٠

KuwaitMath.com

إجابات «المرشد لحل المسائل»

١ طول الصورة = ١٧ سم، عرض الصورة = ١١ سم، عرضي الإطار ثابت، المساحة الكلية = ٣١٥ سم^{٢}.

٢ عرضي الإطار.

٣ (عرضي الإطار + طول الصورة) (عرضي الإطار + عرض الصورة).

٤ ٤س^{٢} + ٥٦س + ١٨٧ = ٣١٥

٥ ٤س^{٢} + ٥٦س − ١٢٨ = ٠

٦ اكتب المعادلة على الصورة: ٤(س^{٢} + ١٤س − ٣٢) = ٠
ثم استخدم طريقة حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بالتحليل.

٧ (س + ١٦)(س − ٢) = ٠

٨ س = −١٦ ، س = ٢

٩ لأن المعادلة من الدرجة الثانية.

١٠ القيمة −١٦ غير مقبولة لأنها سالبة.
يجب أن يكون عرض الإطار ٢ سم.

١١ (٢س + ٢٠)(٢س + ١٤) = ٥٢٠
س = −٢٠ مرفوضة، س = ٣ سم مقبولة.

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

١ (أ) س = ٣ أو س = ٢.
(ب) س = −٤ أو س = $\frac{٩}{٢}$.

٢ طول الضلع = ٥ سم.

٣ ٢٠م، ٤٠م.

٤ س = ٨.

٥ جـ

٦ س = ٠ أو س = ٤ أو س = −٤.

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ حسابٌ ذهنيٌّ: استخدِمِ الحسابَ الذهنيَّ لحلِّ كلِّ معادلةٍ ممّا يأتي:
(أ) (س − ٣)(س − ٢) = ٠
(ب) (س + ٤)(٢س − ٩) = ٠

٢ الهندسةُ: إذا زادَ طولُ كلِّ ضلعٍ من أضلاعِ مربّعٍ ٣ سم، فإنّ مساحةَ المربّعِ الجديدِ ستكونُ ٦٤ سم^{٢}، أوجِدْ طولَ ضلعِ المربّعِ الأصليِّ.

٣ قطعةُ أرضٍ مستطيلةُ الشكلِ طولُها ضعفُ عرضِها، ومساحتُها تُساوي ٨٠٠م^{٢}.
أوجِدْ بعدَيْ قطعةِ الأرضِ.

٤ صندوقٌ على شكلِ شبهِ مكعّبٍ أبعادُه: ٤، س + ٢، س + ٢ من السنتميتراتِ، وحجمُه ٤٠٠ سم^{٣}.
أوجِدْ قيمةَ س.

٥ التحضيرُ للاختبارِ: إذا كانَ أ^{٢} + ب^{٢} = ٩، أب = ٦، فما قيمةُ (أ + ب)^{٢}؟
(أ) ٣ (ب) ١٥ (جـ) ٢١ (د) ٣٠ (هـ) ٣٦

٦ التحدّي: حُلَّ المعادلةَ: س^{٣} − ١٦ س = صفرًا.

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ
- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

١١١

KuwaitMath.com

٦-٣

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحلّ متباينات من الدرجة الأولى مع متغير واحد.

المصطلحات الأساسية

- متباينة.

مراجعة

حل المعادلات التالية:

١ $س^{٣} - س^{٢} = ٠$

$س = ٠$ أو $س = ١$

٢ $(س + ٢)(س^{٢} - ٦س + ٩) = ٠$

$س = -٢$ أو $س = ٣$

صلة الدرس استخدم خواص المساواة في المعادلات لكي تحل المتباينات.

١ - التمهيد

استكشف

الغاية

يحل الطلاب المتباينات باستخدام خواص المساواة والتباين.

التقييم المستمر

اسأل الطلاب عن معنى المتباينة ومعنى مجموعة حل المتباينة.

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

أعط الطلاب متباينة لحلها. مثال $|٤ - س| < ٤$.

المتابعة

تأكد من إدراكهم لحالتي المتباينة.

٦-٣

حلُّ متباينةٍ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرٍ واحدٍ

Solving First Degree Inequality in One Variable

صلةُ الدرس درستَ فيما سبقَ حلَّ المتباينات وتعرّفتَ القيمةَ المطلقةَ للعددِ، والآن، سوف نحلُّ مسائلَ متباينات تتضمّنُ القيمةَ المطلقةَ.

سوف تتعلّمُ
- حلَّ متباينات من الدرجةِ الأولى مع متغيّرٍ واحدٍ.

من الإستخداماتِ
- يحلُّ الإخصائيّون في المعامل المتباينات كي لا تتخطّى كلفةُ إنتاجِ السلعةِ المبلغَ المقرَّرَ.

استكشِفْ حلُّ متباينةٍ من الدرجةِ الأولى مع متغيّرٍ واحدٍ

في مهرجانِ نهايةِ العامِ، أرادَ نادي الرياضةِ في المدرسةِ تصميمَ رايةٍ مستطيلةِ الشكلِ يُحيطُ بها شريطٌ من قماشٍ ذهبيِّ اللونِ.

١ ما القانونُ الذي يُعطي محيطَ الرايةِ؟

٢ قرّرَتْ لجنةُ النادي أن يكونَ طولُ الرايةِ ٦٨ سم شرطَ ألّا يتعدّى طولُ شريطِ القماشِ ذهبيِّ اللونِ ٢٢٠ سم. اكتبْ متباينةً تُحقّقُ هذه الشروطَ.

٣ (أ) حُلَّ المتباينةَ التي كتبْتَها.

(ب) ما العرضُ الأقصى للرايةِ؟

تعلّمْ حلُّ متباينةٍ من الدرجةِ الأولى مع متغيّرٍ واحدٍ

في المعادلاتِ نستخدمُ علاقةَ المساواةِ، بينما في المتباينات نستخدمُ العلاقاتِ $(<، \leq، >، \geq)$.

المتباينات $٢٠س > ٥$، $ب < -٣$، $٢م + ٤ \leq ٧$، هي متباينةٌ من الدرجةِ الأولى في متغيّرٍ واحدٍ، بينما $٣ص^{٢} - ٤ > ٥$ هي متباينةٌ من الدرجةِ الثانيةِ لأنّ أسَّ المتغيّرِ ص يُساوي ٢.

طريقةُ حلِّ المتباينات من الدرجةِ الأولى في متغيّرٍ واحدٍ تُشبهُ طريقةَ حلِّ المعادلاتِ من الدرجةِ الأولى في متغيّرٍ واحدٍ.

المتباينةُ $٢م + ٤ > ٧$، إذا كانَتْ $م = ٣$، تُصبحُ $٢ \times ٣ + ٤ > ٧$ وهذه عبارةٌ صحيحةٌ. العددُ ٣ يُحقّقُ المتباينةَ وهو أحدُ حلولِها.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ
- متباينةٌ Inequality

١١٢

مثالٌ (١)

أوجدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ $٢م + ٤ > ٧$ في ح، ومثّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

الحلُّ:

$٢م + ٤ > ٧$

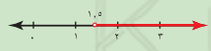
$٢م + ٤ - ٤ > ٧ - ٤$ أضِفِ المعكوسَ الجمعيَّ (-٤) إلى الطرفين

$٢م > ٣$ بسِّطْ

$\frac{١}{٢} \times ٢م > ٣ \times \frac{١}{٢}$ اضربِ الطرفين في المعكوسِ الضربيِّ للعددِ ٢

$م > \frac{٣}{٢}$ أي $م > ١,٥$

مجموعةُ الحلِّ $= (١,٥، \infty)$



يُمكنُ تمثيلُ مجموعةِ الحلِّ على النحوِ المبيَّنِ إلى اليسارِ.

حاولْ أن تحلَّ

١ أوجدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ $٣س - ٥ \leq ٤$ في ح، ومثّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

تذكّرْ

ط = مجموعةُ الأعدادِ الطبيعيّةِ.

ص = مجموعةُ الأعدادِ الصحيحةِ.

ن = مجموعةُ الأعدادِ النسبيّةِ.

نَ = مجموعةُ الأعدادِ غيرِ النسبيّةِ.

ح = مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّةِ.

فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّةِ الموجبةِ يُرمَزُ إليها بالرمزِ ح+

مثالٌ (٢)

أوجدْ مجموعةَ حلِّ $٥ - س \geq ٨$ في ح، ومثّلْها على خطِّ الأعدادِ.

الحلُّ:

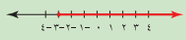
$٥ - س \geq ٨$

$-س \geq ٨ + ٥$

$-س \geq ٣$

$س \leq -٣$

مجموعةُ حلِّ المتباينةِ: $[-٣، \infty)$



حاولْ أن تحلَّ

٢ حُلَّ: $٤ - ٢س \leq -٦$، ومثّلْها على خطِّ الأعدادِ.

مساعدةٌ رياضيّةٌ

عندَ ضربِ طرفي المتباينةِ في عددٍ سالبٍ نعكسُ علاقةَ الترتيبِ.

حُلَّ متباينات تتضمّنُ قيمةً مطلقةً.

علمْنا فيما سبقَ أنّه إذا كانَ $|س| = ٤$ حيث ٤ ∈ ح+

فإنّ $س = -٤$ أو $س = ٤$

والآن، ماذا نستنتجُ إذا كانَ $|س| \geq ٤$ حيث ٤ ∈ ح+

١١٣

إجابات «استكشف»

❶ م = ٢ (ل + ع)

❷ ٢(٦٨ + ع) ≥ ٢٢٠.

❸ (أ) ع ≥ ٤٢.

(ب) العرض الأقصى هو ٤٢ سم.

٢ – التعليم

تعلم

ذكر الطلاب بتشابه قوانين حل المعادلات مع حل المتباينات. والفت انتباههم إلى عامل الاختلاف بينهما.

لماذا نعكس ترتيب العلاقة في المتباينة؟

لأن القسمة على عدد سالب أو الضرب بعدد سالب تعكس العلاقة في المتباينة.

أمثلة بديلة

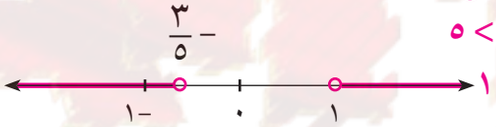
حل المتباينة التالية:

❶ |٥س – ١| > ٤

٥س – ١ < –٤ أو ٥س – ١ > ٤

٥س < –٣ أو ٥س > ٥

س < $-\frac{٣}{٥}$ أو س > ١



❷ لدى هلا ٣٢٠ دينارًا. اشترت بعض الملابس بـ ٧٠ دينارًا، وسوارًا من الذهب بـ ٢٠٠ دينار. كم يجب أن يكون سعر مصفف الشعر بالحد الأعلى لكي تستطيع شراؤه؟

س + ٧٠ + ٢٠٠ ⩽ ٣٢٠، س ⩽ ٥٠

سعر مصفف الشعر يساوي أو أصغر من ٥٠ دينارًا.

مثالٌ (٣)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينة: |س| ≥ ٣ في ح ومثِّلِ الحلَّ على خطِّ الأعداد.

المتباينةُ |س| ≥ ٣ تعني أنّ س عددٌ حقيقيٌّ بعدُه عن الصفرِ أصغرُ من أو يُساوي ٣، أي أنّ:

–٣ ≤ س ≤ ٣

٦– ٥– ٤– ٣– ٢– ١– ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

وتُكتَبُ مجموعةُ حلِّ المتباينةِ كالتالي [–٣، ٣].

تعميم:

إذا كانَ |س| ≥ أ فإنّ –أ ≥ س ≥ أ والعكسُ صحيحٌ حيث س ∈ ح، أ ∈ ح+

مثالٌ (٤)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ |س + ٤| > ٧ في ح، ومثِّلْها على خطِّ الأعداد.

الحلُّ: |س + ٤| > ٧

–٧ > س + ٤ > ٧ استخدِمِ التعميمَ

–٧ – ٤ > س + ٤ – ٤ > ٧ – ٤ أضِفِ المعكوسَ الجمعيَّ (–٤)

–١١ > س > ٣

١١– ١٠– ٩– ٨– ٧– ٦– ٥– ٤– ٣– ٢– ١– ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١

مجموعةُ الحلِّ: (–١١، ٣)

مثالٌ (٥)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ |س| ≤ ٢ في ح ومثِّلِ الحلَّ على خطِّ الأعداد.

الحلُّ: المتباينةُ |س| ≤ ٢ تعني أنّ س عددٌ حقيقيٌّ بُعدُه عن الصفرِ أكبرُ من أو يُساوي ٢

أي أنّ س ≤ ٢ أو س ≥ –٢

٥– ٤– ٣– ٢– ١– صفر ١ ٢ ٣ ٤ ٥

وتُكتَبُ مجموعةُ حلِّ المتباينةِ كالتالي:

[٢، ∞–) ∪ (–∞، –٢]

تعميم:

إذا كانَ |س| ≤ أ فإن س ≤ أ أو س ≥ –أ حيث س ∈ ح، أ ∈ ح+

١١٤

KuwaitMath.com

إجابات «حاول أن تحل»

١ س ⩽ ٣

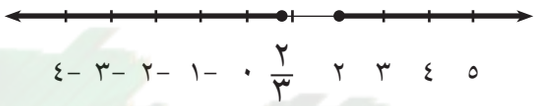
٢ س ⩾ ٥

٣ −٢ > س > −١٢ مجموعة الحل (−١٢، −٢)

٤ م ⩾ −١٠ أو م ⩽ −٦

مجموعة الحل (−∞، −١٠] ∪ [−٦، ∞)

٥ س ⩽ ٢ أو س ⩾ $-\frac{٢}{٣}$



٦ ٠ ⩽ ص ⩽ $\frac{٢}{٣}$

مثالٌ (٦)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: |٢س − ١| + ٢ > ٥ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

الحلُّ: |٢س − ١| + ٢ > ٥

|٢س − ١| + ٢ − ٢ > ٥ − ٢ إضافةُ المعكوسِ الجمعيِّ إلى الطرفين (−٢)

|٢س − ١| > ٣ استخدِمِ التعميمَ

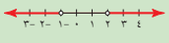
٢س − ١ > ٣ أو ٢س − ١ < −٣

٢س > ٣ + ١ ٢س < −٣ + ١

٢س > ٤ ٢س < −٢

س > ٢ س < −١

مجموعةُ الحلِّ: (٢، ∞) ∪ (−∞، −١).



حاوِلْ أن تحلَّ

٣ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ |س + ٧| > ٥ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

٤ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ ٢|م + ٨| ≤ ٤ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

مثالٌ (٧)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: |٢س + ٥| − ٢ ≤ ٣ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

الحلُّ: |٢س + ٥| − ٢ ≤ ٣

|٢س + ٥| − ٢ + ٢ ≤ ٣ + ٢ إضافةُ المعكوسِ الجمعيِّ إلى الطرفين (٢)

|٢س + ٥| ≤ ٥

٢س + ٥ ≤ ٥ أو ٢س + ٥ ≥ −٥ استخدِمِ التعميمَ

٢س ≤ ٠ ٢س ≥ −١٠

س ≤ ٠ س ≥ −٥

مجموعةُ الحلِّ: [−٥، ٠] ∪ (−∞، −٥].

حاوِلْ أن تحلَّ

٥ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ |٣س − ٢| + ٤ ≤ ٨ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

٦ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ |٣ص − ١| + ٣ ≥ ٤ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

١١٥

KuwaitMath.com

٣ - التدريب والتقييم

تحقّق من فهمك

ذكِّر الطلاب بتعويض قيمة المتغير في المتباينة ليتأكدوا من صحة حلِّهم.

