الوحدة الخامسة

الاحتمال

Probability

مشروع الوحدة: تعرّف معالم بلدك.

١ مقدمة المشروع: هل سبق أن زرت محمية في بلدك؟ إذا أردت القيام بزيارة لإحدى المحميات، فكيف يتمّ اختيارها؟

٢ الهدف: تقوم مؤسّسات كويتية بحملات إعلامية ومشاريع تهدف إلى حماية بعض الحيوانات وبعض أنواع النباتات المهدّدة بالانقراض. ضع ملصقًا لمحميّة طبيعيّة في بلدك تبرز فيه بعض الحيوانات والنباتات التي تعيش في هذه المحميّة.

٣ اللوازم: أوراق ملونة، مقص، مسطرة، حاسوب، جهاز إسقاط، بطاقات متماثلة لصور نباتات وحيوانات تعيش في الكويت.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ اختر بطاقات متماثلة لصور نباتات وحيوانات تعيش في دولة الكويت (عدد كل منها ١٠).

ب إذا وضعت البطاقات في علبة، ثم سحبت منها بطاقة عشوائيًّا، فما احتمال الحصول على صورة نبات؟ وما احتمال الحصول على صورة حيوان؟

جـ اخلط البطاقات جيّدًا. اسحب بطاقة، دوّن اسمها (نبات، حيوان)، ثم أعد السحب خمسين مرة متتالية.
قارن بين $\frac{\text{عدد صور النبات}}{٥٠}$، واحتمال الحصول على صورة نبات.
أعد العملية نفسها مع صور الحيوانات.

د أعد الفقرة جـ. ولكن هذه المرة قم بالخطوات مئة مرة متتالية.

هـ كوّن جدولًا يتضمن نتائج سحوباتك واحتمالي الحدثين.

٥ التقرير: ضع تقريرًا يتضمن أسباب اختيارك للمحمية.

أرفق تقريرك بعرض على الحاسوب أو على جهاز الإسقاط لهذه المواقع ولبعض الحيوانات التي تعيش في الصحراء الكويتية.

دروس الوحدة

٥-١ مبدأ العد والتباديل والتوافيق	٥-٢ نظرية ذات الحدين	٥-٣ الاحتمال
(٥-١-أ) العد عن الطريق القوائم	(٥-٢-أ) مثلث باسكال	(٥-٣-أ) التجربة العشوائية وفضاء العينة
(٥-١-ب) المبدأ الأساسي للعد	(٥-٢-ب) نظرية ذات الحدين	(٥-٣-ب) تعيين احتمالات الأحداث
(٥-١-جـ) مضروب العدد		(٥-٣-جـ) الأحداث المتنافية
(٥-١-د) التباديل		(٥-٣-د) متمم الحدث
(٥-١-هـ) التوافيق		(٥-٣-هـ) الحدثان المستقلان

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت رسم مخطط الشجرة البيانية واستخدامه في مبدأ العد.
- تعرفت طرائق العد مثل الجداول ومخططات ڤن والتباديل والتوافيق.
- استخدمت طرق العد في حل بعض المسائل.

ماذا سوف تتعلم؟

- حل مسائل باستخدام مبدأ العد والتباديل والتوافيق.
- استخدام مثلث باسكال.
- استخدام نظرية ذات الحدين.
- تعرف التجربة العشوائية وفضاء العينة العشوائية.
- تعيين احتمالات الأحداث والأحداث المتنافية والحدث المتمم والأحداث المستقلة.

المصطلحات الأساسية

القوائم – مبدأ العد الأساسي – مضروب العدد – التباديل – التوافيق – مثلث باسكال – نظرية ذات الحدين – التجربة العشوائية – فضاء العينة – الحدث – احتمال الحدث – الأحداث المتنافية – متمم الحدث – الأحداث المستقلة.

أضف إلى معلوماتك

قام الرياضي السويسري جاك برنولي (١٦٥٤ – ١٧٣٤) بدراسة التجارب العشوائية المستقلة لأول مرة وذلك في كتابه «فن الحدس» الذي نشره ابن أخيه نقولا برنولي بعد وفاته بثماني سنوات.

يبيّن برنولي في كتابه النتيجة التالية: «إن تكرار ظهور ناتج في جملة تجارب يقترب كثيرًا من احتمال حدوث هذا الحدث».

على سبيل المثال، إذا ألقي حجر نرد منتظم فإن احتمال ظهور العدد ٢ هو $\frac{١}{٦}$. إذا كررنا إلقاء حجر النرد عددًا كبيرًا من المرات (ن) فإنه من شبه المؤكد أن عدد مرات ظهور العدد ٢، وليكن م، يحقق $\frac{م}{ن} = \frac{١}{٦}$.

ويُسمى هذا التعبير الرياضي بقانون الأعداد الكبيرة.

حاليًّا تستخدم المحاكاة على الحاسوب للتحقق مما جاء في كتاب برنولي.

٥ – ١

مبدأ العد والتباديل والتوافيق

Counting Principle, Permutations and Combinations

عمل تعاوني

تتكون شيفرة من حرفين مختلفين يليهما عدد من رقم واحد غير صفري. نريد تحديد عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها تكوين هذه الشيفرة؟

١ هل ترتيب الحرفين مهم في الشيفرة؟

٢ إذا ابتدأت الشيفرة بالحرف أ، بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار الحرف الثاني؟

٣ إذا اختير الحرفان أ، ب بالترتيب، بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار العدد؟

٤ بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار الحرفين؟

٥ بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار الشيفرة؟

سوف تتعلم

- بعض طرق العد.
- استخدام مبدأ العد في حل المسائل.
- استخدام التباديل والتوافيق في حل المسائل.

(٥-١-أ) العد عن طريق القوائم Counting by Using lists

بعض الأشياء سهلة العد مثل عدد الطلاب في الصف أو عدد بطاقات الطلاب عند المسؤول الصحي في المدرسة.

بعض الأشياء يصعب عدها مثل عدد سكان مجمع أو عدد الحضور في مسرح.

لذا تستخدم تقنيات العد لتوفير الجهد والوقت والمال.

يمكن أن نحل بعض مسائل العد عن طريق ترتيب المجموعة التي سوف نقوم بعدّها أي بوضع قائمة مرتبة.

مثال (١)

استعدادًا لحفل نهاية العام الدراسي كلّف مدير المدرسة صالح وخالد وسالم وأحمد الاهتمام بالتقاط الصور وتوزيع البطاقات على المدعوين واستقبال الأهل وتوزيع المرطبات.

بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع المهام على الطلاب الأربعة؟

الحل:

نظّم قائمة مرتّبة.

مثال: صالح يلتقط الصور، خالد يوزّع البطاقات، سالم يستقبل الأهل، أحمد يوزّع المرطبات.

وسنستخدم لذلك الترميز التالي:

صالح – خالد – سالم – أحمد، تصبح القائمة كما يلي:

صالح – خالد – سالم – أحمد	خالد – صالح – سالم – أحمد
صالح – خالد – أحمد – سالم	خالد – صالح – أحمد – سالم
صالح – سالم – خالد – أحمد	خالد – سالم – صالح – أحمد
صالح – سالم – أحمد – خالد	خالد – سالم – أحمد – صالح
صالح – أحمد – خالد – سالم	خالد – أحمد – صالح – سالم
صالح – أحمد – سالم – خالد	خالد – أحمد – سالم – صالح
سالم – صالح – خالد – أحمد	أحمد – صالح – خالد – سالم
سالم – صالح – أحمد – خالد	أحمد – صالح – سالم – خالد
سالم – خالد – صالح – أحمد	أحمد – خالد – صالح – سالم
سالم – خالد – أحمد – صالح	أحمد – خالد – سالم – صالح
سالم – أحمد – صالح – خالد	أحمد – سالم – صالح – خالد
سالم – أحمد – خالد – صالح	أحمد – سالم – خالد – صالح

∴ يوجد ٤ × ٦ = ٢٤ طريقة مختلفة لتوزيع المهام على الطلاب الأربعة.

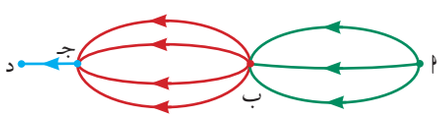
حاول أن تحل

١ باستخدام ثلاثة أحرف من كلمة ناصر ودون تكرار أي حرف منها، كم كلمة مختلفة يمكن الحصول عليها؟ (لها معنى أو بدون معنى).

(٥-١-ب) المبدأ الأساسي للعد Fundamental Counting Principle

تريد تنفيذ عمل على ٣ مراحل متتابعة. هناك ٣ طرائق مختلفة لتنفيذ المرحلة الأولى و٤ طرائق مختلفة لتنفيذ المرحلة الثانية وطريقة واحدة لتنفيذ المرحلة الثالثة.

