الوحدة الرابعة

المتغيرات العشوائية وتوزيعها

Random Variables and Their Distribution

مشروع الوحدة: أهمية استخدام علم الاحتمالات المستند على إحصاءات سابقة للوصول إلى استنتاجات مفيدة

١ مقدمة المشروع: في إحدى رحلات الخطوط الجوية التي يتم خلالها استخدام طائرة تتسع لِـ ٢١٣ راكبًا، تقوم الشركة ببيع أكثر من ٢١٣ بطاقة لأنه معروف من رحلات سابقة أن بعض الركاب ممن سبق أن حجزوا بطاقات سفر قد يتخلفون عن الرحلة.

٢ الهدف: تهتم الشركة بأن يكون عدد الركاب في الرحلة مساويًا لعدد المقاعد المتوفرة على الطائرة أي ٢١٣ مقعدًا، لأنّه إذا وجدت مقاعد فارغة على الطائرة خلال الرحلة فإن المردود المادي للرحلة سيتناقص، أما إذا كان عدد الركاب أكبر من عدد المقاعد فإن الشركة ستقوم بدفع تعويض مادي لكل راكب لم يتوفر له مقعد على متن الطائرة وهذا أيضًا سينقص من المردود المادي للرحلة.

٣ اللوازم: آلة حاسبة – حاسوب.

٤ أسئلة حول التطبيق:

بناءً على إحصاءات سابقة فإن احتمال تخلف راكب واحد عن رحلة جوية هو ٠,٠٩٧٥

أ أثبت أن عدد البطاقات المباعة للرحلة يجب أن يكون ٢٣٦ بطاقة حتى يتأمن وجود ٢١٣ راكبًا عند انطلاق الرحلة.

ب إذا باعت الشركة ٢٤٠ بطاقة أي ٤ بطاقات أكثر مما يلزم لتأمين ٢١٣ راكبًا.
أوجد احتمال وجود راكب إضافي لا مقعد له على متن الطائرة.

جـ إذا كانت الشركة تدفع ٢٠٠ دينار لكل راكب حجز بطاقة ولم يجد مقعدًا على متن الطائرة للرحلة، فأوجد احتمال أن تدفع الشركة ١٠٠٠ دينار تعويضًا للركاب الذين لم يجدوا لهم مقاعد على متن الطائرة إذا كانت الشركة قد باعت ٢٤٦ بطاقة.

٥ التقرير: ضع تقريرًا مفصّلًا حول المشروع واعرض استخدام خصائص الاحتمال والتوقع في تنفيذه.

دروس الوحدة

الوحدة الرابعة

أضف إلى معلوماتك

عمل كل من مؤسسي حساب الاحتمالات (كاردانو Cardano، باسكال Pascal، فيرما Fermat، برنولي Bernoulli) على تطوير هذا الحساب وذلك من خلال تجارب نواتجها قابلة للعد.

وبعد ذلك تركز الاهتمام على متغيرات عشوائية يمكن أن تأخذ عددًا لا نهائيًّا من القيم أو كل القيم على فترة من مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- استخدمت مبدأ العد والتباديل والتوافيق لعد الطرق الممكنة لإجراء عملية ما.
- تعرفت التجربة العشوائية وفضاء العينة.
- عيّنت احتمالات بعض الأحداث والأحداث المتنافية ومتمم الحدث والأحداث المستقلة.

ماذا سوف تتعلم؟

- تعرف المتغيرات العشوائية المتقطعة والمتصلة.
- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع التراكمي لمتغيّر عشوائي متقطع.
- تعرف دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي متصل.

المصطلحات الأساسية

المتغيّر العشوائي المتقطع - التوزيع الاحتمالي - توزيع ذات الحدين - تجربة برنولي - توقع التوزيع الاحتمالي - دالة التوزيع الاحتمالي - دالة التوزيع التراكمي - التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل - دالة كثافة الاحتمال - التوزيع الاحتمالي المنتظم - التوزيع الاحتمالي الطبيعي.

٤ – ١

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

Discrete Random Variables and Probability Distributions

سوف تتعلم

- المتغير العشوائي المتقطع والتوزيع الاحتمالي.
- توزيع ذات الحدين وتجربة برنولي.
- توقع التوزيع الاحتمالي.
- دالة التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع التراكمي.
- تباين التوزيع الاحتمالي.
- المتغيّر العشوائي المتصل.
- التوزيع الاحتمالي المتصل.
- التوزيع الاحتمالي المنتظم.
- التوزيع الاحتمالي الطبيعي.

دعنا نفكر ونتناقش

عند إلقاء حجري نرد منتظمين وملاحظة الوجه العلوي.

الحجر الأول مرقم كما يلي: وجهان مرقمان ٠، وجهان مرقمان ١، وجهان مرقمان ٢.

الحجر الثاني مرقم كما يلي: ثلاثة أوجه مرقمة ٠، ثلاثة أوجه مرقمة ١.

نهتم بمجموع العددين الظاهرين على الوجه العلوي وليكن م هذا المجموع.

١ بيّن أن النتائج الممكنة هي: ٠، ١، ٢، ٣

٢ أ أوجد احتمال كل من النتائج التالية:

ل(م = ٠)

ل(م = ١)

ل(م = ٢)

ب استنتج احتمال ل(م = ٣)

٣ أ إذا كنا نهتم بناتج ضرب العددين الظاهرين على الوجه العلوي، فما النتائج الممكنة؟

ب أوجد احتمال كل من النتائج الممكنة.

مقدّمة Introduction

في ما سبق درسنا بعض مفاهيم التجارب العشوائية والاحتمال. ونحن نعلم أن فضاء العيّنة هو مجموعة نواتج التجربة العشوائية والتي غالبًا ما تكون صفات أو مسميات يصعب التعامل معها رياضيًّا.

لذا يقوم الباحث بإقران هذه النواتج الوصفية للتجربة العشوائية بقيم عددية حقيقية تسمى **بالمتغير العشوائي** والذي تتغير قيمته بتغير نتيجة التجربة العشوائية.

فعلى سبيل المثال عند إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين فإن فضاء العينة يكون كالتالي:

ف = {(ص،ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}.

فمثلًا إذا اقتصرت دراستنا على **عدد الصور** التي ظهرت في كل عنصر من عناصر فضاء العينة ف والتي هي كالتالي: ٢، ١، ١، ٠ على الترتيب نكون قد أقرنّا كل عنصر من عناصر فضاء العينة بعدد حقيقي كما هو موضّح في الجدول التالي:

عناصر فضاء العينة ف	عدد الصور في كل عنصر
(ص، ص)	٢
(ص، ك)	١
(ك، ص)	١
(ك، ك)	٠

وسوف نرمز للمتغير العشوائي بالرمز سـ وعليه فإن مدى سـ = {٢، ١، ٠}.