إجابات «تحقق من فهمك»

❶ (أ) س = $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٥}$

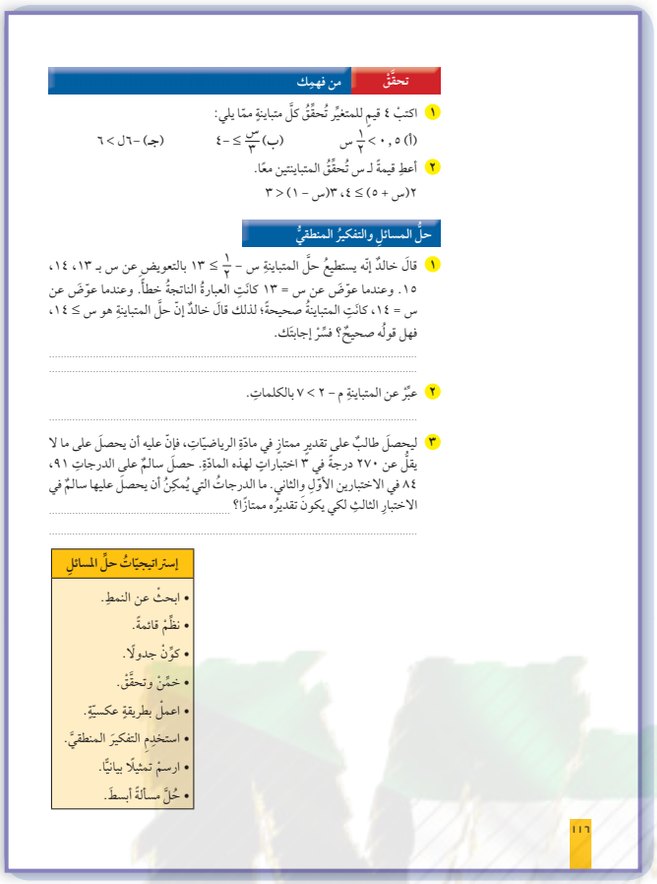
(ب) س = −١٢، −١١، −١٠، −٩

(جـ) س = −٢، −٣، −٤، −٥

❷ س = ٠ أو ١ أو −١

تقييم بديل

المجلّة: اسأل الطلاب أن يبتكروا مسألة يكون حلها عددًا يأتي بين عددين سالبين.



تحقَّق من فهمك

❶ اكتبْ ٤ قيمٍ للمتغيِّرِ تُحقِّقُ كلَّ متباينةٍ ممّا يلي:

(أ) $\frac{١}{٢}$ س < ٠,٥ (ب) $\frac{س}{٣}$ ≤ −٤ (جـ) −٦ل > ٦

❷ أعطِ قيمةً لـ س تُحقِّقُ المتباينتين معًا.

٢(س + ٥) ≤ ٤، ٣(س − ١) > ٣

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

❶ قالَ خالدٌ إنّه يستطيعُ حلَّ المتباينةِ س − $\frac{١}{٢}$ ≤ ١٣ بالتعويضِ عن س بـ ١٣، ١٤، ١٥. وعندما عوّضَ عن س = ١٣ كانَتِ العبارةُ الناتجةُ خطأً. وعندما عوّضَ عن س = ١٤، كانَتِ المتباينةُ صحيحةً؛ لذلك قالَ خالدٌ إنّ حلَّ المتباينةِ هو س ≤ ١٤، فهل قولُه صحيحٌ؟ فسِّرْ إجابتَك.

❷ عبِّرْ عن المتباينةِ م − ٢ > ٧ بالكلماتِ.

❸ ليحصلَ طالبٌ على تقديرٍ ممتازٍ في مادّةِ الرياضيّاتِ، فإنّ عليه أن يحصلَ على ما لا يقلُّ عن ٢٧٠ درجةً في ٣ اختباراتٍ لهذه المادّةِ. حصلَ سالمٌ على الدرجاتِ ٩١، ٨٤ في الاختبارين الأوّلِ والثاني. ما الدرجاتُ التي يُمكِنُ أن يحصلَ عليها سالمٌ في الاختبارِ الثالثِ لكي يكونَ تقديرُه ممتازًا؟

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

١١٦

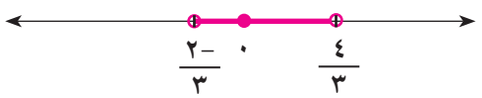
KuwaitMath.com

اختبار سريع

❶ حل المتباينة:

$|٣س - ١| > ٣$ ومثلها على خط الأعداد.

$\frac{-٢}{٣} > س > \frac{٤}{٣}$

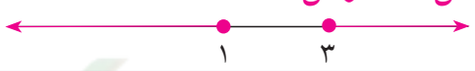


❷ حل المتباينة:

$|-٢س + ٤| \geq ٢$

لاحظ $|-٢س + ٤| = |٢س - ٤|$

$س \geq ١$ أو $س \leq ٣$



إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

❶ كلا، لأن حل المتباينة هو $س \leq ١٣\frac{١}{٢}$.

❷ عدد منقوص منه اثنان يكون الناتج أكبر من سبعة.

❸ يجب أن يحصل على ما لا يقل عن ٩٥ في الاختبار الثالث

$س + ٩١ + ٨٤ \leq ٢٧٠$.

التاريخُ الهجريُّ:..... التاريخُ الميلاديُّ:.....

تمرَّنْ ٦-٣

حل متباينة من الدرجة الأولى في متغيِّر واحد

Solving First Degree Inequality in One Variable

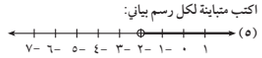
تدرَّبْ وطبِّقْ

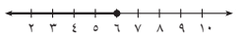
ابدأ استخدم لكل موقف مما يلي إحدى المتباينات التالية: $س > ٢٠$، $س < ٢٠$، $س \geq ٢٠$، $س \leq ٢٠$.

(١) التيار الكهربائيّ الأقصى هو ٢٠ أمبيرًا _____ (٢) العمر الأدنى هو ٢٠ _____

(٣) الوقت أكثر من ٢٠ دقيقة _____ (٤) التكلفة أقل من ٢٠ دينارًا _____

اكتب متباينة لكل رسم بياني:

(٥) 

(٦) 

_____ _____

حدِّد ما إذا كان العدد ١٠ حلًّا لكل متباينة مما يلي:

(٧) $س \leq ١٠$ _____ (٨) $س + ٩ > ١٩$ _____ (٩) $٦س \geq ٦١$ _____ (١٠) $٣س + ٢ > ٤٠$ _____

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يلي ثم مثِّل الحل على خط الأعداد:

(١١) $س - ٥ > ٢$ _____

(١٢) $س + ٣ < ٧$ _____

(١٣) $س + ٧ \geq ١٠$ _____

(١٤) $س - ١٠ \leq ١$ _____

(١٥) $|س| - ٣ < ٧$ _____

(١٦) $|٤س + ١| \leq ١١$ _____

(١٧) $|س - ٢| > ١$ _____

(١٨) $|ص - ٤| \geq ٣$ _____

(١٩) التحضيرُ للاختبار المتباينة التي يمكنك استخدامها للتعبير عن السرعات المسموح بها، إذا كان الحد الأقصى للسرعة هو ٦٥ كم/ ساعة هي: _____

(أ) $س > ٦٥$ (ب) $س < ٦٥$ (جـ) $س \geq ٦٥$ (د) $س \leq ٦٥$

(٢٠) أحد حلول المتباينة: $|٢ - س| > ٤$ هو: _____

(أ) ٢- (ب) ١- (جـ) ٦ (د) ٧

مراجعة الوحدة الثالثة (ب)

حلّ كلًّا من المعادلات التالية بالتحليل:

(١) $(س + ٤)(٢س - ٩) = ٠$ _____

(٢) $(٤ص - ٧)(٣ص + ٨) = ٠$ _____

(٣) $س^{٢} + ٨س = -١٥$ _____

(٤) $٤س^{٢} = ٢٥$ _____

(٥) $٢ص^{٢} - ٧ص = -٥$ _____

(٦) $٤ = -٥س + ٦س^{٢}$ _____

(٧) تسمح المكتبة العامة بالاطلاع على ١٠ كتب على الأكثر في كل مرة. فإذا اختارت غدير ٣ كتب تاريخ، ٤ قصص خيال علمي، حلّ المتباينة $٣ + ٤ + س \geq ١٠$ لإيجاد عدد الكتب الإضافية التي يمكنها الاطلاع عليها.

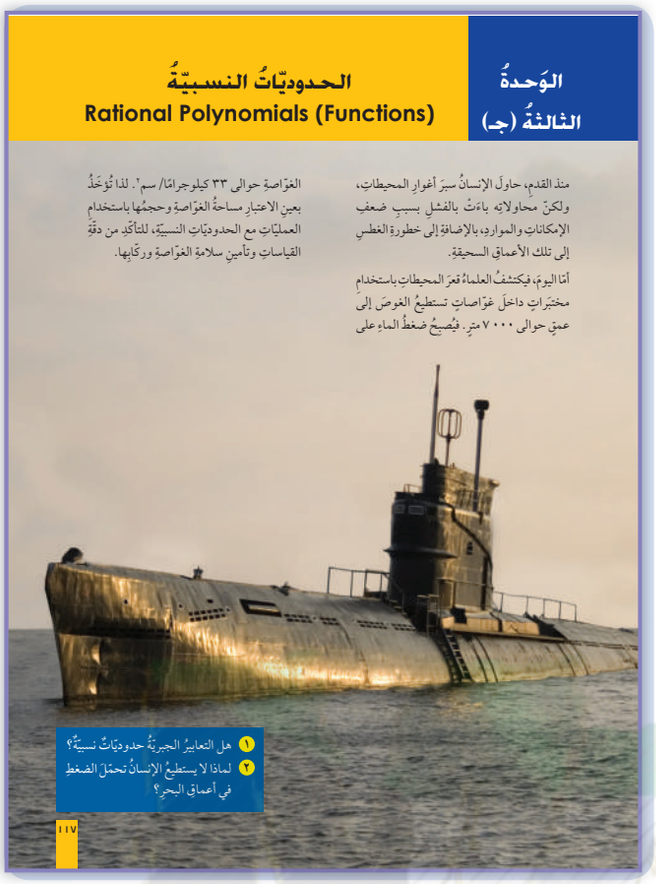
_____

(٨) **المستهلك**: قام صاحب منزل بتوصيل غسالة أطباق بدائرة كهربائية تعطي ٢٠ أمبيرًا على الأكثر، إذا كان يستخدم ١١ أمبيرًا للأجهزة الأخرى، فحلّ المتباينة $د + ١١ \geq ٢٠$ لإيجاد عدد الأمبيرات التي تستخدمها غسالة الأطباق. _____

KuwaitMath.com

الوحدة الثالثة (جـ)

الحدوديات النسبية



كيفية التعامل مع الصفحة

توضح هذه الصفحة موضوع المختبرات داخل الغواصات.

اسأل...

- ما هي أهمية تلك المختبرات؟

الترابط والتداخل

العلوم

يستخدم العلماء الغواصات لمعرفة أنواع الحيوانات البحرية وطريقة عيشها وتكاثرها.

الصناعة

يبحث العلماء في قعر المحيطات عن أعشاب مهمة لصناعة الأدوية.

إجابات الأسئلة

١ لا.

٢ لأن الضغط في أعماق البحر كبير لدرجة أن جسم الإنسان سوف يتعرض للانفجار.

KuwaitMath.com

٧-٣

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الحدوديات النسبية.
- يبسط الحدوديات النسبية.

المصطلحات الأساسية

- حدودية نسبية.

مراجعة

أوجد الناتج:

١) $\frac{\text{س}^٢}{٢} + ٢\text{س} - \text{س}^٢$

$٢\text{س} - \frac{\text{س}^٢}{٢}$

٢) $\frac{\text{س}^٢ - \text{ص}^٢}{\text{س} - \text{ص}}$ حيث س ≠ ص

س + ص

صلة الدرس ناقش الصلة بين تحليل الحدوديات الثلاثية وتبسيط الحدوديات النسبية.

١ – التمهيد

استكشف

الغاية

يبسط الطلاب الحدوديات النسبية بعد تحليل المقام والبسط إلى عوامل أولية.

التقييم المستمر

اختبر أداء الطلاب في فقرة «استكشف».

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

طوّر لدى الطلاب مفهوم تبسيط الحدوديات النسبية بإعطاء مثال آخر.

المتابعة

على الطلاب تبادل إجاباتهم ليتحققوا من طريقة حل هذه الفقرة.

٧-٣

الحدوديّاتُ النسبيّةُ وتبسيطُها

Simplifying Rational Expressions

◄ صلةُ الدرسِ حلَلْتَ في الدرسِ السابقِ بعضَ الحدوديّاتِ الثلاثيّةِ. والآن، سوف تتعرّفُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ وتبسيطَها. ►

سوف تتعلّمُ
- الحدوديّاتِ النسبيّةَ.
- تبسيطَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.

من الاستخداماتِ
- يستخدمُ الطهاةُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ لتقديرِ الوقتِ اللازمِ لإنضاجِ العجينِ كي يُصبحَ خبزًا.

استكشفْ تبسيطُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

يستخدمُ الغطّاسون في البحارِ غوّاصةً على شكلِ كرةٍ طولُ نصفِ قطرِها س، وذلك كمعملٍ اختباريٍّ لدراسةِ البحارِ والمحيطاتِ.

إذا كانَتِ المساحةُ السطحيّةُ للغوّاصةِ = ٤ π س^٢.

حجمُ الغوّاصةِ = $\frac{٤}{٣}$ π س^٣.

١ اكتبْ نسبةَ المساحةِ السطحيّةِ إلى الحجمِ.

٢ اختصِرْ بالعاملِ المشترَكِ. اشرحِ الإجابةَ.

تعلَّمْ تبسيطُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

الكسورُ مثلُ $\frac{٥}{٤}$، $\frac{٧}{١٢}$، $\frac{١}{٢}$، تُدعى أعدادًا نسبيّةً. تُسمّى كلٌّ من المقاديرِ الجبريّةِ التاليةِ:

$\frac{١}{\text{س}}$ ، $\frac{\text{س} + ٢}{\text{س} - ٣}$ ، $\frac{\text{س}^٢ - ٥}{\text{س}^٢ - ١٠\text{س} + ٢٥}$ حدوديّاتٍ نسبيّةً (لأنّ كلًّا من البسطِ والمقامِ حدوديّةٌ).

بالتأكيدِ قيمةُ الحدوديّةِ في المقامِ لا يُمكِنُ أن تكونَ صفرًا، لأنّ القسمةَ على صفرٍ غيرُ محدَّدةٍ. في هذا الدرسِ نعتبرُ أنّ قيمَ المتغيّراتِ التي تُعطي قيمةَ صفرٍ للمقامِ هي قيمٌ غيرُ مقبولةٍ، وعليه فإنّ المقامَ لا يُساوي صفرًا لأيِّ حدوديّةٍ نسبيّةٍ سواءٌ أذكرْنا ذلك أم لم نذكرْه. وكما في تبسيطِ الكسورِ الاعتياديّةِ، تستطيعُ أيضًا وبالطريقةِ نفسِها تبسيطَ الحدوديّةِ النسبيّةِ أو اختصارَها أو وضعَها في أبسطِ صورةٍ، وذلك بقسمةِ كلٍّ من الحدوديّتين في البسطِ والمقامِ على العاملِ المشترَكِ الأكبرِ (ع. م. ف) لهما.