ما عدد الطرائق الممكنة لتنفيذ هذا العمل؟



عدد الطرائق الممكنة: ٣ × ٤ × ١ = ١٢ طريقة

مفتاح حل المسائل باستخدام المبدأ الأساسي للعد باتباع الخطوات التالية:

- تحديد عدد المراحل (م)
- تحديد عدد طرائق كل مرحلة: $ن_١$ ، $ن_٢$ ، $ن_٣$ ، ... ، $ن_م$
- عدد طرائق إجراء العملية هو $ن_١ \times ن_٢ \times ن_٣ \times ... \times ن_م$

المبدأ الأساسي للعد

لإجراء عملية على م مرحلة متتابعة، وقد أجريت المرحلة الأولى بـ $ن_١$ طريقة مختلفة، والمرحلة الثانية بـ $ن_٢$ طريقة مختلفة، وهكذا حتى المرحلة الأخيرة م بـ $ن_م$ طريقة مختلفة، فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $ن_١ \times ن_٢ \times \ldots \times ن_م$.

مثال (٢)

لوحات السيارات في إحدى القرى السياحية تبدأ من اليمين بحرف من حروف الأبجدية يتبعه رقمان يتم اختيارهما من المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}.

كم عدد لوحات السيارات الممكنة بحيث أنه لا يوجد تكرار لأي من الحروف أو الأرقام في أي من لوحات السيارات؟

الحل:

طريقة أولى:

تحديد عدد المراحل:

المرحلة الأولى: اختيار الحرف

المرحلة الثانية: اختيار رقم الآحاد

المرحلة الثالثة: اختيار رقم العشرات

عدد طرائق المرحلة الأولى = ٢٨

عدد طرائق المرحلة الثانية = ٦

عدد طرائق المرحلة الثالثة = ٥

عدد الطرائق: ٢٨ × ٦ × ٥ = ٨٤٠ طريقة

طريقة ثانية:

عدد طرائق اختيار الحرف	عدد طرائق اختيار رقم الآحاد	عدد طرائق اختيار رقم العشرات
٢٨	٦	٥

عدد الطرائق = ٢٨ × ٦ × ٥

= ٨٤٠ طريقة

حاول أن تحل

٢ في المثال (٢) كم عدد لوحات السيارات إذا كانت اللوحات تبدأ من اليمين بحرف من حروف الأبجدية يتبعه ثلاثة أرقام يتم اختيارها من المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}.

مثال (٣)

كم عدد الأعداد المكون رمز كل منها من أربعة أرقام مأخوذة من عناصر المجموعة {٢، ٥، ٦، ٨} في كل مما يلي:

أ إذا سمح بالتكرار.

ب إذا لم يسمح بالتكرار.

جـ إذا كان رقم الآحاد ٢ (لا يسمح بالتكرار)

الحل:

أ إذا سمح بالتكرار

∴ عدد طرائق اختيار رقم الآحاد = ٤

عدد طرائق اختيار رقم العشرات = ٤

عدد طرائق اختيار رقم المئات = ٤

عدد طرائق اختيار رقم الألوف = ٤

عدد الأعداد = ٤ × ٤ × ٤ × ٤ = ٢٥٦

ب إذا لم يسمح بالتكرار

∴ عدد طرائق اختيار رقم الآحاد = ٤

عدد طرائق اختيار رقم العشرات = ٣

عدد طرائق اختيار رقم المئات = ٢

عدد طرائق اختيار رقم الألوف = ١

عدد الأعداد = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

جـ رقم الآحاد ٢ ∴ يبقى ٣ مراحل ∴ عدد الأعداد = ١ × ٣ × ٢ × ١ = ٦

حاول أن تحل

٣ كم عدد الأعداد المكون رمز كل منها من ثلاثة أرقام مأخوذة من عناصر المجموعة {١، ٣، ٦، ٩} في كل مما يلي:

أ إذا سمح بالتكرار.

ب إذا لم يسمح بالتكرار.

جـ إذا كان العدد فردي ويسمح بالتكرار.

(٥-١-جـ) مضروب العدد Factoriel of a Number

رسم هشام ٤ مراكب صغيرة ولوّنها بألوان مختلفة. أراد عرضها على لوحة جدارية في الصف قرب بعضها بعضًا.

عدد طرائق العرض:

٤ مواقع للرسمة الأولى، ٣ للرسمة الثانية، ٢ للرسمة الثالثة، ١ للرسمة الرابعة.

∴ عدد طرائق العرض = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

يسمى ناتج الضرب ٤ × ٣ × ٢ × ١ مضروب ٤ ويرمز إليه بالرمز ٤!

وعمومًا، ن! = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × (ن − ٣) × ... × ٣ × ٢ × ١ حيث ن عدد صحيح موجب.

٠! = ١

لاحظ أن: ن! = ن × (ن − ١)!

مثال (٤)

احسب (موضحًا خطوات الحل):

أ ٥! ب $\frac{١٢!}{٩!}$ جـ $\frac{١٦!}{١٢!\,٤!}$

الحل:

أ ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠

ب $\frac{١٢!}{٩!} = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times \ldots \times ٣ \times ٢ \times ١}{٩ \times ٨ \times ٧ \times \ldots \times ٣ \times ٢ \times ١}$

= ١٢ × ١١ × ١٠ = ١٣٢٠

جـ $\frac{١٦!}{١٢!\,٤!} = \frac{١٦ \times ١٥ \times ١٤ \times ١٣ \times ١٢ \times ١١ \times \ldots \times ٣ \times ٢ \times ١}{١٢ \times ١١ \times \ldots \times ٣ \times ٢ \times ١ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$

$= \frac{١٣ \times \overset{٧}{\cancel{١٤}} \times \overset{٥}{\cancel{١٥}} \times \overset{٤}{\cancel{١٦}}}{\underset{١}{\cancel{١ \times ٢}} \times \cancel{٣} \times \cancel{٤}} = ١٨٢٠$

معلومة:

استخدمت علامة التعجب أولًا للمضروب في سنة ١٨٠٨ بواسطة العالم كريستيان كامب (١٧٦٠-١٨٢٦) ليظهر أن مضروب عدد يكون كبيرًا إلى حدّ ما، فمثلًا:

١٠! = ٣٦٢٨٨٠٠

حاول أن تحل

٤ احسب (موضحًا خطوات الحل):

أ ٧! ب $\frac{١٠!}{٨!}$ جـ $\frac{١٤!}{٨!\,٧!}$

(٥-١-د) التباديل Permutations

في المثالين (٢)، (٣)، كان الترتيب مهمًّا ومأخوذًا بعين الاعتبار. فمثلًا في مثال (٢) لوحة السيارة ب ٢١ تختلف عن لوحة السيارة ب ١٢. مثل هذا الترتيب يسمى **تبديلًا**. عامة:

- التبديل هو وضع العناصر وفق ترتيب معين.
- عدد تباديل ن من الأشياء هو ن!.

مثال (٥)

فصل فيه ٢٠ طالبًا. يراد اختيار ثلاثة منهم على أن يكون الأول رئيسًا والثاني نائبًا للرئيس والثالث أمينًا للسر.
بكم طريقة يمكن اختيار الطلاب الثلاثة؟

الحل:

توجد ٢٠ طريقة مختلفة لاختيار الرئيس و١٩ طريقة مختلفة لاختيار نائب الرئيس و١٨ طريقة مختلفة لاختيار أمين السر.

∴ عدد الطرائق المختلفة التي يمكن بها اختيار الطلاب الثلاثة هو:

٢٠ × ١٩ × ١٨ = ٦٨٤٠ طريقة.

حاول أن تحل

٥ ما عدد الكلمات المكونة من ٣ أحرف مختلفة التي يمكن تكوينها باستخدام أحرف كلمة «سعود»؟

يمكن أن يعمم، المثال (٥)، لمواقف ذات ترتيب ر من الأشياء والمختارة من بين ن من الأشياء، حيث ن ≤ ر.

