الوحدة الأولى

الأعداد الحقيقية
Real Numbers

مشروع الوحدة: العلاقة بين الهندسة والأعداد الحقيقية

١ مقدمة المشروع: أثناء العمل على هذا المشروع سوف ترسم مثلثات قائمة الزاوية بمعلومية طول كل من ضلعي الزاوية القائمة، ثم تطبق قانون فيثاغورث لإيجاد طول الوتر.

٢ الهدف: إيجاد قيمة $\sqrt{٢}$، $\sqrt{٣}$، $\sqrt{٥}$ دون استخدام الآلة الحاسبة.

٣ اللوازم: مسطرة، فرجار، زاوية قائمة.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ ارسم مثلثًا قائم الزاوية، متطابق الضلعين، طول كل من ضلعي زاويته القائمة ١ سم.

- أوجد طول الوتر بتطبيق قانون فيثاغورث، ثم باستخدام المسطرة ماذا تستنتج؟
- $\sqrt{٢} \simeq$ ...

ب ارسم مثلثًا قائم الزاوية، طول ضلعي الزاوية القائمة ١ سم، $\sqrt{٢}$ سم.

- أوجد طول الوتر بتطبيق قانون فيثاغورث، ثم باستخدام المسطرة ماذا تستنتج؟
- $\sqrt{٣} \simeq$ ...

جـ بالطريقة نفسها أوجد قيمة $\sqrt{٤}$ ، $\sqrt{٥}$، ...

٥ التقرير: ضع تقريرًا مفصلًا تبين فيه كيف استخدمت الهندسة لإيجاد قيمة تقريبية لـ $\sqrt{٢}$ و $\sqrt{٣}$ ، ... ثم ضع ملصقًا يبيّن الأشكال التي رسمتها.

KuwaitMath.com

دروس الوحدة

١-١ الجذور والتعبيرات الجذرية والعمليات عليها	١-٢ الأسس النسبية وخواصها
(١-١-أ) الجذور والتعبيرات الجذرية	(١-٢-أ) الأسس النسبية
(١-١-ب) تبسيط التعبيرات الجذرية	(١-٢-ب) خواص الأسس النسبية
(١-١-جـ) جمع وطرح التعبيرات الجذرية	
(١-١-د) ضرب وقسمة التعبيرات الجذرية	
(١-١-هـ) المرافق واستخدامه	

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرّفت الأعداد الحقيقية.
- تعرّفت الجذور التربيعية.
- استخدمت الآلة الحاسبة لإيجاد الجذور التربيعية.

ماذا سوف تتعلم؟

- الجذور والتعبيرات الجذرية.
- تبسيط التعبيرات الجذرية.
- جمع وطرح التعبيرات الجذرية.
- ضرب وقسمة التعبيرات الجذرية.
- إيجاد المرافق واستخدامه.
- كتابة عدد حقيقي بالصورة الجذرية.
- كتابة عدد حقيقي بالصورة الأسية.

المصطلحات الأساسية

الجذر التربيعي – الجذر التكعيبي – الجذر النوني – المرافق – دليل الجذر – الصورة الجذرية – المجذور – الصورة الأسية.

أضف إلى معلوماتك

المعكوس الضربي لكل عدد حقيقي موجب أكبر من واحد هو عدد حقيقي موجب أصغر من واحد.

إذًا يوجد أعداد حقيقية موجبة أصغر من واحد بقدر ما يوجد أعداد حقيقية موجبة أكبر من واحد.

KuwaitMath.com

الجذور والتعبيرات الجذرية والعمليات عليها

Roots and Radical Expressions and Operations

سوف تتعلم

- الجذور التربيعية والتكعيبية.
- جمع وطرح التعبيرات الجذرية.
- ضرب التعبيرات الجذرية.
- قسمة التعبيرات الجذرية.
- استخدام المرافق لكتابة كسر بصورة كسر مقامه عدد نسبي.

دعنا نفكر ونتناقش

١ مساحة مربّع طول ضلعه ٤ أمتار هي ٤ × ٤ = ١٦ مترًا مربعًا.

٢ أ مساحة مربع هي ٦٤ مترًا مربعًا.

أوجد طول ضلعه.

ب استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد طول ضلع مربع مساحته ٧٢ مترًا مربعًا.

٣ ما حجم مكعب إذا كان طول ضلعه ٥ أمتار؟

٤ ما طول ضلع مكعب إذا كان حجمه يساوي ٢٧ مترًا مكعبًا؟

(١ – ١ – أ) الجذور والتعبيرات الجذرية Roots and Radical Expressions

بما أن $٢٥ = (-٥)^٢ = ٢٥$ ، فإن العددين ٥ و–٥ هما الجذران التربيعيان للعدد ٢٥.

بما أن $(+٥)^٣ = +١٢٥$، فإن العدد $(+٥)$ هو الجذر التكعيبي للعدد $(+١٢٥)$.

وأيضًا $(-٥)^٣ = -١٢٥$، فإن العدد (-٥) هو الجذر التكعيبي للعدد (-١٢٥).

وبالتالي:

- لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب.
- لكل عدد حقيقي جذر تكعيبي واحد.

ملخص عدد الجذور لعدد حقيقي

العدد الحقيقي	عدد الجذور التربيعية	عدد الجذور التكعيبية
موجب	٢	١
صفر	١	١
سالب	٠	١

الجذور التكعيبية Cubic Roots

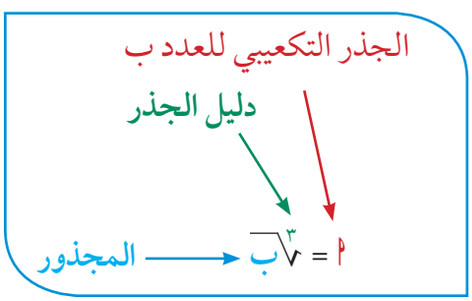
إذا كان $أ^٣ = ب$ فإن $أ = \sqrt[٣]{ب}$ هو **الجذر التكعيبي** للعدد ب، ٣ هو **دليل الجذر**، ب هو **المجذور**.

وبالتالي:

لكل عدد حقيقي س:

$$\left(\sqrt[٣]{س}\right)^٣ = س$$

$$\sqrt[٣]{س^٣} = س$$



KuwaitMath.com

مثال (١)

أوجد الجذر التكعيبي لكل عدد مما يلي:

أ -٨ ب ١٢٥

الحل:

أ الجذر التكعيبي للعدد (-٨) هو $\sqrt[٣]{-٨}$

$\sqrt[٣]{-٨} = \sqrt[٣]{(-٢)^{٣}}$ اكتب (-٨) على صورة مكعب كامل

$= -٢$ $\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$ لكل س عدد حقيقي

$\therefore \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

ب الجذر التكعيبي للعدد ١٢٥ هو $\sqrt[٣]{١٢٥}$

$\sqrt[٣]{١٢٥} = \sqrt[٣]{٥^{٣}}$ اكتب (١٢٥) على صورة مكعب كامل

$= ٥$ $\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$ لكل س عدد حقيقي

حاول أن تحل

١ أوجد الجذر التكعيبي لكل عدد مما يلي:

أ -٢٧ ب ٦٤

KuwaitMath.com

(١-١-ب) تبسيط التعبيرات الجذرية

Simplifying Radical Expressions

متى يكون التعبير الجذري في أبسط صورة؟

يكون التعبير الجذري في أبسط صورة عندما:

- لا يكون للمجذور عوامل مرفوعة لقوة أكبر من أو تساوي دليل الجذر مثل: $\sqrt[٣]{س^{٥} ص^{٧}}$
- لا يوجد جذر في المقام مثل $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ أو $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٥}}$
- لا يكون المجذور كسرًا مثل $\sqrt{\frac{٣}{٥}}$.
- يكون دليل الجذر أصغر عدد صحيح موجب ممكن مثل $\sqrt[١٢]{٦٤}$ ليس في أبسط صورة.