تعريف: المتغير العشوائي

هو دالة مجالها فضاء العينة ف ومجالها المقابل هو ح ومداها مجموعة جزئية من ح حيث

سـ : ف ⟵ ح

(سـ هو المتغير العشوائي، ف فضاء العينة، ح مجموعة الأعداد الحقيقية).

ففي المثال السابق نلاحظ ما يلي:

١ مجال المتغير العشوائي سـ هو ف = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

٢ المجال المقابل للمتغير العشوائي هو ح.

٣ المدى للمتغير العشوائي سـ هو {٢، ١، ٠} ويرمز له بالرمز سـ (ف)

يوجد عدة أنواع من المتغيرات العشوائية، سوف تدرس نوعين فقط منها وهما:

١ المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة).

٢ المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة).

وسوف نستخدم سـ ، صـ، ... للرمز للمتغيرات العشوائية وكذلك سنستخدم س، ص... لقيم هذه المتغيرات.

(٤-١-أ) المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة)

Discrete Random Variables

تعريف: المتغير العشوائي المتقطع

يكون المتغير العشوائي سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له (المدى) سـ (ف): هي مجموعة متقطعة أي قابلة للعد، من الأعداد الحقيقية سواء أكانت منتهية أم غير منتهية.

مثال (١)

في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين، ليكن المتغير العشوائي سـ يعبر عن عدد الكتابات.
أوجد ما يلي:

أ فضاء العينة ف.

ب مدى المتغير العشوائي سـ.

جـ نوع المتغير العشوائي سـ.

الحل:

أ فضاء العينة (ف) = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

ب

عناصر فضاء العينة ف	عناصر مدى المتغير العشوائي سـ
(ص، ص)	٠
(ص، ك)	١
(ك، ص)	١
(ك، ك)	٢

∴ مدى المتغير العشوائي سـ = {٠، ١، ٢}

جـ نوع المتغير العشوائي سـ: متقطع

حاول أن تحل

١ من تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ثلاث مرات متتالية وليكن المتغير العشوائي سـ يعبّر عن عدد الصور. أوجد ما يلي:

أ فضاء العينة.

ب مدى المتغير العشوائي سـ.

جـ نوع المتغير العشوائي سـ.

مثال (٢)

في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدّد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا.

أ المتغير العشوائي سـ الذي يمثل عدد الصور.

ب المتغير العشوائي صـ الذي يمثل مربع عدد الصور.

جـ المتغير العشوائي ع الذي يمثل عدد الصور مطروحًا منه عدد الكتابات.

الحل:

أ فضاء العينة (ف) = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

عناصر فضاء العينة ف	عناصر مدى المتغير العشوائي سـ
(ص، ص)	٢
(ص، ك)	١
(ك، ص)	١
(ك، ك)	٠

∴ مدى المتغير العشوائي سـ = {٢، ١، ٠}

نوع المتغير العشوائي سـ: متقطع

ب

عناصر فضاء العينة ف	عناصر مدى المتغير العشوائي صـ
(ص، ص)	$(٢)^{٢} = ٤$
(ص، ك)	$(١)^{٢} = ١$
(ك، ص)	$(١)^{٢} = ١$
(ك، ك)	$(٠)^{٢} = ٠$

∴ مدى المتغير العشوائي صـ = {٤، ١، ٠}

نوع المتغير العشوائي صـ: متقطع

جـ

عناصر فضاء العينة ف	عناصر مدى المتغير العشوائي ع
(ص، ص)	٢ − ٠ = ٢
(ص، ك)	١ − ١ = ٠
(ك، ص)	١ − ١ = ٠
(ك، ك)	٠ − ٢ = −٢

∴ مدى المتغير العشوائي ع = {٢، ٠، −٢}

نوع المتغير العشوائي ع: متقطع

حاول أن تحل

٢ في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدّد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا:

أ المتغير العشوائي سـ الذي يمثل عدد الكتابات.

ب المتغير العشوائي صـ الذي يمثل مكعب عدد الكتابات.

جـ المتغير العشوائي ع الذي يمثل عدد الكتابات مطروحًا منه ٢.

دالة التوزيع الاحتمالي
Probability Distribution Function

تعلمنا سابقًا أن المتغير العشوائي المتقطع هو دالة مداها مجموعة جزئية من ح قابلة للعد.

ونبحث الآن في احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة المناظر لكل عنصر من عناصر المدى.

تعريف: دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ

إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه {$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ...}،

فإن دالة التوزيع الاحتمالي د تعرّف كالتالي:

د($س_ر$) = احتمال (سـ = $س_ر$)

أي أن د ($س_ر$) = ل(سـ = $س_ر$) لكل ر = ١، ٢، ٣، ...

ويمكن تمثيلها بالجدول التالي:

$س_ر$	$س_١$	$س_٢$	....
د($س_ر$)	د($س_١$)	د($س_٢$)	....

أي أن مجموعة النقاط في المستوى الإحداثي التي تمثل الأزواج المرتبة $\left(س_ر ، د(س_ر)\right)$ تسمى دالة التوزيع الاحتمالي.

مثال (٣)

في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة مرة واحدة، إذا كان المتغير العشوائي سـ يعبّر عن عدد الصور، فأوجد:

أ فضاء العينة (ف).

ب مدى المتغير العشوائي سـ.

جـ احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة (ف) $\left(د(س_ر)\right)$ = ل$\left(سـ = س_ر\right)$.

د دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ.

الحل:

أ فضاء العينة (ف) = {ص، ك}

عدد عناصر فضاء العينة: ن(ف) = ٢

ب

عناصر فضاء العينة ف	عناصر مدى المتغير العشوائي سـ
ص	١
ك	٠

∴ مدى المتغير العشوائي سـ = {٠، ١}

جـ ∵ د$(س_ر)$ = ل$(سـ = س_ر)$

∴ د(٠) = ل(سـ = ٠) = $\frac{١}{٢}$

∴ د(١) = ل(سـ = ١) = $\frac{١}{٢}$

د دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ هي:

س	٠	١
د(س)	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$

لاحظ أن ل(سـ = ٠) + ل(سـ = ١) = $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}$ = ١

حاول أن تحل

٣ عند إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين وبفرض أن المتغير العشوائي سـ يعبر عن «عدد الكتابات». أوجد دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ.

تذكر:

ل(أ) = $\frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر (ف)}}$

مثال (٤)

عند إلقاء قطعة نقود متماثلة ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي سـ يعبّر عن «عدد الصور»، فأوجد ما يلي:

أ فضاء العينة (ف).

ب مدى المتغير العشوائي سـ.

جـ احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي سـ.

د دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ.

الحل:

أ فضاء العينة (ف) = {(ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)}.

