توضح المعلومات المتضمنة في هذه الصفحات كيفية استخدام العد والاحتمال في المواقف الحياتية.

شعوب العالم

كان للعديد من النساء الكويتيات نجاحات بارزة في عدة مجالات، قد يرغب الطلاب المهتمون بعمل بحث لتحديد هؤلاء النساء، أو قد يختارون البحث في السير الذاتية للنساء الأربع اللواتي فزن في انتخابات الـ ٢٠٠٩. دع طلابًا يعرضون على الفصل ما وجدوه.

الفنون والآداب

اطلب إلى الطلاب البحث عن طريقة بديلة للكتابة، وأن يعددوا اللغات الّتي تعتمد هذه الطريقة على أن يعطوا نماذج عن رموز اللغة العربيّة بحسب هذه الطريقة.

العلوم

الهررة السيامية هي من أكثر الهررة قصيرة الشعر، والهررة الفارسية هي من أكثر الهررة طويلة الشعر، ادع من يرغب من الطلاب للبحث حول تطور هرر الهيمالايان Himalayan.

مشروع الوحدة

يبتكر الطلاب لعبة تتضمن التباديل أو التراتيب و(أو) التوافيق.

مرشد تخطيط الوحدة

كتاب الطالب			
الدرس	الأدوات المستخدمة	المصطلحات الأساسية	رقم الدرس
افتتاحية الوحدة العاشرة			
التركيز على حل المسائل			
افتتاحية الوحدة العاشرة (أ): العد			
الشجرة البيانية ومبدأ العد		الشجرة البيانية ، مبدأ العد	١٠-١
التباديل والترتيبات	بطاقات تأشير لكل مجموعة مدون عليها ما يلي: أ، ب، جـ، د	ترتيب ، تبديل، مضروب	١٠-٢
التوافيق والمجموعات		التوافيق	١٠-٣
افتتاحية الوحدة العاشرة (ب): الفرصة والاحتمال			
الاحتمال		تجربة ، نواتج، فضاء العينة حدث ، احتمال	١٠-٤
الاحتمال التجريبي والاحتمال الهندسي	قطع نقود معدنية	احتمال نظري ، احتمال تجريبي ، محاولة ، احتمال هندسي	١٠-٥
اختبار الوحدة العاشرة			

KuwaitMath.com

التركيز على حل المسائل
التحقق من معقولية الإجابة

الغاية

يربط الطلاب بين الإجابة التي حصلوا عليها وبين الواقع. قد تكون الإجابة صحيحة حسابيًّا ولكن هل هي معقولة حياتيًّا؟

كيفية التعامل مع الصفحة

استخدام خطوات حل المسائل

ناقش مع الطلاب ما يلي:

- ما معطيات كل مسألة؟
- ما المطلوب إيجاده؟
- كيف ستحل كل مسألة؟
- ما هو الحل؟
- هل الحلول التي توصلتم إليها تنطبق على الواقع؟

على سبيل المثال، هل يمكن أن يكون طول شجرة عددًا سالبًا؟

إجابات الأسئلة

❶ مساحة المربع = ٤٠٠٠ م^{٢}

٤٠٠٠ = (٦٣,٢٥)^{٢}، (قريبة بما يكفي).

إذًا طول كل ضلع منها حوالى ٦٣,٢٥ مترًا.

❷ نصف القطر ١,٨ متر،

حجم الشجرة الكلي = $\pi \times (١,٨)^{٢} \times ٤٥ = ٤٥٨$ م^{٣}

حجم خشب الشجرة القابل للاستخدام يساوي:

$\frac{٤}{٥} \times ٤٥٨ = ٣٦٦$م^{٣}، (قريبة بما يكفي).

❸ عدد الأمتار المربعة المزالة من الغابات المطيرة في شهر واحد (٣٠ يومًا) هو نتيجة العملية التالية:

$٣٠ \times ٢٤ \times ٦٠ \times ٤٠ = ١٧٢٨٠٠٠$م^{٢}، (قريبة ما يكفي).

❹ كلفة الورقة المعاد تدويرها ١٠٠٪ من $\frac{٣٥٠}{١٠٠٠} = ٠,٣٥$ فلس.

كلفة الورقة المعاد تدويرها ٢٠٪ من $\frac{٤٥٠}{١٥٠٠} = ٠,٣$ فلس.

إذًا تزيد كلفة إنتاج الورق المعاد تدويره ١٠٠٪ عن كلفة إنتاج الورق المعاد تدويره ٢٠٪، ٠,٣٥ – ٠,٣ = ٠,٠٥ فلس، (قريبة بما يكفي).

حل المسائل
الفهم
خطط
حل
تحقق

التحقق من معقولية الإجابة

في معظم الأحيان نستعين بآلات حاسبة لحل مسائل تتضمن أعدادًا كبيرة. لكن من السهل إدخال أعداد غير صحيحة أو إسقاط الأقواس أو رقم عند نقل الإجابة من شاشة الآلة الحاسبة. لذا، من المهم التأكد من معقولية الإجابة. ويساعد التقدير والتفكير السليم على القيام بذلك.

التركيز على حل المسائل

ينتمي أحمد إلى جمعية تنمية البيئة. إليك بعض المواقف التي واجهها. اذكر ما إذا كان تقدير كل إجابة قريبًا ما يكفي أو أصغر بكثير أو أكبر بكثير من الإجابة الفعلية ووضّح السبب:

❶ تقاس مساحات الأدغال أو المناطق الشجرية بالكيلومترات المربعة. لنفترض أن مساحة منطقة مربعة تساوي ٤٠٠٠ م^{٢}، فما طول كل ضلع منها؟

الإجابة: ٦٣,٢٥ م

❷ يبلغ ارتفاع شجرة ٤٥ مترًا، وقطرها ٣,٦ أمتار. يمثل الجزء من الشجرة الذي يمكن استخدامه كخشب $\frac{٤}{٥}$ من حجمها الكلي. ما حجم خشب الشجرة القابل للاستخدام؟

الإجابة: ٣٦٦ م^{٣}

❸ تفيد بعض التقارير أن الغابات المطيرة تُزال بمعدل ٤٠ م^{٢} كل دقيقة. ما عدد الأمتار المربعة التي تزال بحسب هذا المعدل في شهر واحد؟

الإجابة: ١٧٢٨٠٠٠ م^{٢}

❹ يسمى الورق المعاد تدويره بمخلفات المستهلك ويكلف إنتاج ١٠٠٠ ورقة من الورق الذي يعاد تدويره بنسبة ١٠٠٪ ٣٥٠ فلسًا. ويكلف إنتاج ١٥٠٠ ورقة من الورق الذي يعاد تدويره بنسبة ٢٠٪ ٤٥٠ فلسًا. بكم تزيد كلفة إنتاج الورق المعاد تدويره ١٠٠٪ عن الورق الذي يعاد تدويره ٢٠٪؟

الإجابة: ٠,٠٥ فلوس

١٦٨

KuwaitMathTeam

كيفية التعامل مع هذه الصفحة

تقدم هذه الصفحة موضوع هذا الجزء، الألعاب الأولمبية، وتناقش أهمية إعداد لاعبي الألعاب الأولمبية وتشجيعهم.

اسأل...

- هل سمعت عن أي لاعبين أولمبيين؟ هل تذكر مواقفهم؟
- ما أهميّة الألعاب الأولمبية أو الآسيويّة في حياة الرياضيين؟

التاريخ

شجّع الطلاب على القيام بأبحاث على شبكة الإنترنت أو في مراجع عن الألعاب الأولمبية: نشأتها، أسبابها، الغاية منها، وكيف تطورت خلال العصور.

الربط مع الواقع

اطلب إلى الطلاب كتابة تقرير مفصل عن مشاركة دولة الكويت في الألعاب الأولمبية، والنتائج التي حصل عليها رياضيو الكويت.

KuwaitMath.com

إجابات الأسئلة

١ ٣٩,٥٥٪.

٢ حوالى ٣ مرات.

١٠-١

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يستخدم الشجرة البيانية ويطبق طرائق العد.

المصطلحات الأساسية

- الشجرة البيانية، مبدأ العد.

مراجعة

احسب كل تعبير من أجل ن = ٢، ٥، ١٠:

١ ن × (ن − ١) — ٢، ٢٠، ٩٠

٢ (ن + ٣) × ن — ١٠، ٤٠، ١٣٠

٣ (ن + ٤) × (ن − ٢) — ٠، ٢٧، ١١٢

١ – التمهيد

استكشف

الغاية

يعد الطلاب قائمة بوسائل النقل للذهاب والعودة من المدرسة، ويحسبون عدد الطرائق المختلفة لرحلة الذهاب والعودة.

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

ضمّن أسلوبًا إضافيًّا للنقل، يمكنك استخدامه للذهاب إلى المدرسة والعودة منها. والآن، كم عدد الاختيارات المتاحة للذهاب إلى المدرسة والعودة منها؟

إجابات «استكشف»

١ **إجابة محتملة:** سيارة، حافلة، دراجة، المشي.

٢ – ٤ **قد تختلف الإجابات.**

١٠-١

الشجرة البيانية ومبدأ العد
Tree Diagrams and The Counting Principle

سوف تتعلم
- استخدام الشجرة البيانية وتطبيق طرائق العد.

من الاستخدامات
- يستخدم تجار السيارات طرائق العد لتحديد أنواع السيارات المتوفرة لديهم وأعدادها.

صلة الدرس قد يكون العدّ في بعض الحالات صعبًا. أنت تعلم كيف تستخدم الضرب لإيجاد عدد الوحدات المربعة في المستطيلات. يمكن استخدام طريقة مشابهة عند عدّ اختيارات عدة.

استكشف الشجرة البيانية

الطريق إلى المدرسة

١ ما وسائل المواصلات المختلفة التي يمكنك استخدامها للذهاب إلى المدرسة والعودة إلى المنزل؟

٢ لنفترض أنك تستطيع استخدام كل يوم وسيلة واحدة فحسب من بين الوسائل التي وجدتها للذهاب إلى المدرسة، فما عدد الطرائق المختلفة التي يمكنك استخدامها للذهاب إلى المدرسة؟

٣ لنفترض أنك تستطيع استخدام كل يوم وسيلة واحدة فحسب من بين الوسائل التي وجدتها للعودة إلى المنزل، فما عدد الطرائق التي يمكنك استخدامها للعودة إلى المنزل؟

٤ نظّم قائمة أو اعمل رسمًا توضح فيه الوسائل التي يمكنك استخدامها للذهاب إلى المدرسة والعودة إلى المنزل، فكم عدد الوسائل الممكنة؟

تعلم الشجرة البيانية ومبدأ العد

يرغب خالد في الذهاب إلى الكويت لمشاهدة دورة الألعاب الرياضية، لكنه لم يجد خط طيران مباشرًا من بيروت. لكن لديه الخيار ليعاود الطيران من إحدى المدن التالية: دمشق وعمان والرياض ويمكنه أن يختار بين شركتي طيران: أ، ب. يمكنك إظهار الخيارات المتوفرة لدى خالد بعمل جدول.

مدينة الترانزيت	الشركة (أ)	الشركة (ب)
دمشق	✗	✗
عمان	✗	✗
الرياض	✗	✗

يمكنك عد خيارات في الجدول. ويمكنك اعتماد طرائق أخرى لإيجاد هذه المعلومات. ومن بين هذه الطرائق، استخدام مخطط الشجرة البيانية. يوضح مخطط الشجرة البيانية التالي فروعًا لكل خيار متوفر، ويمثل كل فرع من الشجرة ناتجًا ممكنًا.

المصطلحات الأساسية
- الشجرة البيانية Tree Diagram
- مبدأ العد Counting Principle

١٧٠

KuwaitMath.com

٢ - التعليم

تعلم

أمثلة بديلة

❶ اصنع مخطط شجرة بيانية يوضح كل الاختيارات المكنة من الشطائر، (الخبز واللحوم)، إذا كان لدينا نوعان من الخبز: قمح وشوفان، و٣ أنواع من اللحوم: لحم بقري، دجاج، ديك رومي.

الخبز	اللحم	الاختيار
قمح	لحم بقري	قمح، لحم بقري
	دجاج	قمح، دجاج
	ديك رومي	قمح، ديك رومي
شوفان	لحم بقري	شوفان، لحم بقري
	دجاج	شوفان، دجاج
	ديك رومي	شوفان، ديك رومي

❷ إذا كانت تتوافر ٨ ألوان، ٦ موديلات، ٤ مقاسات من القمصان، فكم قميصًا مختلفًا يكون متاحًا؟ **باستخدام مبدأ العد، يوجد ٨ × ٦ × ٤ أي ١٩٢ قميصًا مختلفًا متاحًا.**

❸ يوجد ١٠ أبواب لدار عرض سينما ومسرح، منها ٢ فقط للدخول، كم طريقة يمكن بها الدخول إلى دار العرض والخروج منها؟ **باستخدام مبدأ العد يوجد ٢ × ١٠ أي ٢٠ طريقة للدخول والخروج من دار العرض.**

إجابات «حاول أن تحل»

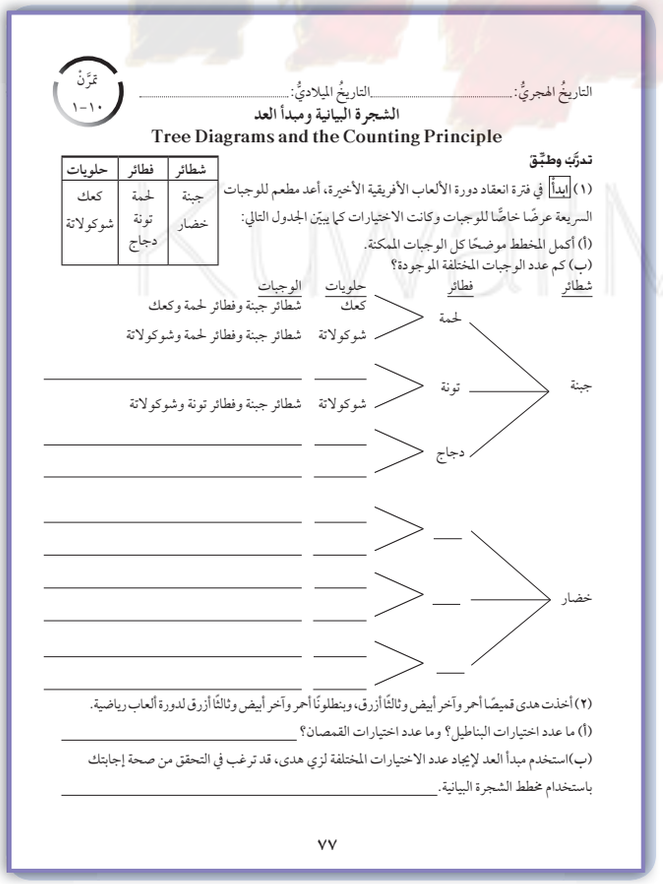
❶ ٩ اختيارات

❷ ١٠ × ١٢ × ٣ = ٣٦٠

٣٦٠ اختيارًا مختلفًا لتغليف الهدايا.

❸ ١٠٠ × ٢٨ = ٢٨٠٠

٢٨٠٠ شيفرة مختلفة يمكن وضعها على كل بطاقة تعريف.



٣- التدريب والتقييم

تحقق من فهمك

في السؤال (٢)، قد يضرب الطلاب ٤ في ١، لأن للفطيرة نوع طبقة واحدة. اسألهم كم نوعًا من الفطائر يمكن تحضيره إذا توافر ٣ أنواع من الطبقات، ولكي يقوموا بالعد، فعليهم ضرب ٤ في عدد الطبقات المتاحة (ت)، وليس في عدد الطبقات الممكن وضعها على الفطائر.

إجابات «تحقق من فهمك»

١ **إجابة محتملة: يمكن استخدام مبدأ العد لعد القمصان والأحذية المختارة من خزانة الثياب؛ ولا يمكن استخدامه لعد توافيق القمصان والأحذية المشتراة مقابل مبلغ محدد من النقود (حيث إن ثمن الأحذية سيؤثر على عدد القمصان الممكن شراؤه أو العكس).**

٢ **٤ × ت عدد أنواع الفطائر المختلفة.**

٣ **لا يوجد اختلاف لأن الإمكانات الكلية هي نفسها، مثلًا يمكن زيارة أحد المواقع التاريخية الأربعة، ثم تناول وجبة في أحد المطعمين. والعكس صحيح زيارة موقعين وتناول وجبة في واحد من أربعة مطاعم.**

تقييم بديل

دع الطلاب يكتبون عن أحد المواقف في حياتهم الخاصة، الذي يمكن استخدام مبدأ العد فيه.