لأن: $\sqrt[١٢]{٦٤} = \sqrt[١٢]{٦^{٢}} = ٢^{\frac{٦}{١٢}} = ٢^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢}$.

معلومة:

- كل مقدار يتضمن جذورًا يسمى تعبيرًا جذريًا.
- عندما يكون دليل الجذر يساوي ٢ فلا يكتب.
- الجذر التربيعي ل س يكتب $\sqrt{س}$ حيث $س \geq ٠$.
- $\sqrt{س^{٢}} = |س|$ لكل س عدد حقيقي.

مثال (٢)

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ $\sqrt{٤س^{٦}}$ ب $\sqrt[٣]{٨س^{٣}}$ ج $\sqrt{١٦س^{٤}ص^{٦}}$

الحل:

أ $\sqrt{٤س^{٦}} = \sqrt{٢^{٢} \times (س^{٣})^{٢}}$ — اكتب $٤س^{٦}$ على صورة مربعات كاملة

$= \sqrt{(٢ \times س^{٣})^{٢}}$ — $س^{ن} \times ص^{ن} = (س \times ص)^{ن}$

$= |٢ \times س^{٣}|$ — $\sqrt{س^{٢}} = |س|$

$= ٢|س^{٣}| = ٢س^{٢}|س|$

ب $\sqrt[٣]{٨س^{٣}} = \sqrt[٣]{٢^{٣}س^{٣}}$ — اكتب $٨س^{٣}$ على صورة مكعبات كاملة

$= \sqrt[٣]{(٢س)^{٣}}$ — $س^{ن} \times ص^{ن} = (س \times ص)^{ن}$

$= ٢س$ — $\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$

ج $\sqrt{١٦س^{٤}ص^{٦}} = \sqrt{(٤)^{٢}(س^{٢})^{٢}(ص^{٣})^{٢}}$ — اكتب $١٦س^{٤}ص^{٦}$ على صورة مكعبات كاملة

$= \sqrt{(٤س^{٢}ص^{٣})^{٢}}$ — $س^{ن} \times ص^{ن} = (س \times ص)^{ن}$

$= |٤س^{٢}ص^{٣}|$ — $\sqrt{س^{٢}} = |س|$

$= ٤س^{٢}|ص^{٣}|$

$= ٤س^{٢}ص^{٢}|ص|$

حاول أن تحل

٢ بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ $\sqrt{٩س^{٢}ص^{٤}}$ ب $\sqrt[٣]{-٢٧س^{٦}}$ ج $\sqrt{س^{٨}ص^{٦}}$

(١-١-جـ) جمع وطرح التعبيرات الجذرية

Addition and Subtraction of Radical Expressions

لجمع وطرح التعبيرات الجذرية يجب أن تكون **متشابهة**.

يكون التعبيران الجذريان متشابهين عندما يكون لهما دليل الجذر نفسه والمجذور نفسه.

يجب وضع التعبيرات الجذرية في **أبسط صورة** مما يسمح لنا بمعرفة ما إذا كانت متشابهة أم لا.

لاحظ أن:

$\sqrt[٣]{٥}$ ، $\sqrt[٣]{٢}$ — تعبيران جذريان متشابهان

$\sqrt{٨س}$ ، $-\sqrt{٣س}$ $(س \geq ٠)$ — تعبيران جذريان متشابهان

$\sqrt{٢٧}$ ، $\sqrt{١٢}$ — تعبيران جذريان متشابهان (لماذا؟)

KuwaitMath.com

في حين أن:

$٥\sqrt{٣}$ ، $٥\sqrt{٣}$ تعبيران جذريان غير متشابهين

$٨\sqrt{س}$ ، $-٣\sqrt{ص}$ $(س \geq ٠، ص \geq ٠)$ تعبيران جذريان غير متشابهين

تذكر:

نتعامل مع التعبيرات الجذرية المتشابهة مثل تعاملنا مع الحدود الجبرية المتشابهة.

مثال (٣)

أوجد الناتج في أبسط صورة في كل مما يلي:

أ $٣\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٥}$

ب $\sqrt{٢٧} + ٣\sqrt{١٢} - \sqrt{٧٥}$

الحل:

أ $٣\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٥} = (٣ + ٤)\sqrt{٥}$ اجمع

$= ٧\sqrt{٥}$

ب $\sqrt{٢٧} + ٣\sqrt{١٢} - \sqrt{٧٥} = \sqrt{٣ \times ٣^{٢}} + ٣\sqrt{٣ \times ٢^{٢}} - \sqrt{٣ \times ٥^{٢}}$ اكتب على صورة مربعات كاملة

$= ٣\sqrt{٣} + ٣ \times ٢\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٥}$ $\sqrt{س^{٢}} = س$ ، $س \geq ٠$

$= ٣\sqrt{٣} + ٦\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٥}$ اجمع

$= ٤\sqrt{٣}$

حاول أن تحل

٣ أوجد ناتج كل مما يلي في أبسط صورة:

أ $\sqrt{٥} + \sqrt{٢٠}$

ب $\sqrt{٤٨} - \sqrt{٥٠} - \sqrt{٨}$

مثال (٤)

أوجد الناتج في أبسط صورة:

أ $٢\sqrt[٣]{٣} + ٥\sqrt[٣]{٣٧٥}$

ب $٣\sqrt{٣٢} - \sqrt{٩٨}$

ج $\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٠} - \sqrt{٧٢}$

د $\sqrt[٣]{١٢٨} + \sqrt[٣]{٥٤} - ٢\sqrt[٣]{٢٥٠}$

KuwaitMath.com

الحل:

أ) $2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{375} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3 \times 125} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}$

اكتب ١٢٥ على صورة مكعب كامل

$= \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}$

$= \sqrt[3]{3} \times 5 + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}$

بسّط

$= 5\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$

$= 6\sqrt[3]{3}$

ب) $\sqrt{3} \times \sqrt{98} - \sqrt{32} = \sqrt{2 \times 49} - \sqrt{2 \times 16} \times \sqrt{3}$

اكتب ١٦، ٤٩ على صورة مربعات كاملة

$= \sqrt{2} \times \sqrt{7} - \sqrt{2} \times \sqrt{24} \times \sqrt{3}$

$\sqrt{س^2} = س$ ، $س \geq 0$

$= \sqrt{2} \times 7 - \sqrt{2} \times 4 \times 3$

$= 7\sqrt{2} - 12\sqrt{2}$

بسّط

$= -5\sqrt{2}$

جـ) $\sqrt{18} + \sqrt{72} - \sqrt{50} = \sqrt{2 \times 9} + \sqrt{2 \times 36} - \sqrt{2 \times 25}$

اكتب ٩، ٢٥، ٣٦ على صورة مربعات كاملة

$= \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} + \sqrt{2} \times \sqrt{6^2} - \sqrt{2} \times \sqrt{5^2}$

$\sqrt{س^2} = س$ ، $س \geq 0$

$= 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

$= 4\sqrt{2}$

بسّط

د) $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{2}$

اكتب ٦٤، ٢٧، ١٢٥ على صورة مربعات كاملة

$= \sqrt[3]{4^3} \times \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5^3} \times \sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{س^3} = س$

$= 4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2}$

بسّط

$= 2\sqrt[3]{2}$

حاول أن تحل

٤) أوجد الناتج في أبسط صورة.