ب

عناصر فضاء العينة ف	عدد الصور في كل عنصر
(ص، ص، ص)	٣
(ص، ص، ك)	٢
(ص، ك، ص)	٢
(ك، ص، ص)	٢
(ص، ك، ك)	١
(ك، ص، ك)	١
(ك، ك، ص)	١
(ك، ك، ك)	٠

∴ مدى المتغير العشوائي سـ = {٣، ٢، ١، ٠}

ج ل(س = ٣) = $\frac{١}{٨}$

ل(س = ٢) = $\frac{٣}{٨}$

ل(س = ١) = $\frac{٣}{٨}$

ل(س = ٠) = $\frac{١}{٨}$

د دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

س	٣	٢	١	٠
د(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

حاول أن تحل

٤ عند إلقاء قطعة نقود متماثلة ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي س يعبر عن «عدد الكتابات».

فأوجد ما يلي:

أ فضاء العينة ف.

ب مدى المتغير العشوائي س.

ج احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي س.

د دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س.

ملاحظة:

دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع س تحقق الشرطين:

١ ٠ ≤ د(س) ≤ ١

٢ مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي د تساوي الواحد الصحيح،

أي أن د(س$_{١}$) + د(س$_{٢}$) + د(س$_{٣}$) + ... = ١

مثال (٥)

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ هي:

س	–٢	١	٢	٣
د(س)	٠,٣	٠,١	ك	٠,٢

فأوجد قيمة ك.

الحل:

∵ مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي د تساوي الواحد الصحيح

∴ د(–٢) + د(١) + د(٢) + د(٣) = ١

٠,٣ + ٠,١ + ك + ٠,٢ = ١

∴ ك = ١ – ٠,٦

ك = ٠,٤

حاول أن تحل

٥ إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ هي:

س	٤	٣	٢	١	٠
د(س)	ك	٠,٢	٠,١	٠,١٥	٠,٣٥

فأوجد قيمة ك.

مثال (٦)

إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: {-٢، -١، ٠، ١}

وكان د(-٢) = د(-١) = ٠,٣ ، د(١) = ٠,٢

أوجد د(٠)، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ.

الحل:

∵ د(-٢) + د(-١) + د(٠) + د(١) = ١

٠,٣ + ٠,٣ + د(٠) + ٠,٢ = ١

∴ د(٠) = ٠,٢

∴

س	-٢	-١	٠	١
د(س)	٠,٣	٠,٣	٠,٢	٠,٢

حاول أن تحل

٦ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: {٠، ١، ٢، ٣}

وكان د(٠) = ٠,١ ، د(١) = ٠,٦ ، د(٢) = ٠,١٥

فأوجد د(٣)، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ.

مثال (٧)

صندوق يحتوي على ١٠ كرات متماثلة منها ٧ كرات بيضاء و٣ كرات حمراء. سحبت أربع كرات عشوائيًّا معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي سـ يمثل عدد الكرات الحمراء. فأوجد ما يلي:

أ عدد عناصر فضاء العينة (ن (ف)).

ب مدى المتغير العشوائي سـ.

جـ احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي سـ.

د دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ.

الحل:

أ عدد عناصر فضاء العينة (ف) = $^{١٠}ق_{٤} = \frac{^{١٠}ل_{٤}}{٤!}$

$= \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$

$= ٢١٠$

تذكر:

- $^{ن}ل_{ر} =$ ن(ن - ١)(ن - ٢) .... (ن - ر + ١)
- $^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$
- $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!}$
- $^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!\, ر!}$

حيث ن، ر ∈ $ص^{+}$

ن ≥ ر

ب عدد الكرات الحمراء التي يمكن سحبها كالتالي:

لدينا ٤ حالات:

- أن تكون كل الكرات المسحوبة بيضاء.

∴ عدد الكرات الحمراء المسحوبة = صفر ⟵ س = ٠

- أن تكون الكرات المسحوبة منها ٣ كرات بيضاء وواحدة حمراء ⟵ س = ١
- أن تكون الكرات المسحوبة منها ٢ كرة بيضاء و٢ كرة حمراء ⟵ س = ٢
- أن تكون الكرات المسحوبة منها ١ كرة بيضاء و٣ كرات حمراء ⟵ س = ٣

∴ مدى المتغير العشوائي س = {٠، ١، ٢، ٣}

جـ $ل(س = ٠) = \dfrac{{}^{٧}\text{ق}_{٤} \times {}^{٣}\text{ق}_{٠}}{{}^{١٠}\text{ق}_{٤}} = \dfrac{٣٥}{٢١٠}$

$ل(س = ١) = \dfrac{{}^{٧}\text{ق}_{٣} \times {}^{٣}\text{ق}_{١}}{{}^{١٠}\text{ق}_{٤}} = \dfrac{١٠٥}{٢١٠}$

$ل(س = ٢) = \dfrac{{}^{٧}\text{ق}_{٢} \times {}^{٣}\text{ق}_{٢}}{{}^{١٠}\text{ق}_{٤}} = \dfrac{٦٣}{٢١٠}$

$ل(س = ٣) = \dfrac{{}^{٧}\text{ق}_{١} \times {}^{٣}\text{ق}_{٣}}{{}^{١٠}\text{ق}_{٤}} = \dfrac{٧}{٢١٠}$

د دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س:

س	٠	١	٢	٣	المجموع
د (س)	$\frac{٣٥}{٢١٠}$	$\frac{١٠٥}{٢١٠}$	$\frac{٦٣}{٢١٠}$	$\frac{٧}{٢١٠}$	١

حاول أن تحل

٧ صندوق يحتوي على ١٠ كرات متماثلة منها ٧ كرات بيضاء و٣ كرات حمراء. سحبت عشوائيًّا ٣ كرات معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي س يمثل عدد الكرات البيضاء، فأوجد ما يلي:

أ عدد عناصر فضاء العينة (ف).

ب مدى المتغير العشوائي س.

جـ احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي س.

د دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س.

التوقع (الوسط) والتباين للمتغيرات العشوائية المتقطعة

Expectation and Variance for Discrete Random Variables

نعلم أن التوقع (الوسط) هو القيمة التي تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع، والتباين هو القيمة التي تقيس تشتت قيم المتغير العشوائي المتقطع عن قيمته المتوسطة، وبالتالي فإن التوقع والتباين يلخصان أهم صفات المتغيرات العشوائية وسوف ندرس كلًّا من التوقع والتباين لكل من المتغيرات العشوائية المتقطعة.

أولًا: التوقع (الوسط) للمتغير العشوائي المتقطع

Expectation for Discrete Random Variable

تعريف:

إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي د،

مدى س = {$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ...}

فإن التوقع للمتغير العشوائي س (يرمز له برمز μ) يكون:

التوقع (μ) = $\sum$ $س_ر$ د($س_ر$)

أي أن: μ = $س_١$ د($س_١$) + $س_٢$ د($س_٢$) + $س_٣$ د($س_٣$) + ...