فمثلًا، $\frac{٥ + \text{ر}}{\text{ر}^٢ - ١٠}$ هي في أبسطِ صورةٍ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ
◄ حدوديّةٌ نسبيّةٌ
Rational Expression

ملحوظةٌ
المقاماتُ أينما وُجِدَتْ ≠ ٠

١١٨

إجابات «استكشف»

١) $\frac{٤\pi\,\text{س}^٢}{\frac{٤}{٣}\pi\,\text{س}^٣}$.

٢) $\frac{٣}{\text{س}}$، وهي حدودية نسبية.

٢ – التعليم

تعلم

على الطلاب أن يتمكنوا من قوانين تحليل الحدوديات لتبسيط الحدوديات النسبية.

لاحظ أن $٧\sqrt{\text{س}}$ ، $\text{س}^{\frac{١}{٣}}$ ، |س| ليست حدوديات.

KuwaitMath.com

أمثلة بديلة

❶ بسِّط:

(أ) $\frac{أ^{٢}ب^{٢} + جـ ب^{٢}}{أ^{٢}ب^{٢} - جـ^{٢} ب^{٢}}$

$\frac{١}{أ - جـ}$ ، ب ≠ ٠، أ ≠ −جـ

(ب) $\frac{س^{٣} - ص^{٣}}{٢س^{٢} + ٢س ص + ٢ص^{٢}}$

$\frac{س - ص}{٢}$ ، س ≠ ٠، ص ≠ ٠

❷ اجتاز ذئب مسافة (س) كم بمعدل سرعة (ص) كم/ساعة ثم أسرع ليلحق بأرنب فاجتاز ($\frac{س}{٤}$) كم بمعدل سرعة (٥ص) كم/ ساعة. ما معدل سرعة الذئب في المسافة الكلية التي اجتازها؟

المسافة الكلية التي اجتازها الذئب: س + $\frac{س}{٤}$ = ($\frac{٥س}{٤}$) كم

الزمن المستغرق في المرحلتين: $\frac{س}{ص} + \frac{س}{٢٠ص} = \frac{٢١س}{٢٠ص}$

معدل سرعة الذئب في المرحلتين:

$\frac{٥س}{٤_{١}} \times \frac{٥٪٢٠ص}{٢١س} = \frac{٢٥ص}{٢١}$

إجابات «حاول أن تحل»

❶ (أ) $\frac{٣}{٥ب}$ ، ب ≠ ٠ (ب) $\frac{٤ع^{٢}}{ع + ٢}$ (جـ) −٢، م ≠ $\frac{١}{٢}$

❷ (أ) $\frac{٣}{س - ٥}$ ، س ≠ −٤ (ب) س + ٣

(جـ) $\frac{٨}{١ + أ^{٢}٢}$ ، أ ≠ −٢

❸ ٥٣$\frac{١}{٣}$ دقيقة.

مثالٌ (١)

بسِّطِ الحدوديّةَ النسبيّةَ $\frac{٦ص + ١٢}{ص + ٢}$

الحلُّ:

$\frac{٦ص + ١٢}{ص + ٢} = \frac{٦(ص + ٢)}{ص + ٢}$ تحليلُ البسطِ

$= \frac{٦(ص + ٢)}{ص + ٢}$ اقسمْ على العاملِ المشترَكِ (ص + ٢) بشرطِ أنّ ص ≠ −٢

= ٦

حاوِلْ أنْ تحلَّ

١ بسِّطْ كلَّ حدوديّةٍ نسبيّةٍ ممّا يلي:

(أ) $\frac{١٥ب}{٢٥ب^{٢}}$ (ب) $\frac{١٢ع^{٢}}{٣ع + ٦}$ (جـ) $\frac{٤م - ٢}{١ - ٢م}$

قد تحتاجُ إلى تحليلِ الحدوديّاتِ الثلاثيّةِ لتبسيطِ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.

مثالٌ (٢)

بسِّطِ الحدوديّةَ النسبيّةَ $\frac{٢س - ١٢}{س^{٢} - ٧س + ٦}$

الحلُّ:

$\frac{٢س - ١٢}{س^{٢} - ٧س + ٦} = \frac{٢(س - ٦)}{(س - ٦)(س - ١)}$ حلِّلِ البسطَ والمقامَ واختصِرْ بشرطِ أنّ س ≠ ٦، س ≠ ١

$= \frac{٢}{س - ١}$

مثالٌ (٣)

بسِّطِ الحدوديّةَ النسبيّةَ $\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

الحلُّ:

$\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٥س + ٦} = \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{(س - ٢)(س - ٣)}$ حلِّلِ البسطَ والمقامَ واختصِرْ بشرطِ أنّ س ≠ ٢، س ≠ ٣

$= \frac{س^{٢} + ٢س + ٤}{س - ٣}$

١١٩

KuwaitMath.com

٣ - التدريب والتقييم

تحقّق من فهمك

ذكر الطلاب أن الحدودية النسبية هي على صورة $\frac{أ}{ب}$ ، حيث أ، ب كثيرات الحدود.

إجابات «تحقق من فهمك»

١ (جـ)، لأن بسطها $\sqrt{٣ل^{٧} + ٤}$ وهو ليس كثيرة حدود.

٢ حلّل بسط ومقام الحدودية النسبية إلى عوامل. ثم بسّط العامل المشترك لتكوّن حدودية نسبية في أبسط صورة مثلًا:

$$\frac{س^{٢} + س}{(س + ١)^{٢}} = \frac{س(س + ١)}{(س + ١)^{٢}} = \frac{س}{س + ١} \text{ ، } س \neq -١$$

تقييم بديل

المجلّة: شجّع الطلاب على كتابة موقف حياتي أو مثال على الحدوديات النسبية.

اختبار سريع

بسّط:

١ $\frac{س^{٣} - س}{س^{٣} + ٢س^{٢} + س}$

$\frac{س - ١}{س + ١}$ ، حيث س ≠ ٠، س ≠ -١

٢ $\frac{٣ب جـ^{٢}}{٦ب^{٢} جـ}$

$\frac{جـ}{٢ب}$ ، حيث ب ≠ ٠، جـ ≠ ٠

مثالٌ (٤)

بسّط الحدوديّة النسبيّة $\frac{٢٧س^{٣} + ١٢٥}{٣س^{٢} - س - ١٠}$

الحلُّ:

$\frac{٢٧س^{٣} + ١٢٥}{٣س^{٢} - س - ١٠} = \frac{(٣س + ٥)(٩س^{٢} - ١٥س + ٢٥)}{(٣س + ٥)(س - ٢)}$ حلّلِ البسطَ والمقامَ بشرطِ أنّ س ≠ $-\frac{٥}{٣}$، س ≠ ٢

$= \frac{٩س^{٢} - ١٥س + ٢٥}{س - ٢}$

حاولْ أن تحلَّ

٢ بسّطْ كلًّا من الحدوديّاتِ النسبيّةِ الآتيةِ:

(أ) $\frac{٣س + ١٢}{س^{٢} - س - ٢٠}$ (ب) $\frac{س^{٣} + ٢٧}{س^{٢} - ٣س + ٩}$ (جـ) $\frac{١٦ + ٨أ}{٢ + ٢أ^{٢} + أ^{٥}}$

يُمكِنُ استخدامُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ لنمذجةِ بعضِ مسائلِ الحياةِ اليوميّةِ.

مثالٌ (٥)

يرتبطُ الزمنُ الذي نخبزُ خلالَه العجينَ بقياسِ وشكلِ قطعةِ العجينِ. فمثلًا، يُقدَّرُ زمنُ خبزِ قطعةِ عجينٍ أسطوانيّةِ الشكلِ بالمعادلةِ ن = $\frac{١٢ س \times ع}{س + ع}$ حيث ن: الزمنُ بالدقائقِ، س = طولُ نصفِ القطرِ بالسنتيمترِ، ع: الارتفاعُ بالسنتيمترِ أيضًا. قدِّرِ الزمنَ اللازمَ لخبزِ قطعةِ عجينٍ أسطوانيّةِ الشكلِ طولُ نصفِ قطرِ قاعدتِها ١٠ سم وارتفاعُها ١٢ سم.

ن = $\frac{١٢ س \times ع}{س + ع} = \frac{١٢ \times (١٠) \times (١٢)}{١٢ + ١٠} = \frac{١٤٤٠}{٢٢} \approx ٦٥$

زمنُ خبزِ قطعةِ العجينِ هو تقريبًا ٦٥ دقيقةً.

حاولْ أن تحلَّ

٣ باستخدامِ المعادلةِ الواردةِ في مثالِ (٣)، قدِّرِ الزمنَ اللازمَ لخبزِ قطعةِ عجينٍ أسطوانيّةِ الشكلِ طولُ نصفِ قطرِ قاعدتِها ١٠ سم وارتفاعُها ٨ سم.

تحقَّقْ من فهمك

١ أيٌّ ممّا يلي ليسَ حدوديّةً نسبيّةً؟ فسِّرْ.

(أ) $\frac{س^{٢} - ٢س + ١٥}{س}$ (ب) $\frac{٣}{م + ١}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣ل^{٧} + ٤}}{ل + ١}$

٢ اشرحْ كيف تُبسَّطُ حدوديّةٌ نسبيّةٌ. دعِّمْ شرحَك بمثالٍ.

١٢٠

التّاريخُ الهجريُّ: ..... التّاريخُ الميلاديُّ: .....

تمرّن ٣-٧

الحدوديات النسبية وتبسيطها
Simplifying Rational Expressions

تدرّبْ وطبّقْ

ابدأ ضع في أبسط صورة كل مما يلي:

(١) $\frac{٦أ^{٢} + ٩}{١٢}$

(٢) $\frac{٤س^{٣}}{٢٨س^{٤}}$

(٣) $\frac{٢س - ٥}{٦س - ١٥}$

(٤) $\frac{٢س^{٢} + ٢س}{٣س^{٢} + ٣س}$

(٥) $\frac{٨ - ٢ب}{ب^{٢} - ١٦}$

(٦) $\frac{م + ٦}{م^{٢} - م - ٤٢}$

(٧) $\frac{ل^{٢} - ٦ل + ٨}{ل^{٢} + ل - ٦}$

(٨) $\frac{ب^{٢} + ٨ب + ١٥}{ب + ٥}$

٦١

KuwaitMath.com

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

١ (أ) $\frac{٢(٢ع + ب)}{ع\ ب}$ (ب) $\frac{٢(ل + ع)}{ل\ ع}$

٢ عندما س = −٣

٣ (أ) أحيانًا عندما ب ≠ ٠

(ب) أحيانًا عندما ب ≠ ٠

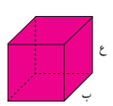
(جـ) دائمًا صحيحة.

٤ $\frac{٣س - ٦}{(س - ٢)^{٢}(س + ٣)}$

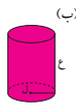
حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **البناءُ:** للتخفيفِ من كلفةِ التبريدِ، يُحاولُ المهندسون أن تكونَ نسبةُ مساحةِ سطحِ المجسَّمِ إلى حجمِه أصغرَ ما يُمكنُ. أوجِدِ الحدوديّةَ النسبيّةَ التي تُمثِّلُ مساحةَ سطحِ المجسَّمِ إلى حجمِه في كلِّ شكلٍ ممّا يلي:

(أ)



(ب)



٢ اشرحْ متى $\frac{س^{٢} - ٩}{س + ٣}$ لا تُساوي س − ٣.

٣ **التفكيرُ المنطقيُّ:** حدِّدْ ما إذا كانَتْ كلُّ عبارةٍ ممّا يلي هي صحيحةً دائمًا أو صحيحةً أحيانًا أو غيرَ صحيحةٍ.

(أ) $\frac{٢ب}{ب} = ٢$

(ب) $\frac{ب^{٢}}{ب^{٤}} = \frac{١}{ب}$

(جـ) $\frac{٢ك + ١٠}{١٢} = \frac{ك + ٥}{٦}$

٤ اكتبْ حدوديّةً نسبيّةً تُصبحُ بعدَ تبسيطِها $\frac{٣}{(س - ٢)(س + ٣)}$.

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

(٩) $\frac{م + ٤}{م^{٢} + ٢م - ٨}$

(١٠) $\frac{٢ر^{٢} + ٩ر - ٥}{ر^{٢} + ١٠ر + ٢٥}$

(١١) $\frac{٧ص^{٢} + ٢٣ص + ٦}{ص^{٢} + ٢ص - ٣}$

(١٢) $\frac{٥س^{٢} + ٦س - ٨}{٣س^{٢} + ٥س - ٢}$

(١٣) **التحدي:** بسّط $\frac{١٠جـ + جـ^{٢} - ٣جـ^{٣}}{٥جـ^{٢} - ٦جـ - ٨}$

(١٤) **التحدي:** بسّط $\frac{م^{٢} - ن^{٢}}{م^{٢} + ١١م ن + ١٠ن^{٢}}$

(١٥) **التحضيرُ للاختبار** الحدودية النسبية التي في أبسط صورة وتساوي −١ هي: _____

(أ) $\frac{س + ١}{س - ١}$ (ب) $\frac{ر + ٣}{٣ - ر}$ (جـ) $\frac{ن - ٢}{٢ - ن}$ (د) $\frac{٤ - ب}{٤ + ب}$

(١٦) الحدودية النسبية التي في أبسط صورة هي: _____

(أ) $\frac{ص + ١}{ص^{٢} - ١}$ (ب) $\frac{٢ن - ١}{ن^{٢} + ٤}$ (جـ) $\frac{س - ٧}{٧ - س}$ (د) $\frac{٣ر - ٤}{٨ - ٦ر}$

KuwaitMath.com

٨–٣

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يجمع الحدوديات النسبية.

مراجعة

بسّط:

١) $\frac{٢أ ب^{٢}}{أ ب جـ}$ ، $\frac{أ ب}{جـ}$ ، $أ \neq ٠$ ، $ب \neq ٠$ ، $جـ \neq ٠$

٢) $\frac{س^{٢} + ٢س}{س^{٢} - ٤}$ ، $\frac{س}{س - ٢}$ ، $س \neq -٢$

صلة الدرس تساعدنا عملية تبسيط الحدوديات النسبية في كتابة جمع الحدوديات النسبية في أبسط صورة.

١ – التمهيد

استكشف

الغاية

يدرك الطلاب كيفية جمع الحدوديات النسبية من خلال موقف حياتي.

التقييم المستمر

ذكر الطلاب أن عليهم الانتباه إلى مقامات الحدودية النسبية إذا كانت متشابهة أم مختلفة عند إجراء عمليات الجمع.

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

أضف بعض الأسئلة إلى فقرة «استكشف».

المتابعة

ادع الطلاب إلى حل مثالين لجمع الحدوديات النسبية مع مقامات متشابهة ومختلفة.

٨–٣

جمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

Adding Rational Expressions

صلةُ الدرسِ: تعرّفتَ الحدوديّاتِ النسبيّةَ وتبسيطَها. والآن سوف تجمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ.

سوف تتعلّمُ
- جمعَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.

من الاستخداماتِ
- يستخدمُ الفيزيّون جمعَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ في تقديرِ وقتِ الرحلاتِ الجويّةِ بينَ مدينتين أو دولتين.