قانون التباديل Permutation Formula

عدد تباديل ن من العناصر المختلفة مأخوذة منها ر في كل مرة هو:

$^{ن}ل_{ر}$ = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × ... × (ن − ر + ١) حيث ر ، ن ∈ $ص^{+}$ ، ر ≤ ن

عندما ر = ٠ يعرّف $^{ن}ل_{٠}$ = ١

لاحظ:

$$^{ن}ل_{ر} = ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times \dots \times (ن - ر + ١)$$

$$= ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times \dots \times (ن - ر + ١) \times \frac{(ن - ر) \times \dots \times ٣ \times ٢ \times ١}{(ن - ر) \times \dots \times ٣ \times ٢ \times ١}$$

$$= \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$

قانون التباديل

$$^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!} \quad : \quad ر \le ن \quad ، \quad ر ، ن \in ص^{+}$$

مثال (٦)

أوجد قيمة كل مما يلي (موضحًا خطوات الحل):

أ $^{٨}ل_{٣}$ ب $^{٧}ل_{٣} + {}^{٧}ل_{٥}$ ج $\frac{^{٩}ل_{٥}}{^{٨}ل_{٤}}$

الحل:

أ $^{٨}ل_{٣} = \frac{٨!}{(٨ - ٣)!} = \frac{٨!}{٥!}$

$= \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times \cancel{٥} \times \cancel{٤} \times \cancel{٣} \times \cancel{٢} \times \cancel{١}}{\cancel{٥} \times \cancel{٤} \times \cancel{٣} \times \cancel{٢} \times \cancel{١}}$

$= ٨ \times ٧ \times ٦$

$= ٣٣٦$

ب $^{٧}ل_{٣} + {}^{٧}ل_{٥} = \frac{٧!}{(٧ - ٣)!} + \frac{٧!}{(٧ - ٥)!} = \frac{٧!}{٤!} + \frac{٧!}{٢!}$

$= \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times \cancel{٤!}}{\cancel{٤!}} + \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times \cancel{٢!}}{\cancel{٢!}}$

$= ٢١٠ + ٢٥٢٠$

$= ٢٧٣٠$

ج $\frac{^{٩}ل_{٥}}{^{٨}ل_{٤}} = \frac{\frac{٩!}{(٩ - ٥)!}}{\frac{٨!}{(٨ - ٤)!}} = \frac{\frac{٩!}{٤!}}{\frac{٨!}{٤!}} = \frac{٩!}{٨!}$

$= \frac{٩ \times \cancel{٨!}}{\cancel{٨!}}$

$= ٩$

حاول أن تحل

٦ أوجد قيمة كل مما يلي (موضحًا خطوات الحل):

أ $^{٧}ل_{٤}$ ب $^{٥}ل_{٤} + {}^{٥}ل_{٥}$ ج $\frac{^{١٠}ل_{٧}}{^{٩}ل_{٦}}$

مثال (٧)

بعد انتهاء مباراة كرة القدم بالتعادل، أراد المدرب اختيار ٥ لاعبين بالترتيب لركلات الترجيح.
بكم طريقة يمكن اختيار اللاعبين الخمسة من بين اللاعبين الأحد عشر؟

الحل:

المطلوب في المسألة إيجاد عدد التباديل المكون من ٥ لاعبين المأخوذين من ١١ لاعبًا.

$$ل^{١١}_{٥} = \frac{١١!}{(١١ - ٥)!} = \frac{١١!}{٦!}$$

$$= ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧$$

$$= ٥٥\ ٤٤٠$$

حاول أن تحل

٧ في المثال (٧)، ما عدد الخيارات إذا استثني حارس المرمى؟

(٥-١-هـ) التوافيق Combinations

مثال تمهيدي

أراد معلم التربية البدنية اختيار طالبين من بين مجموعة مكونة من أربعة طلاب:

{محمد، أحمد، علي، حسين} للاشتراك في سباق الماراتون.

كل التبديلات الممكنة هي:

(محمد ، أحمد) ؛ (محمد ، علي) ؛ (محمد ، حسين) ؛

(أحمد ، محمد) ؛ (أحمد ، علي) ؛ (أحمد ، حسين) ؛

(علي ، محمد) ؛ (علي ، أحمد) ؛ (علي ، حسين) ؛

(حسين ، محمد) ؛ (حسين ، أحمد) ؛ (حسين ، علي).

وبما أن المدرب يريد اختيار أي طالبين من بين الأربعة طلاب **دون اعتبار للترتيب** فإن اختيار محمد وأحمد لا يختلف عن اختيار أحمد ومحمد. وبالتالي في هذه الحالة تكون الاختيارات الممكنة هي محمد، أحمد أو محمد ، علي أو محمد، حسين أو أحمد ، علي أو أحمد ، حسين أو علي، حسين.

وكل اختيار من هذه الاختيارات يسمى **توفيقة**.

عندما نريد إيجاد المجموعات الجزئية المكوّنة كل منها من ر عنصر، والتي يمكن اختيارها من مجموعة مكوّنة من ن عنصر بصرف النظر عن الترتيب فنحن نحسب **التوافيق** ويرمز له بالرمز $\binom{ن}{ر}$ ، $^{ن}ق_{ر}$.

قانون التوافيق Combination Formula

إذا كان ن، ر عددان صحيحان موجبين حيث ن ≥ ر ، فإن:

عدد التوافيق المكوّنة كل منها من ر من العناصر والمختارة من بين ن من العناصر في الوقت نفسه هو:

$$^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!}$$

$$^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!\,ر!}$$

ملاحظات:

- عندما ر = ٠ يعرّف $^{ن}ق_{٠} = ١$
- $^{ن}ق_{ن} = ١$
- $^{ن}ق_{١} = ن$
- $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

مثال (٨)

في إحدى محافظات دولة الكويت ٨ صيدليات. يريد المسؤولون اختيار ٣ صيدليات منها لتأمين دوام ليلي.

بكم طريقة ممكنة يمكن اختيار الصيدليات الثلاث؟

الحل:

المطلوب اختيار ٣ صيدليات من بين ٨ صيدليات (الترتيب غير مهم)

عدد الطرائق الممكنة لاختيار الصيدليات الثلاثة = $^{٨}ق_{٣}$

$$= \frac{^{٨}ل_{٣}}{٣!}$$

$$= \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{٣ \times ٢ \times ١}$$

$$= ٥٦$$

يمكن اختيار الصيدليات الثلاث بـ ٥٦ طريقة مختلفة.

حاول أن تحل

٨ في محافظة أخرى ١٢ صيدلية والمطلوب اختيار ٤ صيدليات منها لتأمين دوام ليلي.

بكم طريقة ممكنة يمكن اختيار الصيدليات الأربع؟

مثال (٩)

أراد مدير مدرسة تشكيل لجنة من ٨ طلاب للتحضير لاحتفال نهاية العام الدراسي. عليه اختيار ٤ من بين ١٨ مرشحًا من الصف الثاني عشر، و٣ من بين ١٤ مرشحًا من الصف الحادي عشر، و١ من بين ١١ مرشحًا من الصف العاشر.

بكم طريقة مختلفة يمكن للمدير تكوين اللجنة؟

الحل:

على المدير اختيار ٤ طلاب من بين ١٨ من الصف الثاني عشر، ترتيب العناصر غير مهم، فيكون عدد الطرائق = $^{١٨}ق_{٤}$

كذلك عليه اختيار ٣ طلاب من بين ١٤ من الصف الحادي عشر، عدد الطرائق = $^{١٤}ق_{٣}$

وعليه اختيار طالب واحد من بين ١١ من الصف العاشر، عدد الطرائق = $^{١١}ق_{١}$

عدد طرائق تكوين اللجنة = $^{١٨}ق_{٤} \times {}^{١٤}ق_{٣} \times {}^{١١}ق_{١}$

= ٣٠٦٠ × ٣٦٤ × ١١

= ١٢ ٢٥٢ ٢٤٠

يمكن اختيار اللجنة بـ ١٢ ٢٥٢ ٢٤٠ طريقة مختلفة.

حاول أن تحل

٩ في الصف الحادي عشر ٢٠ طالبًا، وفي الصف العاشر ٢٤ طالبًا. أراد معلم الرياضة اختيار ٦ طلاب من الصف الحادي عشر و٥ طلاب من الصف العاشر لتشكيل فريق كرة القدم. كم عدد الفرق التي بإمكانه تشكيلها؟

مثال (١٠)

حلّ كل معادلة مما يلي حيث ن عدد صحيح موجب أكبر من ٢.