مثال (٨)

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع س هي:

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	$\frac{٣}{٧}$	$\frac{٢}{٧}$	$\frac{٦}{٣٥}$	$\frac{٣}{٣٥}$	$\frac{١}{٣٥}$

فأوجد التوقع μ للمتغير العشوائي س.

الحل:

التوقع μ = $\sum$ $س_ر$ د($س_ر$)

= ١ × $\frac{٣}{٧}$ + ٢ × $\frac{٢}{٧}$ + ٣ × $\frac{٦}{٣٥}$ + ٤ × $\frac{٣}{٣٥}$ + ٥ × $\frac{١}{٣٥}$

= ٢

حاول أن تحل

٨ إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع س هي:

س	٠	١	٢
د(س)	$\frac{٤}{٩}$	$\frac{٤}{٩}$	$\frac{١}{٩}$

فأوجد التوقع μ للمتغير العشوائي س.

مثال (٩)

عند إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين، إذا كان المتغير العشوائي سـ يعبر عن عدد الصور، فأوجد:

أ فضاء العينة (ف).

ب مدى المتغير العشوائي سـ.

جـ احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي المتقطع سـ.

د دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

هـ التوقع μ للمتغير العشوائي سـ.

الحل:

أ فضاء العينة (ف) = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}.

ب مدى المتغير العشوائي سـ = {٢، ١، ٠}

جـ د(٢) = $\frac{١}{٤}$ ، د(١) = $\frac{١}{٢}$ ، د(٠) = $\frac{١}{٤}$

د دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

س	٢	١	٠
د(س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

هـ التوقع μ = $\sum$ س$_ر$ د(س$_ر$)

= ٢ × $\frac{١}{٤}$ + ١ × $\frac{١}{٢}$ + ٠ × $\frac{١}{٤}$

= $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ = ١

ملاحظة:

لاحظ أن:

ل(سـ = ٢)

= د(٢)

حاول أن تحل

٩ إذا كان فضاء العينة لأربع أسر لديها طفلان كالتالي:

ف = {(ولد، ولد)، (ولد، بنت)، (بنت، ولد)، (بنت، بنت)}

فأوجد:

أ مدى المتغير العشوائي المتقطع سـ الذي يعبر عن عدد الأولاد.

ب احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي سـ.

جـ دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

د التوقع μ للمتغير العشوائي سـ.

ثانيًا: التباين للمتغير العشوائي المتقطع
Variance for Discrete Random Variable

تعريف:

إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي د فإن التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة:

التباين (σ^2) = $\sum$ س$_ر^2$ د(س$_ر$) $- \mu^2$ حيث μ هو التوقع.

الانحراف المعياري (σ) = $\sqrt{\text{التباين}}$

مثال (١٠)

الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع س.

س	١	٢	٣	٤
د(س)	٠,١	٠,٦	٠,٢	٠,١

أوجد:

أ التوقع (μ).

ب التباين (σ^2).

جـ الانحراف المعياري (σ).

الحل:

أ التوقع (μ) = $\sum$ س$_ر$ د(س$_ر$)

= ١ × ٠,١ + ٢ × ٠,٦ + ٣ × ٠,٢ + ٤ × ٠,١

= ٠,١ + ١,٢ + ٠,٦ + ٠,٤

= ٢,٣

ب التباين (σ^2) = $\sum$ س$_ر^2$ د(س$_ر$) $- \mu^2$

= (١)^2 × ٠,١ + (٢)^2 × ٠,٦ + (٣)^2 × ٠,٢ + (٤)^2 × ٠,١ − (٢,٣)^2

= ٠,٦١

جـ الانحراف المعياري (σ) = $\sqrt{\text{التباين}}$

= $\sqrt{٠,٦١}$

≈ ٠,٧٨١٠

حاول أن تحل

١٠ الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع س.

س	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,١	٠,٣	٠,٥	٠,١

أوجد:

أ التوقع (μ).

ب التباين (σ^2).

جـ الانحراف المعياري (σ).

مثال (١١)

يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع س.

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,٤٣	٠,٢٩	٠,١٧	٠,٠٩	٠,٠٢

أوجد:

أ التوقع (μ).

ب التباين (σ^2).

جـ الانحراف المعياري (σ).

الحل:

أ التوقع (μ) = $\sum$ س$_ر$ د(س$_ر$)

= ١ × ٠,٤٣ + ٢ × ٠,٢٩ + ٣ × ٠,١٧ + ٤ × ٠,٠٩ + ٥ × ٠,٠٢

= ١,٩٨

ب التباين = $\sum$ س$_ر^2$ د(س$_ر$) − μ^2

= ١ × ٠,٤٣ + ٤ × ٠,٢٩ + ٩ × ٠,١٧ + ١٦ × ٠,٠٩ + ٢٥ × ٠,٠٢

− (١,٩٨)^2 = ٥,٠٦ − ٣,٩٢

= ١,١٣٩٦

ج الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}}$ = $\sqrt{1,1396}$

$\sigma \approx 1,0675$

حاول أن تحل

١١ يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,٢	٠,١	٠,٣	٠,١	٠,٣

أوجد:

أ التوقع (μ).

ب التباين (σ^2).

ج الانحراف المعياري (σ).

دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي متقطع

Cumulative Distribution Function for a Discrete Random Variable

درسنا بالتفصيل دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

وبيّنا أن دالة التوزيع الاحتمالي د تحقق الشرطين:

١ ٠ ≤ د(س) ≤ ١

٢ $\sum$ د(س$_ر$) = ١

ونتعرض الآن لدالة أخرى للمتغير العشوائي المتقطع سـ وهي دالة التوزيع التراكمي.

تعريف:

دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة أ هي احتمال وقوع المتغير العشوائي سـ بحيث يكون سـ أصغر من أو يساوي أ

أي أن: ت(أ) = ل(سـ ≤ أ)

لاحظ أن مجال دالة التوزيع التراكمي ت هو ح وأن المجال المقابل = المدى [٠، ١].

مثال (١٢)

الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

س	٣	٤	٥
د(س)	٠,٥	٠,٣	٠,٢

أوجد: ت(٢) ، ت(٣) ، ت(٤) ، ت(٥,٤) ، ت(٥) ، ت(٧)

حيث ت دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي سـ.