استكشف — جمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

يتألّفُ أحدُ السباقاتِ من ثماني دوراتٍ، تبلغُ مسافةُ كلِّ دورةٍ ١٠ كم. أنهى أحدُ المتسابقين أوّلَ ثلاثِ دوراتٍ خلالَ زمنِ ن دقيقةً، أمّا في بقيّةِ الدوراتِ فقد زادَ من سرعتِه وأنهى هذه الدوراتِ في الزمنِ نفسِه ن دقيقةً كما في الدوراتِ الثلاثِ الأولى.

١) اكتبْ حدوديّةً نسبيّةً تُمثّلُ متوسّطَ سرعةِ المتسابقِ بدلالةِ الزمنِ في الدوراتِ الثلاثِ الأولى.

٢) اكتبْ حدوديّةً نسبيّةً تُمثّلُ متوسّطَ سرعةِ المتسابقِ بدلالةِ الزمنِ في الدوراتِ الخمسِ الباقيةِ.

٣) أوجِدْ متوسّطَ سرعتِه في مجملِ السباقِ بدلالةِ الزمنِ في أبسطِ صورةٍ.

تعلّمْ — جمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

أوّلًا: جمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ الموحّدةِ.

يُشبهُ جمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ الموحّدةِ، جمعَ الأعدادِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ الموحّدةِ. إذا كانتْ أ، ب، جـ تُمثّلُ حدوديّاتٍ (جـ ≠ ٠) فإنّ $\frac{أ}{جـ} + \frac{ب}{جـ} = \frac{أ+ب}{جـ}$

تذكّرْ: مقامُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ لا يُساوي صفرًا أينما وُجِدَ.

مثالٌ (١)

اجمعْ: $\frac{٢}{س+٣} ، \frac{٥}{س+٣}$

الحلُّ: $\frac{٢}{س+٣} + \frac{٥}{س+٣} = \frac{٥+٢}{س+٣}$ جمعُ البسوطِ

$= \frac{٧}{س+٣}$ التبسيطُ

حاولْ أن تحلَّ

١) أوجِدْ ناتجَ كلٍّ ممّا يلي في أبسطِ صورةٍ.

(أ) $\frac{٣}{س+٢} + \frac{٢}{س+٢}$

(ب) $\frac{ص}{ص-٥} + \frac{٣ص}{ص-٥}$

(جـ) $\frac{٥ن}{ن+١} + \frac{٥}{ن+١}$

١٢٢

إجابات «استكشف»

١) $\frac{٣٠}{ن}$

٢) $\frac{٥٠}{ن}$

٣) $\frac{٨٠}{ن}$

٢ – التعليم

تعلم

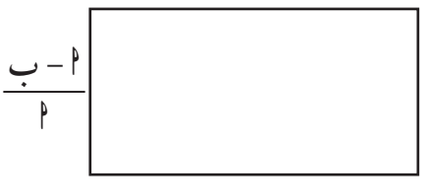
إن عملية جمع الحدوديات النسبية ذات المقام المشترك تتم بطريقة جمع الأعداد النسبية ذات المقام المشترك نفسها.

KuwaitMath.com

أمثلة بديلة

بسِّط:

❶ أوجد محيط الشكل أدناه.



$$\text{المحيط} = ٢\left(\frac{أ - ب}{أ} + \frac{أ + ب}{أ}\right)$$

$$= ٢\left(\frac{أ - ب + أ + ب}{أ}\right)$$

$$= ٢\frac{(أ ٢)}{أ}$$

$$= ٤ \text{ بشرط أن } أ \neq ٠$$

❷ $$\frac{٢س + ٤}{س + ١} + \frac{٣س - ١}{س + ١}$$

$$= \frac{٥س + ٣}{س + ١}$$

إجابات «حاول أن تحل»

❶ (أ) $\frac{٥}{س + ٢}$

(ب) $\frac{٤ص}{ص - ٥}$ (جـ) ٥، ن ≠ −١

❷ (أ) $\frac{٩ + ١٤ص^{٢}}{٢١ص^{٤}}$

(ب) $\frac{١٥ + ٩ب}{٣٦ب^{٢}} = \frac{٣(٥ + ٣ب)}{٣ \times ١٢ \times ب^{٢}} = \frac{٥ + ٣ب}{١٢ب^{٢}}$

❸ (أ) $\frac{٨س + ٧}{(س + ٤)(س - ١)}$

(ب) $\frac{٣ب^{٢} + ١٠ب - ٢}{(٢ب - ١)(ب + ٢)}$

ثانيًا: جمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ المختلفةِ.

لجمعِ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ المختلفةِ، يُمكِنُك أن تبدأ بكتابةِ هذه الحدوديّاتِ مع المقامِ المشترَكِ الأصغرِ، وهو المضاعَفُ المشترَكُ الأصغرُ للمقامين.

م.م.أ (الأعدادُ الكلّيّةُ) م.م.أ [الحدودُ (وحيدةُ الحدِّ)]

٤ = ؟ × ٢ ٤س = ؟ × ٢ × س

٦ = ؟ × ٣ ٦س٢ = ؟ × ٣ × س × س

م.م.أ = ٢ × ٢ × ٣ = ١٢ م.م.أ = ٢ × ٢ × ٣ × س × س = ١٢س٢

جمعُ حدوديّاتٍ نسبيّةٍ مقاماتُها وحيدةُ الحدِّ.

مثالٌ (٢)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ $\frac{٢}{٣س} + \frac{١}{٦}$

الحلُّ:

الخطوةُ ١:

أوجِدْ م.م.أ لـ ٣س، ٦

٣س = ٣ × س

٦ = ٣ × ٢

م.م.أ = ٣ × ٢ × س = ٦س

الخطوةُ ٢:

أعِدْ كتابةَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ مستخدِمًا م.م.أ، ثمّ اجمعْ.

$\frac{٢}{٣س} + \frac{١}{٦} = \frac{٢ \times ٢}{٢ \times ٣س} + \frac{١ \times س}{٦ \times س}$ أعِدْ كتابةَ الحدوديّاتِ مستخدِمًا م.م.أ

$= \frac{٤}{٦س} + \frac{س}{٦س}$ بسِّطْ

$= \frac{٤ + س}{٦س}$ اجمعِ البسوطَ

حاوِلْ أن تحلّ

❷ أوجِدْ ناتجَ كلٍّ ممّا يلي في أبسطِ صورةٍ.

(أ) $\frac{٣}{٧ص^{٢}} + \frac{٢}{٣ص^{٢}}$ (ب) $\frac{٣}{١٢ب} + \frac{١٥}{٣٦ب^{٢}}$

١٢٣

KuwaitMath.com

٣ - التدريب والتقييم

تحقّق من فهمك

تأكد من فهم الطلاب لطريقة جمع الحدوديات النسبية بمقامات مختلفة.

إجابات «تحقق من فهمك»

❶ $\frac{٢٠س + ٢٨}{(٣س + ٤)(س + ٢)}$

❷ ناتج ضربهما.

تقييم بديل

وزع الطلاب على مجموعات من اثنين. يكتب أحد الطلاب في كل مجموعة حدوديتين نسبيتين ويطلب إلى زميله جمعهما ثم يتبادلا الأدوار.

اختبار سريع

بسِّط:

(أ) $\frac{٢ب - ٢}{جـ + ٣} + \frac{٥ - ب}{جـ + ٣}$ $\quad$ $\frac{ب + ٣}{جـ + ٣}$

(ب) $\frac{٥}{١ + ٢أ} + \frac{-٦}{١ - ٣أ}$ $\quad$ $\frac{١١ - ٣أ}{(١ + ٢أ)(١ - ٣أ)}$

يُمكِنُك أيضًا إيجادُ م.م.أ لحدوديّاتٍ من حدّين أو أكثر.

مثالٌ (٣)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ $\frac{٥}{ل + ٢} + \frac{٦}{ل - ٣}$

الحلُّ:

الخطوةُ ١:

أوجِدْ م.م.أ لـ: (ل + ٢)، (ل − ٣)

بما أنّه لا توجَدُ عواملُ مشتَرَكةٌ فإنّ م.م.أ هو (ل + ٢)(ل − ٣).

الخطوةُ ٢:

أعِدْ كتابةَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ مستخدِمًا م.م.أ ثمّ اجمعْ.

$$\frac{٥}{ل + ٢} + \frac{٦}{ل - ٣} = \frac{٥(ل - ٣)}{(ل + ٢)(ل - ٣)} + \frac{٦(ل + ٢)}{(ل + ٢)(ل - ٣)}$$

أعِدْ كتابةَ الحدوديّاتِ مستخدِمًا م.م.أ

$$= \frac{٥ل - ١٥}{(ل + ٢)(ل - ٣)} + \frac{٦ل + ١٢}{(ل + ٢)(ل - ٣)}$$

اجمعِ البسوطَ

$$= \frac{٥ل - ١٥ + ٦ل + ١٢}{(ل + ٢)(ل - ٣)}$$

بسِّطْ، حيث ل ≠ −٢، ل ≠ ٣

$$= \frac{١١ل - ٣}{(ل + ٢)(ل - ٣)}$$

حاوِلْ أن تحلَّ

❸ أوجِدْ ناتجَ كلٍّ ممّا يلي في أبسطِ صورةٍ.

(أ) $\frac{٥}{س + ٤} + \frac{٣}{س - ١}$

(ب) $\frac{٢}{ب + ٢} + \frac{٣ب}{ب - ١}$

تحقّقْ من فهمِك

❶ أوجِدْ ناتجَ: $\frac{٢}{٣س + ٤} + \frac{٦}{س + ٢}$

❷ ما المضاعَفُ المشتَرَكُ الأصغرُ لحدوديّتين لا عواملَ مشتَرَكةَ لهما؟

التّاريخُ الهجريُّ: ..... التّاريخُ الميلاديُّ: .....

تمرين ٣-٨

جمع الحدوديات النسبيّة
Adding Rational Expressions

تدرَّبْ وطبِّقْ

ابدأْ أوجد الناتج في أبسط صورة.

(١) $\frac{٥}{م^{٢}} + \frac{٤}{م^{٢}}$ $\quad$ (٢) $\frac{٤}{٦س - ١} + \frac{٣}{٦س - ١}$ $\quad$ (٣) $\frac{س^{٢} + ٣}{٤س^{٢} + ٢} + \frac{س^{٢} - ٢}{٤س^{٢} + ٢}$

(٤) $\frac{٧}{أ٣} + \frac{٢}{٥}$ $\quad$ (٥) $\frac{٦}{٥س^{٨}} + \frac{٤}{٣س^{٦}}$ $\quad$ (٦) $\frac{٣}{٨م^{٣}} + \frac{١}{١٢م^{٢}}$

(٧) $\frac{س}{س + ٥} + \frac{٤}{س + ٣}$ $\quad$ (٨) $\frac{٥}{س^{٣}} + \frac{٤}{س + ١}$ $\quad$ (٩) $\frac{٣}{١ + ٢أ} + \frac{٦}{١ - ٢أ}$

(١٠) $\frac{ص - ٦}{ص^{٢} - ٣ص - ١٨} + \frac{٣}{ص + ٣}$

(١١) التحضيرُ للاختبار $\frac{س}{س + ٢} + \frac{٢}{٢س + ٤}$ تساوي: _____

(أ) $\frac{س + ٢}{٣س + ٦}$ $\quad$ (ب) $\frac{٢س}{(س + ٢)(٢س + ٤)}$ $\quad$ (جـ) $\frac{س + ١}{س + ٢}$ $\quad$ (د) $\frac{١}{٢س + ٤}$

KuwaitMath.com

إجابات «المرشد لحل المسائل»

١ المسافة بين مدينتين ٤٠٠٠ كم، تزيد سرعة الطائرة ١٥٪ من ن إلى ل.

٢ حدودية نسبية للزمن اللازم ذهابًا وإيابًا.

٣ ١,١٥ ع

٤ السرعة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$

٥ الزمن = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

٦ $و_{ل-ن} = \frac{٤٠٠٠}{ع}$

٧ $و_{ن-ل} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \frac{٤٠٠٠}{١,١٥ ع}$ لأن السرعة تزيد ١٥٪ بسبب وجود تيار هوائي.

٨ $\frac{٨٦٠٠}{١,١٥ ع}$

٩ ٥ ساعات، ≈ ٤ ساعات و٢١ دقيقة، ≈ ٩ ساعات و٢١ دقيقة. نعم.

١٠ $\frac{٤٢٤٠}{١,١٢ ع}$

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

١ جمع مقامات الحدوديات النسبية وهذا خطأ.
الإجابة الصحيحة هي: $\frac{٥س + ١١}{(س + ٣)(س + ١)}$

٢ إجابة ممكنة:

$$\frac{١}{ب + ٤} + \frac{٢}{ب + ١} = \frac{ب + ١ + ٢ب + ٨}{(ب + ٤)(ب + ١)}$$

$$= \frac{٣ب + ٩}{(ب + ٤)(ب + ١)}$$

٣ لا

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٣-٨)

تبلغُ المسافةُ بينَ المدينةِ ن والمدينةِ ل حوالى ٤٠٠٠ كم. تزيدُ سرعةُ الطائرةِ نحوَ ١٥٪ عندَ الطيرانِ من ن إلى ل عنها عندَ الطيرانِ من ل إلى ن، بسببِ وجودِ تيارٍ هوائيٍّ قويٍّ في طبقاتِ الجوِّ العليا. إذا كانَتْ ع تُمثِّلُ سرعةَ الطائرةِ من المدينةِ ل إلى المدينةِ ن، فاكتبْ حدوديّةً نسبيّةً وبسِّطْها إذا أمكنَ لتُبيِّنَ الزمنَ اللازمَ للذهابِ والإيابِ بينَ المدينتين.

افهمْ

١ ما معطياتُ المسألةِ؟

٢ ما المطلوبُ إليك إيجادُه؟

خطِّطْ

٣ إذا كانَتِ السرعةُ ع من مدينةِ ل إلى مدينةِ ن، فكم تُصبحُ السرعةُ من مدينةِ ن إلى مدينةِ ل؟

٤ ما العلاقةُ بينَ المسافةِ والسرعةِ والزمنِ؟

٥ ما الكسرُ الذي يُعطي الزمنَ بدلالةِ السرعةِ والمسافةِ؟

حُلَّ

٦ اكتبِ الحدوديّةَ النسبيّةَ التي تُبيِّنُ الزمنَ اللازمَ للطيرانِ من مدينةِ ل إلى مدينةِ ن.

٧ لماذا تُمثِّلُ الحدوديّةُ النسبيّةُ $\frac{٤٠٠٠}{١,١٥ ع}$ الزمنَ اللازمَ للطيرانِ من مدينةِ ن إلى مدينةِ ل؟

٨ اجمعِ الحدوديّتين النسبيّتين في ٦، ٧ وبسِّطِ الإجابةَ.

تحقَّقْ

٩ عوِّضْ عن ع بـ ٨٠٠ في كلٍّ من ٦، ٧، ٨. هل مجموعُ ناتجي ٦، ٧ يُساوي ناتجَ ٨؟

حُلَّ مسألةً أخرى

١٠ تبلغُ المسافةُ بينَ المدينتين أ، ب ٢٠٠٠ كم. تزيدُ سرعةُ الطائرةِ ١٢٪ عندَ الطيرانِ من أ إلى ب عنها من ب إلى أ. اكتبْ حدوديّةً نسبيّةً وبسِّطْها لتُبيِّنَ الزمنَ اللازمَ للذهابِ والإيابِ بينَ المدينتين.