اختبار سريع

١ لدى يوسف ٨ أنواع من الفطائر، ٣ أنواع من الخضار، نوعان من الفاكهة. كم وجبة من الفطائر والخضار والفاكهة يمكن ليوسف تناولها؟ **٤٨**

٢ استخدم مخطط الشجرة البيانية لمعرفة النواتج الممكنة لرمي قطعة نقود معدنية مرتين متتاليتين.

عدد النواتج الممكنة ٤.

مثال (٢)

يمكن تصميم بطاقة دعوة باستخدام ٤ نصوص مختلفة و٧ ألوان مختلفة و٥ هوامش مختلفة. ما عدد الاختيارات المختلفة المتوفرة لصنع البطاقة؟

الحل:

باستخدام مبدأ العد، لديك ٤ × ٧ × ٥ أي ١٤٠ خيارًا لتصميم بطاقة الدعوة.

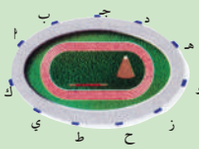
حاول أن تحل

٢ لدى أحد المحلات ١٠ أنواع من الورق المستخدم لتغليف الهدايا و١٢ لونًا من أشرطة الزينة و٣ أنواع من العقد. ما عدد الاختيارات المختلفة المتوفرة لتغليف الهدايا؟

تأكد من أنك فهمت المسألة قبل استخدام مبدأ العد.

مثال (٣)

يسع مدرج للألعاب الأولمبية ١٠٠ ٨٣ مقعد. تشير تذكرتك عليك الدخول عبر البوابات الشمالية. تقع البوابات أ، ب، جـ، د، هـ في الجهة الشمالية والبوابات و، ز، ح، ط، ي، ك في الجهة الجنوبية. بكم طريقة مختلفة يمكنك أن تدخل عبر بوابة شمالية، وتخرج عبر أي بوابة؟



الحل:

في المدرج ٥ بوابات شمالية و٦ بوابات جنوبية. تتوفر ٥ طرائق لدخول المدرج.

وتتوفر ٥ + ٦ = ١١ بوابة ممكنة للخروج منه.

باستخدام مبدأ العد، لدينا ٥ × ١١ = ٥٥ طريقة للدخول عبر بوابة شمالية والخروج من أي بوابة.

حاول أن تحل

٣ يستخدم العلماء الذين يجرون أبحاثًا عن الحيوانات بطاقة تعريف يضعونها حول عنق كل من الحيوانات لدراسة عاداتها تتضمن أحد أحرف الهجاء، وعددًا كليًا أقل من مئة. كم شيفرة مختلفة ممكنة يمكن وضعها على كل بطاقة تعريف؟

تحقق من فهمك

١ أعط مثالًا على حالة يمكن استخدام مبدأ العد فيها، ومثالًا لا يمكن استخدام مبدأ العد فيه.

٢ لنفترض أنه لديك ٤ أنواع من صلصة الفطائر، وت نوع من الطبقات العلوية. كم عدد الفطائر المختلفة التي تتضمن نوعًا واحدًا من الصلصة ونوعًا واحدًا من الطبقة العلوية؟

٣ ما أوجه الشبه والاختلاف بين حالة تتضمن ٤ اختيارات يليها اختياران اثنان وبين الحالة المعاكسة، أي اختياران يليهما ٤ اختيارات؟ أعط مثالًا على ذلك.

١٧٣

(٣) كم اختيارًا مختلفًا لديك في كلّ من المواقف التالية:

(أ) ٤ أصناف من الحلويات، ١٠ أصناف من الأطباق الرئيسية. _____

(ب) ٣ أصناف من الفطائر، صنفان من الشطائر، ٣ أصناف من الحلويات. _____

(جـ) ٥ أصناف من الخبز، ٤ أصناف من المربى. _____

(٤) ارسم مخطط الشجرة البيانية لتوضيح النتائج الممكنة من تدوير اللوحتين الدوارتين التاليتين.

(٥) في إحدى الدورات الأولمبية وزعت اللجنة الأولمبية ٥٤٠ صندوقًا من كرات التنس على اللاعبين المشاركين في الدورة، وكان في كل صندوق ٢٤ علبة وفي كل علبة ٣ كرات تنس، ما عدد كرات التنس التي تم توزيعها على اللاعبين؟ _____

(٦) **الجغرافيا:** تحاول أمل الذهاب من المدينة «أ» إلى المدينة «ب» عن طريق المدينة «جـ»، توجد ٤ طرق رئيسية من المدينة «أ» إلى «جـ»، وطريقان رئيسيان من «جـ» إلى المدينة «ب»، ما عدد المسارات التي يمكن أن تسلكها؟ _____

(٧) افرض أن مدرستك قد أجرت استفتاء حول اختيار الزي المدرسي، يوجد ٤ ألوان للقميص، ٣ ألوان للبنطلون، فكم يكون عدد اختيارات الزي المدرسي؟ _____

يوضح الشكل المقابل قائمة أطعمة الغداء في مطعم «الطعام اللذيذ»، استخدم ذلك للإجابة عن التمرينين ٨ و٩:

شطائر	خضراوات	سلطات	مشروبات
دجاج	حمص	خضار	غازية
جبنه	فاصوليا	بطاطا	قهوة
	جزر		شاي

(٨) كم عرضًا خاصًا للغداء يمكن طلبه؟ _____

(٩) **التحضير للاختبار:** إذا نفد الحمص من المطعم، فإنّ عدد العروض الخاصة للغداء التي يمكن طلبها عندئذ هو: _____

(أ) ٣٥ (ب) ٢٤ (جـ) ١٦ (د) ٨

٧٨

إجابات «المرشد لحل المسائل»

١ (أ) ٢ (ب) ٢ (جـ) ٥

٢ كلمة واحدة.

٣ بضرب عدد الكلمات الموجودة في كل قائمة.

٤ ٢ × ٢ × ٥.

٥ ٢٠ جملة.

٦ استخدام مخطط الشجرة البيانية. عندما تكون الأعداد كبيرة فإن استخدام مبدأ العد هو الأفضل لإيجاد الخيارات الممكنة.

٧ يمكن تكوين ٩٦ زيًّا مختلفًا.

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

١ (أ) $٨^{٣}$ = ٥١٢ شخصًا مختلفًا.

(ب) إجابة ممكنة: ١٠ رؤوس، ١٠ وجوه، ١٠ ذقون تشكل ١٠٠٠ شخص مختلف.

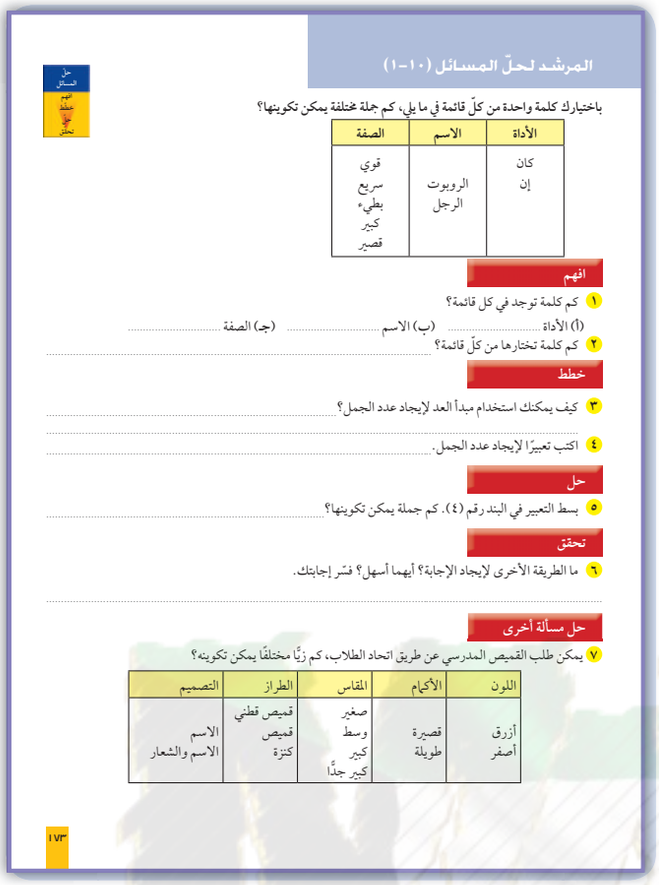
٢ ٥٤٠ × ٢٤ × ٣ = ٣٨٨٨٠ كرة تنس.

٣ ٣ × ٢ × ٣ = ١٨ زيًّا مختلفًا.

٤ (أ) ٤ × ٣ = ١٢ اختيارًا.

(ب) ٣ × ٣ = ٩ اختيارات.

(جـ) ٤ × ٢ = ٨ اختيارات.



المرشد لحلّ المسائل (١٠-١)

باختيارك كلمة واحدة من كلّ قائمة في ما يلي، كم جملة مختلفة يمكن تكوينها؟

الأداة	الاسم	الصفة
كان إن	الروبوت الرجل	قوي سريع بطيء كبير قصير

افهم

١ كم كلمة توجد في كل قائمة؟

(أ) الأداة ..... (ب) الاسم ..... (جـ) الصفة .....

٢ كم كلمة تختارها من كلّ قائمة؟ .....

خطط

٣ كيف يمكنك استخدام مبدأ العد لإيجاد عدد الجمل؟ .....

٤ اكتب تعبيرًا لإيجاد عدد الجمل. .....

حل

٥ بسط التعبير في البند رقم (٤). كم جملة يمكن تكوينها؟ .....

تحقق

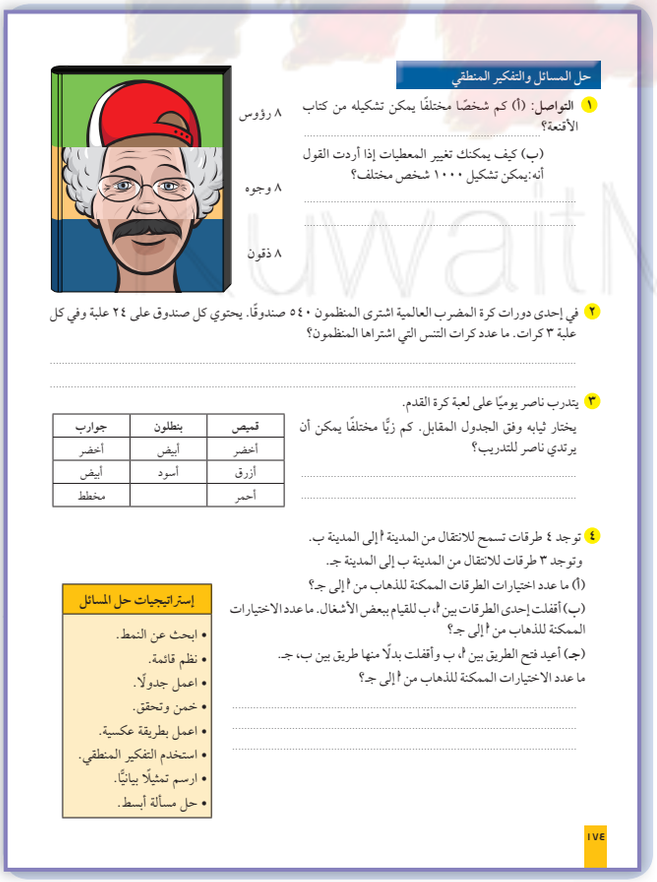
٦ ما الطريقة الأخرى لإيجاد الإجابة؟ أيهما أسهل؟ فسّر إجابتك. .....

حل مسألة أخرى

٧ يمكن طلب القميص المدرسي عن طريق اتحاد الطلاب، كم زيًّا مختلفًا يمكن تكوينه؟

اللون	الأكمام	المقاس	الطراز	التصميم
أزرق أصفر	قصيرة طويلة	صغير وسط كبير كبير جدًّا	قميص قطني قميص كنزة	الاسم الاسم والشعار

١٧٣



حل المسائل والتفكير المنطقي

١ التواصل: (أ) كم شخصًا مختلفًا يمكن تشكيله من كتاب الأقنعة؟

٨ رؤوس

٨ وجوه

٨ ذقون

(ب) كيف يمكنك تغيير المعطيات إذا أردت القول أنه: يمكن تشكيل ١٠٠٠ شخص مختلف؟

٢ في إحدى دورات كرة المضرب العالمية اشترى المنظمون ٥٤٠ صندوقًا. يحتوي كل صندوق على ٢٤ علبة وفي كل علبة ٣ كرات. ما عدد كرات التنس التي اشتراها المنظمون؟

٣ يتدرب ناصر يوميًا على لعبة كرة القدم.

يختار ثيابه وفق الجدول المقابل. كم زيًّا مختلفًا يمكن أن يرتدي ناصر للتدريب؟

قميص	بنطلون	جوارب
أخضر	أبيض	أخضر
أزرق	أسود	أبيض
أحمر		مخطط

٤ توجد ٤ طرقات تسمح للانتقال من المدينة أ إلى المدينة ب.
وتوجد ٣ طرقات للانتقال من المدينة ب إلى المدينة جـ.

(أ) ما عدد اختيارات الطرقات الممكنة للذهاب من أ إلى جـ؟

(ب) أقفلت إحدى الطرقات بين أ، ب للقيام ببعض الأشغال. ما عدد الاختيارات الممكنة للذهاب من أ إلى جـ؟

(جـ) أعيد فتح الطريق بين أ، ب وأقفلت بدلًا منها طريق بين ب، جـ. ما عدد الاختيارات الممكنة للذهاب من أ إلى جـ؟

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًا.
- حل مسألة أبسط.

١٧٤

KuwaitMath.com

٢-١٠

التباديل والترتيبات
Permutations and Arrangements

صلة الدرس: لقد سبق أن تعلمت عن الأشجار البيانية ومبدأ العد. ستوسع في هذا الدرس هذين المفهومين حول مواقف عد يكون الترتيب فيها مهمًّا.

سوف تتعلم
- تطوير طرائق العد في حالات يكون فيها الترتيب هامًّا.

من الاستخدامات
- عند تحديد ترتيب المتبارين في فريق رياضي، على المدرب أن يدرك الترتيبات الممكنة التي يمكنه تشكيلها.

استكشف | التباديل

الوقوف في الصف

الأدوات المستخدمة: بطاقات تأشير لكل مجموعة مدون عليها ما يلي: أ، ب، جـ، د.

على كل طالب في المجموعة أن يأخذ بطاقة واحدة: أ أو ب أو جـ أو د.

١ إذا اصطف الطالب الذي يحمل البطاقة أ بمفرده، فبكم طريقة يمكنه أن يصطف؟

٢ إذا اصطف الطالبان اللذان يحملان البطاقتين أ، ب، فبكم طريقة يمكنهما أن يصطفا؟

٣ إذا أضيف الطالب الذي يحمل البطاقة جـ، فبكم طريقة يمكن لـ ٣ طلاب أن يصطفوا؟

كيف تربط ذلك بعدد الطرائق الممكنة التي يمكن لطالبين أن يصطفا بها؟

٤ أضف الطالب الذي يحمل البطاقة د. بكم طريقة يمكن لـ ٤ طلاب أن يصطفوا؟ كيف تربط ذلك بعدد الطرائق الممكنة التي يمكن لـ ٣ طلاب أن يصطفوا بها؟

٥ خمّن عدد الطرائق المختلفة التي يمكن أن يقف فيها ٥ طلاب في صف واحد.

المصطلحات الأساسية
- ترتيب Arrangement
- تبديل Permutation
- مضروب Factorial

تعلم | التباديل والترتيبات

عند معاينة الاختيارات المتوفرة المختلفة، غالبًا ما تمعن النظر في الترتيب الذي وضع فيه الأشخاص أو الحروف أو الأعداد أو الأشياء الأخرى. التبديل هو ترتيب يكون فيه موقع الأشياء مهمًّا. التبديل أ ب جـ مختلف عن التبديل جـ ب أ ويمكن أن يساعد مبدأ العد على تحديد عدد الاختيارات أو التباديل.

١٧٥

٢-١٠

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يطور طرائق العد في حالات يكون فيها الترتيب هامًّا.

المصطلحات الأساسية

- ترتيب، تبديل، مضروب.