أ) $4\sqrt[3]{8} + 2\sqrt[3]{64}$

ب) $2\sqrt{75} - \sqrt{27}$

جـ) $\sqrt{12} + \sqrt{147} - \sqrt{108}$

د) $\sqrt[3]{320} - \sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135}$

KuwaitMath.com

(١-١-د) ضرب وقسمة التعبيرات الجذرية

Multiplication and Division of Radical Expressions

الجذور التربيعية	الجذور التكعيبية
س، ص عددان حقيقيان غير سالبين	س، ص عددان حقيقيان
$\sqrt{س^{٢}} = |س| = س$	$\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$
$\left(\sqrt{س}\right)^{٢} = س$	$\left(\sqrt[٣]{س}\right)^{٣} = س$
$\sqrt{س} \times \sqrt{ص} = \sqrt{س \times ص}$	$\sqrt[٣]{س} \times \sqrt[٣]{ص} = \sqrt[٣]{س \times ص}$
$\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{ص}} = \sqrt{\frac{س}{ص}}$ ، ص ≠ ٠	$\frac{\sqrt[٣]{س}}{\sqrt[٣]{ص}} = \sqrt[٣]{\frac{س}{ص}}$ ، ص ≠ ٠

مثال (٥)

بسّط كلًّا من التعبيرين الجذريين التاليين:

أ $\sqrt{٧٢ س^{٣}}$ حيث س ≥ ٠

ب $\sqrt[٣]{٨٠ ن^{٥}}$

الحل:

أ $\sqrt{٧٢ س^{٣}} = \sqrt{٣٦ \times ٢ \times س^{٢} \times س}$

$= \sqrt{٣٦ \times س^{٢}} \times \sqrt{٢ \times س}$

$= ٦|س| \times \sqrt{٢س}$

$= ٦س \sqrt{٢س}$

اكتب ٧٢، $س^{٣}$ على صورة مربعات كاملة

$\sqrt{س} \times \sqrt{ص} = \sqrt{س \times ص}$ حيث س ≥ ٠، ص ≥ ٠

$\sqrt{س^{٢}} = |س|$

|س| = س لأن س ≥ ٠

ب $\sqrt[٣]{٨٠ ن^{٥}} = \sqrt[٣]{٣٢ \times ١٠ \times ن^{٣} \times ن^{٢}}$

$= \sqrt[٣]{٣٢ \times ن^{٣}} \times \sqrt[٣]{١٠ ن^{٢}}$

$= ٢ن \sqrt[٣]{١٠ ن^{٢}}$

اكتب ٨٠، $ن^{٥}$ على صورة مكعبات كاملة

$\sqrt[٣]{س} \times \sqrt[٣]{ص} = \sqrt[٣]{س \times ص}$ لكل س، ص أعداد حقيقية

$\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$ لكل عدد حقيقي س

حاول أن تحل

٥ بسّط كلًّا من التعبيرين الجذريين التاليين:

أ $\sqrt{٥٠ س^{٤}}$

ب $\sqrt[٣]{١٨ س^{٣}}$

مثال (٦)

اضرب ثم بسّط كلًّا مما يلي:

أ $\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{٨}$

ب $\sqrt[٣]{٥س^{٣}ص^{٤}} \times \sqrt[٣]{٥٤س^{٢}ص^{٣}}$

الحل:

أ $\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{٨} = \sqrt[٣]{٨ \times ٢}$ — $\sqrt[٣]{س} \times \sqrt[٣]{ص} = \sqrt[٣]{س \times ص}$ حيث س ≥ ٠، ص ≥ ٠

$= \sqrt[٣]{١٦}$ — اضرب

$= ٤$ — بسّط

ب $\sqrt[٣]{٥س^{٣}ص^{٤}} \times \sqrt[٣]{٥٤س^{٢}ص^{٣}} = \sqrt[٣]{٥س^{٣}ص^{٤} \times ٥٤س^{٢}ص^{٣}}$ — $\sqrt[٣]{س} \times \sqrt[٣]{ص} = \sqrt[٣]{س \times ص}$

$= \sqrt[٣]{٥س^{٣}ص^{٣} \times ٢ \times ٣^{٣} \times س^{٢} \times ص^{٣}}$ — اكتب على صورة مكعبات كاملة

$= \sqrt[٣]{١٠ \times ٣^{٣} \times س^{٣} \times ص^{٣} \times ص^{٣} \times س^{٢} \times ص}$

$= \sqrt[٣]{٣^{٣}س^{٣}(ص^{٢})^{٣}} \times \sqrt[٣]{١٠س^{٢}ص}$ — $\sqrt[٣]{س \times ص} = \sqrt[٣]{س} \times \sqrt[٣]{ص}$

$= ٣س ص^{٢} \sqrt[٣]{١٠س^{٢}ص}$ — $\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$

حاول أن تحل

٦ اضرب ثم بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ $٣\sqrt[٣]{٧س^{٣}} \times ٢\sqrt[٣]{س^{٣}ص^{٢}}$ حيث س ≤ ٠

ب $٤\sqrt[٣]{س^{٤}ص} \times ٥\sqrt[٣]{س^{٢}ص}$

مثال (٧)

اقسم ثم بسّط كلًّا مما يلي:

أ $\frac{\sqrt[٣]{٣٢}}{\sqrt[٣]{-٤}}$

ب $\frac{\sqrt[٣]{١٦٢س^{٥}}}{\sqrt[٣]{٣س^{٢}}}$ حيث س ≠ ٠

ج $\frac{\sqrt[٣]{٢٥٦س^{٣}}}{\sqrt[٣]{٣٢س}}$ حيث س < ٠

الحل:

أ $\frac{\sqrt[٣]{٣٢}}{\sqrt[٣]{-٤}} = \sqrt[٣]{\frac{٣٢}{-٤}}$

$= \sqrt[٣]{-٨}$

$= \sqrt[٣]{(-٢)^{٣}}$ — $\frac{\sqrt[٣]{س}}{\sqrt[٣]{ص}} = \sqrt[٣]{\frac{س}{ص}}$ حيث ص ≠ ٠

$= -٢$ — اقسم

اكتب −٨ على صورة مكعب كامل

$\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$

KuwaitMath.com

ب $\frac{\sqrt[3]{١٦٢ س^{٥}}}{\sqrt[3]{٣ س^{٢}}} = \sqrt[3]{\frac{١٦٢ س^{٥}}{٣ س^{٢}}}$ $\sqrt[3]{\frac{س}{ص}} = \frac{\sqrt[3]{س}}{\sqrt[3]{ص}}$ حيث ص ≠ ٠

$= \sqrt[3]{٥٤ س^{٣}}$ اقسم

$= \sqrt[3]{٢ \times ٣^{٣} \times س^{٣}}$ اكتب ٥٤ على صورة مكعب كامل

$= \sqrt[3]{٢} \times \sqrt[3]{٣^{٣} س^{٣}}$ $\sqrt[3]{س \times ص} = \sqrt[3]{س} \times \sqrt[3]{ص}$

$= ٣ س \sqrt[3]{٢}$ $\sqrt[3]{س^{٣}} = س$

جـ $\frac{\sqrt{٢٥٦ س^{٣}}}{\sqrt{٣٢ س}} = \sqrt{\frac{٢٥٦ س^{٣}}{٣٢ س}}$ $\sqrt{\frac{س}{ص}} = \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{ص}}$ حيث ص ≠ ٠