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ كتبَ سامي: $\frac{٢}{س + ٣} + \frac{٣}{س + ١} = \frac{٥}{٢س + ٤}$. ما الخطأُ الذي ارتكبَه سامي؟

٢ اكتبْ حدوديّتين نسبيّتين ذواتي مقاماتٍ مختلفةٍ. أوجِدْ م.م.أ ثمّ اجمعِ الحدوديّتين.

٣ الكتابةُ: عندَ جمعِ حدوديّتين نسبيّتين، هل تكونُ الإجابةُ في أبسطِ صورةٍ إذا استخدمْتَ م.م.أ؟ فسِّرْ.

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

KuwaitMath.com

٩-٣

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يطرح الحدوديات النسبية ذات المقامات المتساوية وذات المقامات المختلفة.

مراجعة

أوجد الناتج:

١) $\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٣}$ — ١

٢) $\frac{س}{٢} + \frac{س}{٤}$ — $\frac{٣س}{٤}$

٣) $\frac{٤}{س} + \frac{٥}{س}$ — $\frac{٩}{س}$

صلة الدرس كما تعرفت على جمع الحدوديات النسبية سوف تتعرف على طرحها وكتابتها بأبسط صورة.

١ - التمهيد

استكشف

الغاية

يتعرف الطلاب طرح الحدوديات النسبية وتبسيط كتابتها.

التقييم المستمر

تحقق من عمل الطلاب وتأكد من دقة عملهم مع المقامات المتساوية والمقامات المختلفة ثم ذكرهم بإيجاد مقام مشترك من أجل إتمام عملية الطرح إذا كانت المقامات مختلفة.

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

اطلب إليهم كتابة تعبير مشابه للتعابير الموجودة في السؤال الثاني وتبادل الأسئلة والإجابات في مجموعات من طالبين.

المتابعة

دع بعض المتطوعين من الطلاب يعرضون إجاباتهم عن الخطوة رقم ٣، ثم شجع الطلاب على صياغة طريقة لطرح الحدوديات النسبية حيث المقامات مختلفة.

إجابات «استكشف»

١) تكلفة الملصق الواحد تساوي في الشهر الأول:

$$\frac{٥٤٠٠٠}{س} + ٠,٢٨٠$$

٢) تكلفة الملصق الواحد تساوي في الشهر الثاني:

$$\frac{٢٧٠٠٠}{س} + ٠,٢٨٠$$

٣) الفرق بين تكلفة الإنتاج بين الشهر الأوّل والثاني تساوي $\frac{٥٤٠٠٠}{س} - \frac{٢٧٠٠٠}{س} = \frac{٢٧٠٠٠}{س}$.

٩-٣

طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

Subtracting Rational Expressions

صلةُ الدرسِ تعرّفتَ في الدرسِ السابقِ الحدوديّاتِ النسبيّةَ وجمعَها، والآن سوف تطرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ.

سوف تتعلّمُ
- طرحَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ المتساويةِ.
- طرحَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ المختلفةِ.

من الاستخداماتِ
- يستخدمُ المتسابقون في مبارياتِ التجذيفِ، طرحَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ لمعرفةِ تأثيرِ مقاومةِ التيّارِ على انسيابِ القواربِ.

استكشف — طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

تقومُ شركةٌ بتصميمِ الملصقاتِ للدعايةِ. تبلغُ المصاريفُ الثابتةُ عندَ هذه الشركةِ ٥٤٠٠٠ دينارٍ شهريًّا، وتكلفةُ الموادِّ الأوّليّةِ عن كلِّ ملصَقٍ ٢٨٠ فلسًا.

١) إذا كانَ الإنتاجُ في الشهرِ الأوّلِ هو س ملصَقٍ، فما هي تكلفةُ الملصَقِ الواحدِ؟

٢) إذا أصبحَ الإنتاجُ في الشهرِ الثاني ضعفَ الشهرِ الأوّلِ، فما هي تكلفةُ الملصَقِ الواحدِ؟

٣) اكتبِ الحدوديّةَ النسبيّةَ التي تُمثّلُ الفرقَ في تكلفةِ الإنتاجِ للملصَقِ الواحدِ بينَ الشهرِ الأوّلِ والشهرِ الثاني.

تعلّمْ — طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

أوّلًا: طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ الموحَّدةِ.

طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ **الموحَّدةِ** يُماثِلُ طرحَ الأعدادِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ **الموحَّدةِ**.

فمثلًا إذا كانتْ أ، ب، جـ تُمثّلُ حدوديّاتٍ (جـ ≠ صفر)،

فإنّ $\frac{أ}{جـ} - \frac{ب}{جـ} = \frac{أ - ب}{جـ}$.

مثالٌ (١)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{٢ص + ١}{ص - ١} - \frac{ص + ٢}{ص - ١}$

الحلُّ:

$\frac{٢ص + ١}{ص - ١} - \frac{ص + ٢}{ص - ١} = \frac{(٢ص + ١) - (ص + ٢)}{ص - ١}$ — المقامُ مشتركٌ

$= \frac{٢ص + ١ - ص - ٢}{ص - ١}$ — اطرحْ

$= \frac{ص - ١}{ص - ١}$

$= ١$ — بسّطْ شرطَ أنّ ص ≠ ١

١٢٧

٢ – التعليم

تعلم

طرح الحداديات النسبية يماثل جمعها.

أمثلة بديلة

❶ اطرح: $\frac{٢س + ٤}{٢س^{٢} + ٧س + ٣}$ من $\frac{٤س + ٥}{٢س^{٢} + ٧س + ٣}$

$= \frac{٤س + ٥}{٢س^{٢} + ٧س + ٣} - \frac{٢س + ٤}{٢س^{٢} + ٧س + ٣}$ (المقامات متساوية)

$= \frac{(٤س + ٥) - (٢س + ٤)}{٢س^{٢} + ٧س + ٣}$ اطرح البسطين

$= \frac{٤س + ٥ - ٢س - ٤}{٢س^{٢} + ٧س + ٣}$ استخدم الخاصّيّة التوزيعية

$= \frac{٢س + ١}{٢س^{٢} + ٧س + ٣}$ بسِّط

$= \frac{٢س + ١}{(٢س + ١)(س + ٣)}$

حلّل المقام، اقسم على العامل المشترك ٢س + ١،
شرط أن س $\neq -\frac{١}{٢}$

$= \frac{١}{س + ٣}$

❷ اطرح: $\frac{٤}{س + ٣}$ من $\frac{٦}{س - ٥}$

أوجد م.م.أ. (س + ٣)، (س – ٥) بما أنه لا يوجد عامل مشترك فيكون م.م.أ هو (س – ٥)(س + ٣)

$\frac{٦}{س - ٥} - \frac{٤}{س + ٣}$

$= \frac{٦(س + ٣)}{(س - ٥)(س + ٣)} - \frac{٤(س - ٥)}{(س - ٥)(س + ٣)}$

إعادة كتابة الحداديتين:

$= \frac{٦س + ١٨}{(س - ٥)(س + ٣)} - \frac{٤س - ٢٠}{(س - ٥)(س + ٣)}$

بسِّط

$= \frac{(٦س + ١٨) - (٤س - ٢٠)}{(س - ٥)(س + ٣)}$ اطرح

$= \frac{٦س + ١٨ - ٤س + ٢٠}{(س - ٥)(س + ٣)}$ استخدم الخاصّيّة التوزيعية

$= \frac{٢س + ٣٨}{(س - ٥)(س + ٣)}$ بسِّط

حاولْ أن تحلّ

١ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ:

(أ) $\frac{٧ب - ٢}{٣ب + ٦} - \frac{ب + ٧}{٣ب + ٦}$ (ب) $\frac{٢س + ١}{٥س + ٢} - \frac{٣س - ٤}{٥س + ٢}$

ثانيًا: طرحُ الحداديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ المختلِفةِ.

لطرحِ حداديّاتٍ نسبيّةٍ ذاتِ مقاماتٍ مختلِفةٍ، يُمكِنُكَ أوّلًا إعادةُ كتابةِ هذه الحداديّاتِ باستخدامِ المضاعَفِ المشترَكِ الأصغرِ م.م.أ للمقاماتِ. (راجِعْ جمعَ الحداديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ المختلِفةِ).

مثالٌ (٢)

اطرحْ: $\frac{٥}{س + ٢}$ من $\frac{٦}{س - ٣}$.

الحلُّ:

الخطوةُ ١:

أوجِدْ م.م.أ لـ (س + ٢)، (س – ٣).

بما أنّه لا يوجَدُ عاملٌ مشترَكٌ، فيكونُ م.م.أ هو (س + ٢)(س – ٣).

الخطوةُ ٢:

أعِدْ كتابةَ الحداديّتينِ مستخدِمًا م.م.أ، ثمّ اطرحْ.

$\frac{٦}{س - ٣} - \frac{٥}{س + ٢} = \frac{٦(س + ٢)}{(س - ٣)(س + ٢)} - \frac{٥(س - ٣)}{(س - ٣)(س + ٢)}$ أعِدْ كتابةَ الحداديّتينِ

$= \frac{٦س + ١٢}{(س - ٣)(س + ٢)} - \frac{٥س - ١٥}{(س - ٣)(س + ٢)}$

$= \frac{(٦س + ١٢) - (٥س - ١٥)}{(س - ٣)(س + ٢)}$ اطرحْ

$= \frac{٦س + ١٢ - ٥س + ١٥}{(س - ٣)(س + ٢)}$ استخدِمِ الخاصّيّةَ التوزيعيّةَ

$= \frac{س + ٢٧}{(س - ٣)(س + ٢)}$ بسِّطْ، شرطَ أنّ س ≠ ٣، س ≠ –٢

حاولْ أن تحلّ

٢ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ:

(أ) $\frac{١٣}{١ - ١٢} - \frac{٢}{أ + ٢}$ (ب) $\frac{٦}{٧ص^{٢}} - \frac{٨}{٣ص}$

١٢٨

إجابات «حاول أن تحل»

١ (أ) $\frac{٢ب - ٣}{ب + ٢}$ (ب) $\frac{-س + ٥}{٥س + ٢}$

٢ (أ) $\frac{٣أ^{٢} + ٢أ + ٢}{(٢أ - ١)(أ + ٢)}$ (ب) $\frac{١٨ - ٥٦ص^{٢}}{٢١ص^{٣}}$

٣ $\frac{س - ٦}{س^{٢} - ٩س + ٢٠}$

٣ - التدريب والتقييم

تحقّق من فهمك

تأكد من أن الطلاب يحسنون إيجاد م.م.أ للمقامات المختلفة وكذلك ترتيب العمليات.

إجابات «تحقق من فهمك»

١ $\frac{٤}{ص + ٢}$

٢ جمع الحدوديات وطرحها لهما خطوات الحل نفسها. يختلفان باختلاف الإشارة.

تقييم بديل

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات من اثنين على أن يقوم كل فرد في المجموعة بمسائل طرح ويعرضها على زميله لحلها ثم يتبادلان الأدوار.

تأكد من أن الطلاب يحلون المسائل المطروحة بشكل صحيح.

مثالٌ (٣)

أوجِد الناتجَ في أبسطِ صورة: $\frac{٢ن - ١}{ن^{٢} + ٥ن - ٣} - \frac{ن + ٣}{ن^{٢} - ٩}$.

الحلُّ: $\frac{٢ن - ١}{ن^{٢} + ٥ن - ٣} - \frac{ن + ٣}{ن^{٢} - ٩}$

$= \frac{٢ن - ١}{(٢ن - ١)(ن + ٣)} - \frac{ن + ٣}{(ن - ٣)(ن + ٣)}$ — حلِّلْ كلًّا من المقامين شرطَ أنْ: $ن \neq \frac{١}{٢}$، $ن \neq -٣$، $ن \neq ٣$

$= \frac{١}{ن + ٣} - \frac{١}{ن - ٣}$ — اقسمْ على العاملِ المشترَكِ

$= \frac{ن - ٣}{(ن + ٣)(ن - ٣)} - \frac{ن + ٣}{(ن - ٣)(ن + ٣)}$ — استخدِمِ المضاعَفَ المشترَكَ الأصغرَ للمقامين

$= \frac{(ن - ٣) - (ن + ٣)}{(ن + ٣)(ن - ٣)}$ — اطرحْ

$= \frac{ن - ٣ - ن - ٣}{(ن + ٣)(ن - ٣)}$ — استخدِمِ الخاصّيّةَ التوزيعيّةَ

$= \frac{-٦}{(ن + ٣)(ن - ٣)}$ — بسِّطْ، شرطَ أنّ $ن \neq -٣$، $ن \neq ٣$

حاولْ أن تحلَّ

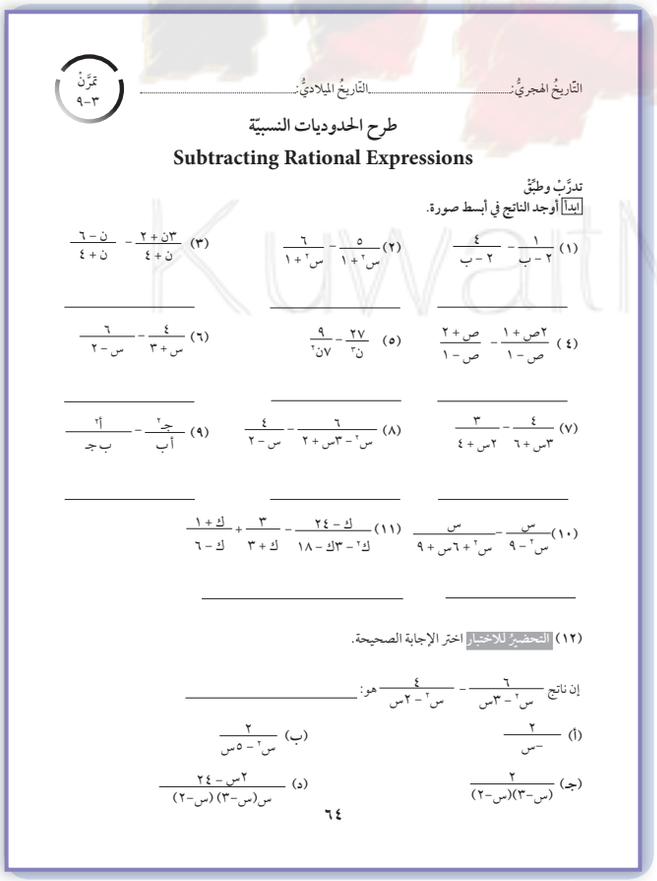
٣ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورة: $\frac{٢س + ١٠}{س^{٢} + س - ٢٠} + \frac{-س - ٤}{س^{٢} - س - ٢٠}$

تحقَّقْ من فهمِك

١ أوجِدْ ناتجَ: $\frac{٦ص - ٧}{ص + ٢} - \frac{٦ص - ١١}{ص + ٢}$.

٢ كيف يتشابهُ طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ وجمعُها؟ وبمَ يختلفان؟

١٣٩



تمرّن ٣-٩

التّاريخُ الهجريُّ: ..... التّاريخُ الميلاديُّ: .....

طرح الحدوديات النسبيّة

Subtracting Rational Expressions

تدرَّبْ وطبِّقْ

ابدأْ أوجد الناتج في أبسط صورة.