الأدوات المستخدمة

- بطاقات تأشير لكل مجموعة مدون عليها ما يلي: أ، ب، جـ، د.

مراجعة

أوجد ناتج ما يلي:

١ $١ \times ٢ \times ٣$ ٦

٢ $١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥$ ١٢٠

٣ $١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧$ ٥٠٤٠

١ - التمهيد

استكشف

الغاية

يرتب الطلاب كيفية جلوسهم بطرائق مختلفة، ويستكشفون كيفية استخدام مبدأ العد، من أجل عد كل الطرائق الممكنة.

التقييم المستمر

تحقق من نتائج الطلاب بعد الخطوة رقم (٣)، وتأكد من أنهم قد أخذوا بالاعتبار كل الترتيبات الممكنة.

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

توقع عدد طرائق وقوف ٦ طلاب، و٧ طلاب في صف واحد. ٧٢٠، ٥٠٤٠

KuwaitMath.com

إجابات «استكشف»

❶ بطريقة واحدة أ.

❷ أ ب، ب أ. إذًا بطريقتين.

❸ أ ب جـ، أ جـ ب، ب أ جـ، ب جـ أ، جـ أ ب، جـ ب أ؛ ٦؛ ٣ مرات عدد طرائق لطالبين إصطفا معًا أي ٣ × ٢ = ٦ طرائق.

❹ د أ ب جـ، أ د ب جـ، أ ب د جـ، أ ب جـ د الأول أو الثاني أو الثالث أو الرابع في الصف كل مرة، ٢٤ طريقة، ٤ مرات عدد الطرائق التي يمكن بها لـ ٣ طلاب أن يصطفوا معًا أي ٤ × ٦ = ٢٤ طريقة.

❺ ٥ × ٢٤ = ١٢٠ طريقة.

٢ – التعليم

تعلم

عند دراسة التباديل، ليس من النادر استخدام تعبير مثل $\frac{!٤}{!٠} = ٢٤$، مثلاً عدد طرائق اختيار ٤ أشياء وترتيبها من مجموعة ٤ أشياء هي $\frac{!٤}{!(٤-٤)} = \frac{!٤}{!٠}$، ولكي نحصل على النتيجة ٢٤ يلزم تعريف ! ٠ = ١.

أمثلة بديلة

❶ يوجد ٨ خطوط لمنافسات السباحة، إذا وضع أمهر ٣ سباحين في الخطوط ٣، ٤، ٥، فبكم طريقة يمكن وضع الخمسة سباحين الآخرين في باقي الخطوط؟

يوجد ٥ أوضاع لأحد الخمسة، إذا وضع في خط ما، يتبقى ٤ خطوط يوضع التالي في إحداها، ويتبقى ٣ خطوط لوضع الثالث في إحداها، وهكذا... وبمبدأ العد يكون مجموع الاختيارات هو ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠.

يوجد ١٢٠ طريقة لوضع الـ ٥ سباحين الباقين في باقي الخطوط.

❷ في استطلاع رأي مدرسي، سئل الطلاب أن يرتبوا ٦ فرق موسيقية لدخول طابور العرض.

(أ) بكم طريقة يمكن ترتيب الفرق؟

٦! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠

يوجد ٧٢٠ طريقة مختلفة لترتيب الفرق.

مثال (١)

في سباق التتابع ٤ × ١٠٠ م رجال، يتألف أحد الفرق من: علي وحسن وأحمد ومصطفى. قرّر المدرب أن يركض مصطفى في المرحلة الأخيرة. بكم ترتيب مختلف يمكنه اختيار علي وحسن وأحمد لعدو المراحل الثلاث الأولى في سباق التتابع؟

الحل:

بالنسبة إلى العداء الأول هناك ثلاث إمكانيات. عند اختياره يبقى خياران أمام العداء الثاني. عند تحديد الخيار يبقى خيار واحد أمام العداء الثالث.

الطرائق الممكنة

باستخدام مبدأ العد، عدد الاختيارات الكلي = ٣ × ٢ × ١ = ٦ طرائق.

يمكن للمدرب استخدام ٦ طرائق ممكنة مختلفة لترتيب العدائين الثلاثة.

حاول أن تحل

١ يمكن للسباحين أن يتباروا في ٨ خطوط في سباق الـ ٢٠٠م فراشة. كم عدد الطرائق المختلفة التي يمكن بها ترتيب السباحين في الخطوط المختلفة؟

تستخدم الصورة الأسية لكتابة حاصل الضرب عندما تكون العوامل كلها متساوية: ٣ × ٣ × ٣ × ٣ = $٣^٤$.

أما المضروب فيستخدم لكتابة حاصل الضرب عندما تكون العوامل أعدادًا صحيحة (موجبة) متتالية تنتهي بالعدد ١.

يكتب مضروب ٤ على شكل ٤! ويعني ٤ × ٣ × ٢ × ١.

ن! = ن (ن–١) (ن–٢) .... × ٢ × ١، حيث ن عدد صحيح موجب

مضروب الصفر يساوي ١ ! ٠ = ١

مثال (٢)

اختير ٨ أشخاص لحمل الشعلة الأولمبية عبر المدينة. بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب حاملي الشعلة؟

الحل:

اختر ٨ أشخاص، وأوجد الطرائق المختلفة التي يمكن تنظيمهم بها:

٨ ! = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٤٠٣٢٠

لدينا ٤٠٣٢٠ طريقة مختلفة لترتيب حاملي الشعلة.

١٧٦

KuwaitMath.com

(ب) بكم طريقة يمكن ترتيب فرقتين من الـ ٦؟

نريد فقط اختيار وترتيب ٢ من ٦، فلا نحتاج إلى ترتيب الـ ٤ الباقية، نقسم على عدد طرائق ترتيب الأربعة.

$$ل^{٦}_{٢} = \frac{!٦}{!٤} = \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤}$$

$$= ٦ \times ٥ = ٣٠$$

يوجد ٣٠ طريقة لترتيب فرقتين.

❸ يتدرب ٩ لاعبين مع أحد المدربين، استعدادًا لمسابقات فردية، بكم طريقة يمكن للمدرب اختيار تدريب وترتيب:

(أ) ٣ لاعبين؟

باختيار ٣ يترك ٦ لاعبين:

$$ل^{٩}_{٣} = ٩ ! \div ٦ ! = ٥٠٤$$

يوجد ٥٠٤ طرائق لاختيار تدريب ٣ لاعبين وترتيبهم.

(ب) ٤ لاعبين؟

باختيار ٤ يترك ٥ لاعبين:

$$ل^{٩}_{٤} = ٩ ! \div ٥ ! = ٣٠٢٤$$

يوجد ٣٠٢٤ طريقة لاختيار تدريب ٤ لاعبين وترتيبهم.

(جـ) ٥ لاعبين؟

باختيار ٥ يترك ٤ لاعبين:

$$ل^{٩}_{٥} = ٩ ! \div ٤ ! = ١٥١٢٠$$

يوجد ١٥١٢٠ طريقة لاختيار تدريب ٥ لاعبين وترتيبهم.

إجابات «حاول أن تحل»

❶ عدد الطرائق التي يمكن بها ترتيب السباحين على ٨ خطوط هي ٨! = ٤٠ ٣٢٠ طريقة مختلفة.

❷ (أ) ٤! = ٢٤

(ب) (٧ − ٣)! = ٤! = ٢٤

(جـ) $ل^{١٠}_{٥} = \frac{!١٠}{!(٥ - ١٠)} = ٣٠ ٢٤٠$

❸ (أ) $ل^{٩}_{٧} = \frac{!٩}{!(٧ - ٩)} = ١٨١ ٤٤٠$

(ب) $ل^{٧}_{٤} = \frac{!٧}{!(٤ - ٧)} = ٨٤٠$

(جـ) $ل^{٥}_{٣} = \frac{!٥}{!(٣ - ٥)} = ٦٠$؛ $ل^{٥}_{٤} = \frac{!٥}{!(٤ - ٥)} = ١٢٠$

٥! = ١٢٠

تحتاج أحيانًا إلى اختيار أشياء بترتيب معيّن، كاختيار أسماء أول ثلاثة جمال في سباق الهجن أو اعتماد عدد سري يسمح بفتح المحفظة. عندما يكون ترتيب الأشياء مهمًا دون تكرار يدعى الاختيار تبديلًا.

كتبت عزة أحرف كلمة "السبعون" كل حرف على بطاقة. أرادت معرفة عدد الكلمات الممكن كتابتها باستخدام ٤ أحرف فقط من السبعة المكونة لكلمة "السبعون". لذلك أخذت ورقة وقسمتها إلى ٤ أقسام.

اختارت حرفًا من ٧ ووضعته في الخانة الأولى، وليكن س. ثم اختارت حرفًا من الأحرف ٦ المتبقية للخانة الثانية، وليكن أ.

بقي مع عزة ٥ بطاقات. اختارت حرفًا منها للخانة الثالثة، وليكن ب.

أخيرًا اختارت حرفًا من ٤ للخانة الباقية، وليكن ن. هكذا اكتملت الكلمة.

تم اختيار الحرف الأول من بين ٧ أحرف. هناك ٦ اختيارات ممكنة للحرف الثاني

أي ٧ × ٦ اختيارات لأول حرفين كذلك هناك ٥ اختيارات ممكنة للحرف الثالث

و٤ اختيارات للحرف الرابع أي ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ٨٤٠ اختيارًا.

ويمكن كتابتها على الصورة: $\frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٣ \times ٢ \times ١} = \frac{!٧}{!٣} = \frac{!٧}{!(٤ - ٧)}$

وبصورة عامة يعطى اختيار م عنصر من بين ن عنصر مختلف (م ⩽ ن) ومن دون تكرار أي عنصر منها ، حيث ترتيب العناصر مهم بالقانون: $ل^{ن}_{م} = \frac{!ن}{!(ن - م)}$

فمثلًا نكتب: $ل^{٧}_{٤} = \frac{!٧}{!(٤ - ٧)}$

مثال (٣)

من المثال (٢)، بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار ٣ من حاملي الشعلة وترتيبهم للمرور وراء بعضهم أمام المنصة الرسمية؟

الحل:

هناك ٨ من حاملي الشعلة، علينا اختيار ٣ منهم. ترتيب حاملي الشعلة مهم ولا يمر أحدهم مرتين. إذًا الاختيار تبديل.

لإيجاد عدد الطرائق نستخدم القانون $ل^{ن}_{م} = \frac{!ن}{!(ن - م)}$

$ل^{٨}_{٣} = \frac{!٨}{!(٣ - ٨)} = ٣٣٦$

لاحظ أن:

$ل^{٨}_{٣} = ٨ \times ٧ \times ٦$

حاول أن تحل

❷ (أ) احسب ٤!

(ب) احسب (٧ − ٣)!

(جـ) تجري محطة إذاعية مسابقة أفضل شاعر. يتم تسمية الشعراء العشرة الأفضل، وعلى المستمعين تحديد الترتيب الصحيح للشعراء الخمسة الأفضل ليتمكنوا من الربح. بكم طريقة مختلفة يمكن لأحد المستمعين اختيار ٥ شعراء من القائمة التي تضم الشعراء العشرة وترتيبها؟

١٧٧

KuwaitMath.com

٣- التدريب والتقييم

تحقق من فهمك

في السؤال (٢) قد يجد الطلاب أن من المفيد لهم البدء بأعداد أصغر مثل ترتيب ٣ أشخاص من ٦ أو ٤ أشخاص من ٨.

إجابات «تحقق من فهمك»

❶ ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١.

❷ الفرق هو $\frac{٤٠!}{٢٠!}$ = ${}_{٢٠}ل^{٤٠}$ مقارنًا بـ ٤٠!

تقييم بديل

ملف أداء التلميذ: تحقق من إجابات الطلاب عن «حاول أن تحل»، ثم اجعلهم يضعونها في ملفات أدائهم، هذه التمارين تبرز مفاهيم مهمة: سرد كل الترتيبات الممكنة، فهم رمز المضروب، إيجاد عدد طرائق اختيار ر شيئًا من ن شيئًا وترتيبها، وتحديد ما إذا كان الترتيب مهمًّا.

اختبار سريع

❶ اكتب كل الأعداد ذات ٣ أرقام مختلفة باستخدام الأرقام: ٤، ٧، ٩.

٤٧٩، ٤٩٧، ٧٤٩، ٧٩٤، ٩٤٧، ٩٧٤

❷ احسب $\frac{٨!}{٥!}$ ٣٣٦

❸ إذا كان يوجد ٩ طلاب مرشحين لاتحاد الطلاب، و٤ مناصب مختلفة، فبكم طريقة يمكن اختيارهم؟

٣٠٢٤

مثال (٤)

لنفترض أنه عليك اختيار من بين مجموعة من ١٠ سيارات، بعض السيارات التي ستشارك في الاستعراض وترتيبها. كم ترتيبًا يمكنك تشكيله إذا اخترت:

(أ) ٤ سيارات؟

(ب) ٥ سيارات؟

(جـ) ٧ سيارات؟

الحل:

الطريقة الأولى: استخدام القانون.

(أ) ${}_{٤}ل^{١٠} = \frac{١٠!}{(١٠-٤)!} = \frac{١٠!}{٦!} = ٥٠٤٠$

(ب) ${}_{٥}ل^{١٠} = \frac{١٠!}{(١٠-٥)!} = \frac{١٠!}{٥!} = ٣٠٢٤٠$

(جـ) ${}_{٧}ل^{١٠} = \frac{١٠!}{(١٠-٧)!} = \frac{١٠!}{٣!} = ٦٠٤٨٠٠$

الطريقة الثانية: استخدام الآلة الحاسبة.

تتضمن عادة الآلات الحاسبة العلمية مفتاح المضروب !.

(أ) إذا تم اختيار ٤ سيارات، بالتالي، لم يتم اختيار ٦ سيارات: ١٠ ! ⊟ ٦ ! = ٥٠٤٠

لدينا ٥٠٤٠ طريقة لاختيار ٤ سيارات وترتيبها.

(ب) إذا تم اختيار ٥ سيارات بالتالي، لم يتم اختيار ٥ سيارات:

١٠ ! ⊟ ٥ ! = ٣٠٢٤٠

لدينا ٣٠٢٤٠ طريقة لاختيار ٥ سيارات وترتيبها.

(جـ) إذا تم اختيار ٧ سيارات، بالتالي، لم يتم اختيار ٣ سيارات:

١٠ ! ⊕ ٣ ! = ٦٠٤٨٠٠

لدينا ٦٠٤٨٠٠ طريقة لاختيار ٧ سيارات وترتيبها.

حاول أن تحل

٣ (أ) ما عدد الطرائق المختلفة الممكنة لاختيار ٧ طلاب من ٩ طلاب وترتيبهم للإشراف على صالة الأنشطة؟

(ب) يفتح الباب إذا ضغطت على ٤ مفاتيح مختلفة بالترتيب الصحيح من بين ٧ مفاتيح مختلفة. بكم طريقة مختلفة يمكنك القيام بذلك؟

(جـ) إذا كان عليك اختيار ٣ طلاب وترتيبهم من بين ٥ طلاب لمشروع الفصل، فما عدد الترتيبات المختلفة التي يمكنك تشكيلها؟

ما عدد الترتيبات الممكنة إذا كان عليك اختيار ٤ طلاب؟ و٥ طلاب؟

تحقق من فهمك

١ وضح ما الذي تعنيه ٥!.

٢ ما أوجه الاختلاف بين عدد الطرائق الممكنة لاختيار ٢٠ شخصًا من بين ٤٠ وترتيبهم، وعدد الطرائق الممكنة لترتيب ٤٠ شخصًا؟

١٧٨

تمرّن ٢-١٠

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

التباديل والترتيبات

Permutations and Arrangements

تدرَّب وطبِّق

(١) ابدأ يتألف أعضاء الفريق الرياضي الحاصل على الميدالية الذهبية من: سالم وحمد وجاسم، ما عدد الطرائق المختلفة التي يمكن بها لمدرب أن ينظم ترتيب الأعضاء الثلاثة.

سالم < حمد _____ / جاسم _____

حمد < _____ / جاسم - سالم _____

_____ < _____ / _____ - سالم

(أ) أكمل مخطط الشجرة البيانية السابق لتوضيح الترتيبات الممكنة.