الحل:

ت(٢) = ل(سـ ≤ ٢)

= ل(سـ < ٢) + ل(سـ = ٢)

= صفر + صفر

= صفر

ت(٣) = ل(سـ ≤ ٣) = ل(سـ < ٣) + ل(سـ = ٣)

= ل(سـ < ٣) + د(٣)

= ٠ + ٠,٥

= ٠,٥

ت(٤) = ل(سـ ≤ ٤)

= ل(سـ < ٤) + ل(سـ = ٤)

= د(٣) + د(٤)

= ٠,٥ + ٠,٣

= ٠,٨

ت(٥,٤) = ل(سـ ≤ ٥,٤)

= د(٥,٤) + د(٤) + د(٣)

= ٠ + ٠,٣ + ٠,٥

= ٠,٨

ت(٥) = ل(سـ ≤ ٥)

= د(٥) + د(٤) + د(٣)

= ٠,٢ + ٠,٣ + ٠,٥

= ١

ت(٧) = ل(سـ ≤ ٧)

= د(٧) + د(٥) + د(٤) + د(٣)

= ٠ + ٠,٢ + ٠,٣ + ٠,٥

= ١

تذكر:

نرمز لدالة التوزيع الاحتمالي بالرمز د. ونرمز لدالة التوزيع التراكمي بالرمز ت.

حاول أن تحل

١٢ الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع س.

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,٤٣	٠,٢٩	٠,١٧	٠,٠٩	٠,٠٢

أوجد: ت(١)، ت(٣,٥)، ت(٤)، ت(٥)

بعض خواص دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي س:

١ ل(أ < س ≤ ب) = ت(ب) − ت(أ)

٢ ل(س > أ) = ١ − ل(س ≤ أ)

= ١ − ت(أ)

٣ ل(أ < س ≤ ب) = ل(أ ≤ س < ب)

= ل(أ < س < ب)

= ل(أ ≤ س ≤ ب)

مثال (١٣)

الجدول التالي يبيّن بعض قيم دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي المتقطع س.

س	١	٢	٣	٥
ت(س)	٠,١٥	٠,٢	٠,٦	١

أوجد:

أ ل(١ < س ≤ ٣)

ب ل(٢ ≤ س < ٥)

جـ ل(س > ٢)

الحل:

أ ل(١ < سـ ≤ ٣) = ت(٣) − ت(١)

= ٠,٦ − ٠,١٥

= ٠,٤٥

ب ل(٢ ≤ سـ < ٥) = ت(٥) − ت(٢)

= ١ − ٠,٢

= ٠,٨

جـ ل(سـ > ٢) = ١ − ل(سـ ≤ ٢)

= ١ − ت(٢)

= ١ − ٠,٢

= ٠,٨

حاول أن تحل

١٣ يبيّن الجدول التالي بعض قيم دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

س	١	٢	٣	٤
ت(س)	٠,٢٥	٠,٤٠	٠,٦٥	١

أوجد:

أ ل(٤ < سـ < ٥)

ب ل(سـ > ٣)

بيان دالة التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المتقطع سـ

Graph of Probability Distribution Function and Cumulative Distribution Function for a Discrete Random Variable *x*

أوّلًا: بيان دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

نعلم أن دالة التوزيع الاحتمالي هي مجموعة نقاط المستوى التي تمثل الأزواج المرتبة (سر ، صر)، وبالتالي فإن بيان دالة التوزيع الاحتمالي هو عبارة عن نقاط يمكن تمثيلها في المستوى الإحداثي.

مثال (١٤)

لتكن د هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ كما في الجدول التالي:

س	١	٢	٣	٤
د(س)	٠,٢	٠,١	٠,٤	٠,٣

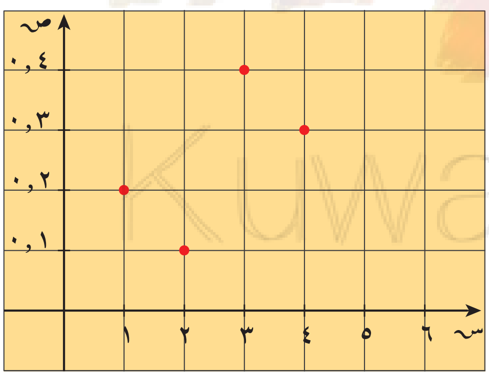
ارسم بيان دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ.

الحل:

رسم بيان دالة التوزيع الاحتمالي:

نمثّل قيم س على المحور السيني

وقيم الدالة د(س) على المحور الصادي.



بيان دالة التوزيع الاحتمالي

حاول أن تحل

١٤ لتكن د هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ كما في الجدول التالي:

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,٥	٠,١	٠,٢	٠,١٥	٠,٠٥

ارسم بيان دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ.

ثانيًا: بيان دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

نعلم أن دالة التوزيع التراكمي هي دالة مجالها ح ومجالها المقابل = المدى = [٠، ١]، وبالتالي فإن بيانها عبارة عن شعاعين وقطع مستقيمة كما يتضح من المثال التالي:

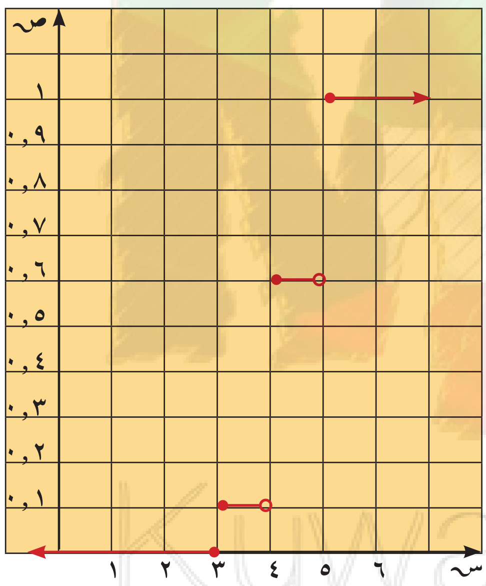
مثال (١٥)

لتكن الدالة د هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع سـ كما في الجدول التالي:

س	٢	٣	٤	٥
د(س)	صفر	٠,١	٠,٥	٠,٤

أ أوجد دالة التوزيع التراكمي ت.

ب ارسم بيان دالة التوزيع التراكمي ت.



بيان دالة التوزيع التراكمي ت

الحل:

أ س < ٢ ⟸ ت(س) = صفر

٢ ≤ س < ٣ ⟸ ت(س) = صفر

٣ ≤ س < ٤ ⟸ ت(س) = صفر + ٠,١

= ٠,١

٤ ≤ س < ٥ ⟸ ت(س) = ٠,٥ + ٠,١

= ٠,٦

س ≥ ٥ ⟸ ت(س) = ٠,٤ + ٠,٦

= ١

ب رسم بيان دالة التوزيع التراكمي ت.

نأخذ قيم س على محور السينات وقيم الدالة ت(س) على محور الصادات.

حاول أن تحل

١٥ لتكن الدالة د هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع سـ كما يبيّن الجدول التالي:

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,٥	٠,١	٠,٢	٠,١٥	٠,٠٥

أ أوجد دالة التوزيع التراكمي ت.

ب ارسم بيان دالة التوزيع التراكمي ت.

مثال (١٦)

عند إلقاء قطعة نقود معدنية متماثلة ثلاث مرات متتالية وملاحظة الوجه العلوي، ليكن سـ المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة (ص).