أ $^{ن}ق_{٢} = ١٠$ ب $^{ن}ل_{٢} = ١٢ن$ ج $^{ن}ق_{٢} = ن$

الحل:

أ $^{ن}ق_{٢} = ١٠$

$\frac{ن!}{(ن - ٢)!٢!} = ١٠$ قانون التوافيق

$\frac{ن (ن-١) (ن-٢)!}{(ن - ٢)! ٢!} = ١٠$ خواص مضروب العدد

$\frac{ن (ن - ١)}{٢} = ١٠$

حل آخر

∵ $^{ن}ق_{٢} = ١٠$

$\frac{^{ن}ل_{٢}}{٢!} = ١٠$

$ن^{٢} - ن = ٢٠$

$ن^{٢} - ن - ٢٠ = ٠$

$ن = ٥$ أو $ن = -٤$

$ن = -٤$ مرفوضة ، لأن ن عدد صحيح موجب $\therefore$ $ن = ٥$

الضرب التقاطعي

$\frac{ن(ن - ١)}{٢ \times ١} = ١٠$

$ن(ن - ١) = ٢٠$

$ن(ن - ١) = ٥ \times ٤$

$\therefore$ $ن = ٥$

ب $^{ن}ل_{٢} = ١٢ن$

$ن(ن - ١) = ١٢ن$

$ن^{٢} - ن = ١٢ن$

$ن^{٢} - ن - ١٢ن = ٠$

$ن^{٢} - ١٣ن = ٠$

$ن(ن - ١٣) = ٠$

$ن = ١٣$ أو $ن = ٠$

$ن = ٠$ مرفوضة ، لأن $ن > ٢$ $\therefore$ $ن = ١٣$

جـ $^{ن}ق_{٢} = ن$

$\frac{^{ن}ل_{٢}}{٢!} = ن$

$\frac{ن(ن - ١)}{٢ \times ١} = ن$

$ن^{٢} - ن = ٢ن$

$ن^{٢} - ن - ٢ن = ٠$

$ن^{٢} - ٣ن = ٠$

$ن(ن - ٣) = ٠$

$ن = ٠$ (مرفوضة) أو $ن = ٣$

حاول أن تحل

١٠ حل كل معادلة مما يلي حيث ن عدد صحيح موجب أكبر من ٢.

أ $^{ن+١}ق_{٢} = ٢ن$

ب $^{ن}ل_{٣} = ٢٤$

جـ $^{ن}ق_{٣} = {}^{ن}ل_{٢}$

٥ – ٢

نظرية ذات الحدين

Binomial Theorem

دعنا نفكر ونتناقش

الكثير من الاكتشافات الرياضية المهمة بدأت بدراسة الأنماط.

نهدف في هذا الدرس إلى تقديم نظرية مهمة لكثيرة حدود تدعى نظرية ذات الحدين.

ولتحقيق ذلك سنبدأ بمراقبة بعض الأنماط.

إذا فككت $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}}$ حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ إليك ما ستحصل عليه:

$(\text{أ} + \text{ب})^{٠} = ١$

$(\text{أ} + \text{ب})^{١} = ١\,\text{أ}^{١}\text{ب}^{٠} + ١\,\text{أ}^{٠}\text{ب}^{١}$

$(\text{أ} + \text{ب})^{٢} = ١\,\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٠} + ٢\,\text{أ}^{١}\text{ب}^{١} + ١\,\text{أ}^{٠}\text{ب}^{٢}$

$(\text{أ} + \text{ب})^{٣} = ١\,\text{أ}^{٣}\text{ب}^{٠} + ٣\,\text{أ}^{٢}\text{ب}^{١} + ٣\,\text{أ}^{١}\text{ب}^{٢} + ١\,\text{أ}^{٠}\text{ب}^{٣}$

$(\text{أ} + \text{ب})^{٤} = ١\,\text{أ}^{٤}\text{ب}^{٠} + ٤\,\text{أ}^{٣}\text{ب}^{١} + ٦\,\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٢} + ٤\,\text{أ}^{١}\text{ب}^{٣} + ١\,\text{أ}^{٠}\text{ب}^{٤}$

$(\text{أ} + \text{ب})^{٥} = ١\,\text{أ}^{٥}\text{ب}^{٠} + ٥\,\text{أ}^{٤}\text{ب}^{١} + ١٠\,\text{أ}^{٣}\text{ب}^{٢} + ١٠\,\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٣} + ٥\,\text{أ}^{١}\text{ب}^{٤} + ١\,\text{أ}^{٠}\text{ب}^{٥}$

هل يمكنك مراقبة الأنماط وتوقع ما سيكون عليه مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{٦}$؟

قد يمكنك توقع ما يلي:

أ ينقص أس العدد أ من ٦ إلى صفر بمقدار الوحدة على التوالي.

ب يزيد أس العدد ب بمقدار الوحدة من صفر إلى ٦.

جـ سيكون مجموع أسي أ، ب يساوي ٦.

د سيكون المعاملان الأولان ١، ٦.

هـ سيكون المعاملان الأخيران ٦، ١.

لإيجاد باقي المعاملات سوف نتعرف على مثلث باسكال.

سوف تتعلم

- إيجاد مثلث باسكال.
- إيجاد معاملات مفكوك ذات الحدين.
- نظرية ذات الحدين.
- إيجاد مفكوك ذات الحدين.

(٥–٢–أ) مثلث باسكال Pascal's Triangle

في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش»، إذا ألغينا أ، ب وإشارة الجمع من مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}}$ نحصل على:

الصف ٠						١				
الصف ١					١		١			
الصف ٢				١		٢		١		
الصف ٣			١		٣		٣		١	
الصف ٤		١		٤		٦		٤		١
الصف ٥	١		٥		١٠		١٠		٥		١

وهذا ما يسمى **بمثلث باسكال**.

ملاحظة:

رقم ١ في قمة مثلث باسكال له معنى، لأنه إذا كان:

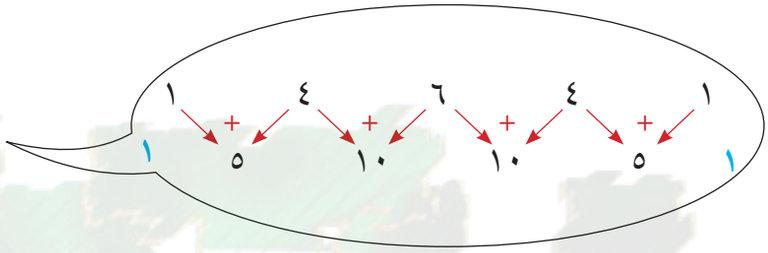
أ + ب ≠ ٠، فإن $(\text{أ} + \text{ب})^{٠} = ١$

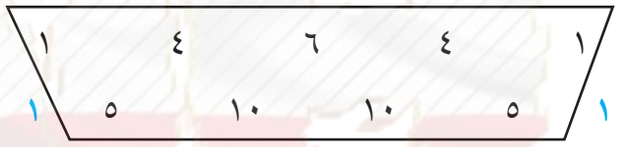
لاحظ النمط في هذا المثلث:

- الحافات الخارجية للمثلث تساوي ١ .
- كل عدد في صف يساوي مجموع العددين الواقعين تمامًا فوقه.

فمثلًا للحصول على الصف الخامس، نجمع كل عددين متجاورين من الصف الرابع (الذي هو أعلى من الصف الخامس مباشرة) ولا ننسى أن الصف يبدأ بـ ١ وينتهي أيضًا بـ ١ .

بليز باسكال
Blaise PASCAL
(١٦٢٣-١٦٦٢)





أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي

من علماء الرياضيات المسلمين قضى حياته في بغداد، برع في الهندسة والأنماط الرياضية ووضع المثلث المشهور الذي يعرف اليوم بمثلث باسكال.

على الرغم من أن هذا النمط العددي المثلثي كان معروفًا لعالم الرياضيات الصيني تشوشي كي والعالم العربي الكرخي. إلّا أنه سُمي مثلث باسكال نسبة إلى عالم الرياضيات الفرنسي بليز باسكال، والذي استخدم المثلث عام ١٦٥٤ لإيجاد معاملات مفكوك كثيرة الحدود.

مثال (١)

أوجد الصف السادس من مثلث باسكال إذا علمت أن الصف الخامس هو ١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

الحل:

العددان في أول الصف وآخره يساوي كل منهما ١ .

وكل عدد بينهما يساوي مجموع العددين الواقعين فوقه تمامًا، لذلك نوجد الصف السادس كما يلي:

الصف الخامس: ١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

الصف السادس: ١ ٦ ١٥ ٢٠ ١٥ ٦ ١

حاول أن تحل

١ **في المثال (١) ، أوجد الصف السابع من مثلث باسكال.**

مثال (٢)

أوجد مفكوك $(أ + ب)^{٦}$ مستخدمًا مثلث باسكال لإيجاد المعاملات إذا علمت أن الصف الخامس هو ١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

الحل:

علينا أولًا إيجاد معاملات $أ^{٦}$ ، $أ^{٥}ب$ ، $أ^{٤}ب^{٢}$ ، $أ^{٣}ب^{٣}$ ، $أ^{٢}ب^{٤}$ ، $أ^{١}ب^{٥}$ ، $ب^{٦}$. لذلك نستعين بالمثال السابق (١).

فنحصل على ١ ، ٦ ، ١٥ ، ٢٠ ، ١٥ ، ٦ ، ١ وهكذا نحصل على مفكوك $(أ + ب)^{٦}$:

$(أ + ب)^{٦} = ١أ^{٦} + ٦أ^{٥}ب + ١٥أ^{٤}ب^{٢} + ٢٠أ^{٣}ب^{٣} + ١٥أ^{٢}ب^{٤} + ٦أ^{١}ب^{٥} + ١ب^{٦}$

أو $(أ + ب)^{٦} = أ^{٦} + ٦أ^{٥}ب + ١٥أ^{٤}ب^{٢} + ٢٠أ^{٣}ب^{٣} + ١٥أ^{٢}ب^{٤} + ٦أ^{١}ب^{٥} + ب^{٦}$ (عدم ضرورة كتابة ١ قبل $أ^{٢}$، $ب^{٦}$)

حاول أن تحل

٢ في المثال (٢)، أوجد مفكوك $(أ + ب)^{٧}$ مستخدمًا مثلث باسكال.