(ب) ما عدد الترتيبات الممكنة؟ _____

(جـ) ما المضروب الذي يمكنك استخدامه لإيجاد عدد هذه الترتيبات؟ _____

(٢) اكتب كل الترتيبات الممكنة للحروف أ، ب، جـ، د. _____

_____

_____

_____

أوجد. (موضحًا خطوات الحل)

(٣) ٦! _____ (٤) (٢!)(١٣) _____ (٥) ١٠! _____ (٦) (١٠-٥)! _____

(٧) ${}_{٤}ل^{١٠}$ _____ (٨) ٦ (٥!) _____ (٩) ${}_{٧}ل$ _____ (١٠) ${}_{٣}ل^{٧}$ _____

(١١) **المهن:** اختار مذيع برنامج غنائي خمس أغنيات لإذاعتها قبل الفقرة الإعلانية التالية، بكم طريقة يمكنه طلب إذاعة هذه الأغنيات؟ _____

٧٩

KuwaitMath.com

إجابات «المرشد لحل المسائل»

١ ١٠ مجموعات.

٢ ٣ مجموعات.

٣ عدد الطرائق المختلفة التي يمكن للأستاذ أحمد اختيار ثلاث مجموعات منها وترتيبها.

٤ ٧ مجموعات.

٥ (أ) ١٠! = ٣ ٦٢٨ ٨٠٠

(ب) (١٠ − ٣)! = ٧! = ٥٠٤٠

٦ $\frac{١٠!}{(١٠ - ٣)!}$

٧ ٧٢٠ طريقة.

٨ عدد الطرائق المختلفة لاختيار ثلاث مجموعات من عشرة وترتيبها يساوي ٧٢٠ طريقة.

٩ ١٠ × ٩ × ٨ = ٧٢٠.

١٠ $ل_{٤}^{٧} = \frac{٧!}{(٧ - ٤)!}$ = ٨٤٠ طريقة.

المرشد لحلّ المسائل (١٠-٢)

عند الأستاذ أحمد ١٠ مجموعات في حصة الرياضيات. غدًا الاثنين ستقوم ثلاث مجموعات منها بتسليم تقارير مشاريعها. بكم طريقة مختلفة يمكن للأستاذ أحمد اختيار هذه المجموعات وترتيبها؟

افهم

١ كم مجموعة في الفصل؟

٢ كم مجموعة ستسلم التقارير يوم الاثنين؟

٣ ما المطلوب إليك إيجاده؟

خطط

٤ كم مجموعة لن تسلّم التقارير يوم الاثنين؟

٥ استخدم المضروب لكتابة عدد طرائق ترتيب:
(أ) المجموعات كلّها.
(ب) المجموعات غير المختارة.

٦ استخدم المضروب لكتابة تعبير يوضح عدد الطرائق المختلفة التي يمكن أن يستخدمها أحمد لاختيار المجموعات وترتيبها.

حل

٧ بكم طريقة مختلفة يستطيع أحمد اختيار المجموعات وترتيبها؟

٨ اكتب جملة تعطي الإجابة النهائية.

تحقق

٩ أعد كتابة التعبير في السؤال رقم ٦ باستخدام العوامل بدلًا من المضروب.

حل مسألة أخرى

١٠ عند الأستاذة صبا ٧ مجموعات في حصة الرياضيات. يوم الاثنين القادم ستقوم ٤ مجموعات منها بتسليم تقارير مشاريعها. بكم طريقة مختلفة يمكن للأستاذة صبا اختيار هذه المجموعات وترتيبها؟

١٧٩

بكم طريقة يمكن ترتيب أحرف كل كلمة مما يلي؟ (يستخدم كل حرف مرة واحدة)، لا يشترط أن تكون الحروف كلمة.

(١٢) جيل _____ (١٣) جميلة _____

(١٤) استخدم _____ (١٥) متواضعة _____

(١٦) **الطهي**: يمكن تحضير صلصة البيشاميل بالمزج البطيء للحليب والدقيق والزبدة المسالة، بالترتيب الصحيح، كم عدد الترتيبات المختلفة؟ _____

(١٧) **الجغرافيا**: أراد كامل وهو من سكان دولة الكويت زيارة السعودية، قطر، سلطنة عمان، الإمارات، البحرين لكنه واجه مشكلة في ترتيب الزيارات، وهو يحاول تنظيم لائحة الترتيبات، لماذا؟

_____

(١٨) **الألعاب الأولمبية**: يوجد ١٠ ألعاب في مسابقة العشاري decathlon: في اليوم الأول عدو ١٠٠ متر، وثب طويل، رماية shot put، وثب عالٍ، عدو ٤٠٠ متر، ثم في اليوم الثاني عدو ١١٠ م حواجز، رمي القرص، وثب بالزانة، رمي الرمح، وعدو ١٥٠٠ متر.

(أ) بكم طريقة يمكن ترتيب الـ ١٠ ألعاب؟ _____

(ب) بكم طريقة يمكن ترتيب ألعاب اليوم الواحد؟ _____

(١٩) لدى الأستاذ أحمد ٨ مجموعات من التلاميذ في فصله، في الغد سوف تقدم ثلاث مجموعات منهم تقريرًا عن العمل البحثي المكلفين به، بكم طريقة مختلفة، يمكنه اختيار وترتيب المجموعات؟ _____

(٢٠) **التحضير للاختبار**: الصيغة التي تعطي عدد الطرائق الممكنة لاختيار وترتيب ر عنصرًا من مجموعة فيها ن عنصرًا هي: _____

(أ) $\frac{ن!}{ر!}$ (ب) $ل_{ن}^{ن}$

(جـ) $ل_{ر}^{ن}$ (د) $\frac{ن!}{(ر - ن)!}$

٨٠

KuwaitMath.com

١٠-٣

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الخيارات غير المرتبطة بترتيب على أنها توافيق، ويطبق طرائق العد في حالات يكون فيها الترتيب غير مهم.

المصطلحات الأساسية

- التوافيق.

١٠-٣

التوافيق والمجموعات
Combinations and Groups

سوف تتعلم
- كيفية تحديد الخيارات غير المرتبطة بترتيب على أنها توافيق، وتطبيق طرائق العد في حالات يكون فيها الترتيب غير مهم.

من الاستخدامات
- عند اختيار أعضاء اللجان في المجلس نستخدم التوافيق حيث يكون الترتيب غير مهم عند الاختيار.

صلة الدرس
لقد سبق أن تعلمت عن الخيارات التي يكون الترتيب فيها مهمًا. ستتعلم في هذا الدرس أن الترتيب في التوافيق قد لا يكون مهمًا في حالات عدة.

استكشف التوافيق

ما الفرق الذي يحدثه ذلك؟

في دورة الألعاب الأولمبية الصيفية للعام ٢٠٠٨، شارك كل من العداء (أ) و(ب) و(ج) و(د) في سباق العدو ٤ × ٤٠٠ متر تتابع للرجال.

١ بكم طريقة يمكن اختيار العداء الأول لبدء السباق والعداء الرابع لينهي السباق؟

٢ اذكر الترتيبات المختلفة للعداء الأول والعداء الرابع. هل الترتيب مهم في هذه الاختيارات؟

٣ طلبت محطة تلفزيونية أن يظهر عداءين معًا في مقابلة. ما عدد الاختيارات المختلفة التي يمكن تشكيلها باستخدام عداءين من الفريق؟ نظّم قائمة.

٤ ما أوجه الاختلاف بين اختيار عضوين من الفريق للمقابلة واختيار العداء الأول والعداء الرابع؟

تعلم التوافيق والمجموعات

لنفترض أن مدرستك تجري انتخابات لاتحاد الطلاب وأن المرشحين هم: كامل وخالد وفهد ونادر. ينتخب الحائز على أكبر عدد من الأصوات رئيسًا للاتحاد وينتخب الشخص الذي يليه نائبًا له. ما عدد النواتج الممكنة للانتخاب؟
في هذه الحالة يكون الترتيب مهمًا، لذلك لدينا ٤ × ٣ = ١٢ ناتجًا ممكنًا.

المصطلحات الأساسية
التوافيق
Combination

١٨٠

مراجعة

أوجد قيمة كل من:

١ $٦!$ — ٧٢٠

٢ $٤! \times ٣!$ — ١٤٤

٣ $\frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣!}$ — ١٠

٤ $\frac{٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨}{٤!}$ — ٧٠

٥ $\frac{١٠!}{٧!}$ — ٧٢٠

١ – التمهيد

استكشف

الغاية

يعمل الطلاب مع زملاء على ابتكار قائمتين إحداهما من المهم فيها ترتيب أعضاء الفريق، والأخرى من غير المهم فيها الترتيب.

التقييم المستمر

قد يكون بعض الطلاب مرتبكين بخصوص كلمة «لاعب النهاية» anchor runner في سباق عدد التتابع، فسر لهم أن اللاعب الأخير عادة هو أقوى لاعبي الفريق، الذي يعتمد عليه في آخر مراحل السباق، وفي الخطوة رقم (١) تحقق من أن الطلاب قد أعدوا قائمة منظمة، بعد تحليل الاختيارات والترتيبات للاعب البداية lead runner ولاعب النهاية anchor runner.

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

فكر في مثال آخر، يشبه هذا المثال، حيث تتضح أهمية الترتيب في موقف معين عنه في موقف آخر.

المتابعة

ادع الطلاب إلى مناقشة استنتاجاتهم في الخطوة رقم (٤)، ثم اجعل المجموعات تتشارك الأمثلة.

KuwaitMath.com

إجابات «استكشف»

١ ١٢.

٢ أ – ب؛ أ – جـ؛ أ – د؛ ب – أ؛ ب – جـ؛ ب – د؛ جـ – أ؛ جـ – ب؛ جـ – د؛ د – أ؛ د – ب؛ د – جـ.
نعم، الترتيب مهم في هذه الاختيارات لأن كل عداء من الأربعة يمكن أن يبدأ السباق، وكل عداء من الأربعة يمكن أن ينهي السباق.

٣ ٦ اختيارات. أ – ب؛ أ – جـ؛ أ – د؛ ب – جـ؛ ب – د؛ جـ – د.

٤ الترتيب مهم في اختيار العداء الأول والعداء الرابع ولكنه غير مهم في اختيار عضوين من الفريق للمقابلة.

٢ – التعليم

تعلم

قد ترغب في استخدام الآلة الحاسبة العلمية في هذا الدرس، ركز على الفرق بين التباديل والتوافيق.

أمثلة بديلة

١ دينا، أروى، جميلة، مشيرة يحاولن الاشتراك في فريق للكرة الطائرة، توجد فرص لاختيار ٣ لاعبات، ما عدد التوافيق المختلفة لاختيار ٣ لاعبات للفريق؟

نظم قائمة: دينا، أروى، جميلة؛
دينا، أروى، مشيرة؛
دينا، جميلة، مشيرة؛
أروى، جميلة، مشيرة.
يوجد ٤ توافيق ممكنة لاختيار ٣ لاعبات من مجموعة ٤ لاعبات.

٢ بكم طريقة يمكن اختيار المجموعات الآتية؟ اكتب الإجابات في صورة المضروب.

(أ) ٤٧ كتابًا من مجموعة ١٠٠ كتاب.

يوجد $\frac{!١٠٠}{!٤٧ \times !٥٣}$ طريقة لاختيار ٤٧ كتابًا من ١٠٠.

(ب) ٥٣ كتابًا من المجموعة نفسها.

يوجد $\frac{!١٠٠}{!٥٣ \times !٤٧}$ طريقة لاختيار ٥٣ كتابًا من ١٠٠.

اختيار ٥٣ كتابًا من ١٠٠ هو نفسه كاختيار ٤٧ كتابًا من ١٠٠.

لنفترض أن الطالبين اللذين نالا أكبر عدد من الأصوات أصبحا عضوين في اتحاد الطلاب، بصرف النظر عن أي منهما نال أكبر عدد من الأصوات. كيف يؤثر ذلك على النتائج؟

الرئيس	نائب الرئيس
كامل	خالد
كامل	فهد
كامل	نادر
خالد	كامل
خالد	فهد
خالد	نادر
فهد	كامل
فهد	خالد
فهد	نادر
نادر	كامل
نادر	خالد
نادر	فهد

أعضاء الاتحاد	
كامل	خالد
كامل	فهد
كامل	نادر
~~كامل~~	~~خالد~~
خالد	فهد
خالد	نادر
~~فهد~~	~~كامل~~
~~فهد~~	~~خالد~~
فهد	نادر
~~نادر~~	~~كامل~~
~~نادر~~	~~خالد~~
~~نادر~~	~~فهد~~

الناتج خالد/ كامل هو نفسه كامل/ خالد، لذا يمكن حذفه. والناتج فهد/ كامل هو نفسه كامل/ فهد، لذا يمكن حذفه وهكذا. بالتالي ينخفض عدد النواتج من ١٢ إلى ٦.

عندما لا يكون الترتيب مهمًّا، ينخفض عدد النواتج. تسمى المجموعة المختارة التي تضم عددًا من الأشياء، بغض النظر عن ترتيبها، **توفيقة** من الأشياء.

مثال (١)

يريد ٥ طلاب (أحمد، خالد، نادر، جابر، حمد) تأليف فريق يضم طالبين لكتابة مقالات صحفية. لإجراء القرعة، تكتب أسماء المرشحين كلها على بطاقات وتخلط لإجراء سحب اسمين معًا. ما عدد التوافيق المختلفة التي يمكن تشكيلها من طالبين اثنين؟

الحل:

نظّم قائمة:

أحمد، خالد	خالد، نادر	نادر، جابر	جابر، حمد
أحمد، نادر	خالد، جابر	نادر، حمد	
أحمد، جابر	خالد، حمد		
أحمد، حمد			

يمكن تشكيل ١٠ توافيق ممكنة لاختيار طالبين من بين ٥ طلاب.

حاول أن تحل

١ من مثال (١) إذا تقرر تشكيل الفريق من ٣ طلاب لكتابة المقالات الصحفية، ما عدد التوافيق الممكنة في هذه الحالة؟

في بعض الحالات لا يكون ترتيب العناصر مهمًّا. كاختيار ٣ طلاب ممثلين للصف أو اختيار ٤ كتب مطالعة لقراءتها خلال العطلة الصيفية.

في حاول أن تحل ١ ، اختيار ٣ طلاب لكتابة المقالات الصحفية لا يحتاج إلى ترتيب. أي أن ترتيب ٣ طلاب (!٣) نعتبرهم اختيارًا واحدًا إذا لم يكن الترتيب مهمًّا.

إذًا نقسم عدد التباديل على !٣ لمعرفة عدد المجموعات من ٣ طلاب

أي $\frac{{}^{٥}ل_{٣}}{!٣} = \frac{!٥}{!٣(٥-٣)!} = ١٠$

وبصورة عامة اختيار م عنصر من بين ن عنصر مختلف (م ⩽ ن) دون تكرار أي منها، وحيث ترتيب العناصر غير مهم يسمى توفيقًا ويعطى بالقانون:

$\binom{ن}{م} = {}_{م}ن = \frac{!ن}{!م\,(ن-م)!}$

ويقرأ (ن فوق م).

إذًا $\binom{٥}{٣} = {}_{٣}٥ = \frac{!٥}{!٣\,(٥-٣)!}$

فكرة مفيدة

لحل المسائل

إذا كان مجموع الأعداد في المقام لا يساوي العدد الذي يمثل البسط فهذا دليل على أن ثمة خطأ ما.

(فمثلًا $\frac{!٥}{!٢ \times !٣}$ نلاحظ ٥ ≠ ٢ + ٣)

قانون:

$\binom{ن}{ن} = \binom{ن}{صفر} = ١$ ، $\binom{ن}{١} = ن$

تفسير

$\binom{ن}{ن} = ١$: يمكن اختيار «ن» عنصر من بين «ن» عنصر مع إهمال الترتيب بطريقة واحدة.

$\binom{ن}{صفر} = ١$: يمكن اختيار «صفر» عنصر من بين «ن» عنصر بطريقة واحدة.

$\binom{ن}{١} = ن$: يمكن اختيار عنصر واحد من بين «ن» عنصر بـ «ن» طريقة مختلفة.

إجابات «حاول أن تحل»

❶ أحمد – خالد – نادر؛ أحمد – خالد – جابر؛ أحمد – خالد – حمد؛ أحمد – نادر – جابر؛ أحمد – نادر – حمد؛ أحمد – جابر – حمد؛ خالد – نادر – جابر؛ خالد – نادر – حمد؛ خالد – جابر – حمد؛ نادر – جابر – حمد.