أ أوجد فضاء العينة (ف)

ب أوجد مدى المتغير العشوائي (سـ)

جـ أوجد احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة (ف).

د أوجد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (سـ).

هـ ارسم دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ.

و أوجد دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي سـ.

ز ارسم دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي سـ.

الحل:

أ ف = {(ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)
(ك، ك، ص)، (ك، ص، ك)، (ص، ك، ك)، (ك، ك، ك)}.

ب

عناصر فضاء العينة (ف)	عدد الصور في كل عنصر
(ص، ص، ص)	٣
(ص، ص، ك)	٢
(ص، ك، ص)	٢
(ك، ص، ص)	٢
(ص، ك، ك)	١
(ك، ص، ك)	١
(ك، ك، ص)	١
(ك، ك، ك)	٠

∴ مدى المتغير العشوائي سـ = {٣، ٢، ١، ٠}

ج د(٣) = ل(سـ = ٣) = $\frac{١}{٨}$

د(٢) = ل(سـ = ٢) = $\frac{٣}{٨}$

د(١) = ل(سـ = ١) = $\frac{٣}{٨}$

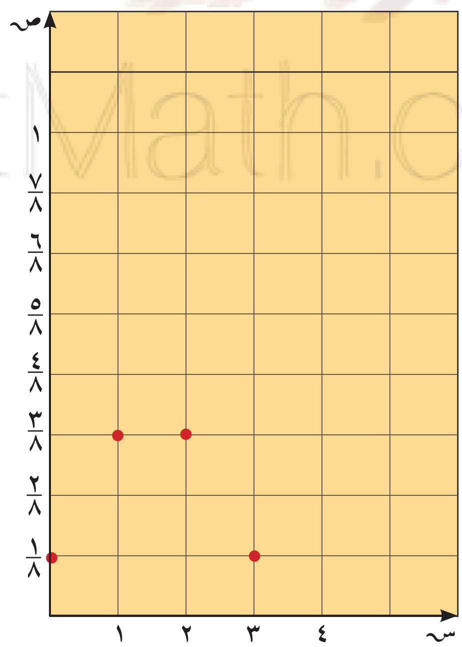
د(٠) = ل(سـ = ٠) = $\frac{١}{٨}$

د دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ هي:

س	٣	٢	١	٠
د(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

هـ لرسم بيان دالة التوزيع الاحتمالي تمثل قيمة س على المحور السيني وقيمة د(س) على المحور الصادي.

س	٠	١	٢	٣
د(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

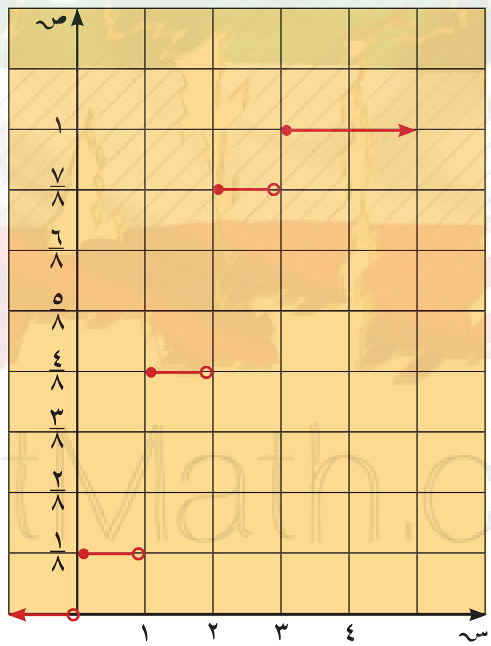


بيان دالة التوزيع الاحتمالي

و دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

$$ت(س) = \begin{cases} \text{صفر} & : \quad س < ٠ \\ \frac{١}{٨} & : \quad ٠ \le س < ١ \\ \frac{٤}{٨} & : \quad ١ \le س < ٢ \\ \frac{٧}{٨} & : \quad ٢ \le س < ٣ \\ ١ & : \quad س \ge ٣ \end{cases}$$

ز رسم بيان دالة التوزيع التراكمي:



بيان دالة التوزيع التراكمي

حاول أن تحل

١٦ استخدم جدول التوزيع الاحتمالي التالي لإيجاد دالة التوزيع التراكمي وارسم بيانها.

س	١	٢	٣	٤	٦
ل(سـ = $س_ر$)	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٦}$

توزيع ذات الحدين **Binomial Distribution**

نعلم من خلال دراستنا أن بعض التجارب العشوائية يكون لها ناتجان أو عدة نواتج يمكن اختزالها إلى ناتجين فقط أي أن فضاء العينة يصبح محتويًا على عنصرين فمثلًا:

- عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة يكون الناتج إما صورة أو كتابة.
- عند تأدية الطالب اختبارًا في مادة ما تكون النتيجة إما نجاح أو رسوب.
- عند دخول شخص اختبار الحصول على رخصة القيادة تكون النتيجة نجاح أو رسوب.

وهكذا فإننا قيد دراسة التجارب التي يكون لها ناتجان فقط وهي ما يسمى **بتجربة ذات الحدين**.

تعريف: تجربة ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة عشوائية تحقق الشروط التالية:

١ تتكوّن التجربة من عدد ن من المحاولات المستقلة والمتماثلة.

(المحاولات المستقلة تعني أن نتيجة كل محاولة لا تؤثر ولا تتأثر بنتائج المحاولات الأخرى).

٢ كل محاولة يكون لها ناتجان فقط (نجاح أو فشل).

٣ احتمال الحصول على أحد الناتجين يكون ثابتًا من تجربة إلى أخرى. وسوف نرمز لهذا الاحتمال بالرمز ل. وتسمى كل محاولة من محاولات التجربة بمحاولة برنولي Bernoulli.

فمثلًا إذا أجريت تجربة برنولي عدد ن من المرات وكان احتمال النجاح في المحاولة الواحدة ل وكان سـ المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات النجاح في كل المحاولات فإن احتمال النجاح في س من المحاولات يعطى بالعلاقة التالية:

$$\text{ل}(\text{سـ} = \text{س}) = \text{د}(\text{س}) = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}}\ \text{ل}^{\text{س}}\ (1 - \text{ل})^{\text{ن} - \text{س}} \quad ، \quad \text{ن} \in \text{صـ}^{+}$$ حيث:

- ن عدد المحاولات.
- مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي سـ= {٠، ١، ٢، ...، ن}
- س عدد مرات النجاح من ن في المحاولات
- ل احتمال النجاح.
- (١ - ل) احتمال الفشل

يسمى توزيع المتغير العشوائي سـ **بتوزيع ذات الحدين** للمعلمتين ل ، ن.