$= \sqrt{٨ س^{٢}}$ اقسم

$= \sqrt{٢ (٢ س)^{٢}}$ اكتب ٨س^{٢} على صورة مربعات كاملة

$= |٢ س| \sqrt{٢}$ $\sqrt{س^{٢}} = |س|$

$= ٢ |س| \sqrt{٢}$

$= ٢ س \sqrt{٢}$ حيث س > ٠

حاول أن تحل

٧ اقسم ثم بسط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ $\frac{\sqrt{٢٤٣}}{\sqrt{٢٧}}$

ب $\frac{\sqrt[4]{١٢ س^{٤}}}{\sqrt[3]{٣ س}}$ حيث س > ٠

جـ $\frac{\sqrt[3]{١٢٨ س^{١٥}}}{\sqrt[3]{٢ س^{٢}}}$ حيث س ≠ ٠

KuwaitMath.com

مثال (٨)

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ $(٤ + \sqrt{٣})^{٢}$ ب $(٤ + \sqrt{٣})(٤ - \sqrt{٣})$ جـ $(٦ + \sqrt{٣})(٢ - \sqrt{٢})$

الحل:

أ $(٤ + \sqrt{٣})^{٢} = ١٦ + ٨\sqrt{٣} + ٣$

$= ١٩ + ٨\sqrt{٣}$

$(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$

جمع الحدود المتشابهة

ب $(٤ + \sqrt{٣})(٤ - \sqrt{٣}) = ١٦ - ٣$

$= ١٣$

$(أ + ب)(أ - ب) = أ^{٢} - ب^{٢}$

جـ $(٦ + \sqrt{٣})(٢ - \sqrt{٢}) = ١٢ - ٦\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٣} - ٦\sqrt{٣}$

حاول أن تحل

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

٨ أ $(٥ - \sqrt{٣})^{٢}$ ب $(٧ + \sqrt{٥})(٣ - \sqrt{٢})$ جـ $(٦ + \sqrt{٥})(٦ - \sqrt{٥})$

(١-١-هـ) المرافق واستخدامه Conjugate and its Use

$\sqrt{٢}$ يسمى مرافق لِـ $\sqrt{٢}$، لأن $\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = ٢$ (عدد نسبي).

$٣ + \sqrt{٢}$ يسمى مرافق لِـ $٣ - \sqrt{٢}$، لأن $(٣ + \sqrt{٢}) \times (٣ - \sqrt{٢}) = ٩ - ٢ = ٧$ (عدد نسبي).

$\sqrt[٣]{٢٥}$ يسمى مرافق لِـ $\sqrt[٣]{٥}$، لأن $\sqrt[٣]{٢٥} \times \sqrt[٣]{٥} = \sqrt[٣]{٣٥} = ٥$ (عدد نسبي).

معلومة رياضية:

$\sqrt{أ} + \sqrt{ب}$، $\sqrt{أ} - \sqrt{ب}$

مقداران مترافقان.

إذا كان س، ص تعبيران جذريان يمثلان أعدادًا غير نسبية، وكان ناتج ضرب س في ص عددًا نسبيًّا فإن س، ص مترافقان.

يمكن إعادة كتابة كسر يحوي مقامه جذورًا تربيعية أو جذورًا تكعيبية بصورة كسر مقامه عدد نسبي، وذلك بضرب بسط الكسر ومقامه في **مرافق المقام**.

KuwaitMath.com

مثال (٩)

اختصر كلًّا مما يلي بحيث يكون المقام عددًا نسبيًا.

أ $\frac{١ + \sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$ ب $\frac{١ - \sqrt{٢}}{٣ - \sqrt{٢}}$

الحل:

أ $\frac{١ + \sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} = \frac{١ + \sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ اضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام

$= \frac{\sqrt{٢} \times \sqrt{٣} + \sqrt{٣}}{(\sqrt{٣})^{٢}}$ خاصية التوزيع

$= \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٣}}{٣}$ بسّط

$\therefore \frac{١ + \sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٣}}{٣}$ المقام عدد صحيح

ب $\frac{١ - \sqrt{٢}}{٣ - \sqrt{٢}} = \frac{(١ - \sqrt{٢})}{(٣ - \sqrt{٢})} \times \frac{(٣ + \sqrt{٢})}{(٣ + \sqrt{٢})}$ اضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام

$= \frac{٣ + \sqrt{٢} \times ٣ - \sqrt{٢} - ٢}{٣^{٢} - (\sqrt{٢})^{٢}}$ $(أ - ب)(أ + ب) = أ^{٢} - ب^{٢}$

$= \frac{٣\sqrt{٢} - ٣ - ٢ + \sqrt{٢}}{٩ - ٢}$ بسّط

$= \frac{٢\sqrt{٢} - ١}{٧}$

حاول أن تحل

٩ اختصر كلًّا مما يلي بحيث يكون المقام عددًا نسبيًا.

أ $\frac{\sqrt{٢} + \sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ ب $\frac{\sqrt{٢} - ٣}{\sqrt{٢} - ٢}$

KuwaitMath.com

مثال (١٠) ربط بالحياة

قانون أينشتاين ط = ك × س^{٢} يربط بين الطاقة ط والكتلة ك وسرعة الضوء س.

أ أوجد قيمة س بدلالة ط، ك.

ب أعد كتابة إجابتك في أ بحيث يكون المقام خاليًا من الجذور.

الحل:

أ ط = ك × س^{٢} اكتب القانون

س^{٢} = $\frac{ط}{ك}$ اقسم طرفي المعادلة على ك؛ ك ≠ ٠

س = $\sqrt{\frac{ط}{ك}}$ ، س > ٠

ب س = $\sqrt{\frac{ط}{ك}}$

س = $\frac{\sqrt{ط}}{\sqrt{ك}}$ $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$ حيث أ > ٠، ب > ٠

س = $\frac{\sqrt{ط}}{\sqrt{ك}} \times \frac{\sqrt{ك}}{\sqrt{ك}}$ اضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام

س = $\frac{\sqrt{ط \times ك}}{ك}$

KuwaitMath.com

حاول أن تحل

١٠ القانون ع = $\frac{٢ \times ف}{ن^{٢}}$ يربط بين العجلة ع، والمسافة ف، والوقت ن لجسم متحرك بعجلة منتظمة.

أ أوجد ن بدلالة ع، ف.

ب أعد كتابة إجابتك في أ بحيث يكون المقام خاليًا من الجذور.