يمكن تشكيل ١٠ توافيق لاختيار ٣ طلاب من بين ٥ طلاب $= \binom{١٠}{٣}$.

❷ $\binom{٦}{٤} = \frac{!٦}{!(٤)\,!(٦ - ٤)} = ١٥$ فريقًا.

٣- التدريب والتقييم

تحقق من فهمك

في السؤال (١)، طالما أن في المجموعة عنصرين أو أكثر، فستكون التوافيق دائمًا أقل من التباديل.

إجابات «تحقق من فهمك»

❶ **الترتيب مهم في التباديل، وغيرمهم في التوافيق؛ حيث إن الترتيب مهم في التباديل فتعتبر التباديل المختلفة هي التوافيق نفسها. فمثلًا (أ ب جـ)، (أ جـ ب)، (جـ أ ب) تقابل توفيقة واحدة وهي (أ ب جـ)**

❷ **عدد التوافيق هو نفسه؛ لأن** $\binom{٧}{٢} = \frac{!٧}{!٥ \times !٢}$ **هو نفسه** $\binom{٧}{٥} = \frac{!٧}{!٢ \times !٥}$.

❸ ١، ١. **أنهما مساويان للوحدة.**

تقييم بديل

المقابلة الشخصية: اطلب إلى الطلاب أن يعدوا قائمة بكل تباديل الأحرف الثلاثة: أ، ب، ت.

أ ب ت، ب ت أ، ت أ ب، أ ت ب، ب أ ت، ت ب أ.

اسأل الطلاب: هل هذه التباديل هي أيضًا توافيق للأحرف أ، ب، ت؟ وما عدد التوافيق؟

نعم، واحدة، حيث إن الأحرف الثلاثة هي نفسها. لأن $\binom{٣}{٣} = ١ = {}^{٣}ل_{٣}$

مثال (٢)

في الألعاب الأولمبية لعام ٢٠٠٨، اختير ٣ لاعبي جمباز من كل منتخب من فرق الدول المشاركة، وكان منتخب الكويت يضم ٦ لاعبين، بكم طريقة يمكن تكوين فريق من ٣ لاعبين كويتيين؟

الحل:

بما أن الترتيب غير مهم في عملية الاختيار، فعدد طرائق تكوين الفريق يعطى بقانون التوافيق:

$\binom{٦}{٣} = {}^{٦}ت_{٣} = \frac{!٦}{!٣ \times !٣} = ٢٠$

وباستخدام الآلة الحاسبة:

$\frac{!٦}{!٣ \times !٣} = ٦$ ⌨ ٣ ⌨ ٢٠

لدينا ٢٠ طريقة لاختيار فريق من ٣ أعضاء من بين لاعبي منتخب الكويت.

حاول أن تحل

٢ كم فريقًا من ٤ لاعبين يمكن تشكيله من مجموعة من ٦ لاعبين؟

مثال (٣)

في أحد المعارض ٢٠ لوحة فنية، بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من ؟

(أ) ٣ لوحات (ب) ١٧ لوحة

اكتب إجابتك على شكل مضروب. ماذا تلاحظ؟

الحل:

(أ) عدد الطرائق لاختيار ٣ لوحات هو $\binom{٢٠}{٣} = \frac{!٢٠}{!٣ \times !١٧} = ١١٤٠$

(ب) عدد الطرائق لاختيار ١٧ لوحة هو $\binom{٢٠}{١٧} = \frac{!٢٠}{!١٧ \times !٣} = ١١٤٠$

اختيار ١٧ لوحة هو نفسه اختيار ٣ لوحات. فعدد الطرائق في الحالتين هو نفسه.

تحقق من فهمك

١ فيم تختلف التوافيق عن التباديل؟ لماذا توجد توافيق أقل من التراتيب عند الاختيار من مجموعة ما؟

٢ كيف يرتبط اختيار ٢ من ٧ باختيار ٥ من ٧؟ ولماذا؟

٣ أوجد ${}^{٤}ت_{٠}$ ، ${}^{٤}ت_{١}$. ماذا تلاحظ؟

١٨٣

تمرّن ٣-١٠

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

التوافيق والمجموعات

Combinations and Groups

تدرَّب وطبِّق

ابدأ في أي المواقف التالية يكون الترتيب مهمًّا؟

(١) ستمنح ميداليات ذهبية، وفضية، وبرونزية لـ ٣ من بين ٨ متنافسين. _____

_____

(٢) ستعطى شهادات التفوق لـ ٥ من بين ١٠ متقدمين. _____

_____

(٣) سيتم اختيار ٤ طلاب من بين ١٠ طلاب للسباحة بطول حمام السباحة مرة واحدة فراشة، ظهر، صدر أو سباحة حرة في المسابقة الأساسية. _____

_____

(٤) سيحضر ٤ طلاب دورة الألعاب الأولمبية القادمة. _____

_____

(٥) **البيولوجيا:** بكم طريقة يمكن اختيار ٢٤ شتلة من مجموعة مؤلفة من ٩٦ شتلة لاختبار تحسن النمو؟ اكتب الإجابة في صورة مضروب. _____

_____

أوجد قيمة كلّ مما يلي:

(٦) $\binom{١٢}{٣}$ _____

(٧) ${}^{١٠}ت_{٣}$ _____

(٨) ${}^{١٠}ت_{٨}$ _____

(٩) $\binom{٥}{٢}$ _____

(١٠) بكم طريقة يمكن اختيار طبقتين لشطيرة الجبنة من مجموعة ٦ طبقات؟ _____

_____

٨١

اختبار سريع

اختر الإجابة الصحيحة:

١ يسمى الاختيار الذي يكون الترتيب فيه غير مهم (توفيقة أو تبديلة). توفيقة

٢ لشيئين أو أكثر، يكون عدد التباديل دائمًا (أكثر أو أقل) من عدد التوافيق. أكثر

٣ الاختيار الذي يكون الترتيب فيه مهمًّا يسمى (توفيقة أو تبديلة). تبديلة

٤ لإيجاد عدد (التوافيق أو التباديل) تحذف أي ترتيبات إضافية، للعناصر نفسها. التوافيق

إجابات «المرشد لحل المسائل»

١ ٣.

٢ تاريخ، قصة قصيرة، جغرافيا، رياضيات، مجلّة ثقافية.

٣ عدد الطرائق الممكن بها التجميع.

٤ (أ) ٥! = ١٢٠

(ب) ٣! = ٦

(جـ) ٢! = ٢

٥ (ب)

٦ ١٠ طرائق.

٧

تاريخ	جغرافيا	قصة قصيرة	رياضيّات	مجلة ثقافية
أ	ب	جـ	د	هـ

أ – ب – جـ؛ أ – ب – د؛ أ – ب – هـ؛ أ – جـ – د؛ أ – جـ – هـ؛ أ – د – هـ؛ ب – جـ – د؛ ب – جـ – هـ؛ ب – د – هـ؛ جـ – د – هـ.

٨ $\binom{٧}{٤} = \frac{!٧}{!٤\,!(٧-٤)} =$ ٣٥ طريقة.

المرشد لحلّ المسائل (١٠-٣)

بكم طريقة ممكنة يمكنك اختيار ٣ كتب من بين مجموع الكتب: كتاب تاريخ أو قصة قصيرة أو كتاب جغرافيا أو كتاب رياضيات أو مجلّة ثقافية؟

افهم

١ حوّط عدد الكتب التي ستختارها.

٢ ضع خطًّا تحت الكتب التي يمكن اختيارها.

٣ هل المطلوب منك هو كيفية تجميع الكتب أم عدد الطرائق الممكن بها التجميع؟

خطط

٤ اكتب كلًّا مما يلي مستخدمًا المضروب.

(أ) عدد طرائق اختيار العناصر كلّها وترتيبها.

(ب) عدد طرائق ترتيب العناصر المختارة.

(جـ) عدد طرائق ترتيب العناصر غير المختارة.

٥ أيّ من الصيغ التالية يبين عدد طرق اختيار الكتب؟

(أ) $\frac{!٥}{!١٣}$ (ب) $\frac{!٥}{!١٣ \times !١٢}$

(جـ) $\frac{!١٣ \times !١٢}{!٥}$ (د) $\frac{!١٣}{!١٢}$

حل

٦ بكم طريقة يمكنك اختيار ٣ كتب من المجموعة؟

تحقق

٧ تحقق من إجابتك بتنظيم قائمة تضم أنواع الكتب التي يمكن اختيارها، وارمز إليها بالأحرف التالية: أ، ب، ج، د، هـ.

حل مسألة أخرى

٨ بكم طريقة يمكنك صنع فطيرة من اللحم تعلوها ٤ طبقات من النكهات المختلفة، علمًا أن الطبقات المتوفرة هي: الطماطم والجبن والبصل والمخلّل والخسّ، والصلصة والتوابل؟

١٨٤

(١١) في رحلة مدرسية إلى إحدى الحدائق بعد تناول طعام الغداء، احتاج المشرفون إلى ١٠ طلاب من بين الـ ٣٠ لتنظيف المكان، بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار فريق التنظيف؟

(١٢) بكم طريقة يمكن اختيار ٥ لاعبين من بين ١٢ لاعبًا من لاعبي كرة السلة، مع عدم الأخذ بعين الاعتبار مركز لعب كلّ منهم؟

(١٣) طلب من أحد الفصول الإجابة عن ٨ أسئلة فقط من بين ١٠ في اختبار ما، هل يتساوى ذلك مع طلب حذف سؤالين من العشرة؟

(١٤) يوجد ٨ أنماط شعرية لكتابة قصيدة غنائية، إذا طلب منك كتابة مقال يصف ثلاثة من هذه الأنماط فبكم طريقة يمكنك اختيارها؟

(١٥) **الاحتمال**: يتطلب الفوز في لعبة معينة تخمين ٦ أعداد من بين الأعداد من ١ إلى ٥٣، وتختار هذه الأعداد الستة عشوائيًّا، لماذا يستحيل الفوز، تقديريًّا، في هذه اللعبة؟

(١٦) في مسابقة الغطس الأولمبية، يسجل ٧ حكام درجاتهم لكل غطسة، إذا ألغيت أكبر درجة وأصغر درجة، فبكم طريقة يمكن إلغاء درجات اثنين من الحكام؟

(١٧) **التحضير للاختبار**: لدى محل لبيع الزهور ١٢ نوعًا من الزهور. لعمل باقة من الزهور يمكنك اختيار ٨ أنواع مختلفة منها، فإن عدد الطرق التي يمكن بها اختيار ٨ زهرات هو:

(أ) ٩٦ (ب) ٤٩٥ (جـ) ٨١٢ (د) ٤٠ ٣٢٠

٨٢

KuwaitMath.com

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

❶ $ن_{١٠}^{١٢} = \frac{!١٢}{!(١٠ - ١٢)!١٠}$ = ٦٦ طريقة.

❷ جمع التوافيق التالية:

$ن_{٠}^{١٢} + ن_{١}^{١٢} + ن_{٢}^{١٢} + ... + ن_{١١}^{١٢} + ن_{١٢}^{١٢}$ = ٤٠٩٦.

❸ $ن_{٣}^{١٠} \times ن_{٣}^{٧}$ = ١٢٠ × ٣٥ = ٤ ٢٠٠.

❹ ٥ طلاب، لأن $\frac{!١٠}{م!\,(١٠ - م)!}$ تصل إلى أكبر قيمة عندما تساوي م نصف ١٠.

حل المسائل والتفكير المنطقي

❶ **التفكير الناقد:** بكم طريقة يمكنك تقديم وجبة خفيفة لفريق من ١٠ سباحين إذا كان لديك ١٢ وجبة خفيفة مختلفة، و بحيث يأخذ كل سباح وجبة واحدة؟

.....

.....

❷ **اختر إستراتيجية:** بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة مكونة من صفر إلى ١٢ شيئًا من بين ١٢ شيئًا؟

.....

.....

❸ **التفكير الرياضي:** بكم طريقة يمكنك أن تختار ٣ لاعبين من بين ١٠ لاعبين لفريق كرة السلة، ثمّ اختيار ٣ لاعبين من بين اللاعبين السبعة الباقين لفريق آخر؟

.....

.....

❹ تريد اختيار مجموعة من بين ١٠ طلاب. ما عدد طلاب المجموعة التي ستختارها بحيث تكون عدد الخيارات أكبر ما يمكن؟

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًا.
- حل مسألة أبسط.

١٨٥

مراجعة الوحدة العاشرة (أ)

أوجد قيمة:

(١) ٩! _____ (٢) ١١! _____ (٣) (١٥ – ٨)! _____

(٤) ٨(٧!) _____ (٥) $ل_{٥}^{١٢}$ _____ (٦) $ن_{١}^{١٤}$ _____

(٧) يحتوي كيس على مجموعة من الكرات ذات الألوان الأزرق والأخضر والأحمر، نظّم قائمة توضح النواتج الممكنة عند سحب كرتين واحدة تلو الأخرى؟ _____

_____

_____

(٨) افرض أنك سحبت كرة واحدة من الكيس (تمرين ٧)، ثم ألقيت قطعة نقود مرتين متتاليتين، ارسم مخطط الشجرة البيانية لتوضيح النواتج الممكنة.

ملاحظة: صورة (ص)؛ كتابة (ك).

بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلّ من الكلمات التالية بحيث يستخدم كل حرف مرة واحدة؟ وليس شرطًا أن تكون الحروف كلمة:

(٩) مربعات _____

(١٠) معيّن _____

(١١) استطلاع _____

(١٢) في المدينة الترفيهية، اختار فهد ٥ ألعاب لركوبها، بكم ترتيب مختلف يمكنه الركوب؟ _____

(١٣) خطط مجموعة من الأصدقاء لتقاسم ٦ أطباق من بين ٣٦ طبقًا من قائمة الطعام في مطعم صيني، بكم طريقة يمكنهم اختيار الأطباق؟ _____

٨٣

KuwaitMath.com

الموضوع: يوم ميلاد سعيد

كيفية التعامل مع هذه الصفحة

تقدم هذه الصفحة موضوع هذا الجزء، أيام الميلاد، وتناقش حقائق مهمة عن أيام الميلاد، كميلاد التوائم.

التاريخ

اطلب إلى الطلاب كتابة تقرير مفصل عن التواريخ المهمة لدولة الكويت.

العلوم

شجع الطلاب على القيام بأبحاث حول ولادة التوائم، والمشاكل التي قد تسبب حالات التصاق هذه التوائم بعضها ببعض.

إجابات الأسئلة

١ قد تختلف الإجابات.

٢ لا يقع دائمًا يوم العيد الوطني للكويت في اليوم نفسه من كل عام لأن عدد أيام السنة ليس مضاعفًا لعدد أيام الأسبوع أي للرقم ٧.

٣ كتوأم ثنائي.

KuwaitMath.com

٤-١٠

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحسب الاحتمال.

المصطلحات الأساسية

- تجربة، نواتج، فضاء العينة، حدث، احتمال.

٤-١٠

الاحتمال
Probability

سوف تتعلم
- حساب الاحتمال.

من الاستخدامات
- يستخدم الاحتمال لتوقع المكان الذي سيحدث فيه الإعصار.

◄ صلة الدرس لقد سبق أن استخدمت طرائق لعد النواتج الممكنة. ستتعلم في هذا الدرس حساب فرصة حدوث ناتج ما. ►

استكشف الاحتمال

إنه أمر مؤكد

١ ارسم خط أعداد يشبه الخط الموضح أدناه:

صفر ٠,١ ٠,٢ ٠,٣ ٠,٤ ٠,٥ ٠,٦ ٠,٧ ٠,٨ ٠,٩ ١

سم على خط الأعداد النقاط التي تبين فرصة حدوث الأحداث التالية، علمًا أن الصفر يدل على أن الحدث مستحيل وأن الـ ١ يدل على أن الحدث مؤكد.

(أ) الحصول على ٦ عند رمي مكعب مرقم مرة واحدة.

(ب) الحصول على كتابة عند رمي قطعة نقود معدنية مرة واحدة.

(جـ) اختيار زوج من الجوارب من درج يحوي زوجين من الجوارب وذلك من دون النظر داخله.

(د) سحب بطاقة تتضمن حرفًا من مجموعة ١٠ بطاقات تتضمن أول ١٠ أحرف من حروف الهجاء العربية.

(هـ) الحصول على عدد أكبر من ٦ عند رمي مكعب مرقم مرة واحدة.

(و) الحصول على كتابة أو صورة عند رمي قطعة نقود معدنية مرة واحدة.