مثال (١٧)

إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا ذو حدين ومعلمتيه هما: ن = ٧ ، ل = ٠,١

فأوجد:

أ ل(سـ = صفر)

ب ل(١ < سـ ≤ ٣)

الحل:

أ ∵ ل(سـ = $\text{س}_\text{ر}$) = د(س) = ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}}$ $\text{ل}^{\text{س}}$ $(١ - \text{ل})^{\text{ن} - \text{س}}$

∵ ن = ٧ ، ل = ٠,١

∴ ل(سـ = صفر)

= د(٠) = ${}^{٧}\text{ق}_{٠}$ $(٠,١)^{٠}$ $(٠,٩)^{٧}$

≈ ٠,٤٧٨٣

حل آخر:

ل(سـ = ٠) = د(٠)

∵ ن = ٧ ، ل = ٠,١ ، سـ = ٠

ل

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: د(س)

ن	س	٠,٠٥	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٩	٠,٩٥
٢	٠	٠,٩٠٢	٠,٨١٠	٠,٦٤٠	٠,٤٩٠	٠,٣٦٠	٠,٢٥٠	٠,١٦٠	٠,٠٩٠	٠,٠٤٠	٠,٠١٠	٠,٠٠٢
	١	٠,٠٩٥	٠,١٨٠	٠,٣٢٠	٠,٤٢٠	٠,٤٨٠	٠,٥٠٠	٠,٤٨٠	٠,٤٢٠	٠,٣٢٠	٠,١٨٠	٠,٠٩٥
	٢	٠,٠٠٢	٠,٠١٠	٠,٠٤٠	٠,٠٩٠	٠,١٦٠	٠,٢٥٠	٠,٣٦٠	٠,٤٩٠	٠,٦٤٠	٠,٨١٠	٠,٩٠٢
٧	٠	٠,٦٩٨	٠,٤٧٨	٠,٢١٠	٠,٠٨٢	٠,٠٢٨	٠,٠٠٨	٠,٠٠٢				
	١	٠,٢٥٧	٠,٣٧٢	٠,٣٦٧	٠,٢٤٧	٠,١٣١	٠,٠٥٥	٠,٠١٧	٠,٠٠٤			
	٢	٠,٠٤١	٠,١٢٤	٠,٢٧٥	٠,٣١٨	٠,٢٦١	٠,١٦٤	٠,٠٧٧	٠,٠٢٥	٠,٠٠٤		
	٣	٠,٠٠٤	٠,٠٢٣	٠,١١٥	٠,٢٢٧	٠,٢٩٠	٠,٢٧٣	٠,١٩٤	٠,٠٩٧	٠,٠٢٩	٠,٠٠٣	
	٤		٠,٠٠٣	٠,٠٢٩	٠,٠٩٧	٠,١٩٤	٠,٢٧٣	٠,٢٩٠	٠,٢٢٧	٠,١١٥	٠,٠٢٣	٠,٠٠٤
	٥			٠,٠٠٤	٠,٠٢٥	٠,٠٧٧	٠,١٦٤	٠,٢٦١	٠,٣١٨	٠,٢٧٥	٠,١٢٤	٠,٠٤١
	٦				٠,٠٠٤	٠,٠١٧	٠,٠٥٥	٠,١٣١	٠,٢٤٧	٠,٣٦٧	٠,٣٧٢	٠,٢٥٧
	٧					٠,٠٠٢	٠,٠٠٨	٠,٠٢٨	٠,٠٨٢	٠,٢١٠	٠,٤٧٨	٠,٦٩٨

نبحث في جدول الاحتمالات في توزيع ذات الحدين عن قيمة د(٠) (صفحة ٥٧)

فنجد أن: د(٠) = ٠,٤٧٨

ب ل(١ < سـ ≤ ٣) = ل(سـ = ٢) + ل(سـ = ٣)

= د(٢) + د(٣)

د(٢) = ${}^{٧}\text{ق}_{٢}$ $(٠,١)^{٢}$ $(٠,٩)^{٥}$ ≈ ٠,١٢٤٠

د(٣) = ${}^{٧}\text{ق}_{٣}$ $(٠,١)^{٣}$ $(٠,٩)^{٤}$ ≈ ٠,٠٢٣٠

ل(١ < سـ ≤ ٣) = ٠,١٢٤٠ + ٠,٠٢٣٠

= ٠,١٤٧٠

حل آخر:

ل(١ < سـ ≤ ٣) = ل(سـ = ٢) + ل(سـ = ٣)

= د(٢) + د(٣)

∵ ن = ٧ ، ل = ٠,١

نبحث في جدول الاحتمالات في توزيع ذات الحدين

عندما س = ٢ ⟵ د(٢) = ٠,١٢٤٠

عندما س = ٣ ⟵ د(٣) = ٠,٠٢٣٠

∴ ل(سـ ≤ ٣) = د(٢) + د(٣)

$= ٠{,}١٢٤٠ + ٠{,}٠٢٣٠$

$= ٠{,}١٤٧٠$

حاول أن تحل

١٧ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا ذو حدين معلمتيه هما ن = ٨ ، ل = ٠,٢ . فأوجد:

أ ل(سـ = ٢)

ب ل(٢ ≤ سـ < ٤)

مثال (١٨)

في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ٨ مرات متتالية، احسب احتمال ظهور صورة ٥ مرات.

الحل:

∵ ن = ٨ ، ل = $\frac{١}{٢}$

∵ ل(سـ = س) = د(س) = $^{ن}ق_{س}$ $ل^{س}$ $(١ - ل)^{ن - س}$

∴ ل(سـ = ٥) = د(٥)

$= {}^{ن}ق_{٥}\ ل^{٥}\ (١ - ل)^{٨ - ٥}$

$= {}^{٨}ق_{٥} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$

$= \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{٣ \times ٢ \times ١} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$

$\approx ٠{,}٢١٨٨$

حل آخر:

ل(سـ = ٥) = د(٥)

∵ ن = ٨ ، ل = $\frac{١}{٢}$ ، س = ٥

∴ نبحث في جدول الاحتمالات في توزيع ذات الحدين عن قيمة د(٥)

فنجد أن د(٥) = ٠,٢١٩

حاول أن تحل

١٨ في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ١٠ مرات متتالية، احسب احتمال ظهور كتابة ٥ مرات.

مثال (١٩)

عند إلقاء حجر نرد منتظم خمس مرات متتالية، أوجد:

أ احتمال ظهور العدد ٤ مرتين.

ب احتمال ظهور العدد ٤ مرة واحدة على الأقل.

ج احتمال ظهور العدد ٤ مرة واحدة على الأكثر.

الحل:

∵ ن = ٥ ، ل = احتمال ظهور العدد ٤ من الرمية الواحدة = $\frac{١}{٦}$ ،

س = عدد مرات ظهور العدد ٤.