(١) $\frac{١}{ب - ٢} - \frac{٤}{٢ - ب}$ (٢) $\frac{٥}{س^{٢} + ١} - \frac{٦}{س^{٢} + ١}$ (٣) $\frac{٣ن + ٢}{ن + ٤} - \frac{ن - ٦}{ن + ٤}$

(٤) $\frac{٢ص + ١}{ص - ١} - \frac{ص + ٢}{ص - ١}$ (٥) $\frac{٢٧}{ن^{٣}} - \frac{٩}{٧ن^{٣}}$ (٦) $\frac{٤}{س + ٣} - \frac{٦}{س - ٢}$

(٧) $\frac{٤}{٣س + ٦} - \frac{٣}{٢س + ٤}$ (٨) $\frac{٦}{س^{٢} - ٣س + ٢} - \frac{٤}{س - ٢}$ (٩) $\frac{جـ^{٢}}{أب} - \frac{أ^{٢}}{ب جـ}$

(١٠) $\frac{س}{س^{٢} - ٩} - \frac{س}{س^{٢} + ٦س + ٩}$ (١١) $\frac{ك - ٢٤}{ك^{٢} - ٣ك - ١٨} - \frac{٣}{ك + ٣} + \frac{ك + ١}{ك - ٦}$

(١٢) التحضيرُ للاختبار اختر الإجابة الصحيحة.

إن ناتج $\frac{٦}{س^{٢} - ٣س} - \frac{٤}{س^{٢} - ٢س}$ هو: _____

(أ) $\frac{٢}{-س}$ (ب) $\frac{٢}{س^{٢} - ٥س}$

(جـ) $\frac{٢}{(س - ٣)(س - ٢)}$ (د) $\frac{٢س - ٢٤}{س(س - ٣)(س - ٢)}$

٦٤

KuwaitMath.com

اختبار سريع

اطرح:

١ $\frac{١}{س - ٢} - \frac{١}{س + ٢}$

$\frac{٤}{س^{٢} - ٤}$

٢ $\frac{٤س}{٣س + ٢} - \frac{٢س}{٣س + ٢}$

$\frac{٢س}{٣س + ٢}$

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

١ $\frac{-د^{٢} - د + ٦}{د^{٢} + ٢د - ٨} = \frac{-(د - ٢)(د + ٣)}{(د - ٢)(د + ٤)}$

$= \frac{-د - ٣}{د + ٤}$ حيث $د \neq ٢$

٢ (جـ)

٣ (د)

٤ (أ) $\frac{١٥}{ع} - \frac{١٥}{ع + ٥} = \frac{٧٥}{ع(ع + ٥)}$

(ب) ١ ساعة و٢١ دقيقة.

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ بسِّطِ الحدوديّةَ: $\frac{٧د - ٢}{د^{٢} + ٢د - ٨} - \frac{٤}{د + ٤} - \frac{د}{د - ٢}$.

الاختيارُ من متعدِّدٍ:

٢ م.م.أ لمقامي الحدوديّتين: $\frac{س}{س^{٢} - ١}$ ، $\frac{-٢}{س - ١}$ هو:

(أ) س + ١ (ب) س − ١ (جـ) $س^{٢} - ١$ (د) $(س^{٢} - ١)(س + ١)$

٣ ناتجُ طرحِ $\frac{٢س}{٣س - ٢}$ من $\frac{٥س}{٣س - ٢}$ هو:

(أ) −٢ (ب) $\frac{-٣س}{٣س - ٢}$ (جـ) $\frac{٧س}{٣س - ٢}$ (د) $\frac{٣س}{٣س - ٢}$

٤ **التفكيرُ المنطقيُّ:** يتدرّبُ أعضاءُ نادي الدرّاجاتِ ذهابًا وإيابًا على طريقٍ طولُه ١٥ كم. خلالَ العودةِ، كانَ اتّجاهُ الريحِ مع خطِّ سيرِهم، فازدادَتْ سرعتُهم بمعدّلِ ٥ كم/ ساعةٍ (على ١٥ كم إيابًا).

(أ) استخدِمْ ع كمعدّلِ السرعةِ. اكتبْ حدوديّةً نسبيّةً تُبيِّنُ فرقَ الزمنِ بينَ الذهابِ والإيابِ.

(ب) إذا كانَ معدّلُ سرعتِهم ٢٠كم/ س ذهابًا، فما الزمنُ الذي استغرقَه التدريبُ؟

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

١٣٠

KuwaitMath.com

٣-١٠

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يضرب الحدوديات النسبية ويقسمها.

مراجعة

أوجد الناتج:

١) $\frac{٣}{٧} \times \frac{٤}{٥}$ $\quad \frac{١٢}{٣٥}$

٢) $\frac{٦}{١٢} \times \frac{٤}{٣}$ $\quad \frac{٢}{٣}$

٣) $\frac{٢٦}{٣} \div \frac{١٣}{٧}$ $\quad \frac{٣}{١٤}$

صلة الدرس كما تعرفت على جمع الحدوديات النسبية وطرحها، سوف تتعرف على ضرب الحدوديات النسبية وقسمتها.

١ - التمهيد

استكشف

الغاية

يبسط الطلاب الأعداد الكسرية، ثم يضربونها ويقسمونها.

التقييم المستمر

تحقق من عمل الطلاب، وأرشدهم في حال وجود صعوبة في عملية التبسيط أو الضرب، وذكرهم بأن القسمة هي عملية ضرب ولكن بالمعكوس الضربي.

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

اطلب إليهم إجراء عملية ضرب ثلاثة أعداد كسرية وتبادل الإجابات بينهم في مجموعات مؤلفة من طالبين.

المتابعة

ادع بعض المتطوعين من الطلاب لعرض إجاباتهم عن الخطوات (٢ - ب) و(٣ - ب).

١٠-٣

ضربُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ وقسمتُها

Multiplying and Dividing Rational Expressions

سوف تتعلّمُ
- ضربَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.
- قسمةَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.

من الاستخدامات
- يستخدمُ موظّفو المصارفِ ضربَ وقسمةَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ لتحديدِ قيمةِ كلِّ دفعةٍ عندَ تسديدِ المبلغِ المقترَضِ من المصرفِ.

صلةُ الدرسِ في الدروسِ السابقةِ تعرّفتَ جمعَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ وطرحَها. في هذا الدرسِ سوف تتعلّمُ ضربَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ وقسمتَها.

استكشف ضربُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ وقسمتُها

اعملْ مع رفاقِكَ لمراجعةِ تبسيطِ وضربِ وقسمةِ الأعدادِ الكسريّةِ.

١ (أ) بسّطْ: $\frac{٨}{٢}$، $-\frac{١٥}{٢٤}$، $\frac{١٥}{٣٥}$.

(ب) اكتبِ الخطواتِ التي استخدمْتَها في الفقرةِ (١ - أ) لتبسيطِ الكسورِ.

٢ (أ) اكتبْ كلًّا ممّا يلي في أبسطِ صورةٍ.

$-\frac{٨}{٢١} \times \frac{٧}{٤}$، $\frac{٣}{٥} \times \frac{٢}{٧}$، $\frac{٣}{٤} \times (-٢)$.

(ب) اكتبِ الخطواتِ التي استخدمْتَها في الفقرةِ (٢ - أ).

٣ (أ) اكتبْ كلًّا ممّا يلي في أبسطِ صورةٍ.

$٦ \div \frac{٣}{٨}$، $\frac{٢}{٣} \div \left(-\frac{٤}{٥}\right)$، $\frac{٣}{٤} \div ٢$.

(ب) اكتبِ الخطواتِ التي استخدمْتَها في الفقرةِ (٣ - أ).

تعلّمْ ضربُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ وقسمتُها

أوّلًا: ضربُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.

ضربُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ يُشبهُ ضربَ الأعدادِ النسبيّةِ. إذا كانتْ أ، ب، جـ، د تُمثّلُ حدوديّاتٍ (ب ≠ ٠، د ≠ ٠)، فإنّ: $\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{أجـ}{بد}$.

مثالٌ (١)

أوجدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{٢س + ١}{٣} \times \frac{٦س}{٤س^٢ - ١}$

الحلُّ: $\frac{٢س + ١}{٣} \times \frac{٦س}{٤س^٢ - ١} = \frac{(٢س + ١)٦س}{٣(٤س^٢ - ١)}$ $\quad \frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{أجـ}{بد}$

$= \frac{(٢س + ١)٦س}{٣(٢س - ١)(٢س + ١)}$ $\quad$ حلّلِ المقامَ

$= \frac{(٢س + ١)٦س}{٣(٢س - ١)(٢س + ١)}$ $\quad$ اقسمْ على العاملين ٣، (٢س + ١)

$= \frac{٢س}{٢س - ١}$ $\quad$ وبسّطْ

شرطَ أنّ س ≠ $\frac{١}{٢}$

١٣١

إجابات «استكشف»

١) (أ) ٤؛ $-\frac{٥}{٨}$؛ $\frac{٣}{٧}$

(ب) قسمت البسط والمقام على ٢ أو ٣ أو ٥، ثم بسطت الكتابة.

٢) (أ) $-\frac{٢}{٣}$، $\frac{٦}{٣٥}$، $-\frac{٣}{٢}$

(ب) اختزلت بـ ٤ أو بـ ٧ أو بـ ٢ ثم ضربت البسوط والمقامات.

٣) (أ) ١٦؛ $-\frac{٥}{٦}$؛ $\frac{٣}{٨}$

(ب) استبدلت عملية القسمة بعملية الضرب، ثم اختزلت بـ ٣ أو بـ ٢.

KuwaitMath.com

٢ – التعليم

تعلم

ضرب الحدوديات النسبية وقسمتها يشبه ضرب الأعداد النسبية وقسمتها.

أمثلة بديلة

❶ أوجد الناتج في أبسط صورة: $\frac{٣س + ٢}{٤س} \times \frac{٨}{٩س^{٢} - ٤}$

$$\frac{٣س + ٢}{٤س} \times \frac{٨}{٩س^{٢} - ٤} = \frac{٨ \times (٣س + ٢)}{٤س(٩س^{٢} - ٤)}$$

حلّل المقام $= \frac{٨ \times (٣س + ٢)}{٤س(٣س - ٢)(٣س + ٢)}$

$= \frac{٢}{س(٣س - ٢)}$

بسِّط بـ ٣س + ٢ شرط أن س $\neq -\frac{٢}{٣}$ ، وبسِّط بـ ٤.

❷ أوجد الناتج في أبسط صورة:

$$\frac{ص^{٢} - ٧ص + ١٢}{ص + ٥} \div \frac{ص - ٣}{ص^{٢} - ٢٥}$$

$$\frac{ص^{٢} - ٧ص + ١٢}{ص + ٥} \div \frac{ص - ٣}{ص^{٢} - ٢٥}$$

$= \frac{ص^{٢} - ٧ص + ١٢}{ص + ٥} \times \frac{ص^{٢} - ٢٥}{ص - ٣}$

الضرب بالمعكوس الضربي للحدودية: $\frac{ص - ٣}{ص^{٢} - ٢٥}$

حلّل $= \frac{(ص - ٣)(ص - ٤)}{ص + ٥} \times \frac{(ص - ٥)(ص + ٥)}{ص - ٣}$

$= (ص - ٤)(ص - ٥)$

بسّط مع العوامل (ص – ٣)، (ص + ٥) شرط أن ص $\neq ٣$ وص $\neq -٥$.

إجابات «حاول أن تحل»

❶ $\frac{-س - ٢}{س(س + ٢)} = \frac{-(س + ٢)}{س(س + ٢)} = \frac{-١}{س}$، س $\neq -٢$، س $\neq ٢$

حاولْ أن تحلّ

١ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{س - ٢}{٨س} \times \frac{-٨س - ١٦}{س^{٢} - ٤}$.

يُمكنُ أيضًا ضربُ حدوديّةٍ نسبيّةٍ في حدوديّةٍ. يُعطى الناتجُ بالصورةِ التحليليّةِ.

مثالٌ (٢)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{٣ص + ٢}{٢ص + ٤} \times (ص^{٢} + ٥ص + ٦)$.

الحلُّ: $= \frac{٣ص + ٢}{٢(ص + ٢)} \times \frac{(ص + ٢)(ص + ٣)}{١}$ حلّلْ إلى عواملَ

$= \frac{٣ص + ٢}{٢(ص + ٢)} \times \frac{(ص + ٢)(ص + ٣)}{١}$ اقسمْ على العاملِ (ص + ٢) شرطَ أنّ ص $\neq -٢$

$= \frac{(٣ص + ٢)(ص + ٣)}{٢}$

حاولْ أن تحلّ

٢ أوجِدِ الناتجَ في كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

(أ) $\frac{٣}{ص}(ص^{٣} - ص)$

(ب) $\frac{٢ف}{ف + ٣}(ف^{٢} - ٢ف - ١٥)$

(جـ) $\frac{(٤م + ٨)}{م^{٢} - ١}(م - ١)$

تذكّرْ

المعكوسُ الضربيُّ للحدوديّةِ أ هو $\frac{١}{أ}$، أ $\neq ٠$

ثانيًا: قسمةُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

عندَ قسمةِ حدوديّةٍ نسبيّةٍ على حدوديّةٍ، نضربُ الحدوديّةَ النسبيّةَ في المعكوسِ الضربيِّ للحدوديّةِ.

١٣٢

مثالٌ (٣)

أوجِدْ ناتجَ قسمةِ $\frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{٤س}$ على (٥س^{٢} + ٥س) في أبسطِ صورةٍ، س $\neq ٠$

الحلُّ: $\frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{٤س} \div (٥س^{٢} + ٥س)$

$= \frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{٤س} \times \frac{١}{٥س^{٢} + ٥س}$ اضربْ في المعكوسِ الضربيِّ لـ(٥س^{٢} + ٥س)

$= \frac{(س + ١)(س + ٢)}{٤س} \times \frac{١}{٥س \times (س + ١)}$ حلّلْ

$= \frac{(س + ١)(س + ٢)}{٤س} \times \frac{١}{٥س \times (س + ١)}$ اقسمْ على العاملِ (س + ١) شرطَ أنّ س $\neq -١$، س $\neq ٠$

$= \frac{س + ٢}{٢٠س^{٢}}$

حاولْ أن تحلّ

٣ أوجِدْ ناتجَ قسمةِ $\frac{ص + ٣}{ص + ٢}$ على (ص + ٢) في أبسطِ صورةٍ.

فكرةٌ مفيدةٌ

لحلِّ المسائلِ

عندَ قسمةِ حدوديّةٍ نسبيّةٍ على أخرى، انتبهْ للقيمِ التي يكونُ الناتجُ عندَها غيرَ معرفٍ حتّى تتمكّنَ من وضعِ الشرطِ.

عندَ قسمةِ حدوديّةٍ نسبيّةٍ على أخرى، أبدأُ أوّلًا بضربِ الحدوديّةِ النسبيّةِ الأولى في المعكوسِ الضربيِّ للحدوديّةِ النسبيّةِ الثانيةِ.