(٥-٢-ب) نظرية ذات الحدين The Binomial Theorem

الأعداد في مثلث باسكال هي معاملات مفكوك ذات الحدين ويمكن إيجاد هذه الأعداد عن طريق تكرار صف بعد صف باستخدام الطريقة في المثال (١). يمكن أن نوجد أيضًا معاملات مفكوك ذات الحدين عن طريق استخدام التوافيق.

إذا حسبنا: $^{٣}ق_{٠}$، $^{٣}ق_{١}$، $^{٣}ق_{٢}$، $^{٣}ق_{٣}$ نحصل على ١، ٣، ٣، ١ وهي تتطابق مع قيم الصف الثالث من مثلث باسكال.

كذلك إذا حسبنا $^{٤}ق_{٠}$، $^{٤}ق_{١}$، $^{٤}ق_{٢}$، $^{٤}ق_{٣}$، $^{٤}ق_{٤}$ نحصل على ١ ، ٤ ، ٦ ، ٤، ١ وهي تتطابق مع قيم الصف الرابع من مثلث باسكال.

وعليه يكون مفكوك $(أ + ب)^{٤} = {}^{٤}ق_{٠}أ^{٤}ب^{٠} + {}^{٤}ق_{١}أ^{٣}ب^{١} + ... + {}^{٤}ق_{٤}أ^{٠}ب^{٤}$.

نظرية ذات الحدين

لأي عدد صحيح موجب ن،

$(أ + ب)^{ن} = {}^{ن}ق_{٠}أ^{ن} + {}^{ن}ق_{١}أ^{ن-١}ب + {}^{ن}ق_{٢}أ^{ن-٢}ب^{٢} + ... + {}^{ن}ق_{ن-١}أب^{ن-١} + {}^{ن}ق_{ن}ب^{ن}$

خواص نظرية ذات الحدين Properties of the Binomial Theorem

١ مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ يتضمن ن + ١ حدًّا.

٢ الحد الأول في المفكوك هو $أ^{ن}$، ثم ينقص أس العدد أ في الحدود التالية بمقدار الوحدة على التوالي.

٣ يبدأ ظهور العدد ب في الحد الثاني، ثم يزيد أس العدد ب بمقدار الوحدة على التوالي حتى نصل إلى الحد الأخير في المفكوك ويكون $ب^{ن}$.

٤ مجموع أسي العدد أ، والعدد ب في أي حد من حدود المفكوك **ثابت** ويساوي الأس ن.

٥ يتساوى معاملا كل حدين لهما البعد نفسه عن الحد الأول والحد الأخير:

معامل الحد الأول يساوي معامل الحد الأخير ومعامل الحد الثاني يساوي معامل الحد ما قبل الأخير وهكذا...

٦ الحد الذي ترتيبه $ر + ١$ يرمز له بالرمز $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ن-ر}\, ب^{ر}$

مثال (٣)

استخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(س + ٢)^{٦}$

الحل:

في مفكوك $(أ + ب)^{٦} = {}^{٦}ق_{٠}\, أ^{٦} + {}^{٦}ق_{١}\, أ^{٥}ب + {}^{٦}ق_{٢}\, أ^{٤}ب^{٢} + {}^{٦}ق_{٣}\, أ^{٣}ب^{٣} + {}^{٦}ق_{٤}\, أ^{٢}ب^{٤} + {}^{٦}ق_{٥}\, أ ب^{٥} + {}^{٦}ق_{٦}\, ب^{٦}$

نعوّض عن أ بـ س ، عن ب بـ ٢:

$(س+٢)^{٦} = {}^{٦}ق_{٠}\, س^{٦} + {}^{٦}ق_{١}\, س^{٥} \times (٢) + {}^{٦}ق_{٢}\, س^{٤} \times (٢)^{٢} + {}^{٦}ق_{٣}\, س^{٣} \times (٢)^{٣} + {}^{٦}ق_{٤}\, س^{٢} \times (٢)^{٤} + {}^{٦}ق_{٥}\, س \times (٢)^{٥} + {}^{٦}ق_{٦} \times (٢)^{٦}$

$= س^{٦} + ٦ \times ٢ س^{٥} + ١٥ \times ٤ س^{٤} + ٢٠ \times ٨ س^{٣} + ١٥ \times ١٦ س^{٢} + ٦ \times ٣٢ س + ٦٤$

$= س^{٦} + ١٢ س^{٥} + ٦٠ س^{٤} + ١٦٠ س^{٣} + ٢٤٠ س^{٢} + ١٩٢ س + ٦٤$

حاول أن تحل

٣ استخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(س + ٣)^{٥}$

مثال (٤)

أوجد مفكوك $(٢س - ٣ص)^{٤}$

الحل:

أولًا: $(أ + ب)^{٤} = {}^{٤}ق_{٠}\, أ^{٤} + {}^{٤}ق_{١}\, أ^{٣}ب + {}^{٤}ق_{٢}\, أ^{٢}ب^{٢} + {}^{٤}ق_{٣}\, أ ب^{٣} + {}^{٤}ق_{٤}\, ب^{٤} = أ^{٤} + ٤ أ^{٣}ب + ٦ أ^{٢}ب^{٢} + ٤ أ ب^{٣} + ب^{٤}$

ثانيًا: يمكن أن تكتب ذات الحدين ٢س − ٣ص على الشكل ٢س + (−٣ص)

ثالثًا: نعوّض في $(أ + ب)^{٤}$ عن أ بـ (٢س) وعن ب بـ (−٣ص) فنحصل على:

$(٢س - ٣ص)^{٤} = (٢س)^{٤} + ٤(٢س)^{٣} \times (-٣ص) + ٦(٢س)^{٢} \times (-٣ص)^{٢} + ٤(٢س) \times (-٣ص)^{٣} + (-٣ص)^{٤}$

$= ١٦ س^{٤} + ٤ \times ٨ \times (-٣) س^{٣} ص + ٦ \times ٤ \times (-٣)^{٢} س^{٢} ص^{٢} + ٨ \times (-٣)^{٣} س ص^{٣} + (-٣)^{٤} ص^{٤}$

$= ١٦ س^{٤} - ٩٦ س^{٣} ص + ٢١٦ س^{٢} ص^{٢} - ٢١٦ س ص^{٣} + ٨١ ص^{٤}$

حاول أن تحل

٤ أوجد مفكوك $(٣س - ٤ص)^{٣}$

مثال (٥)

أوجد الحد الثالث في مفكوك $(٢س + ص)^{٥}$

الحل:

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\ أ^{ن-ر}\ ب^{ر}$

ن = ٥ ، أ = ٢س ، ب = ص

ر + ١ = ٣ ⟸ ر = ٢

$ح_{٣} = {}^{٥}ق_{٢} \times (٢س)^{٣} \times (ص)^{٢} = \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} \times ٨ س^{٣} \times ص^{٢}$

$= ٨٠ س^{٣} ص^{٢}$

حاول أن تحل

٥ أوجد الحد السادس في مفكوك $(س + ٢ص)^{٧}$.

مثال (٦)

في مفكوك $(٣س - ٢)^{٨}$ أوجد معامل $س^{٥}$.

الحل:

ن = ٨ ، أ = ٣س ، ب = − ٢،

ر = ؟؟

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\ أ^{ن-ر}\ ب^{ر}$

$= {}^{٨}ق_{ر} (٣س)^{٨-ر} \times (-٢)^{ر}$

$= {}^{٨}ق_{ر} \times (٣)^{٨-ر} \times (س)^{٨-ر} \times (-٢)^{ر}$

$س^{٨-ر} = س^{٥}$

∴ ٨ − ر = ٥ ، ر = ٣

الحد الرابع يحتوي على $س^{٥}$

$ح_{٤} = {}^{٨}ق_{٣} (٣س)^{٥} \times (-٢)^{٣} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{٣ \times ٢ \times ١} \times (٣)^{٥} س^{٥} \times (-٨) = ٥٦ \times ٢٤٣ \times (-٨) س^{٥}$

∴ معامل $س^{٥}$ = − ١٠٨٨٦٤

حاول أن تحل

٦ في مفكوك $(٣س - ٢)^{٨}$ أوجد معامل $س^{٦}$.