مثال (١١)

أوجد قيمة التعبير: $\frac{(س + ١)^{٢}(٣س - ٢)}{٧س - ٤}$ حيث س = $\sqrt{٧}$ − ٢ − ١. ثم بسّط الناتج

الحل:

$$\frac{(س + ١)^{٢}(٣س - ٢)}{٧س - ٤} = \frac{(\sqrt{٧} - ٢ + ١ + ١)^{٢}(٣\sqrt{٧} - ٢ - (١ - \sqrt{٧}))}{٧(\sqrt{٧} - ٢ - ١) - ٤}$$ عوّض س بقيمتها

$$= \frac{(\sqrt{٧})^{٢}(٣\sqrt{٧} - ٥)}{٧\sqrt{٧} - ١١}$$ بسّط

$$= \frac{(\sqrt{٧})^{٢}(٣\sqrt{٧} - ٥)(٧\sqrt{٧} + ١١)}{(٧\sqrt{٧} - ١١)(٧\sqrt{٧} + ١١)}$$ اضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام

$$= \frac{(٤٢ + ٣٣\sqrt{٧} - ٣٥\sqrt{٧} - ٥٥)}{(٧\sqrt{٧})^{٢} - (١١)^{٢}}$$ خاصية التوزيع

$$= \frac{(-١٣ - ٢\sqrt{٧})}{٩٨ - ١٢١}$$ جمع الحدود المتشابهة

$$= \frac{-(١٣ + ٢\sqrt{٧})}{-٢٣}$$

$$= \frac{٢٦ + ٤\sqrt{٧}}{٢٣}$$ بسّط

حاول أن تحل

١١ أوجد قيمة التعبير: $\frac{(س - ٢)^{٣}}{س + ١}$ حيث س = ٢ − $\sqrt{٣}$. ثم بسّط الناتج

KuwaitMath.com

١ – ٢

الأسس النسبية وخواصها

Rational Exponents and Properties

سوف تتعلم

- كتابة عدد حقيقي في الصورة الجذرية.
- كتابة عدد حقيقي في الصورة الأسية.
- تحويل من الصورة الجذرية إلى الصورة الأسية.
- تحويل من الصورة الأسية إلى الصورة الجذرية.

دعنا نفكر ونتناقش

عرفت سابقًا أن $س^{٣} \times س^{٣} = س^{٦}$ $\quad (٣ + ٣ = ٦)$

وقلنا أن $س^{٣}$ هو جذر تربيعي لِـ $س^{٦}$ $\quad \left(\frac{٦}{٢} = ٣\right)$

كذلك $س^{٢} \times س^{٢} = س^{٤}$

∴ $س^{٢}$ جذر تربيعي لِـ $س^{٤}$.

$س^{-١} \times س^{-١} = س^{-٢}$

∴ $س^{-١}$ جذر تربيعي لِـ $س^{-٢}$ ، $س \neq ٠$

الجذر التربيعي الأساسي للعدد الموجب س هو $\sqrt{س}$

ويكون: $\sqrt{س} \times \sqrt{س} = س$

وإذا كتبنا هذه العبارة في الصورة الأسية

$س^{\square} \times س^{\square} = س = س^{١}$ (لماذا؟)

بالمقارنة مع ما ورد أعلاه نستطيع أن نكتب:

$\square + \square = ١$

∴ $\square = \frac{١}{٢}$

$\sqrt{س} \times \sqrt{س} = س$ تكتب $س^{\frac{١}{٢}} \times س^{\frac{١}{٢}} = س$

وقد اعتمدت هذه الصورة وعممت لكتابة أي تعبير جذري.

KuwaitMath.com

(١ – ٢ – أ) الأسس النسبية

Rational Exponents

الصورة الجذرية	الصورة الأسية
$\sqrt{٢٥}$	$٢٥^{\frac{١}{٢}}$
$\sqrt[٣]{٢٧}$	$٢٧^{\frac{١}{٣}}$
$\sqrt[٤]{٦٤}$	$٦٤^{\frac{١}{٤}}$

يعبّر دليل الجذر عن الجذر الذي تريده، وفي الصورة الأسية يصبح دليل الجذر مقامًا للأس كما هو مبيّن في الجدول السابق.

الجذر النوني

n^{th} root

- إذا كان $أ$ عددًا حقيقيًّا، ن $\in$ صـ$_+$، ن $\geq$ ٢، فإن الجذر النوني للعدد $أ$ يرمز له بالرمز $\sqrt[ن]{أ}$ ويساوي عددًا حقيقيًّا ب بحيث ب^{ن} = $أ$.

- إذا كان الجذر النوني للعدد $أ$ هو عددًا حقيقيًا، م عددًا صحيحًا، ن $\in$ صـ$_+$، ن $\geq$ ٢، فإن:
- $\sqrt[ن]{أ} = أ^{\frac{١}{ن}}$
- $\sqrt[ن]{أ^{م}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م} = (أ^{\frac{١}{ن}})^{م} = أ^{\frac{م}{ن}}$
- $\sqrt[ن]{أ^{ن}} = \begin{cases} |أ| & \text{إذا كان ن عددًا زوجيًا} \\ أ & \text{إذا كان ن عددًا فرديًا} \end{cases}$

- إذا كان $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب}$ عددين حقيقيين، فإن:
- $\sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب} = \sqrt[ن]{أ \times ب}$
- $\frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}} = \sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}}$ ، ب $\neq$ ٠

مثال (١)

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ $\sqrt[٤]{١٦}$ ب $\sqrt[٥]{-٣٢}$ جـ $\sqrt[٦]{٦٤ س^{١٢}}$

الحل:

أ $\sqrt[٤]{١٦} = \sqrt[٤]{٢^{٤}}$ — $\sqrt[ن]{س^{ن}} = |س|$ — ن عدد زوجي

$= |٢|$ — $|س| = س$ — س $\geq$ ٠

$= ٢$

ب $\sqrt[٥]{-٣٢} = \sqrt[٥]{(-٢)^{٥}}$ — $\sqrt[ن]{س^{ن}} = س$ — ن عدد فردي

$= -٢$

جـ $\sqrt[٦]{٦٤ س^{١٢}} = \sqrt[٦]{٢^{٦} (س^{٢})^{٦}}$

$= \sqrt[٦]{(٢ س^{٢})^{٦}}$ — $\sqrt[ن]{س^{ن}} = |س|$ — ن عدد زوجي

$= |٢ س^{٢}|$ — $|س| = س$ — س $\geq$ ٠

$= ٢ س^{٢}$

KuwaitMath.com

حاول أن تحل

١ بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ $-\sqrt[٥]{٢٤٣}$ ب $\sqrt[٤]{٦٢٥}$ ج $\sqrt[٧]{س^{١٤}}$

مثال (٢)

اكتب كل عدد مما يلي في الصورة الجذرية، ثم بسّط:

أ $١٢٥^{\frac{١}{٣}}$ ب $٥ \times ٥^{\frac{١}{٢}}$ ج $١٠^{\frac{١}{٣}} \times ١٠٠^{\frac{١}{٣}}$

الحل:

أ $١٢٥^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{١٢٥}$ — اكتب العدد $١٢٥^{\frac{١}{٣}}$ بالصورة الجذرية

$= \sqrt[٣]{٥^{٣}}$ — اكتب ١٢٥ على صورة مكعب كامل

$= ٥$ — $\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$

$\therefore ١٢٥^{\frac{١}{٣}} = ٥$

ب $٥ \times ٥^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٥} \times \sqrt{٥}$ — اكتب $٥^{\frac{١}{٢}}$ بالصورة الجذرية

$= ٥$ — $\sqrt{س} \times \sqrt{س} = \left(\sqrt{س}\right)^{٢} = س$ لكل $س \geq ٠$

$\therefore ٥ \times ٥^{\frac{١}{٢}} = ٥$

ج $١٠^{\frac{١}{٣}} \times ١٠٠^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{١٠} \times \sqrt[٣]{١٠٠}$ — اكتب $١٠^{\frac{١}{٣}}$ و $١٠٠^{\frac{١}{٣}}$ بالصورة الجذرية

$= \sqrt[٣]{١٠ \times ١٠٠}$ — $\sqrt[٣]{س} \times \sqrt[٣]{ص} = \sqrt[٣]{س \times ص}$

$= \sqrt[٣]{١٠ \times ١٠^{٢}}$

$= \sqrt[٣]{١٠^{٣}}$ — $س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$

$= ١٠$ — $\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$

$\therefore ١٠^{\frac{١}{٣}} \times ١٠٠^{\frac{١}{٣}} = ١٠$

حاول أن تحل

٢ اكتب كل عدد مما يلي في الصورة الجذرية، ثم بسّط:

أ $١٦^{\frac{١}{٤}}$ ب $٣ \times ٣^{\frac{١}{٢}}$ ج $٧^{\frac{١}{٣}} \times ٤٩^{\frac{١}{٣}}$

KuwaitMath.com

مثال (٣)

اكتب العدد $٢٥^{\frac{٣}{٢}}$ بالصورة الجذرية، ثم بسّط:

الحل:

$٢٥^{\frac{٣}{٢}} = ٢٥^{٣ \times \frac{١}{٢}}$ $\quad$ $\frac{م}{ن} = م \times \frac{١}{ن}$

$= (٢٥^{٣})^{\frac{١}{٢}}$ $\quad$ $س^{م ن} = (س^{م})^{ن}$

$= \sqrt{٢٥^{٣}}$ $\quad$ $س^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{س}$ لكل $س \geq ٠$

$= (\sqrt{٢٥})^{٣} = ٥^{٣} = ١٢٥$ $\quad$ $\sqrt[ن]{س^{م}} = (\sqrt[ن]{س})^{م}$

$\therefore ٢٥^{\frac{٣}{٢}} = ١٢٥$

حاول أن تحل

٣ اكتب العدد $٦٤^{\frac{٤}{٣}}$ بالصورة الجذرية، ثم بسّط.

مثال (٤)

أ اكتب $س^{\frac{٢}{٥}}$، $ص^{\frac{٥}{٢}}$ بالصورة الجذرية لكل $ص > ٠$، ثم بسّط إن أمكن:

ب اكتب $\sqrt[٥]{ص}$، $\sqrt{ب^{٣}}$، $(\sqrt[٣]{س})^{٥}$ بالصورة الأسية لكل $ب > ٠$.

الحل:

أ $س^{\frac{٢}{٥}} = (س^{\frac{١}{٥}})^{٢}$ $\quad$ $س^{م \times ن} = (س^{م})^{ن}$

$= (\sqrt[٥]{س})^{٢}$ $\quad$ $س^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{س}$

$= \sqrt[٥]{س^{٢}}$ $\quad$ $(\sqrt[٥]{س})^{٢} = \sqrt[٥]{س^{٢}}$

$\therefore س^{\frac{٢}{٥}} = \sqrt[٥]{س^{٢}}$

$ص^{\frac{٥}{٢}} = (ص^{٥})^{\frac{١}{٢}}$ $\quad$ $س^{م \times ن} = (س^{م})^{ن}$

$= \sqrt{ص^{٥}} = \sqrt{(ص^{٢})^{٢} ص}$ $\quad$ $س^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{س}$ ، لكل $س > ٠$

$= |ص^{٢}| \times \sqrt{ص}$

$= ص^{٢} \sqrt{ص}$ $\quad$ $|س^{٢}| = س^{٢}$

$\therefore ص^{\frac{٥}{٢}} = ص^{٢} \sqrt{ص}$

KuwaitMath.com

ب $\sqrt[5]{ص} = ص^{\frac{1}{5}}$

$\sqrt[ن]{س} = س^{\frac{1}{ن}}$ ، لكل س > ٠

$\sqrt{ب^{3}} = (ب^{3})^{\frac{1}{2}}$

$= ب^{3 \times \frac{1}{2}}$

$= ب^{\frac{3}{2}}$

$\therefore \sqrt{ب^{3}} = ب^{\frac{3}{2}}$

$(س^{م})^{ن} = س^{م \times ن}$

اضرب

$(\sqrt[3]{س})^{5} = (س^{\frac{1}{3}})^{5}$

$= س^{\frac{1}{3} \times 5}$

$= س^{\frac{5}{3}}$

$\therefore (\sqrt[3]{س})^{5} = س^{\frac{5}{3}}$

$\sqrt[3]{س} = س^{\frac{1}{3}}$

$(س^{م})^{ن} = س^{م \times ن}$

اضرب

حاول أن تحل

٤ أ اكتب $ص^{\frac{3}{8}}$ لكل ص > ٠ بالصورة الجذرية.

ب بسّط $س^{٠,٤}$ لكل س ≥ ٠ ثم اكتب بالصورة الجذرية.

جـ اكتب $\sqrt[3]{س^{2}}$ ، $(\sqrt{ص})^{3}$ لكل ص ≥ ٠ بالصورة الأسية.

مثال (٥) ربط بالحياة

إن عدم شعور رائد الفضاء بانعدام الوزن في رحلة فضائية يعود إلى دوران جهاز يجلس عليه، ويشعره بجاذبية وهمية تحاكي الجاذبيه الأرضية.

يدور الجهاز وفق المعادلة الرياضية:

$$ن = \frac{و^{٠,٥}}{٢ \times \pi \times نق^{٠,٥}}$$

حيث ن: السرعة الدورانية وتقاس بالدورة في الثانية.

نق: نصف قطر جهاز الدوران ويقاس بالمتر.

و: الجاذبية الوهمية التي تحاكي الجاذبية الأرضية.

احسب سرعة دوران جهاز طول نصف قطره ١,٧ متر، يدور ليحاكي الجاذبية الأرضية التي تساوي ٨,٩ م/ ث^{٢}.

KuwaitMath.com

الحل:

$$ن = \frac{و^{٠,٥}}{٢ \times \pi \times نق^{٠,٥}}$$ اكتب المعادلة

$$= \frac{(٩,٨)^{٠,٥}}{٢ \times \pi \times (١,٧)^{٠,٥}}$$ عوّض

$$\simeq ٠,٣٨٢$$ استخدم الآلة الحاسبة

∴ سرعة دوران الجهاز تساوي تقريبًا ٠,٣٨٢ دورة في الثانية.

حاول أن تحل

٥ احسب السرعة الدورانية المطلوبة للجهاز في المثال (٥) ليحاكي جاذبية تعادل نصف مقدار الجاذبية الأرضية.

(١-٢-ب) خواص الأسس النسبية Properties of Rational Exponents

ليكن م، ن عددين نسبيين و$أ$، ب عددين حقيقيين حيث $أ^{م}$، $أ^{ن}$، $ب^{م}$، $ب^{ن}$ أعداد حقيقية.

نكتب الخواص التالية:

خواص	أمثلة
$ب^{م} \times ب^{ن} = ب^{م+ن}$	$٨^{\frac{١}{٣}} \times ٨^{\frac{٢}{٣}} = ٨^{\frac{٣}{٣}} = ٨^{١} = ٨$
$(ب^{م})^{ن} = ب^{م \times ن}$	$(٥^{\frac{١}{٢}})^{٤} = ٥^{\frac{١}{٢} \times ٤} = ٥^{٢} = ٢٥$
$(أ \times ب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن}$	$(٤ \times ٥)^{\frac{١}{٢}} = ٤^{\frac{١}{٢}} \times ٥^{\frac{١}{٢}} = ٢ \times ٥^{\frac{١}{٢}}$
$ب^{-ن} = \frac{١}{ب^{ن}}$ لكل ب ≠ ٠	$٩^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٩^{\frac{١}{٢}}} = \frac{١}{\sqrt{٩}} = \frac{١}{٣}$
$\frac{ب^{م}}{ب^{ن}} = ب^{م-ن}$ لكل ب ≠ ٠	$\frac{٩^{\frac{٣}{٢}}}{٩^{\frac{١}{٢}}} = ٩^{\frac{٣}{٢}-\frac{١}{٢}} = ٩^{١} = ٩$
$(\frac{أ}{ب})^{م} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}}$ لكل ب ≠ ٠	$(\frac{٥}{٢٧})^{\frac{١}{٣}} = \frac{٥^{\frac{١}{٣}}}{٢٧^{\frac{١}{٣}}} = \frac{٥^{\frac{١}{٣}}}{٣}$