٢ علل كيفية تصنيفك للأحداث وتمثيلها على خط الأعداد، وهل وضع كل شخص في مجموعتك النقاط بالترتيب نفسه؟

٣ صف الأحداث التي استطعت وضعها في صفر أو في ١.

تعلم الاحتمال

نفرض أنك ترمي قطعة نقود معدنية عشوائيًا للتجربة. يمكن أن تظهر قطعة النقود الصورة أو الكتابة فهما نتيجتان متساويتان في الفرص أو نواتج ممكنة.

تمثل مجموعة النواتج الممكنة كلها في تجربة ما فضاء العينة. وغالبًا ما نهتم بفرصة حدوث حدث معين، ويسمى ذلك احتمال الحدث.

المصطلحات الأساسية
- تجربة Experiment
- نواتج Outcomes
- فضاء العينة Sample Space
- حدث Event
- احتمال Probability

١٨٧

مراجعة

اكتب كل كسر في أبسط صورة:

١) $\frac{٢٤}{٣٠}$ $\frac{٤}{٥}$

٢) $\frac{١٨}{٥٤}$ $\frac{١}{٣}$

٣) $\frac{١٠٠}{٤٥٠}$ $\frac{٢}{٩}$

٤) $\frac{٢٤}{٧٢}$ $\frac{١}{٣}$

٥) $\frac{٥٧}{١٩٠}$ $\frac{٣}{١٠}$

١ – التمهيد

استكشف

الغاية

يقرر الطلاب احتمال حدوث خمسة أحداث مختلفة، ثم يناقشون قراراتهم مع بقية زملاء المجموعة، وينظمون قائمة بأمثلة عن أحداث يعتقدون أنها إما مستحيلة أو مؤكدة.

التقييم المستمر

بينما تتابع نشاط الطلاب في الفصل تأكد من أنهم يتبعون التعليمات، هل رسموا خط الأعداد كما يجب؟ هل يفهمون أنهم سيوضحون على خط الأعداد ما يعتقدون أنه احتمال كل حدث؟

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

نظّم قائمة بخمسة أحداث إضافية، ووضح حدوث كل منها.

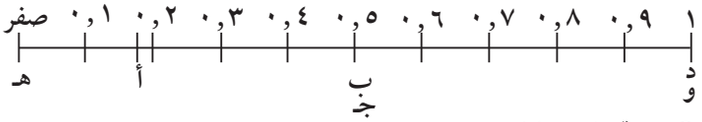
KuwaitMath.com

المتابعة

ادع الطلاب إلى مناقشة إجاباتهم عن الخطوتين (٢) و (٣)، ثم نظم قائمة تتضمن الاقتراحات التي اقترحها طلاب الفصل في الخطوة رقم (٣).

إجابات «استكشف»

❶



❷ قد تختلف الإجابات.

❸ **احتمال حدوث د يساوي ١، لأن سحب أي بطاقة يعطي حرفًا من حروف الهجاء العربيّة. أما احتمال حدوث هـ فيساوي صفرًا، لأنه لا يوجد رقم أكبر من ٦ على وجوه المكعب المرقم. والحصول على كتابة أو صورة عند رمي قطعة معدنية واحدة مرة واحدة يساوي ١ ($\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}$).**

٢ - التعليم

تعلم

فسر أن احتمالًا مثل «واحد من أربعة» «يمكن كتابته ٠,٢٥، $\frac{١}{٤}$، ١ : ٤، أو ٢٥٪»، يجب أن يكون الطلاب على وعي بأن «ل» في الصيغة ترمز إلى الاحتمال.

أمثلة بديلة

❶ يلعب كرم وسيد لعبة اختيار بطاقة من ٣ بطاقات ملونة: أخضر، وأحمر، وأزرق. اختار سيد «بطاقة» عشوائيًّا، وكانت خضراء ففاز في اللعبة. ما نواتج فضاء العينة؟ وما النواتج المحققة لحدث اختيار بطاقة خضراء؟ وما احتمال وقوع حدث اختيار بطاقة خضراء؟

فضاء العينة:

٣ نواتج ← بطاقة خضراء، بطاقة حمراء، بطاقة زرقاء.

حدث اختيار بطاقة خضراء:

١ ناتج ← خضراء

احتمال اختيار سيد بطاقة خضراء في دوره التالي $\frac{١}{٣}$.

يمكن كتابة الاحتمال على شكل كسر عشري أو كسر أو نسبة أو نسبة مئوية.

$$\text{ل (الحدث)} = \frac{\text{عدد النواتج في الحدث}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

أمثلة

❶ يلعب فهد وخالد لعبة باستخدام مكعب مرقم. إذا رمى فهد المكعب المرقم وحصل على ٣ أو أكثر يفوز في اللعبة.
ما النواتج في فضاء العينة؟ ما النواتج المحققة للحدث «٣ أو أكثر»؟ ما احتمال الحدث «٣ أو أكثر»؟

تذكر:
عندما نقول مكعبًا مرقمًا نعني مكعبًا مرقمًا: من ١ - ٦

الحل:
فضاء العينة: ٦ نواتج ← ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦
الحدث «٣ أو أكثر»: ٤ نواتج ← ٣، ٤، ٥، ٦
احتمال حصول فهد على «٣ أو أكثر» في رميته $\frac{٤}{٦}$ أو $\frac{٢}{٣}$.

❷ تحاول أسيل تخمين يوم مولد صديقتها إسراء. ما احتمال أن تخمن الشهر الصحيح في محاولتها الأولى؟ (لنفترض أن الاحتمالات متساوية ليوم مولد أي شخص في أي شهر).

الحل:
في السنة ١٢ شهرًا بالتالي يساوي عدد نواتج فضاء العينة ١٢. يمكن أن يكون فيه مولد إسراء في خلال شهر واحد فقط وبالتالي يساوي عدد نواتج الحدث ١.
ل (تخمين الشهر الصحيح) = $\frac{١}{١٢}$

حاول أن تحل

١ ما النواتج في فضاء العينة في كل مما يلي؟ وما احتمال الحدث؟

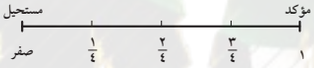
(أ) إذا رمى أحمد مكعبًا مرقمًا وحصل على ٥ أو أكثر، يفوز في اللعبة.

(ب) عند اختيار سمكة واحدة من سلة تحوي أربع سمكات وهي (زبيدي، نقرور، صبور، هامور) والحصول على سمكة زبيدي.

يكتب احتمال وقوع حدث ما دائمًا على شكل عدد بين الصفر وواحد.

إذا كان عدد النواتج في الحدث يساوي الصفر فإن الحدث يسمى «الحدث المستحيل» واحتماله يساوي صفرًا.

إذا كان عدد النواتج في الحدث يساوي عدد النواتج في فضاء العينة فإن الحدث يسمى «الحدث المؤكد» واحتماله يساوي ١.



تمرّن ٤-١٠

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

الاحتمال
Probability

تدرّب وطبّق

(١) ابدأ أوجد احتمال الحصول على العدد ٢ عند رمي حجر نرد مرقم بالأعداد من ١ إلى ٦:
(أ) اكتب كل نواتج فضاء العينة. _____
(ب) ما عدد النواتج في فضاء العينة؟ _____
(جـ) ما عدد نواتج الحصول على ٢ في فضاء العينة؟ _____
(د) اكتب نسبة مستخدمًا عن (ب)، (جـ) لإيجاد الاحتمال. _____
(هـ) اكتب الاحتمال بشكل كسر، وكسر عشري، ونسبة مئوية. _____

(٢) **التاريخ:** تاريخ مولد لاعبين لإحدى الدول هو ٢ نوفمبر، ما احتمال أن يشترك شخصان في الاحتفال بذكرى ميلادهما في اليوم نفسه من شهر نوفمبر؟ (عدد أيام شهر نوفمبر هو ٣٠ يومًا). _____

اكتب جميع النواتج الممكنة (فضاء العينة):

(٣) رمي قطعة نقود مرة واحدة. _____

(٤) سحب كرة عشوائيًّا من كيس فيه ٣ كرات حمراء، ٢ خضراء، ٣ زرقاء.

اكتب الاحتمال على صورة كسر، وكسر عشري، ونسبة مئوية:

(٥) الحصول على عدد زوجي عند رمي حجر نرد مرقم مرة واحدة. _____

(٦) سحب جورب أحمر من درج فيه جوارب حمراء فقط. _____

(٧) حضور حصة رياضيات في يوم رأس السنة الهجرية. _____

(٨) يوم ميلاد شخص ليس الثالث والعشرين من يوليو. _____

❷ وجدت ندى أن سها مولودة في شهر مايو، ما احتمال أنه يمكنها تخمين التاريخ الصحيح لميلاد سها في أول محاولة؟

يوجد ٣١ يومًا في مايو، فعدد النواتج في فضاء العينة هو ٣١، يمكن فقط أن تولد «سها» في يوم واحد، فيكون عدد النواتج ١، ويكون الاحتمال:

ل (تخمين التاريخ الصحيح) = $\frac{١}{٣١}$.

❸ مع خالد ٦ حبات من السكريات في جيبه: ٢ سوداء، ٢ حمراء، ٢ خضراء. ما احتمال أن القطعة التالية التي يخرجها من جيبه عشوائيًّا ستكون:

(أ) سوداء؟

ل (سوداء) = $\frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

(ب) سوداء أو حمراء أو خضراء؟

ل (سوداء أو حمراء أو خضراء) = $\frac{٦}{٦}$ = ١ (المؤكد)

(جـ) صفراء؟

ل (صفراء) = ٠ (المستحيل)

(د) ليست سوداء؟

ل (ليست سوداء) = $\frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

إجابات «حاول أن تحل»

❶ (أ) ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦؛ $\frac{١}{٣}$.

(ب) زبيدي، نقرور، صبور، هامور؛ $\frac{١}{٤}$.

❷ (أ) $\frac{١}{٢}$؛ (ب) $\frac{١}{٢}$؛ (جـ) $\frac{١}{٦}$؛ (د) ١؛ (هـ) ٠

٣- التدريب والتقييم

تحقق من فهمك

ذكر الطلاب، الذين يجدون صعوبة في السؤال (٢)، بأن مجموع احتمالات وقوع حدث، وعدم وقوعه هو ١.

إجابات «تحقق من فهمك»

❶ **أحيانًا ما يغطي الحدث نواتج عديدة (مثلًا: رمي مكعب مرقم للحصول على ٥ أو ٦، وهذا الحدث لا يساوي فضاء العينة)؛ ويمكن أن يساوي الحدث فضاء العينة. (مثلًا: عند رمي مكعب مرقم نحصل على عدد أصغر من ٧، هذا الحدث يساوي فضاء العينة).**

مثال (٣)

لنفترض أنك أدرت الدوارة إلى اليسار، ما احتمال أن يتوقف مؤشرها عند اللون:

(أ) الأحمر (ب) الأحمر أو الأزرق

(جـ) الأخضر (د) غير الأحمر

الحل:

(أ) ل (أحمر) = $\frac{٢}{٥}$

(ب) ل (أحمر أو أزرق) = ١ (مؤكد)

(جـ) ل (أخضر) = صفر (مستحيل)

(د) ل (غير الأحمر) = $\frac{٣}{٥}$

يمكنك أن تلاحظ أن احتمال الحصول على اللون الأحمر زائد احتمال الحصول على لون غير اللون الأحمر هو ١.

مجموع احتمال وقوع حدث واحتمال عدم وقوعه يساوي ١.

حاول أن تحل

❷ عند رمي مكعب مرقم من ١ - ٦ مرة واحدة، أوجد احتمال الحصول على:

(أ) عدد أولي (ب) عدد غير أولي

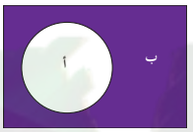
(جـ) عدد أكبر من ٥ (د) عدد أصغر من ٧

(هـ) كسر بين ١ و٢

تحقق من فهمك

❶ اذكر الفرق بين فضاء العينة والحدث. هل يمكن أن يكون الحدث يساوي فضاء العينة؟

❷ في الشكل أدناه، إذا كان الحدثان أ، ب يمثلان الإمكانيات كلها في فضاء عينة، ما الذي تعرفه عن ل (ب)؟ ولماذا؟



١٨٩

(٩) في عيد ميلاد محمد كانت هديته من أحد أصدقاءه اختيار عصفور من قفص، فأغمض عينيه والتقط واحدًا. إذا كان الموجود عندئذ ٣ ذكور، ٢ إناث، فما فرصة أن يكون عصفور محمد الذي اختاره أنثى؟

(١٠) **العلوم:** تحدّد الكروموسومات ما إذا كان الجنين ذكرًا أم أنثى، إذا كان احتمال أن ١٣ جنينًا كلهم ذكورهو $\frac{١}{٨١٩٢}$. فما احتمال أن يكونَ الـ ١٣ جنينًا ليسوا ذكورًا كلهم؟

مساحة كلّ من القطاعين (أ) و (ب) من اللوحة الدوارة ذات المؤشر هو $\frac{١}{٤}$ مساحة اللوحة:

(١١) ما احتمال وقوف المؤشر على القطاع (جـ)؟

(١٢) ما القطاعان اللذان لهما احتمالان متساويان؟

(١٣) ما احتمال عدم وقوف المؤشر على القطاع (ب)؟

(١٤) **الحس العددي:** افرض أنك تختار عشوائيًّا إجابات عن امتحان ما. فما احتمال اختيارك للإجابة الصحيحة في كل موقف مما يلي:

(أ) سؤال اختيار من متعدد فيه ٤ اختيارات.

(ب) سؤال صح أو خطأ.

(١٥) **التحضير للاختبار** الاحتمال الذي حدوثه الأكبر فيما يلي هو؟

(أ) رمي عملة معدنية وظهور صورة على الوجه الظاهر.

(ب) رمي عملة معدنية وظهور كتابة أو صورة على الوجه الظاهر.

(جـ) رمي مكعب مرقم وظهور رقم ٦ على الوجه الظاهر.

(د) رمي مكعب مرقم وعدم ظهور الرقم ٦ على الوجه الظاهر.

٨٥

KuwaitMath.com

❷ ل (ب) = ١ − ل (أ)؛ لأن ل (أ) + ل (ب) = ١ .

تقييم بديل

التقييم الذاتي: ادع الطلاب إلى تقييم فهمهم للاحتمال، وفضاءات العينة، والنواتج، والأحداث، هل ما يزال شيء ما يسبب صعوبات؟

اختبار سريع

يوجد في إحدى الحقائب ٥ كرات خضراء، ٦ حمراء، ١ بيضاء. إذا اختيرت كرة واحدة عشوائيًّا (من دون النظر إلى داخل الكيس)، فما احتمال أن يكون لونها:

❶ أخضر؟ $\frac{٥}{١٢}$ ❷ أحمر؟ $\frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

❸ أبيض؟ $\frac{١}{١٢}$ ❹ ليس أبيض؟ $\frac{١١}{١٢}$

إجابات «المرشد لحل المسائل»

❶ ٣ قطاعات.

❷ القطاعان الأصفر والأخضر.

❸ $\frac{١}{٢}$.

❹ بقسمته إلى النصف.

❺ (أ).

❻ أحمر، أحمر، أخضر، أصفر.

❼ أحمر، أحمر، أصفر.

❽ $\frac{٣}{٤}$.

❾ نطرح احتمال توقف المؤشر على الأخضر من ١ .

❿ $\frac{٤}{٥}$.