٥-٣

الاحتمال

Probability

سوف تتعلم

- تعرّف التجربة العشوائية وفضاء العينة العشوائية.
- تعيين احتمالات الأحداث.
- تعيين احتمالات الأحداث المتنافية ومتمم الحدث والأحداث المستقلة.

دعنا نفكر ونتناقش

التجربة **Experiment**

تستخدم كلمة «احتمال» كثيرًا في حياتنا اليومية وهي تستخدم للتعبير عن قياس فرصة وقوع حدث معين غير مؤكد.

ما احتمالات وقوع الأحداث التالية:

- هطول المطر اليوم
- نجاحك في اختبار مادة الرياضيات.
- سفرك في العطلة الصيفية.
- الحصول على صورة عند إلقاء قطعة نقود معدنية.

سجّل إجابات زملائك في الصف. ماذا تلاحظ؟

نلاحظ استخدام تعابير قياسية مثل: غالبًا، تقريبًا، متأكد، من غير المحتمل، شبه مستحيل.

(٥-٣-أ) التجربة العشوائية و فضاء العينة Random Experiment and Sample Space

التجربة العشوائية هي تجربة أو عملية تحقق الشروط التالية:

١ جميع النتائج الممكنة للتجربة تكون معلومة مسبقًا قبل إجراءها.

٢ لا يمكن توقع نتيجة التجربة بشكل مؤكد قبل إجراءها.

٣ يمكن حساب فرصة ظهور كل نتيجة من نتائج التجربة قبل إجراء التجربة.

فضاء العينة لتجربة عشوائية هو المجموعة المكونة من جميع النواتج الممكنة للتجربة. نرمز لفضاء العينة بالرمز (ف) ونرمز لعدد عناصر فضاء العينة بالرمز ن(ف).

الناتج هو أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية أي أنه عنصر واحد من عناصر فضاء العينة.

مثال (١)

في تجربة رمي حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين.

أ اكتب عناصر فضاء العينة.

ب كم عدد النواتج الممكنة؟

الحل:

أ عناصر فضاء العينة هي:

(١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (١، ٤)، (١، ٥)، (١، ٦)، (٢، ١)، (٢، ٢)، (٢، ٣)، (٢، ٤)، (٢، ٥)، (٢، ٦)

(٣، ١)، (٣، ٢)، (٣، ٣)، (٣، ٤)، (٣، ٥)، (٣، ٦)، (٤، ١)، (٤، ٢)، (٤، ٣)، (٤، ٤)، (٤، ٥)، (٤، ٦)

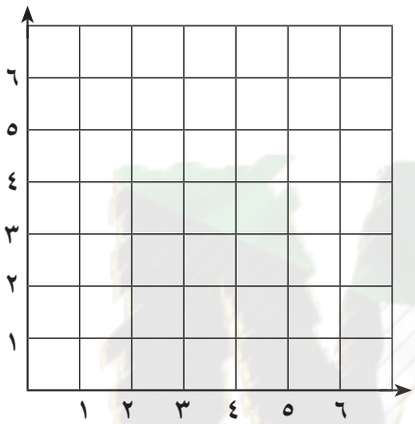
(٥، ١)، (٥، ٢)، (٥، ٣)، (٥، ٤)، (٥، ٥)، (٥، ٦)، (٦، ١)، (٦، ٢)، (٦، ٣)، (٦، ٤)، (٦، ٥)، (٦، ٦)

ب عدد النواتج = ٣٦ ناتجًا.

وحسب المبدأ الأساسي للعد يكون:

عدد النواتج = عدد نواتج الرمية الأولى × عدد نواتج الرمية الثانية

= ٦ × ٦ = ٣٦ ناتجًا



حاول أن تحل

١ في الكيس الأول ٥ كرات متماثلة مرقمة من ١ إلى ٥ وفي الكيس الثاني ٥ كرات متماثلة مرقمة من ٦ إلى ١٠. سحبت عشوائيًّا كرة من الكيس الأول ثم سحبت كرة من الكيس الثاني.

أ اكتب كل عناصر فضاء العينة.

ب كم عدد النواتج الممكنة؟

الحدث Event

في المثال (١)، ليكن الحدث أ: «رمي حجري نرد بحيث يكون العددان الظاهران متساويان».

أ = {(١، ١)، (٢، ٢)، (٣، ٣)، (٤، ٤)، (٥، ٥)، (٦، ٦)}

وليكن الحدث ب: «مجموع العددين الظاهرين يساوي ٩».

ب = {(٣، ٦)، (٤، ٥)، (٥، ٤)، (٦، ٣)}

والحدث جـ: «مجموع العددين الظاهرين يساوي ١٥».

جـ = ϕ

الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة وقد يساويه.

أنواع الحدث Types of Event

(١) **الحدث البسيط** (Simple Event) هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ف تحتوي على عنصر واحد.

(٢) **الحدث المركب** (Compound Event) هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ف تحتوي على أكثر من عنصر.

(٣) **الحدث المستحيل** (Impossible Event) هو مجموعة جزئية خالية من فضاء العينة ف ويرمز له بالرمز ϕ أو { }.

(٤) **الحدث المؤكد** (Certain Event) هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ف ويساويه.

مثال (٢)

في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية منتظمة ثلاث مرّات متتالية، أوجد:

أ فضاء العيّنة (ف).

ب الحدث أ: «ظهور صورتين وكتابة».

جـ الحدث ب: «ظهور ثلاث صور».

د الحدث جـ: «ظهور صورة واحدة على الأقل».

هـ الحدث د: «ظهور صورة واحدة على الأكثر».

الحل:

أ ف = {(ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ص)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)}.

ب الحدث أ = {(ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)}.

جـ الحدث ب = {(ص، ص، ص)}.

د الحدث جـ = {(ص، ك، ك)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)، (ص، ص، ص)}.

هـ الحدث د = {(ك، ك، ك)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)}.

حاول أن تحل

٢ في المثال (٢)، اكتب كلًّا مما يلي:

أ الحدث أ: «ظهور كتابتين وصورة».

ب الحدث ب: «ظهور كتابة واحدة على الأقل».

(٥-٣-ب) تعيين احتمالات الأحداث Precising Probabilities of Events

في التجارب التي تمّ تناولها حتّى الآن، افترضنا أنّ نواتج فضاء العيّنة هي نواتج لها فرص الظهور نفسها. ويمكن إيجاد احتمالات لتجربة ما عن طريق قسمة عدد نواتج الحدث على عدد نواتج فضاء العيّنة.

احتمال وقوع الحدث Probability of an Event

إذا كان أ حدثًا في فضاء عيّنة ف (منته وغير خال) لتجربة عشوائية نتائجها لها فرص الظهور نفسها، فإنّ احتمال وقوع الحدث أ هو:

$$ل(أ) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث (أ)}}{\text{عدد نواتج فضاء العينة (ف)}} = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$$

ن(أ): عدد عناصر الحدث أ ، ن(ف): عدد عناصر الحدث ف.

ولأن أي حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة، فإن عدد النواتج في حدث ما دائمًا ما يكون أصغر من أو مساويًا لعدد نواتج فضاء العينة.

خواص الاحتمال لحدث ما Properties of the Probability of an Event

ليكن أ حدث في فضاء عينة ف (منته وغير خال) فإن:

1. ٠ ≤ ل(أ) ≤ ١.
2. إذا كان أ = { }، فإن ل(أ) = ٠ ويسمى أ بالحدث المستحيل.
3. إذا كان أ = ف، فإن ل(أ) = ١ ويسمى ف بالحدث المؤكد.

مثال (٣)

يبيّن الجدول أدناه وسيلة النقل التي يستخدمها طلاب الصف الحادي عشر بشعبتيه للمجيء إلى المدرسة.

اختير طالب عشوائيًّا من بين طلاب شعبتي الصف الحادي عشر.

ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يستقلون الحافلة المدرسية للمجيء إلى المدرسة؟

	الشعبة أ	الشعبة ب
الحافلة المدرسية	١٦	١٥
مع الأهل	٦	٨
سيارة نقل عام	٤	٣

الحل:

لنفرض أن الحدث أ: «المجيء بالحافلة المدرسية إلى المدرسة».

عدد نواتج الحدث (أ) : ١٦ + ١٥ = ٣١

عدد نواتج فضاء العينة (ف):

ن(ف) = (١٦ + ٦ + ٤) + (١٥ + ٨ + ٣) = ٥٢

$$\because \ ل(أ) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث (أ)}}{\text{عدد نواتج فضاء العينة (ف)}} = \frac{٣١}{٥٢}$$

حاول أن تحل

3. في المثال (٣)، ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يذهبون للمدرسة مع الأهل؟

مثال (٤)

ما احتمال اختيار رقم هاتف عشوائيًّا مكوّن من ٥ أرقام مختلفة من عناصر المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}؟

الحل:

ليكن الحدث أ: "اختيار رقم هاتف مكوّن من ٥ أرقام مختلفة من عناصر المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}".