يقدّر علماء الآثار عمر المحفورات باستخدام الأسس النسبية

KuwaitMath.com

مثال (٦)

بسّط كلًّا مما يلي:

أ $٤^{\frac{٢}{٥}} \times ٤^{\frac{١}{٥}}$ ب $\left(٥^{\frac{١}{٢}}\right)^{٣}$ جـ $\left(٥ \times ٧\right)^{\frac{١}{٢}}$ د $٣^{-\frac{١}{٢}}$ هـ $\frac{١٧^{\frac{٥}{٣}}}{١٧^{\frac{١}{٢}}}$

الحل:

أ $٤^{\frac{٢}{٥}} \times ٤^{\frac{١}{٥}} = ٤^{\frac{٢}{٥}+\frac{١}{٥}} = ٤^{\frac{٣}{٥}} = \sqrt[٥]{٤^{٣}} = \sqrt[٥]{٦٤} = ٢\sqrt[٥]{٢}$

ب $\left(٥^{\frac{١}{٢}}\right)^{٣} = ٥^{\frac{١}{٢}\times ٣} = ٥^{\frac{٣}{٢}} = \sqrt{٥^{٣}} = ٥\sqrt{٥}$

جـ $\left(٥ \times ٧\right)^{\frac{١}{٢}} = ٥^{\frac{١}{٢}} \times ٧^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٥} \times \sqrt{٧} = \sqrt{٣٥}$

د $٣^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣^{\frac{١}{٢}}} = \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

هـ $\frac{١٧^{\frac{٥}{٣}}}{١٧^{\frac{١}{٢}}} = ١٧^{\frac{٥}{٣}-\frac{١}{٢}} = ١٧^{\frac{١٠}{٦}-\frac{٣}{٦}} = ١٧^{\frac{٧}{٦}} = ١٧\sqrt[٦]{١٧}$

حاول أن تحل

٦ بسّط كلًّا مما يلي:

أ $٥^{\frac{١}{٣}} \times ٥^{\frac{٢}{٣}}$ ب $\left(٧^{\frac{١}{٣}}\right)^{٢}$ جـ $\left(٢٣\right)^{\frac{١}{٢}}$ د $٦^{-\frac{١}{٢}}$ هـ $\frac{٨^{\frac{١}{٣}}}{٨^{\frac{١}{٣}}}$

مثال (٧)

بسّط كلًّا من الأعداد التالية:

أ $\left(٣٢\right)^{\frac{٣}{٥}}$ ب $٤^{٣,٥}$

الحل:

أ $\left(٣٢\right)^{\frac{٣}{٥}} = \left(\left(٣٢\right)^{\frac{١}{٥}}\right)^{٣}$ $س^{م\times ن} = \left(س^{م}\right)^{ن}$

$= \left(\left(٢\right)^{٥}\right)^{\frac{١}{٥}}\right)^{٣}$ $٣٢ = ٢^{٥}$

$= \left(\left(٢\right)^{٥\times\frac{١}{٥}}\right)^{٣}$ $\left(س^{م}\right)^{ن} = س^{م\times ن}$

$= \left(٢\right)^{٣} = ٨$ اضرب

$\therefore \left(٣٢\right)^{\frac{٣}{٥}} = ٨$

KuwaitMath.com

ب $٤^{٣,٥} = ٤^{\frac{٧}{٢}}$ — حوّل ٥ , ٣ إلى كسر مركب

$= (٢^{٢})^{\frac{٧}{٢}}$ — $٤ = ٢^{٢}$

$= (٢^{\frac{١}{٢}(٢)})^{٧}$ — $س^{م \times ن} = (س^{م})^{ن}$

$= (٢^{\frac{١}{٢} \times ٢})^{٧}$ — $(س^{م})^{ن} = س^{م \times ن}$

$= ٢^{٧} = ١٢٨$ — اضرب

$\therefore \quad ٤^{٣,٥} = ١٢٨$

حاول أن تحل

٧ بسّط كل عدد من الأعداد التالية:

أ $٥^{\frac{٣}{٢}}$ ب $١٦^{\frac{٣}{٤}}$ جـ $(٣٢)^{\frac{٤}{٥}}$

مثال (٨)

أوجد ناتج كل مما يلي:

أ $\sqrt[٤]{٥} \times \sqrt[٤]{٧}$ ب $\frac{\sqrt[٣]{١٦}}{\sqrt[٣]{٢}}$

الحل:

طريقة أولى:

أ $\sqrt[٤]{٥} \times \sqrt[٤]{٧} = ٥^{\frac{١}{٤}} \times ٧^{\frac{١}{٤}}$ — $\sqrt[ن]{س} = س^{\frac{١}{ن}}$

$= (٥ \times ٧)^{\frac{١}{٤}}$ — $س^{م} \times ص^{م} = (س \times ص)^{م}$

$= (٣٥)^{\frac{١}{٤}}$ — اضرب

$= \sqrt[٤]{٣٥}$ — $س^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{س}$

طريقة ثانية:

$\sqrt[٤]{٥} \times \sqrt[٤]{٧} = \sqrt[٤]{٧ \times ٥}$ — $\sqrt[ن]{س} \times \sqrt[ن]{ص} = \sqrt[ن]{س \times ص}$

$= \sqrt[٤]{٣٥}$ — اضرب

$\therefore \sqrt[٤]{٥} \times \sqrt[٤]{٧} = \sqrt[٤]{٣٥}$

KuwaitMath.com

طريقة أولى:

ب $\frac{\sqrt[3]{١٦}}{\sqrt[3]{٢}} = \frac{١٦^{\frac{١}{٣}}}{٢^{\frac{١}{٣}}}$

$= \left(\frac{١٦}{٢}\right)^{\frac{١}{٣}}$

$= ٨^{\frac{١}{٣}}$

$= \sqrt[3]{٨}$

$= ٢$

$\sqrt[ن]{س} = س^{\frac{١}{ن}}$

$\left(\frac{س}{ص}\right)^{ن} = \frac{س^{ن}}{ص^{ن}}$ لكل ص ≠ ٠

اقسم

$س^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{س}$

بسّط

طريقة ثانية:

$\frac{\sqrt[3]{١٦}}{\sqrt[3]{٢}} = \sqrt[3]{\frac{١٦}{٢}}$

$= \sqrt[3]{٨}$

$= \sqrt[3]{٢^{٣}}$

$= ٢$

$\therefore \frac{\sqrt[3]{١٦}}{\sqrt[3]{٢}} = ٢$

$\frac{\sqrt[ن]{س}}{\sqrt[ن]{ص}} = \sqrt[ن]{\frac{س}{ص}}$ ، حيث ص ≠ ٠

اقسم

اكتب ٨ على صورة مكعب كامل

$\sqrt[3]{س^{٣}} = س$

حاول أن تحل

٨ أوجد الناتج في كل مما يلي:

أ $\sqrt[٥]{٩} \times \sqrt[٥]{٢٧}$

ب $\frac{\sqrt[3]{٢٤٣}}{\sqrt[3]{٣}}$

KuwaitMath.com

المرشد لحل المسائل

بهدف تعزيز حب رياضة كرة القدم لدى الناشئة، أقام أحد النوادي ملعبًا لتدريبهم.