مثالٌ (٤)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{ب^{٢} + ٧ب + ١٠}{ب - ٦} \div \frac{ب + ٥}{ب^{٢} - ٣٦}$

الحلُّ: $= \frac{ب^{٢} + ٧ب + ١٠}{ب - ٦} \times \frac{ب^{٢} - ٣٦}{ب + ٥}$ الضربُ في المعكوسِ الضربيِّ للحدوديّةِ $\frac{ب + ٥}{ب^{٢} - ٣٦}$

$= \frac{(ب + ٥)(ب + ٢)}{ب - ٦} \times \frac{(ب - ٦)(ب + ٦)}{ب + ٥}$ حلّلْ

$= \frac{(ب + ٥)(ب + ٢)}{(ب - ٦)} \times \frac{(ب - ٦)(ب + ٦)}{(ب + ٥)}$ بسّطْ مع العواملِ (ب + ٥)، (ب – ٦)

$= (ب + ٢)(ب + ٦)$ شرطَ أنّ ب $\neq -٥$، ب $\neq ٦$

١٣٣

KuwaitMath.com

❷ (أ) $٣(ص^{٢} - ١) = ٣(ص + ١)(ص - ١)$ شرط أن ص ≠ ٠

(ب) $٢ف(ف - ٥)$ شرط أن ف ≠ −٣

(جـ) $\frac{٤م + ٨}{م + ١}$ شرط أن م ≠ ١

❸ $\frac{ص + ٣}{(ص + ٢)^{٢}}$

❹ $\frac{٥(٧م - ١٠)}{٧(م - ١٠)}$ شرط أن م ≠ −٢

٣ - التدريب والتقييم

تحقّق من فهمك

تأكد من أن الطلاب قد فهموا خطوات الحل في ضرب الحدوديات النسبية وقسمتها.

إجابات «تحقق من فهمك»

❶ (أ) $٣(س + ٣)$ شرط أن س ≠ −٦، س ≠ $-\frac{١}{٢}$

(ب) $\frac{٢(ص + ٥)}{ص + ١}$ شرط أن ص ≠ −٢، ص ≠ −٩

❷ **ضرب الحدوديات النسبية يشبه ضرب الأعداد النسبية. وقسمة حدوديتين نسبيتين هي ضرب الحدودية النسبية الأولى بالمعكوس الضربي للحدودية النسبية الثانية.**

تقييم بديل

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات من اثنين على أن يقوم كل طالب في المجموعة بكتابة مسألة ضرب وعرضها على زميله، ويقوم الآخر بكتابة مسألة قسمة وعرضها أيضًا على زميله، ثم يتناقشون بالإجابات.

حاوِلْ أن تحلّ

٤ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورة: $\frac{م٥ + ١٠}{م٣ - ٢٠} \div \frac{م٧ + ١٤}{م١٤ - ٢٠}$

تحقّقْ من فهمك

١ أوجِدْ كلَّ ناتجٍ في أبسطِ صورة:

(أ) $\frac{٦س + ٣}{س + ٦} \times \frac{س^{٢} + ٩س + ١٨}{٢س + ١}$

(ب) $\frac{٢ص + ٤}{ص^{٢} + ١١ص + ١٨} \div \frac{ص + ١}{ص^{٢} + ١٤ص + ٤٥}$

٢ اشرحْ كيف تضربُ أو تقسمُ حدوديّتين نسبيّتين.

١٣٤

اختبار سريع

أوجد كل ناتج في أبسط صورة:

(أ) $\frac{٢س^{٣} - ٨س}{٢س + ١٠} \times \frac{س + ٥}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

$\frac{س(س + ٢)}{س - ٣}$

شرط أن س ≠ −٥، س ≠ ٢

(ب) $\frac{ص^{٣} - ٣ص^{٢} + ٢ص}{ص + ٣} \div \frac{ص^{٣} - ٤ص}{ص^{٢} - ٩}$

$\frac{(ص - ١)(ص - ٣)}{(ص + ٢)}$ شرط أن ص ≠ ٢،

ص ≠ −٣، ص ≠ ٠

KuwaitMath.com

إجابات «المرشد لحل المسائل»

١ كتابة نسبة مساحة المستطيل المظلل إلى مساحة المستطيل الأكبر في صورة حدودية نسبية وتبسيطها.

٢ كتابة كسر بسطه مساحة المستطيل المظلل ومقامه مساحة المستطيل الأكبر.

٣ ع × ل

٤ (جـ)

٥ ٣س(س + ١)

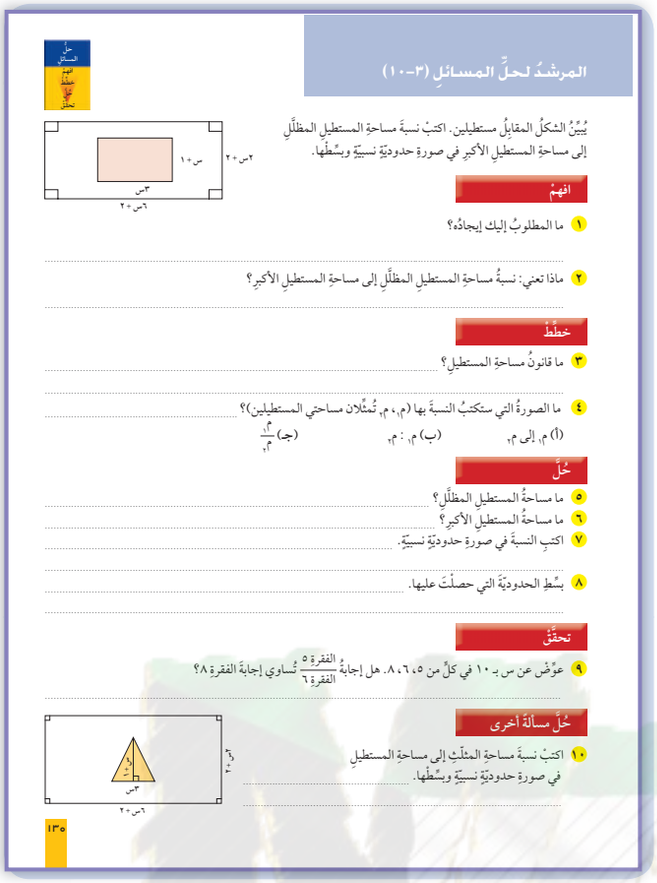
٦ (٢س + ٢)(٦س + ٢)

٧ $\frac{٣س(س + ١)}{(٢س + ٢)(٦س + ٢)}$

٨ $\frac{٣س}{٤(٣س + ١)}$ شرط أن س ≠ −١

٩ ٣٣٠، ١٣٦٤، $\frac{٣٣٠}{١٣٦٤} = \frac{١٥}{٦٢}$ ؛ نعم

١٠ $\frac{٣س}{٨(٣س + ١)}$ شرط أن س ≠ −١



المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٣-١٠)

حل المسائل

فهم

خطط

حل

تحقق

حل مسألة أخرى

يُبيِّنُ الشكلُ المقابلُ مستطيلين. اكتبْ نسبةَ مساحةِ المستطيلِ المظلَّلِ إلى مساحةِ المستطيلِ الأكبرِ في صورةٍ حدوديّةٍ نسبيّةٍ وبسِّطْها.

١ ما المطلوبُ إليك إيجادُه؟

٢ ماذا تعني: نسبةُ مساحةِ المستطيلِ المظلَّلِ إلى مساحةِ المستطيلِ الأكبرِ؟

٣ ما قانونُ مساحةِ المستطيلِ؟

٤ ما الصورةُ التي ستكتبُ النسبةَ بها (م١، م٢ تُمثِّلان مساحتي المستطيلين)؟

(أ) م١ إلى م٢ (ب) م١ : م٢ (جـ) $\frac{م_١}{م_٢}$

٥ ما مساحةُ المستطيلِ المظلَّلِ؟

٦ ما مساحةُ المستطيلِ الأكبرِ؟

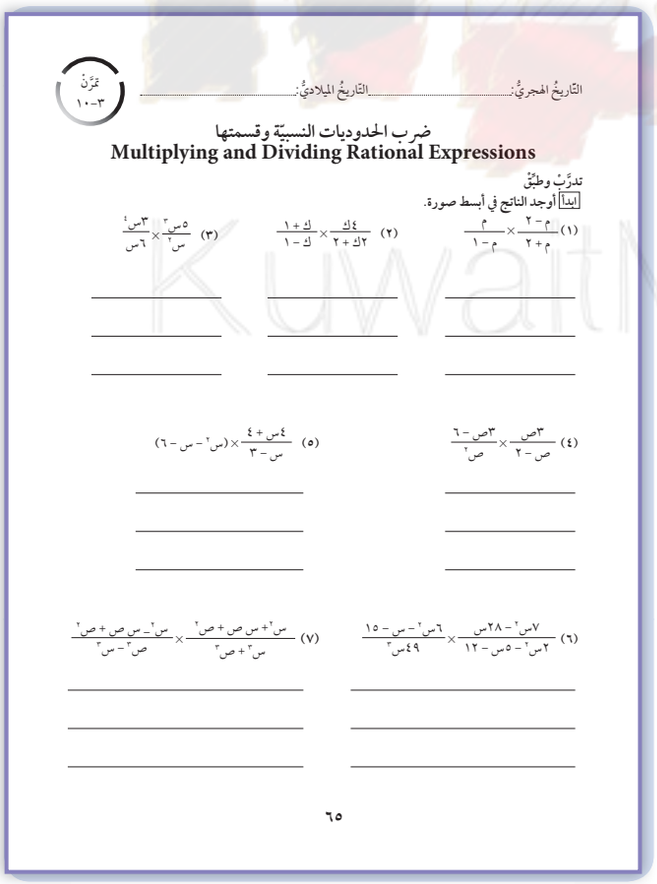
٧ اكتبِ النسبةَ في صورةٍ حدوديّةٍ نسبيّةٍ.

٨ بسِّطِ الحدوديّةَ التي حصلْتَ عليها.

٩ عوِّضْ عن س بـ ١٠ في كلٍّ من ٥، ٦، ٨. هل إجابةُ الفقرة ٥ / الفقرة ٦ تُساوي إجابةَ الفقرة ٨؟

١٠ اكتبْ نسبةَ مساحةِ المثلّثِ إلى مساحةِ المستطيلِ في صورةٍ حدوديّةٍ نسبيّةٍ وبسِّطْها.

١٣٥



تمرّنْ ٣-١٠

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

ضرب الحدوديات النسبيّة وقسمتها

Multiplying and Dividing Rational Expressions

تدرَّبْ وطبِّقْ

ابدأ أوجد الناتج في أبسط صورة.

(١) $\frac{م - ٢}{م + ٢} \times \frac{م}{م - ١}$

(٢) $\frac{٤ك}{٢ك + ٢} \times \frac{ك + ١}{ك - ١}$

(٣) $\frac{٥س^{٢}}{س} \times \frac{٣س^{١}}{٦س}$

(٤) $\frac{٣ص}{ص - ٢} \times \frac{٣ص - ٦}{ص^{٢}}$

(٥) $\frac{٤س + ٤}{س - ٣} \times (س^{٢} - س - ٦)$

(٦) $\frac{٧س^{٢} - ٢٨س}{٢س^{٢} - ٥س - ١٢} \times \frac{٦س^{٢} - س - ١٥}{٤٩س^{٣}}$

(٧) $\frac{س^{٢} + س ص + ص^{٢}}{س^{٣} + ص^{٣}} \times \frac{س^{٢} - س ص + ص^{٢}}{ص^{٣} - س^{٣}}$

٦٥

KuwaitMath.com

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

١ صفر؛ ٤؛ −٤.

٢ قسم على العامل (س + ٢) كما لو كان يضرب الحدوديات النسبية ولم ينتبه إلى عملية القسمة.

٣ (ب) ٤ (جـ)

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ لأيِّ قيمٍ للمتغيِّرِ س تكونُ الحدوديةُ $\frac{٢س^{٢} - ٥س - ١٢}{٦س} \div \frac{-٣س - ١٢}{س^{٢} - ١٦}$ غيرَ معرَّفةٍ؟

٢ **تحليلُ الخطأ**: في حلِّ القسمةِ التاليةِ، ما الخطأُ الذي اقترفَه الطالبُ؟

$$\frac{٣س}{س + ٢} \div \frac{(س + ٢)^{٢}}{س - ٤} = ٣س \div \frac{س + ٢}{س - ٤}$$
$$= ٣س \times \frac{س - ٤}{س + ٢}$$
$$= \frac{٣س(س - ٤)}{س + ٢}$$

٣ أيٌّ ممّا يلي لا يُمكِنُ أن يكونَ الخطوةَ الأولى في ضربِ الحدوديّتين: $\frac{ص^{٢} - ٢ص - ٣}{ص + ٣} \times \frac{٢ص + ٦}{٢ص + ٢}$

(أ) ضربُ البسطين.
(ب) إيجادُ المعكوسِ الضربيِّ لـ $\frac{٢ص + ٦}{٢ص + ٢}$.
(جـ) تحليلُ كلِّ حدوديّةٍ إلى عواملَ.
(د) ضربُ المقامين.

٤ أيٌّ ممّا يلي مساوٍ لـ: $\frac{ر^{٢} - ١}{ر} \div (٢ر^{٢} - ٢)$:

(أ) $\frac{ر^{٢} - ١}{ر} \times \frac{١}{٢}(ر^{٢} - ١)$
(ب) $\frac{ر^{٢} - ١}{ر} \times \frac{٢}{ر^{٢} - ١}$
(جـ) $\frac{ر^{٢} - ١}{ر} \times \left(\frac{١}{٢ر^{٢} - ٢}\right)$
(د) $\frac{ر^{٢} - ١}{ر} \times \frac{١}{٢ر^{٢} - ١}$

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ
- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

١٣٦

(٨) $\frac{س - ١}{س + ٤} \div \frac{س + ٣}{س + ٤}$

(٩) $\frac{٣ص + ١٢}{٥ص} \div \frac{ص + ٤}{٢ص + ٤}$

(١٠) $\frac{٢ن^{٢} - ٥ن - ٣}{٤ن^{٢} - ١٢ن - ٧} \div \frac{٤ن + ٥}{٢ن - ٧}$

(١١) $\frac{٣س + ٩}{س} \div (س + ٣)$

(١٢) $\frac{١١ك + ١٢١}{١٥ - ٧ك} \div (ك + ١١)$

(١٣) $\frac{٥س^{٢} + ١٠س - ١٥}{٥ - ٦س + س^{٢}} \div \frac{٢س^{٢} + ٧س + ٣}{٤س^{٢} - ٨س - ٥}$

(١٤) $\frac{٨س^{٣}}{س^{٣} - ص^{٣}} \div \frac{٤س^{٢}}{س^{٢} + س ص + ص^{٢}}$

(١٥) **التحضيرُ للاختبار** إن ناتج $\frac{٣م}{م - ١} \div \frac{٦م}{م - ٢}$ هو:

(أ) $\frac{م - ٢}{(م - ١)}$
(ب) $\frac{١٨م^{٢}}{(م - ١)(م - ٢)}$
(جـ) $\frac{م - ٢}{٢(م - ١)}$
(د) $\frac{م - ١}{٢(م - ٢)}$

٦٦

KuwaitMath.com

إجابات اختبار الوحدة الثالثة

١ (أ) (٢س − ٥)(٢س + ٥)

(ب) ٢(٣س − ٤)(٣س + ٤)

(جـ) (−٣س − ٣)(٥س + ١١)

٢ (أ) (س + ٣)(س + ٦)

(ب) (ص − ٤)(ص + ٥)

(جـ) (س + ٢)(س − ١٦)

٣ (س + ٣)(س + ٩)

٤ (أ) (٤ص + ١)(٢ص − ٣)

(ب) (ك + ١)(٥ك − ٧)

(جـ) ٥(س − ١)(٥س + ٣)

٥ أ = ٣، ب = ٥

٦ (أ) (٢س − ٣)(٤س^{٢} + ٦س + ٩)

(ب) (٣س + ٢)(٩س^{٢} − ٦س + ٤)

(جـ) ٢(٥س − ٤)(٢٥س^{٢} + ٢٠س + ١٦)

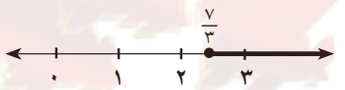
(د) (٤س − ٥ص)(١٦س^{٢} + ٢٠س ص + ٢٥ص^{٢})

٧ (أ) $\frac{٥}{٢}$ ، $-\frac{٥}{٢}$ (ب) −١، −٧ (جـ) ١، ٥

(د) ١، ٦ (هـ) −٣، $\frac{١٢}{٥}$ (و) ٤، ٦

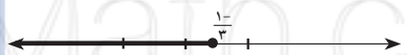
٨ ٧، ١٣، ٣

٩ (أ) مجموعة الحل $[\frac{٧}{٣}$ ، ∞)



(ب) مجموعة الحل (−∞، ٤]

(جـ) مجموعة الحل (−∞، $-\frac{١}{٣}$]

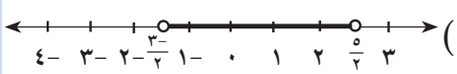


(د) مجموعة الحل [١، ∞)

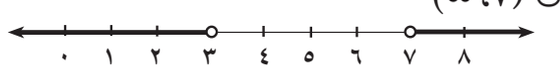
(هـ) مجموعة الحل [−١٠، ٤]

(و) مجموعة الحل (−∞، ٣] ∪ [٤، ∞)

(ز) مجموعة الحل (−$\frac{٣}{٢}$، $\frac{٥}{٢}$)



(حـ) (−∞، ٣) ∪ (٧، ∞)



اختبارُ الوَحدةِ الثالثةِ

١ حلِّلْ كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا.