عدد النواتج في الحدث ن(أ) = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ٨٤٠

عدد النواتج في فضاء العينة ن(ف) = ٧ × ٧ × ٧ × ٧ × ٧ = ١٦٨٠٧

$$ل(أ) = \frac{\text{عدد النواتج في الحدث (أ)}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة (ف)}} = \frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{٨٤٠}{١٦٨٠٧}$$

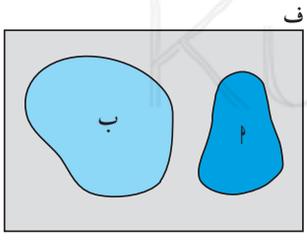
$$ل(أ) = \frac{٨٤٠}{١٦٨٠٧}$$

حاول أن تحل

٤ في المثال (٤) ما احتمال اختيار رقم هاتف عشوائيًّا مكون من ٧ أرقام مختلفة؟

(٥-٣-جـ) الأحداث المتنافية Mutually Exclusive Events

عندما تكون الأحداث من فضاء العينة نفسه، ولا توجد بينها نواتج مشتركة حينها تسمى بـ «أحداث منفصلة» أو «أحداث متنافية» كما هو موضّح في الشكل المقابل.



شكل ڤن لحدثين متنافيين أ، ب من فضاء العينة نفسه ف.

في المثال (١) لتكن الأحداث: أ «مجموع العددين الظاهرين يساوي ٥»

ب «ظهور العدد ١ في الرمية الأولى»

جـ «ظهور العدد نفسه في الرميتين»

أ = {(١، ٤)، (٢، ٣)، (٣، ٢)، (٤، ١)}

ب = {(١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (١، ٤)، (١، ٥)، (١، ٦)}

جـ = {(١، ١)، (٢، ٢)، (٣، ٣)، (٤، ٤)، (٥، ٥)، (٦، ٦)}

مما سبق نلاحظ أنه لا توجد نواتج مشتركة بين الحدثين أ ، جـ.

∴ أ ∩ جـ = ϕ

يسمى الحدثان أ، جـ **حدثان متنافيان**.

أ ∩ ب = {(١، ٤)}

∴ أ ∩ ب ≠ ϕ

يسمى أ ، ب حدثان غير متنافيين.

قاعدة الإضافة للأحداث المتنافية Addition Rule for Mutually Exclusive Events

- إذا كان أ، ب حدثين في فضاء العينة فإن: ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل (ب) − ل(أ ∩ ب)
- إذا كان أ، ب حدثين متنافيين، فإنّ: ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل (ب) حيث ل(أ ∩ ب) = ٠ والعكس صحيح

مثال (٥)

تختار مها عشوائيًّا عددًا بين الصفر و٩ . ما احتمال أن تختار مها عددًا أكبر من ٦ أو عددًا أصغر من ٣؟

الحل:

نفرض أن الحدث جـ: «العدد أكبر من ٦».

جـ = {٧، ٨، ٩}

نفرض أن الحدث م: «العدد أصغر من ٣»

م = {٠، ١، ٢}

المطلوب إيجاد ل(جـ ∪ م).

∴ جـ ∩ م = {٧، ٨، ٩} ∩ {٠، ١، ٢} = ϕ

∴ جـ ، م حدثان متنافيان

∴ ل(جـ ∪ م) = ل(جـ) + ل(م) = $\frac{٣}{١٠}$ + $\frac{٣}{١٠}$ = $\frac{٦}{١٠}$ = ٠,٦

حاول أن تحل

٥ في تجربة إلقاء حجر نرد، ما احتمال الحدث «الحصول على عدد أصغر من ٢ أو من مضاعفات العدد٣»؟

(٥-٣-د) متمم الحدث Complement of an Event

متمم الحدث أ ويرمز له بالرمز $\bar{أ}$، هو مجموعة كل نواتج فضاء العينة وغير الموجودة في الحدث أ كما هو موضّح في الشكل المقابل.

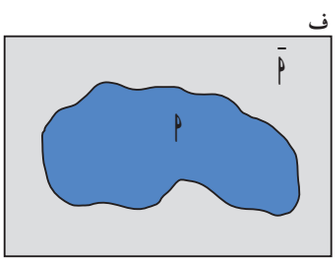
ولأن أ، $\bar{أ}$ يشكلان معًا فضاء العينة كاملًا، حيث أ ∪ $\bar{أ}$ = ف و أ ∩ $\bar{أ}$ = ϕ

فإن ل(أ ∪ $\bar{أ}$) = ل(ف) = ١

الحدثان أ ، $\bar{أ}$ متتامان

∴ أ ، $\bar{أ}$ حدثان منفصلان ، لذلك:

ل(أ ∪ $\bar{أ}$) = ل(أ) + ل($\bar{أ}$) = ١



شكل ڤن لحدثين متممين داخل فضاء العينة نفسه.

قاعدة الحدث المتمم The Complement Rule

إذا كانت أ حدثًا، فاحتمال عدم حدوث أ هو:

ل($\bar{أ}$) = ١ − ل(أ)

مثال (٦)

في تجربة رمي حجر نرد منتظم، إذا كان الحدث أ «ظهور عدد أكبر من أو يساوي ٥».

أوجد ما يلي:

أ ل(أ)

ب ل($\bar{أ}$)

معلومة رياضية:
الحدث المتمم للحدث أ يرمز اليه بالرمز $\bar{أ}$.

الحل:

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

أ = {٥، ٦}

أ ل(أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ف)}$ = $\frac{٢}{٦}$

= $\frac{١}{٣}$

ب ل($\bar{أ}$) = ١ − ل(أ) = ١ − $\frac{١}{٣}$

= $\frac{٢}{٣}$

حاول أن تحل

٦ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين أوجد احتمال الحصول على عددين مختلفين.

(٥-٣-هـ) الحدثان المستقلان Independent Events

يكون الحدثان مستقلين إذا كان وقوع أحدهما ليس له أي تأثير على وقوع الآخر.

أمثلة توضيحية

١ عند إلقاء قطعة نقود معدنية وحجر نرد منتظم مرّة واحدة. فإن الحدثين «الوجه الظاهر لقطعة النقود كتابة»، «الوجه العلوي لحجر النرد العدد ٣» لا يؤثر وقوع أحدهما على وقوع الآخر لذلك الحدثان مستقلان.

٢ يلعب عبدالله وسالم كرة اليد.

الحدثان: «سجّل عبدالله هدفًا من رمية حرّة»، و«سجّل سالم هدفًا من رمية حرّة» هما حدثان مستقلان لأن وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الحدث الآخر.

٣ لدينا كيسان: في الكيس الأول ٥ كرات حمراء و٣ كرات خضراء وفي الثاني ٤ كرات حمراء و٦ كرات خضراء.

الحدثان: «سحب كرة خضراء من الكيس الأول» و«سحب كرة خضراء من الكيس الثاني». هما حدثان مستقلان.

قاعدة الأحداث المستقلة Rule of Independant Two Events

إذا كان أ، ب حدثين مستقلين، فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو:

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) • ل(ب)، والعكس صحيح.

احتمال اتحاد حدثين مستقلين Probability of Union for Two Independant Events

لإيجاد احتمال اتحاد حدثين نستخدم القاعدة:

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

وفي حالة حدثين مستقلين تصبح هذه القاعدة:

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ) • ل(ب)

مثال (٧)

يلعب ابراهيم ويوسف لعبة رمي السهم.

احتمال أن يصيب ابراهيم الهدف يساوي $\frac{٢}{٥}$، واحتمال أن يصيب يوسف الهدف يساوي $\frac{١}{٣}$

رمى كل منهما سهمًا على الهدف.

ما احتمال:

أ **أن يصيب كل من ابراهيم ويوسف الهدف؟**

ب **إصابة الهدف؟**

الحل:

نفرض أن الحدث جـ: «يصيب ابراهيم الهدف»

ونفرض أن الحدث م: «يصيب يوسف الهدف».

الحدثان جـ، م مستقلان لأن وقوع أحدهما ليس له أي تأثير على وقوع الآخر.

أ يصيب كل من ابراهيم ويوسف الهدف هو الحدث (جـ ∩ م).

∵ جـ ، م حدثان مستقلان

∴ ل(جـ ∩ م) = ل(جـ) • ل(م)

$= \frac{٢}{٥} \times \frac{١}{٣}$

$= \frac{٢}{١٥}$

ب الحدث «إصابة الهدف» هو اتحاد الحدثين المستقلين جـ، م.