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

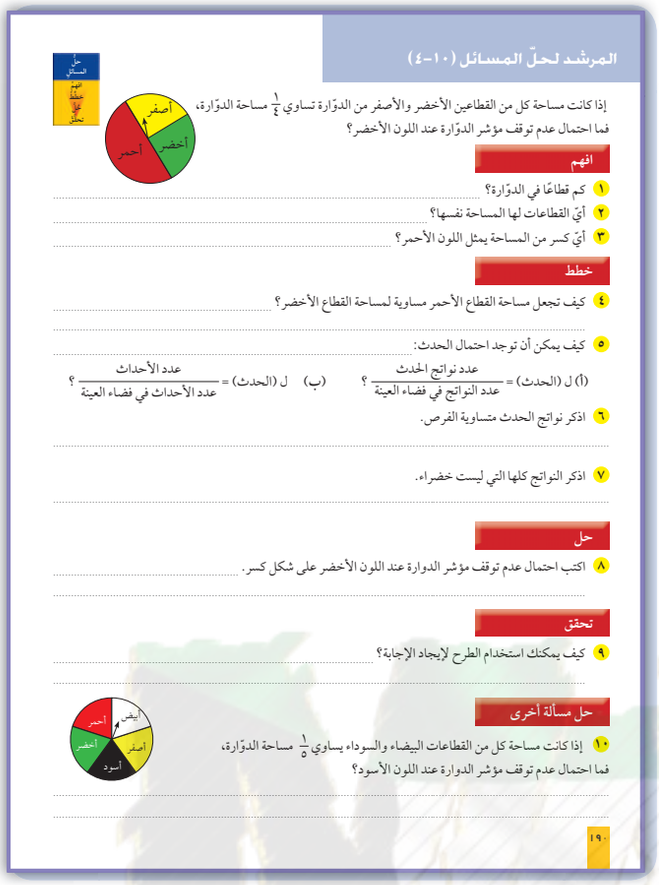
❶ (أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$

❷ دائمًا.

❸ مستحيل.

❹ لأن عدد حدث نواتج ما لا يمكن أن يكون أكبر من عدد نواتج فضاء العينة.

الحصول على عدد أكبر من صفر عند رمي مكعب مرقم.



المرشد لحلّ المسائل (١٠-٤)

إذا كانت مساحة كل من القطاعين الأخضر والأصفر من الدوّارة تساوي $\frac{١}{٤}$ مساحة الدوّارة، فما احتمال عدم توقف مؤشر الدوّارة عند اللون الأخضر؟

أصفر أخضر أحمر

افهم

١ كم قطاعًا في الدوّارة؟

٢ أيّ القطاعات لها المساحة نفسها؟

٣ أيّ كسر من المساحة يمثل اللون الأحمر؟

خطط

٤ كيف تجعل مساحة القطاع الأحمر مساوية لمساحة القطاع الأخضر؟

٥ كيف يمكن أن توجد احتمال الحدث:

(أ) ل (الحدث) = عدد نواتج الحدث / عدد النواتج في فضاء العينة ؟ (ب) ل (الحدث) = عدد الأحداث / عدد الأحداث في فضاء العينة ؟

٦ اذكر نواتج الحدث متساوية الفرص.

٧ اذكر النواتج كلها التي ليست خضراء.

حل

٨ اكتب احتمال عدم توقف مؤشر الدوارة عند اللون الأخضر على شكل كسر.

تحقق

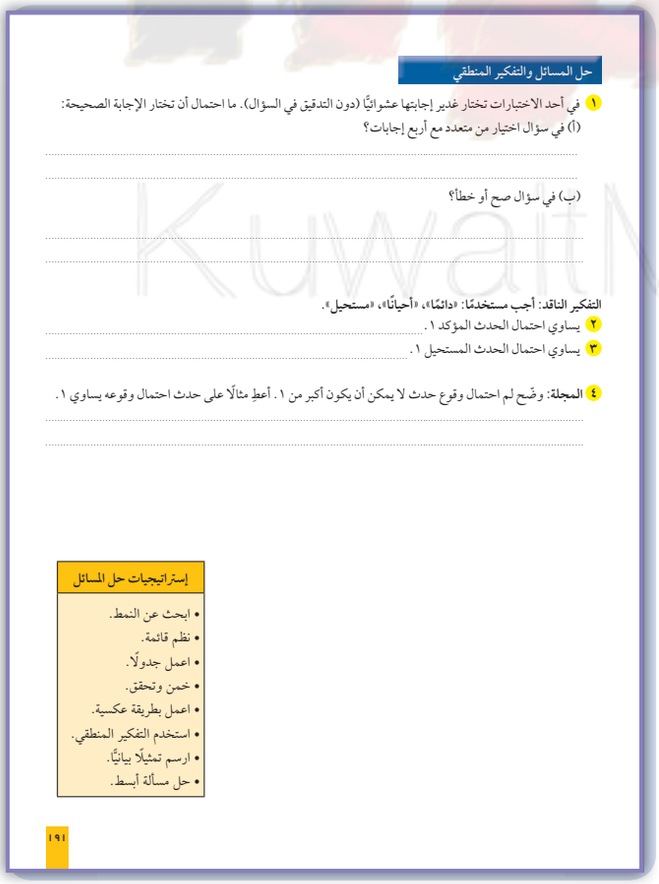
٩ كيف يمكنك استخدام الطرح لإيجاد الإجابة؟

حل مسألة أخرى

١٠ إذا كانت مساحة كل من القطاعات البيضاء والسوداء يساوي $\frac{١}{٥}$ مساحة الدوّارة، فما احتمال عدم توقف مؤشر الدوارة عند اللون الأسود؟

أبيض أحمر أصفر أخضر أسود

١٩٠



حل المسائل والتفكير المنطقي

١ في أحد الاختبارات تختار غدير إجابتها عشوائيًّا (دون التدقيق في السؤال). ما احتمال أن تختار الإجابة الصحيحة:

(أ) في سؤال اختيار من متعدد مع أربع إجابات؟

(ب) في سؤال صح أو خطأ؟

التفكير الناقد: أجب مستخدمًا: «دائمًا»، «أحيانًا»، «مستحيل».

٢ يساوي احتمال الحدث المؤكد ١ .

٣ يساوي احتمال الحدث المستحيل ١ .

٤ **المجلة**: وضّح لم احتمال وقوع حدث لا يمكن أن يكون أكبر من ١ . أعطِ مثالًا على حدث احتمال وقوعه يساوي ١ .

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

١٩١

KuwaitMath.com

١٠ – ٥

منظم الدرس

أهداف الدرس

في نهاية الدرس يكون الطالب قادرًا على أن:

- يستخدم التجارب لإيجاد الاحتمالات.

المصطلحات الأساسية

- احتمال نظري، احتمال تجريبي، محاولة، احتمال هندسي.

الأدوات المستخدمة

- قطع نقود معدنية.

مراجعة

باستخدام آلة حاسبة، احسب النسب المئوية:

١) $\frac{٤}{١٢٩} =$ ٪٣,١

٢) $\frac{٧}{٢٣٣} =$ ٪٣

٣) $\frac{٩}{١٢٣} =$ ٪٧,٣

٤) $\frac{٨}{٢١٧} =$ ٪٣,٧

٥) $\frac{١٢}{٤٨٧} =$ ٪٢,٥

١ – التمهيد

استكشف

الغاية

يرمي الطلاب قطع النقود المعدنية في الهواء لمعرفة مدى قرب توقعاتهم من العدد الفعلي في الحصول على صورة.

التقييم المستمر

في الخطوة رقم (٣)، تحقق من أن الطلاب يوكلون أحد زملائهم مسؤولية عد مرات رمي قطعة النقود المعدنية، و يوكلون آخر عد مرات الحصول على صورة.

KuwaitMath.com

للمجموعات التي تنهي عملها مبكرًا

كرر التجربة مستخدمًا يوم مولد شخص آخر.

المتابعة

هل كان احتمال الفصل أقرب إلى النتائج المتوقعة منه إلى احتمالات أفراد المجموعة؟ لماذا؟

يجب أن يكون احتمال الفصل قريبًا من $\frac{\text{ن}}{٢}$، وعمومًا يكون الاحتمال التجريبي أقرب إلى الاحتمال المتوقع لعينة كبيرة الحجم. (لكن هذه ليست بالضرورة هي الحال هنا).

إجابات «استكشف»

١ –٦ قد تختلف الإجابات.

٢ – التعليم

تعلم

يمكن أيضًا وصف الاحتمال النظري بالقول عما «يجب» حدوثه في تجربة ما. أي أنه يساوي $\frac{\text{عدد النواتج في الحدث}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$.

أمثلة بديلة

١ (أ) ما الاحتمال النظري للحصول على مجموع زوجي عند رمي زوج من المكعبات المرقمة؟ وما احتمال الحصول على مجموع فردي؟

باستخدام مبدأ العد، يوجد ٦ × ٦ = ٣٦ ناتجًا ممكنًا.

استخدم الشكل والجدول من المثال (١) في كتاب الطالب لحساب النسبة المئوية لاحتمال الحصول على مجموع زوجي:

ل (مجموع زوجي) = ٢,٨٪ + ٨,٣٪ + ١٣,٩٪ + ١٣,٩٪ + ٨,٣٪ + ٢,٨٪ = ٥٠٪.

ثم قم بالأمر ذاته لإيجاد احتمال الحصول على مجموع فردي:

ل (مجموع فردي) = ٥,٦٪ + ١١,١٪ + ١٦,٧٪ + ١١,١٪ + ٥,٦٪ = ٥٠٪.

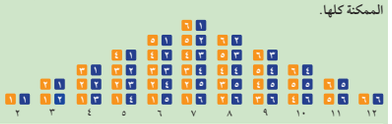
(ب) لإيجاد الاحتمالات التجريبية، ارم زوجًا من المكعبات المرقمة ٥٠ مرة، وتحقق من المجموع الزوجي، والمجموع الفردي اللذين تحصل عليهما.

مثال (١)

(أ) ما الاحتمال النظري للحصول على المجاميع الممكنة عند رمي مكعبين مرقمين؟

الحل:

باستخدام مبدأ العد، تبين أن عدد النواتج الممكنة ٦ × ٦ = ٣٦. يمكن رسم مخطط أو تنظيم قائمة لملاحظة المجاميع الممكنة كلها.



الاحتمالات النظرية											
المجموع	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
عدد المرات	١	٢	٣	٤	٥	٦	٥	٤	٣	٢	١
الاحتمال	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{١}{١٨}$	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{١}{١٨}$	$\frac{١}{٣٦}$
النسبة المئوية	٢,٨٪	٥,٦٪	٨,٣٪	١١,١٪	١٣,٩٪	١٦,٧٪	١٣,٩٪	١١,١٪	٨,٣٪	٥,٦٪	٢,٨٪

(ب) لإيجاد الاحتمالات التجريبية، ارمِ مكعبين مرقمين ٥٠ مرة، وسجل المجاميع التي حصلت عليها.

الحل:

حصل أحد الطلاب على النتائج التالية:

الاحتمالات التجريبية											
المجموع	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
عدد المرات	٢	٤	٣	٥	٧	٨	٩	٥	٤	٣	صفر
الاحتمال	$\frac{١}{١٨}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٧}{٣٦}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{صفر}{٣٦}$
النسبة المئوية	٤٪	٨٪	٦٪	١٠٪	١٤٪	١٦٪	١٨٪	١٠٪	٨٪	٦٪	صفر٪

(ج) قارن بين النسب المئوية للنتائج التجريبية هذه والنسب المئوية النظرية للمجاميع من ٢ إلى ١٢.

الحل:

تتقارب النسب المئوية للاحتمالات التجريبية والنظرية، وكان من الممكن أن تتقارب النتائج إلى حد أكبر لو أجرى الطالب عددًا أكبر من المحاولات.

حاول أن تحل

١ (أ) عند رمي قطعتي نقود معدنيتين متمايزتين، ما الاحتمال النظري للحصول على صورتين؟ وصورة واحدة فقط؟ وعدم الحصول على صورة؟

(ب) لإيجاد الاحتمال التجريبي، ارم قطعتي نقود معدنيتين ٥٠ مرة، سجّل عدد مرات حدوث كل نتيجة.

(جـ) قارن بين النسب المئوية للنتائج التجريبية التي حصلت عليها، والنسب المئوية النظرية.

١٩٣

تمرّن ٥-١٠

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

الاحتمال التجريبي و الاحتمال الهندسي

Experimental and Geometric Probability

تدرّب وطبّق

ابدأ حدّد ما إذا كان كل احتمال مما يلي نظريًا أم تجريبيًا:

(١) احتمال ظهور العدد ٦ على الوجه الظاهر عند رمي حجر نرد هو $\frac{١}{٦}$. _____

_____

(٢) رمي عملتين ١٠٠ مرة وظهور صورتين ٢٣ مرة. _____

_____

(٣) احتفل إبراهيم بعيد ميلاد جدته، وقد طلبت إليه أمه تسجيل رغبات الضيوف لتبدأ بتقطيع ٤ أنواع من الحلوى الشهية وتوزيعها عليهم.

نكهة الحلوى	عدد الطلبات
شوكولاتة	٦٢
كريمة	٢٨
جزر	٢٢
ليمون	١٤

(أ) ما احتمال أن يختار أحد الضيوف حلوى الشوكولاتة؟ _____

_____

(ب) ما احتمال أن يختار أحد الضيوف حلوى الليمون؟ _____

_____

(جـ) ما احتمال أن يختار ضيف آخر أي حلوى خلاف حلوى الليمون؟ _____

_____

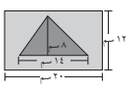
(٤) **الهندسة:** يرمي لاعب سهمًا إلى اللوح المبيّن إلى اليسار، فيقع في مكان ما عشوائيًا.

(أ) ما احتمال وقوعه داخل المثلث؟ _____

_____

(ب) ما احتمال وقوعه خارج المثلث؟ _____

_____



٨٦

برمي زوج المكعبات المرقمة، فقد تحصل على نتائج مشابهة للآتي:

احتمالات تجريبية		
المجموع	زوجي	فردي
التكرار	٢٧	٢٣
النسبة المئوية	٥٤٪	٤٦٪

❷ في شركة لصنع المصابيح، لا تسمح سياسة اختبار الجودة بأن تصنع أنواعًا جديدة من المصابيح دون المرور بـ ٣٧٥ اختبارًا مع وجود ١,٥٪ خطأ صناعيًّا أو أقل. أكمل الجدول التالي لإيجاد احتمال وجود خطأ في كل نوع جديد من المصابيح. ما الأنواع التي قد يتم تصنيعها؟

نوع المصابيح	عدد الاختبارات	المصابيح التي فيها خطأ صناعي	ل(مصباح فيه خطأ صناعي)
أ	٣٧٥	٧	؟
ب	٤١٢	٨	؟
جـ	٣٧٨	٥	؟

$$ل(أ) = \frac{٧}{٣٧٥} \approx ١,٩٪$$

$$ل(ب) = \frac{٨}{٤١٢} \approx ١,٩٪$$

$$ل(جـ) = \frac{٥}{٣٧٨} \approx ١,٣٪$$

(جـ) هي التي سوف يتم تصنيعها.

إجابات «حاول أن تحل»

❶ (أ) $\frac{١}{٤}$ ؛ $\frac{١}{٢}$ ؛ $\frac{١}{٤}$.

(ب) قد تختلف الإجابات.

(جـ) يجب أن يكون بالتقريب: ٢٥٪ الحصول على صورتين، ٥٠٪ الحصول على صورة واحدة فقط، ٢٥٪ عدم الحصول على صورة.

❷ حوالى ٠,٢٤ .

يمكن اعتماد طريقة أخرى لتحديد الاحتمال، وذلك باستخدام نماذج هندسية والمقارنة بين المساحات أو الأطوال أو قياسات أخرى، وهذا ما يعرف بـ الاحتمال الهندسي.

مثال (٢)

وضعت هدية صغيرة عشوائيًّا في قالب حلوى. فرص تواجد الهدية في أي جزء من قالب الحلوى متكافئة. ما احتمال أن تواجد الهدية تحت الأطراف الحمراء؟

الحل:

مساحة المستطيل الكبير = ٩١ سم × ٦١ سم = ٥ ٥٥١ سم^٢.

مساحة المستطيل الداخلي = ٧٦ سم × ٤٦ سم = ٣ ٤٩٦ سم^٢.

مساحة الأطراف الحمراء = ٥ ٥٥١ − ٣ ٤٩٦ = ٢ ٠٥٥ سم^٢.

احتمال أن تكون الهدية تحت جزء من الأطراف الحمراء يساوي $\frac{٢ ٠٥٥}{٥ ٥٥١}$.

٢ ٠٥٥ ÷ ٥ ٥٥١ ≈ ٠,٣٧٠ أي ٣٧٪ .

حاول أن تحل

❷ وضعت هدية صغيرة عشوائيًّا في قالب حلوى. فرص تواجدها في أي جزء من قالب الحلوى متكافئة. ما احتمال أن تكون الهدية تحت إحدى الزهور؟

تحقق من فهمك

❶ اذكر الفرق بين الاحتمال النظري والاحتمال التجريبي. هل الاحتمالات التي يذكرها الأطباء نظرية أم تجريبية؟ هل الاحتمال الهندسي نظري أم تجريبي؟

❷ قال فهد إن الاحتمال التجريبي يمكن أن يكون أكبر من ١، هل هذا صحيح؟ وإذا كان كذلك، فأعطِ مثالًا.