استخدم المعادلة:

ع = ٧٤√س لمعرفة طول سور الملعب ع، بمعلومية مساحة الملعب س.

أ تبلغ مساحة الملعب الحالية ١ ٥٠٠ متر مربع.

فما طول السور اللازم لإحاطته؟

ب قررت إدارة النادي زيادة مساحة الملعب لتصبح ٤ أمثال ما كانت عليه محافظة على شكلها.

فما طول السور الإضافي؟

الحل:

أ لمعرفة طول السور، أعوض عن س بـ ١ ٥٠٠ في المعادلة ع = ٧٤√س.

ع = ٧٤√١ ٥٠٠ ≃ ١٥٤,٩٢

يبلغ طول السور حوالى ١٥٥ مترًا.

ب مساحة الملعب بعد الزيادة = ١ ٥٠٠ × ٤ = ٦ ٠٠٠ متر مربع.

باستخدام المعادلة ع = ٧٤√س ، نحصل على:

ع = ٧٤√٦ ٠٠٠ ≃ ٣٠٩,٨

أي حوالى ٣١٠ أمتار.

طول السور الإضافي: ٣١٠ – ١٥٥ = ١٥٥ مترًا.

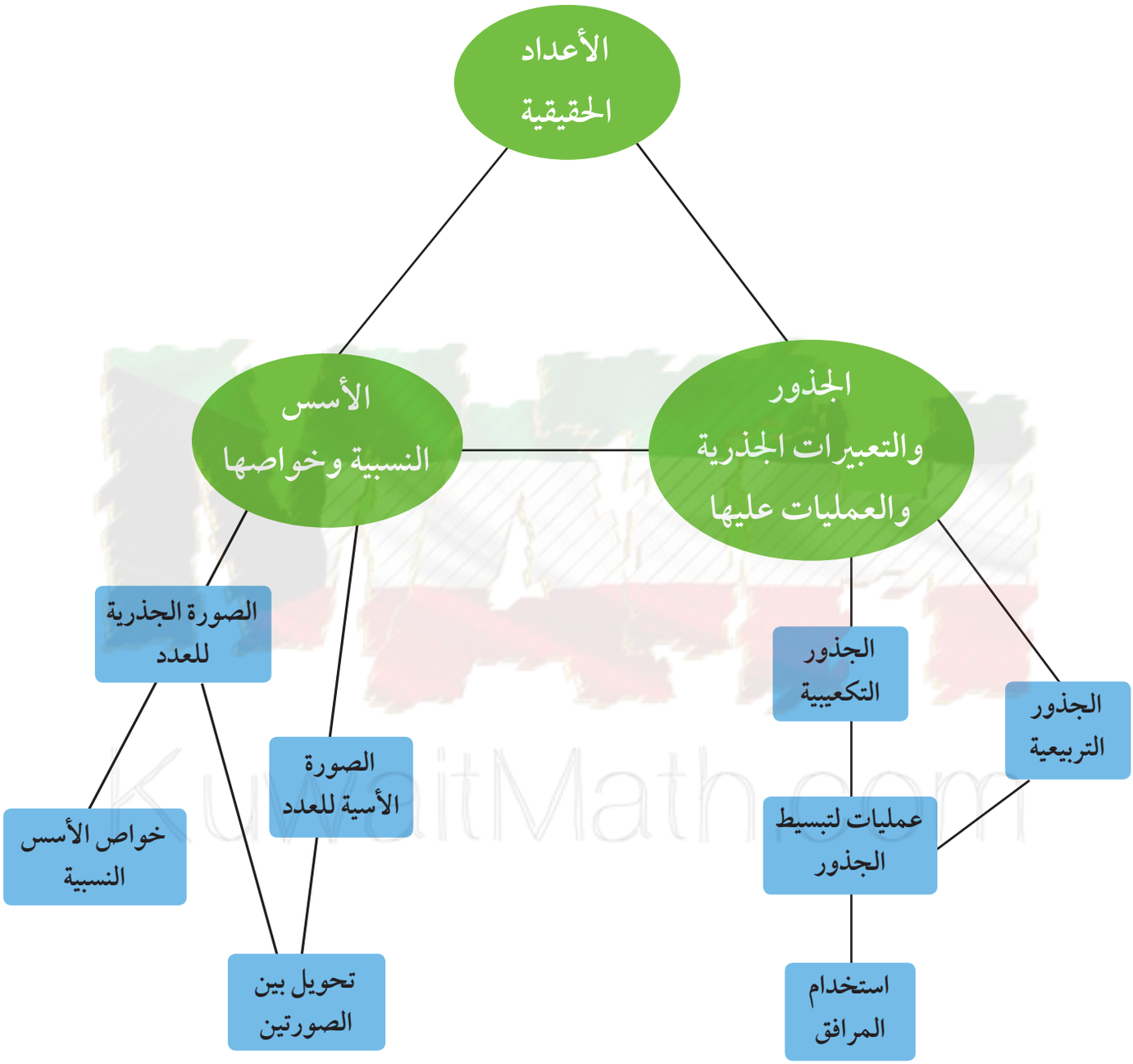
ملاحظة: عندما أصبحت مساحة الملعب ٤ أمثال ما كانت عليه في السابق، أصبح طول السور الحالي مثلي طول السور السابق.

KuwaitMath.com

مسألة إضافية

أوجد أبعاد قطعة أرض مستطيلة الشكل، يساوي طولها ثلاثة أمثال عرضها، ومساحتها ٢ ٧٠٠ متر مربع.

مخطط تنظيمي للوحدة الأولى



KuwaitMath.com

ملخص

- لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب.
- لكل عدد حقيقي جذر تكعيبي واحد.
- خواص الجذور التربيعية (س ≤ ٠، ص ≤ ٠):

$\sqrt{س^{٢}} = |س| = س$

$(\sqrt{س})^{٢} = س$

$\sqrt{س} \times \sqrt{ص} = \sqrt{س \times ص}$

$\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{ص}} = \sqrt{\frac{س}{ص}}$ ، ص ≠ ٠

- خواص الجذور التكعيبية:

$\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$

$(\sqrt[٣]{س})^{٣} = س$

$\sqrt[٣]{س} \times \sqrt[٣]{ص} = \sqrt[٣]{س \times ص}$

$\frac{\sqrt[٣]{س}}{\sqrt[٣]{ص}} = \sqrt[٣]{\frac{س}{ص}}$ ، ص ≠ ٠

- $\sqrt{س} - \sqrt{ص}$ ، $\sqrt{س} + \sqrt{ص}$ مقداران مترافقان

$\sqrt{س}$ تكتب $س^{\frac{١}{٢}}$، $\sqrt[٣]{س}$ تكتب $س^{\frac{١}{٣}}$، $\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}$

- خواص الأسس النسبية:

ليكن م، ن عددين نسبيين و أ، ب عددين حقيقيين حيث أ ≠ ٠، ب ≠ ٠، $أ^{ن}$، $ب^{م}$، $ب^{ن}$ أعداد حقيقية.

$ب^{م} \times ب^{ن} = ب^{م+ن}$

$(ب^{م})^{ن} = ب^{م \times ن}$

$(أ \times ب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن}$

$ب^{-ن} = \frac{١}{ب^{ن}}$ ، ب ≠ ٠

$\frac{ب^{م}}{ب^{ن}} = ب^{م-ن}$ ، ب ≠ ٠

$(\frac{أ}{ب})^{م} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}}$ ، ب ≠ ٠

KuwaitMath.com