∴ ل(جـ ∪ م) = ل(جـ) + ل(م) − ل(جـ ∩ م)

$= \frac{٢}{٥} + \frac{١}{٣} - \frac{٢}{١٥}$

$= \frac{٦ + ٥ - ٢}{١٥}$

$= \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

حاول أن تحل

٧ في مثال (٧)، ما احتمال عدم إصابة الهدف؟

المرشد لحل المسائل

إذا أراد ٣ أشخاص الإقامة في فندق مكون من خمس طوابق وكان بإمكان أي شخص من الأشخاص الثلاثة الإقامة في أي طابق.

١ ما احتمال أن يقيم الثلاثة معًا في الطابق نفسه؟

٢ ما احتمال أن لا يقيم أي شخص في الطابق الخامس؟

الحل:

يمكن لكل شخص اختيار طابق من بين ٥

∴ لكل شخص ٥ خيارات مستقلة عن الخيارات الأخرى.

∴ عدد النواتج في فضاء العينة = ٥ × ٥ × ٥ = $٥^{٣}$

١ يمكن للثلاثة أن ينزلوا معًا في أي طابق من الطوابق الخمسة.

∴ عدد النواتج في الحدث = ٥ × ١ × ١

= ٥

ل(ينزل الثلاثة معًا في الطابق نفسه) = $\frac{٥}{١٢٥} = \frac{١}{٢٥}$

٢ الحدث أ: «أن لا يقيم أي شخص في الطابق الخامس».

لكل شخص ٤ طوابق يختار طابقًا منها.

عدد النواتج في الحدث = ٤ × ٤ × ٤ = $٤^{٣}$

∵ عدد النواتج في فضاء العينة = $٥^{٣}$

∴ ل(أ) = $\frac{٤^{٣}}{٥^{٣}} = \frac{٦٤}{١٢٥}$

حل مسألة إضافية

يبيّن الجدول المقابل فصائل الدم لِـ ١٥٠٠ شخص.

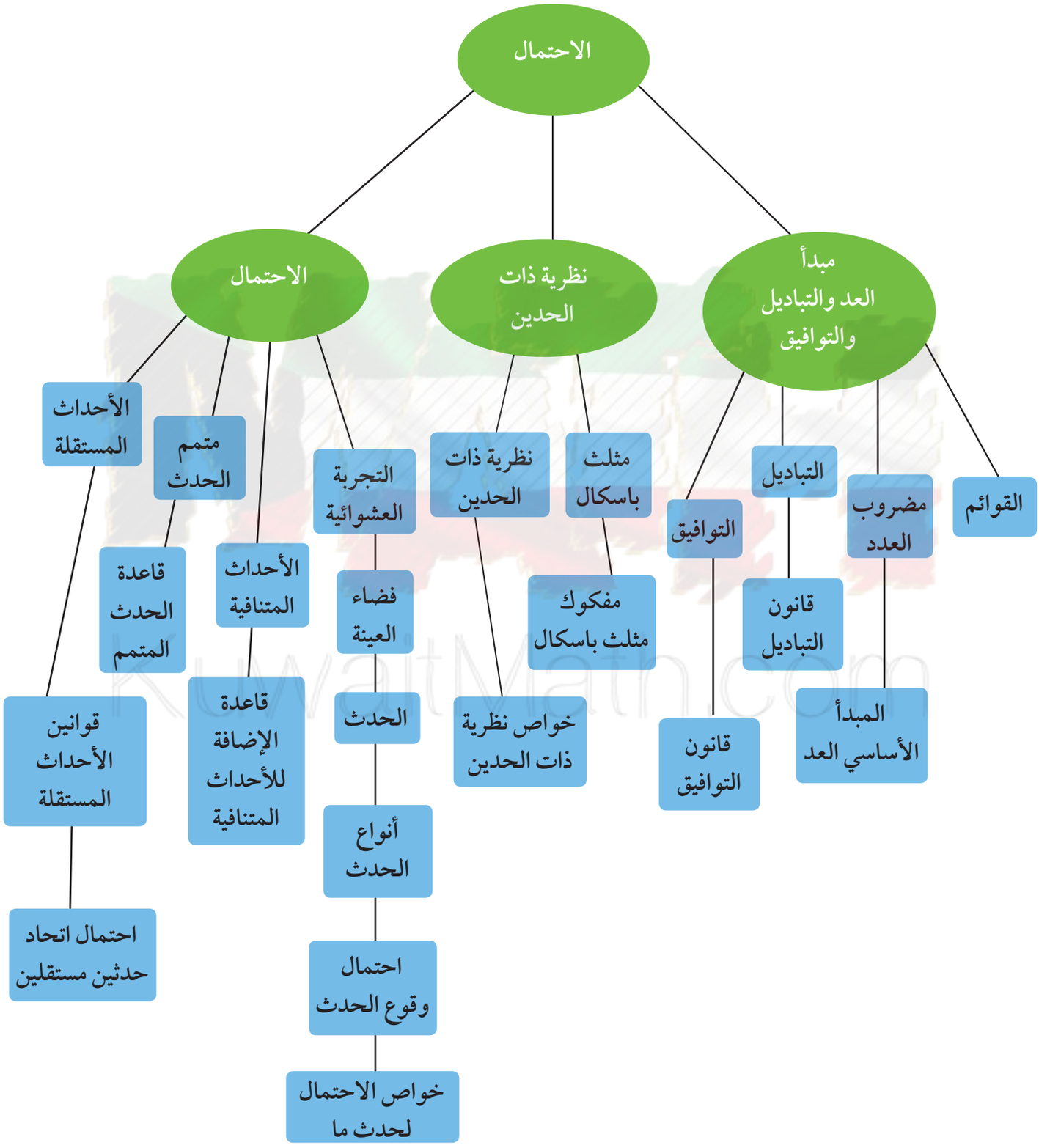
اختير شخص عشوائيًّا من هذه المجموعة.

أ ما احتمال أن يكون دمه من الفصيلة AB؟

ب ما احتمال أن يكون نوع دمه سالبًا؟

النوع \ الفصيلة	A	B	AB	O
موجب	٥١٥	٧٥	٦٠	٥١٠
سالب	١١٥	٤٥	١٥	١٦٥

مخطط تنظيمي للوحدة الخامسة



ملخص

- يمكن حل بعض مسائل العد بوضع قائمة مرتبة.
- لإجراء عملية على م مرحلة متتابعة، أجريت المرحلة الأولى بـ $ن_١$ طريقة مختلفة، والمرحلة الثانية بـ $ن_٢$ طريقة مختلفة، وهكذا حتى المرحلة الأخيرة م بـ نم طريقة مختلفة، فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $ن_١ \times ن_٢ \times \ldots \times ن_م$
- مضروب العدد: ن! = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × ... × ٣ × ٢ × ١ لكل عدد صحيح موجب ن
- قانون التباديل: $^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$: ر ≤ ن ، ر ، ن ∈ $ص_+$
- قانون التوافيق: $^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!\,(ن - ر)!}$
- خواص التوافيق $^{ن}ق_{٠} = ١$، $^{ن}ق_{ن} = ١$، $^{ن}ق_{١} = ن$، $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$
- مثلث باسكال

١
١ ١
١ ٢ ١
١ ٣ ٣ ١
١ ٤ ٦ ٤ ١
١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

الحافات الخارجية للمثلث تساوي ١

كل عدد في صف يساوي مجموع العددين الواقعين تمامًا فوقه.

- نظرية ذات الحدين: $(أ + ب)^{ن} = {}^{ن}ق_{٠}\, أ^{ن} + {}^{ن}ق_{١}\, أ^{ن-١} ب + {}^{ن}ق_{٢}\, أ^{ن-٢} ب^{٢} + \ldots + {}^{ن}ق_{ن-١}\, أ\, ب^{ن-١} + {}^{ن}ق_{ن}\, ب^{ن}$، حيث ن عدد صحيح موجب.
- مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ يتضمن ن + ١ حدًّا.
- الحد الذي ترتيبه ر + ١ هو $^{ن}ق_{ر} \times أ^{ن-ر} \times ب^{ر}$
- فضاء العينة لتجربة ما هو مجموعة كل النواتج الممكن حدوثها لتجربة ما.
- الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة وقد يساويه.
- احتمال الحدث: ل(الحدث) = $\frac{\text{عدد النواتج في الحدث}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}} = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$.
- ٠ ≤ ل(أ) ≤ ١
- إذا كان أ = { } فإن ل(أ) = ٠ ويسمى أ بالحدث المستحيل.
- إذا كان أ = ف فإن ل(أ) = ١ ويسمى ف بالحدث المؤكد.
- إذا كان أ، ب حدثين متنافيين، فإن ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب).
- الحدث المتمم: ل(أ) + ل($\bar{أ}$) = ١
- إذا كان أ، ب حدثين مستقلين، فإن ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)، ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ) × ل(ب).

أودع في مكتبة الوزارة تحت رقم (٩٤) بتاريخ ٢٦/ ٥/ ٢٠١٥م

شركة مطابع الرسالة - الكويت