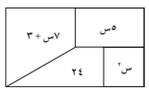
(أ) ٤س^{٢} − ٢٥ (ب) ١٨ س^{٢} − ٣٢ (جـ) (س + ٤)^{٢} − (٤س + ٧)^{٢}

٢ حلِّلْ كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا.

(أ) س^{٢} + ٩س + ١٨ (ب) ص^{٢} + ص − ٢٠ (جـ) س^{٢} − ١٤ س − ٣٢

٣ في الشكلِ مستطيلٌ مقسَّمٌ إلى مناطقَ مساحاتُها معلومةٌ.

أوجِدِ المساحةَ الكلّيّةَ للمستطيلِ، ثمّ حلِّلْ هذه المساحةَ إلى عواملَ.



٤ حلِّلْ كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا.

(أ) ٨ص^{٢} − ١٠ص − ٣ (ب) ٥ك^{٢} − ٢ك − ٧

(جـ) ٢٥س^{٢} − ١٠س − ١٥

٥ تُبيِّنُ الصورةُ مربّعين، مساحةُ المربّعِ الصغيرِ المظلَّلِ تُساوي: ٤س^{٢} + ١٦س + ١٦ ومساحةُ القسمِ غيرِ المظلَّلِ من المربّعِ الكبيرِ تُساوي: ٥س^{٢} + ١٤س + ٩.

ما قيمُ أ، ب؟ علمًا أنّ أ، ب عددان موجَبان.

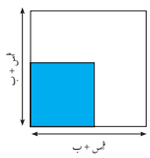
٦ حلِّلْ كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا.

(أ) ٨س^{٢} − ٢٧ (ب) ٢٧ س^{٣} + ٨

(جـ) ٢٥٠ س^{٣} − ١٢٨

(د) لدينا مكعّبان يبلغُ طولُ الضلعِ الأوّلِ ٤س ويبلغُ طولُ الضلعِ الثاني ٥ص.

أوجِدِ الفرقَ بينَ حجمِ المكعّبين بالتحليلِ إلى عواملَ علمًا أنّ ٤س > ٥ص.



٧ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ كلٍّ ممّا يلي في ح:

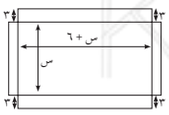
(أ) ٨ س^{٢} − ٥٠ = ٠ (ب) (س + ٤)^{٢} = ٩ (جـ) س^{٢} − ٦س + ٥ = ٠

(د) −س^{٢} + ٧س − ٦ = ٠ (هـ) ٥س^{٢} + ٣س − ٣٦ = ٠ (و) ٤س^{٢} + ٢٠ = ١٠س + ٣س^{٢} − ٤

تابع: اختبارُ الوَحدةِ الثالثةِ

٨ لدينا صندوقٌ مفتوحٌ من الأعلى. يزيدُ طولُه عن عرضِه ٦سم ويبلغُ ارتفاعُه ٣سم. صُنِعَ هذا الصندوقُ من مادّةٍ كرتونيّةٍ مستطيلةِ الشكلِ مساحتُها ٩١سم^{٢}.

بعدَ اقتطاعِ أجزاءٍ مربّعةٍ متطابقةٍ من كلِّ زاويةٍ طولُ ضلعِها ٣سم، ما أبعادُ هذا الصندوقِ؟



٩ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ كلٍّ ممّا يلي في ح، ومثِّلِ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ.

(أ) ٣س ≤ ٧ (ب) ٢س − ٥ ≥ ٣

(جـ) ٤ − ٣س ≤ ٥ (د) ٦ + ٢س ≤ ٨

(هـ) |س + ٣| − ٢ ≥ ٥ (و) |٢س − ٧| ≤ ١

(ز) |٢س − ١| < ٤ (حـ) |٥ − س| + ١ > ٣

١٠ ضَعْ في أبسطِ صورةٍ:

(أ) $\frac{٦س^{٢}}{١٢ س - ١٨س^{٢}}$ (ب) $\frac{٤ص^{٢} - ٣٦ص + ٨١}{٤ ص^{٢} - ٢ص - ٧٢}$

١١ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ:

(أ) $\frac{٢س}{س - ٥} + \frac{٣س}{س + ٢}$ (ب) $\frac{٤ص + ٥}{٢ص + ١} - \frac{٥ص}{٣ص - ٤}$

(جـ) $\frac{٤د - ٥}{٦د} + \frac{٧د + ٢}{٣ - ٢د}$ (د) $\frac{٥م + ١}{٤م} - \frac{٣م - ٤}{م + ٢}$

١٢ أوجِدْ حجمَ الصندوقِ التالي علمًا أنّ طولَ قاعدتِه $\frac{س^{٢} - س - ٦}{س^{٢} + س - ٢}$ ، وعرضَها $\frac{س^{٢}}{س^{٢} + س - ١٢}$ ، وارتفاعَ الصندوقِ $\frac{٢س + ٤}{س}$. ثمّ ضَعِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ.

١٣ اقسمْ ثمّ ضَعِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ.

(أ) $\frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{س^{٢} - ٤س + ٣} \div \frac{س + ٢}{س - ٣}$ (ب) $\frac{ص^{٢} + ٥ص + ٦}{ص - ٣} \div \frac{ص^{٢} - ٢ص - ٣}{ص^{٢} + ٣ص + ٢}$

١٠ (أ) $\frac{\text{س}^{٢}}{٢ - ٣\text{س}}$ ؛ شرط أن س ≠ ٠

(ب) $\frac{٢\text{ص} - ٩}{٢\text{ص} + ٨}$ ؛ شرط أن ص ≠ $\frac{٩}{٢}$

١١ (أ) $\frac{٥\text{س}^{٢} - ١١\text{س}}{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٢)}$ ؛ (ب) $\frac{٢\text{ص}^{٢} - ٦\text{ص} - ٢٠}{(٢\text{ص} + ١)(٣\text{ص} - ٤)}$

(جـ) $\frac{٥٠\text{د}^{٢} - ١٠\text{د} + ١٥}{٦\text{د}(٢\text{د} - ٣)}$ ؛ (د) $\frac{-٧\text{م}^{٢} + ٢٧\text{م} + ٢}{٤\text{م}(\text{م} + ٢)}$

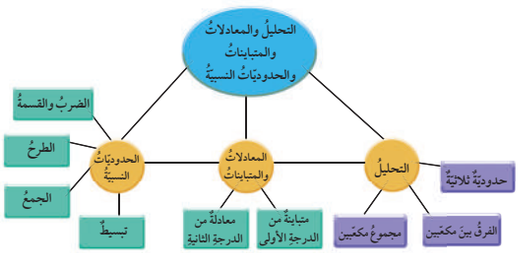
١٢ $\frac{٢\text{س}^{٢}(\text{س} + ٢)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٤)}$ ؛

شرط أن س ≠ ٠، س ≠ ٣، س ≠ −٢

١٣ (أ) $\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$ ؛ شرط أن س ≠ ٣؛ س ≠ −٢

(ب) $\frac{(\text{ص} + ٢)(\text{ص} + ٢)(\text{ص} + ٣)}{(\text{ص} - ٣)(\text{ص} - ٣)}$ ؛ شرط أن ص ≠ −١

مخطَّطٌ تنظيميٌّ للوَحدةِ الثالثةِ



الوَحدةُ الثالثةُ (أ): التحليلُ

- يتعرّفُ الطالبُ تحليلَ الفرقِ بينَ مربّعين $\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢} = (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})$.
- يتعرّفُ تحليلَ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على صورةِ $\text{س}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ}$ وتحليلَ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على صورةِ $\text{أس}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ}$.
- يُحلِّلُ إلى عواملَ أوّليّةٍ الفرقَ بينَ مكعّبين ومجموعِهما.

$(\text{أ}^{٣} - \text{ب}^{٣}) = (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ}^{٢} + \text{أ ب} + \text{ب}^{٢})$

$(\text{أ}^{٣} + \text{ب}^{٣}) = (\text{أ} + \text{ب})(\text{أ}^{٢} - \text{أ ب} + \text{ب}^{٢})$

الوَحدةُ الثالثةُ (ب): المعادلاتُ والمتباينَاتُ

- يحلُّ معادلةً من الدرجةِ الثانيةِ في متغيّرٍ واحدٍ بالتحليلِ $(\text{س} + \text{أ})(\text{س} + \text{ب}) = ٠$، مجموعةُ الحلِّ $= \{-\text{أ}، -\text{ب}\}$
- يحلُّ متباينةً من الدرجةِ الأولى في متغيّرٍ واحدٍ، ويمثّلُ مجموعةَ الحلِّ: س > أ مجموعةُ الحلِّ $(-\infty، \text{أ})$ أو س ≤ أ مجموعةُ الحلِّ $[\text{أ}، \infty)$.

الوَحدةُ الثالثةُ (جـ): الحدوديّاتُ النسبيّةُ

- يتعرّفُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ ويُبسّطُها.
- يجمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ ويطرحُها من مقاماتٍ مشتركةٍ ومقاماتٍ مختلفةٍ ويُبسّطُ إذا أمكنَ.
- يضربُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ ويقسمُها على مقاماتٍ مشتركةٍ ومقاماتٍ مختلفةٍ ويُبسّطُ إذا أمكنَ.

مراجعة الوحدة الثالثة (جـ)

ضع في أبسط صورة كل مما يلي:

(١) $\frac{٢\text{أ}^{٣}}{١٦\text{أ}^{٢} - ١٨}$ (٢) $\frac{٣\text{ز}^{٢} + ١٢\text{ز}}{\text{ز}^{٤}}$ (٣) $\frac{٢\text{ص}^{٢} + \text{ص}}{\text{ص}^{٣}}$

أوجد الناتج في أبسط صورة.

(٤) $\frac{٩}{\text{م} + ٢} + \frac{٨}{\text{م} - ٧}$ (٥) $\frac{\text{أ}}{\text{أ} + ٣} + \frac{٤}{\text{أ} + ٥}$ (٦) $٩ + \frac{\text{س} - ٣}{\text{س} + ٢}$

(٧) $\frac{\text{ص}^{٢} + ٢\text{ص} - ١}{٣\text{ص} + ١} - \frac{٢\text{ص}^{٢} - ٣}{٣\text{ص} + ١}$ (٨) $\frac{\text{ر} - ٥}{٩ + \text{ب}^{٢}} - \frac{٢\text{ك} + ١}{٩ + \text{ب}^{٢}}$ (٩) $\frac{٢ - \text{س}}{\text{س ص}^{٢}\text{ز}} - \frac{٥ + \text{ز}}{\text{س ص}^{٢}\text{ز}}$

(١٠) $\frac{٢\text{م} + ١}{٣\text{م} - ٦} \times (٩\text{م}^{٢} - ٣٦)$ (١١) $(\text{س}^{٢} - ١)\frac{\text{س} - ٢}{٣\text{س} + ٣}$

(١٢) $\frac{\text{س}^{٢} + ١٠\text{س} - ١١}{\text{س}^{٢} + ١٢\text{س} + ١١}$ (١٣) $\frac{\text{م}^{٢} + ٣\text{م} + ٢}{\text{م}^{٢} - ٤\text{م} + ٣} \div \frac{\text{م} + ٢}{\text{م} - ٣}$

مراجعة الوحدة الثالثة

(١) حلِّل كلًّا مما يلي تحليلًا تامًّا:

(أ) $\text{ب}^{٢} - ١٥\text{ب} - ٥٤$ (ب) $\text{س}^{٢} - ١٠\text{س ص} - ٣٩\text{ص}^{٢}$

(جـ) $١١\text{ب}^{٢} + ٧٧\text{ب} + ٦٦$ (د) $٢٤\text{ف}^{٢} - ١٠\text{ف} - ٦$

(٢) حلِّل كلًّا من المقادير التالية تحليلًا كاملًا:

(أ) $٢\text{أ}^{٤} - ١٦\text{ب}^{٣}$ (ب) $٤\text{س}^{٢} - ٤\text{ص}^{٢}$

(٣) حلّ كلًّا من المعادلات التالية:

(أ) $(٣\text{س} - ٥)(\text{س} - ٢) = ٠$ (ب) $(\text{س} + ٨)(\text{س} + ٦) = ٢٨٨$

(٤) أوجد مجموعة الحلّ ومثّلها على خط الأعداد لكل مما يلي:

(أ) $\text{س} + ١ < ٣$

(ب) $|\text{س} - ٢| \geq ٤$

(٥) بسّط كل حدودية نسبية مما يأتي:

(أ) $\frac{٤\text{ك}^{٢} - ٨\text{ك} - ٥}{١٥ - \text{ك} - ٢\text{ك}^{٢}}$ (ب) $\frac{١٦ + ١٦\text{م} + ٣\text{م}^{٢}}{\text{م}^{٢} - ٣\text{م} - ٢٨}$

(٦) أوجد الناتج في أبسط صورة.

(أ) $\frac{\text{أ}}{\text{أ} + ٣} + \frac{\text{أ} + ٥}{٤}$ (ب) $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ١٢} - \frac{\text{س}}{\text{س} + ٤}$

أوجد الناتج في أبسط صورة.

(٧) $\frac{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٣} \times \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٢}$

(٨) $\frac{\text{و} - ٣}{\text{و}^{٢} - ٤} \div \frac{\text{و}^{٢} - ٩}{\text{و} - ٢}$

KuwaitMath.com