❸ لنفترض أن المدقق في جودة المنتجات أجرى اختبارًا على ٢٠ صندوق شمع. وجد شموعًا معيبة في ١ منها، واعتبر أن المعمل قد فشل في الاختبار. هل هذا عادل؟

معيار الجودة
إذا تخطت النسبة المئوية للعيوب ٦٪، فإن المنتج يفشل في الاختبار.

١٩٤

ارم ٣ عملات معدنية وسجّل النتائج في جدول. استخدم البيانات لإيجاد الاحتمال التجريبي لكل من الأحداث التالية:

(٥) الحصول على ٣ صور وعدم الحصول على كتابة. _____

_____

(٦) الحصول على صورتين وكتابة واحدة. _____

_____

(٧) قارن بين الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري للحصول على ٣ صور وعدم الحصول على كتابة.

_____

_____

(٨) **الهندسة:** يتحرك جُسيم على محيط سداسي ويقف عشوائيًّا عند موقع ما. ما احتمال أن يقف على أقصر ضلع؟ _____

_____

(٩) طلبت مها من أمها أن تسمح لها بفتح واحدة من ٧ هدايا قدمت لها في يوم عيد ميلادها، فأخذت إحدى الهدايا وفتحتها متمنية أن تكون هدية والدها وهي معطف الفرو الذي علمت أنه قد اشتراه لها، فإذا كان يوجد علبتان حجمها أصغر من أن يحتويا هذا المعطف، فما احتمال اختيارها علبة المعطف؟ _____

_____

٨٧

KuwaitMath.com

٣- التدريب والتقييم

تحقق من فهمك

إذا وجد الطلاب صعوبة في الإجابة سريعًا عن السؤال (٢)، فذكرهم بأن ١ هي فرصة وقوع الحدث المؤكد.

إجابات «تحقق من فهمك»

١ إجابة محتملة: الاحتمال النظري يبنى على فرضيات عن الموقف، بينما الاحتمال التجريبي يبنى على كيفية إدارة مواقف سابقة مشابهة، في الماضي؛ فاحتمالات الأطباء عادة تجريبية؛ والاحتمال الهندسي نظري.

٢ لا يمكن.

٣ كلا، لأن الاختبار تضمن عددًا صغيرًا جدًّا من الصناديق، لا يُعتمد على ذلك.

اختبار سريع

اذكر ما إذا كان كل احتمال نظريًّا أم تجريبيًّا:

١ احتمال رمي فنجان ورقي في الهواء، والوقوع على أحد جوانبه بنسبة ٧٣٪ من المرات. تجريبي

٢ احتمال رمي قطعة نقود معدنية والحصول على صورة هو $\frac{١}{٢}$. نظري

٣ احتمال أن لاعبًا سيمرر الكرة لخصمه في الفريق المنافس هو ٥٪. تجريبي

إجابات «المرشد لحل المسائل»

١ تاريخ ميلاد طالب واحد.

٢ ٣٣.

٣ (أ) ٣ (ب) ٣ (جـ) صفر

٤ ٣٣ طالبًا.

٥ (أ) $\frac{٣}{٣٣}$ أو $\frac{١}{١١}$ (ب) $\frac{٣}{٣٣}$ أو $\frac{١}{١١}$ (جـ) صفر

٦ (أ) ٩,٠٩٪ (ب) ٩,٠٩٪ (جـ) ٠٪

٧ (أ) صفر (ب) $\frac{٢١}{٣٥} = \frac{٣}{٥} = ٦٠\%$ (جـ) ١

المرشد لحلّ المسائل (١٠-٥)

حل المسائل

فهم خطط حل تحقق

قام خالد باستطلاع طلاب فصله حول يوم مولد كل منهم. ثم نظّم البيانات في مخطط الساق والأوراق المبين إلى اليسار.

الساق	الأوراق
٠	٨٨٩ ٥٧٧ ١٣
١	٧٨٩ ٦٧٧ ١ ١٣٥
٢	٧٨٩ ٤٦٦ ٢٢٣ ٠٠١
٣	٠٠١

(أ) ما احتمال أن يكون أحد الطلاب قد ولد بتاريخ ١٧؟

(ب) ما احتمال أن يكون أحد الطلاب قد ولد بعد تاريخ ٢٩؟

(جـ) ما احتمال أن يكون أحد الطلاب قد ولد بتاريخ ٤؟

افهم

١ ماذا تمثل كل إجابة؟

خطط

٢ ما عدد نواتج فضاء العينة؟

٣ اكتب عدد الطلاب الذين ولدوا في كل من التواريخ المذكورة.

(أ) يوم ١٧ (ب) يوم ٣٠ أو ٣١ (جـ) يوم ٤

٤ كم طالبًا لم يولد في تاريخ ٤؟

حل

٥ اكتب احتمال أن يكون أحد الطلاب قد ولد في كل من التواريخ المذكورة:

(أ) يوم ١٧ (ب) بعد يوم ٢٩ (جـ) يوم ٤

تحقق

٦ اكتب كلّ احتمال في السؤال رقم ٥ على شكل نسبة مئوية.

(أ) يوم ١٧ (ب) بعد يوم ٢٩ (جـ) يوم ٤

حل مسألة أخرى

٧ أضف يومي مولد آخرين: التاسع، والتاسع والعشرين إلى مخطط الساق والأوراق السابق. ثم أجب عن الأسئلة التالية:

(أ) ما احتمال أن يكون أحد الطلاب قد ولد بتاريخ ٢٥؟

(ب) ما احتمال أن يكون أحد الطلاب قد ولد بعد تاريخ ١٦؟

(جـ) ما احتمال ألا يكون أحد الطلاب قد ولد بتاريخ ١٠؟

١٩٥

مراجعة الوحدة العاشرة (ب)

(١) حدد فضاء العينة لتجربة اختيار عشوائي لحرف من حروف كلمة «حاسوب»، أوجد عدد النواتج لكل حدث،ثم أوجد احتمال كل حدث مما يلي: (أ) اختيار و (ب) اختيار حرف علة (جـ) عدم اختيار ب

فضاء العينة: _____

عدد النواتج: _____

الاحتمال: _____

(٢) إذا رمي حجرا نرد مرقّمان بالأعداد من ١ - ٦، ما الاحتمالات التالية:

(أ) ل(المجموع ١٠) _____

(ب) ل(المجموع أقل من ٧) _____

(جـ) ل (المجموع ٨، ٩، أو ١٢) _____

في الشكل المقابل أجب عن التمارين من ٣ إلى ٦:

(٣) ما احتمال وقوف المؤشر على القطاع «البرتقالي»؟

_____

(٤) ما احتمال وقوف المؤشر على القطاع الوردي؟

_____

(٥) ما احتمال عدم وقوف المؤشر على القطاع البني؟

_____

(٦) إذا تم رمي قطعة نقود معدنية حيث لك تمثل الكتابة وص تمثل الصورة، وحجر نرد يحمل الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦.

(أ) استخدم مخطط الشجرة واكتب فضاء العينة. _____

(ب) أوجد احتمال: صورة وعدد زوجي. _____

_____

٨٨

Kuwait Mathcon

إجابات «حل المسائل والتفكير المنطقي»

١ (أ)

٢ كلا، لأن ٥٠٪ من الأشخاص الذين تناولوا الدواء تحسنت صحتهم، و٥ , ١٢٪ من الأشخاص الذين تناولوا الدواء الذي ليس له أي تأثير تحسنوا.

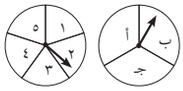
٣ الاحتمال النظري عند سحب كرة من الكيس أن تكون حمراء هو: $\frac{٥}{٨}$ ، أما الاحتمال التجريبي فهو $\frac{٢٩}{٥٠}$.

$\frac{٥}{٨}$ = ٠ , ٦٢٥ وَ $\frac{٢٩}{٥٠}$ = ٠ , ٥٨ النتائج متقاربة.

٤ نعم، مثال ممكن: عند رمي قطعة نقود معدنية مليون مرّة يمكن أن تستقر مرّة أو مرتين على هدفها (كتابة أو صورة)، وبالتالي يكون الاحتمال التجريبي للحصول على الصورة أو الكتابة أصغر من ١.

مراجعة الوحدة العاشرة

(١) ارسم مخطط الشجرة البيانية لتوضح النتائج الممكنة لتدوير اللوحتين الدوارتين:



(٢) يوجد ٥ طرق بين مدينتي أ، ب، ويوجد ٣ طرق بين ب، جـ، ما عدد الطرق بين مدينتي أ، جـ؟ _____

(٣) أوجد قيمة كلّ مما يلي:

(أ) ٥! _____

(ب) (٦ – ٢)! _____

(جـ) $٧^{ن}$ _____

(٤) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة «مستقبل»؟ _____

(٥) نادٍ مؤلف من ٨ أعضاء، بكم طريقة يمكن اختيار: رئيس، نائب رئيس، وأمين سر (للنادي)؟ _____

(٦) يوجد ١٠ أطباق رئيسية في مطعم صيني، بكم طريقة يمكن لأسرة اختيار ٤ أطباق لتقاسمها معًا؟ _____

(٧) ما احتمال الحصول على العدد ٥ أو أكثر عند رمي حجر نرد (مكعب مرقم من ١ إلى ٦)؟ _____

(٨) ما احتمال سحب ورقة لعب من مجموعة ورق اللعب (٥٢ ورقة) وتكون لأحد الأولاد الأربعة؟ _____

(٩) ارم حجر نرد مرقمًا من ١ إلى ٦، ٣٠ مرة، سجّل نتائجك واحسب الاحتمال التجريبي للحصول على العدد ٤ على الوجه الظاهر؟ _____

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ التحضير للاختبار: قدّر احتمال أن يكون أحد الأشخاص قد ولد في شهر مايو.

(أ) ٨ , ٥٪ (ب) ١٢٪ (جـ) $\frac{١١}{١٢}$ (د) ١ , ٦٠٪

٢ التواصل: أعطي ٦٠٠ مريض من أصل ١٠٠٠ دواء جديدًا. أما العدد المتبقي منهم فأعطي له دواء ليس له أي تأثير. من الأشخاص الذين أخذوا الدواء الفعلي، تحسنت حالة ٣٠٠ منهم مقارنة بـ ٥٠ شخصًا من الذين أخذوا الدواء الآخر. هل يمكنك القول أن الدواء فعال؟ ولماذا؟

معيار فعالية الدواء
يعتبر الدواء فعالًا إذا كانت نتائجه إيجابية بنسبة لا تقل عن ٩٠٪ خلال فترة ١٠ أشهر.
FDA Regulations

٣ وضعت أمينة ٥ كرات حمراء اللون، و٣ كرات خضراء اللون في كيس. دون النظر في داخله، سحبت أمينة كرة منه، دونت لونها على ورقة ثم أعادتها إلى الكيس. كررت العملية ٥٠ مرة وحصلت على ٢٩ كرة حمراء. قارن بين الاحتمال النظري والاحتمال التجريبي لسحب كرة حمراء.

٤ التفكير الناقد: إذا كان الاحتمال النظري لوقوع حدث ما يساوي ١، فهل يمكن للاحتمال التجريبي أن يكون أصغر من ١؟

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًا.
- حل مسألة أبسط.

إجابات اختبار الوحدة العاشرة

١ كلا، لأن $\frac{٥}{٤}$ أكبر من ١.

٢ $\frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣} \approx ٦٦,٧٪$.

٣ $\frac{٤٠}{٢٧٠} = \frac{٤}{٢٧} \approx ١٤,٨٪$.

٤ (أ) $\frac{١}{٦} \approx ١٦,٦٪$.

(ب) $\frac{١}{٥} \approx ٢٠٪$.

٥ $١٠! = ٣\,٦٢٨\,٨٠٠$

٦ ${}^{١٠}ن_{٣} = ١٢٠$

٧ $\frac{\text{مساحة الدائرة}}{\text{مساحة المربع}} = \frac{\pi \times (٠,٥)^{٢}}{٤ \times ٤} \approx ٤,٩٪$.

٨
- زرقاء: حمراء، خضراء
- حمراء: زرقاء، خضراء
- خضراء: زرقاء، حمراء

٦ نواتج ممكنة.

اختبار الوحدة العاشرة

١ هل يمكن أن تمثل النسبة $\frac{٥}{٤}$ احتمالًا؟ فسّر.

٢ تلعب مها وصديقتها لعبة بمكعب مرقم، تربح مها إذا دحرجت المكعب وحصلت على عدد أكبر من ٤. ما احتمال أن تفوز صديقتها باللعبة؟

٣ في عبوة بذور لعدة أنواع من الأزهار وهي ٥٠ بذرة أقحوان، ٨٠ بذرة دوار الشمس، ١٠٠ بذرة زهرة سوسن، و٤٠ بذرة قرنفل، أوجد احتمال أن تختار عشوائيًّا بذرة قرنفل.

٤ في مسابقة، كانت الجوائز ١٠٠ دينار، ٧٥ دينارًا، ٢٥ دينارًا، ٢٥ دينارًا، ٢٥ دينارًا، ٢٥ دينارًا.

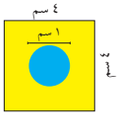
(أ) إذا اخترت جائزة عشوائيًّا، فما احتمال أن تفوز بـ٧٥ دينارًا؟

(ب) إذا منحت جائزة الـ ١٠٠ دينار فعلًا، فما فرصتك في الفوز بـ ٧٥ دينارًا؟

٥ بكم طريقة يمكننا أن نرتب ١٠ كتب على أحد رفوف المكتبة؟

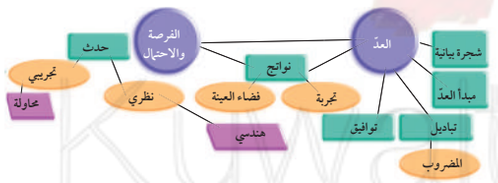
٦ بكم طريقة يمكننا أن نختار ٣ أنواع من السكاكر من أصل ١٠ أنواع؟

٧ أوجد احتمال أن يصيب أحمد الهدف الدائري من الرسم المقابل.



٨ يحتوي صندوق على ٣ كرات: واحدة زرقاء، واحدة حمراء، واحدة خضراء. ارسم شجرة بيانية للنواتج الممكنة إذا أردنا أن نسحب كرتين واحدة تلو الأخرى دون إعادة الكرة الأولى.

مخطط تنظيمي للوحدة العاشرة



ملخص الوحدة العاشرة (أ) : العدّ

- ينص مبدأ العد على أنه إذا كان يمكن وقوع حدث ما بـ م طريقة، ويمكن لحدث آخر أن يقع بـ (ن) طريقة، فإن هذين الحدثين يمكن أن يقعا معًا بـ م × ن طريقة. يمكنك أيضًا استخدام جدول أو شجرة بيانية كي تعدّ.
- يستخدم اصطلاح المضروب لكتابة حاصل ضرب أعداد صحيحة متتالية. ٤! يساوي مضروب ٤ ويعني ٤ × ٣ × ٢ × ١. يعرّف صفر ! على أنه يساوي ١.
- التبديل أو الترتيب هو اختيار مرتب من الأشياء. يمكنك استخدام مبدأ العد أو المضروب لحساب التباديل.
- التوفيق هو اختيار من الأشياء غير المرتبة. عدد التوافيق يساوي عدد التباديل مقسومًا على عدد الطرائق الممكنة لترتيب الأشياء المختارة.

ملخص الوحدة العاشرة (ب): الفرصة والاحتمال

- فضاء العينة هو مجموعة النواتج الممكنة كلها أو نواتج تجربة ما. والحدث هو ناتج أو مجموعة من النواتج.
- الاحتمال أو الاحتمال النظري لحدث ما هو : ل (حدث) = $\frac{\text{عدد النواتج في الحدث}}{\text{عدد نواتج فضاء العينة}}$.
- يساوي مجموع احتمال وقوع حدث ما واحتمال عدم وقوعه ١.
- يحسب الاحتمال التجريبي باستخدام بيانات استبيان أو تجارب معينة. ويساوي عدد مرات وقوع الحدث مقسومًا على عدد المحاولات.
- يحسب الاحتمال الهندسي باستخدام النماذج الهندسية وبالمقارنة بين المساحات أو الأطوال أو أي مقاييس أخرى.

KuwaitMath.com