أ ل(س = س) = د(س) = ${}^{ن}ق_{س}$ ل^{س} (١ − ل)$^{ن − س}$

ل(س = ٢) = د(٢) = ${}^{٥}ق_{٢} \left(\frac{١}{٦}\right)^{٢} \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٣}$

$= \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} \times \frac{(٥)^{٣}}{(٦)^{٥}}$

≈ ٠,١٦٠٨

ب ل(س ≥ ١) = ١ − ل(س < ١) = ١ − د(٠)

د(٠) = ${}^{٥}ق_{٠} \left(\frac{١}{٦}\right)^{٠} \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٥}$

$= ٥ \times ١ \times \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٥}$

≈ ٠,٤٠١٩

ل(س ≥ ١) = ١ − ٠,٤٠١٩

= ٠,٥٩٨١

ج ل(س ≤ ١) = د(٠) + د(١)

∵ د(٠) = ٠,٤٠١٩ و د(١) = ${}^{٥}ق_{١} \left(\frac{١}{٦}\right)^{١} \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٤}$

$= ١ \times \frac{١}{٦} \times \frac{(٥)^{٤}}{(٦)^{٤}}$

≈ ٠,٤٠١٩

ل(س ≤ ١) ≈ ٠,٨٠٣٨

حاول أن تحل

١٩ عند إلقاء حجر نرد منتظم خمس مرات متتالية، أوجد:

أ احتمال ظهور العدد ٣ مرتين.

ب احتمال ظهور العدد ٣ مرة واحدة على الأقل.

ج احتمال ظهور العدد ٣ مرة واحدة على الأكثر.

التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين

Expectation and Variance for Binomial Distribution

درسنا كيفية إيجاد التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتقطع والآن نتعرّض لإيجاد التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين.

أولًا: التوقع μ = ن ل

ثانيًا: التباين σ^2 = ن ل(١ − ل)

ثالثًا: الانحراف المعياري σ = $\sqrt{\text{ن ل (١ − ل)}}$

مثال (٢٠)

ينتج مصنع سيارات ٢٠٠ سيارة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة ٠,٠١ فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد.

الحل:

∵ ن = ٢٠٠ ، س = عدد السيارات المعيبة في اليوم الواحد،

ل = نسبة إنتاج السيارات المعيبة في اليوم الواحد = ٠,٠١

١ − ل = ١ − ٠,٠١ = ٠,٩٩

∴ التوقع μ = ن ل = ٢٠٠(٠,٠١) = ٢

التباين σ^2 = ن ل (١ − ل) = ٢٠٠ (٠,٠١)(٠,٩٩) = ١,٩٨

الانحراف المعياري σ = $\sqrt{١,٩٨}$

≈ ١,٤٠٧١

حاول أن تحل

٢٠ ينتج مصنع سيارات ٣٥٠ سيارة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة ٠,٠٢ فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد.

مثال (٢١)

في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ٥ مرات. أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي سـ هو ظهور صورة.

الحل:

∵ ن = ٥ ، سـ = ظهور الصورة

ل هو احتمال ظهور صورة

ل = $\frac{١}{٢}$ ، ١ − ل = $\frac{١}{٢}$

التوقع μ = ن ل

= ٥ × $\frac{١}{٢}$

= $\frac{٥}{٢}$ = ٢,٥

التباين σ^2 = ن ل(١ − ل)

= ٥ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$

= $\frac{٥}{٤}$

= ١,٢٥

الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{ن ل (١ − ل)}}$ = $\sqrt{١,٢٥}$

≈ ١,١١٨٠

حاول أن تحل

٢١ في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ٨ مرات. أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي س هو ظهور صورة.

مثال (٢٢)

في أحد مصانع السيارات تبين أن ١٪ من السيارات غير صالحة للسير. إذا سحبنا ٨ سيارات، فأوجد التوقع والتباين للسيارات الصالحة للسير.

الحل:

∵ ن = ٨ ، ل = نسبة السيارات الصالحة للسير: ١ − ٠,٠١ = ٠,٩٩

١ − ل = ٠,٠١

∴ التوقع μ = ن ل = ٨(٠,٩٩) = ٧,٩٢

التباين σ^2 = ن ل(١ − ل) = ٨(٠,٩)(٠,١)

= ٠,٠٧٩٢

حاول أن تحل

٢٢ ٧٠٪ من زبائن مطعم ما أفادوا بأن الطعام قد أعجبهم وسيقصدونه مرة أخرى. من بين ١٠٠ زبون، أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري.

(٤–١–ب) المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

Continuous Random Variables

مقدّمة Introduction

في كل التجارب العشوائية التي تمت دراستها حتى الآن أخذ المتغيّر العشوائي سـ عددًا محددًا ومنتهيًا من القيم: سـ ∋ {س١ ، س٢ ، ... ، سر}.

ولكن في بعض التجارب العشوائية يأخذ المتغيّر العشوائي سـ كل القيم التي تنتمي إلى فترة محدّدة من مجموعة الأعداد الحقيقية ح مثل:

الزمن المستغرق للحضور من المنزل إلى المدرسة أو كمية السكر في الدم.

في هذه الحالة لم يعد ممكنًا وضع جدول التوزيع الاحتمالي لكل حدث سـ = {سر}، لأن عددها لا نهائي إذ تأخذ سـ قيمها على الفترة المذكورة وأصبح من الضروري اعتماد مقاربة جديدة.

في ما سبق درسنا المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل) سـ وبيّنا أن مجموعة القيم الممكنة له هي مجموعة متقطعة قابلة للعد (منتهية أو غير منتهية)

وتكون على صورة مدى سـ = {س١ ، س٢ ، س٣ ، ...}.

والآن لدينا نوعًا آخر من المتغيرات العشوائية وهو **المتغير العشوائي المتصل** (المستمر).

تعريف: المتغير العشوائي المتصل

هو المتغير التي تكون مجموعة القيم الممكنة له عبارة عن فترة من الأعداد الحقيقية أي أن مدى المتغير العشوائي المتصل سـ = {س: أ ≤ س ≤ ب} وهي مجموعة غير قابلة للعد.

أمثلة عن المتغيرات العشوائية المتصلة:

- وزن مجموعة من الطلاب بالكيلوجرام أعمارهم من (١٥ – ٢٠) سنة هو:
  سـ = {س: ٣٥ < س < ٧٠}
- درجة حرارة جسم الإنسان خلال يوم كامل.
- المسافة المقطوعة لسيارة خلال وحدة الزمن.
- كمية الحليب التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر
  سـ = {س: صفر < س < ٤٠}

مثال (٢٣)

حدّد ما إذا كانت المتغيّرات التالية هي متغيّرات عشوائية متصلة أو متغيّرات عشوائية متقطعة:

أ عدد الأهداف في مباراة كرة القدم.

ب الحرارة القصوى في منطقة معيّنة.

جـ طول الطلاب في الصف الثاني عشر في مدرستك.

د عدد الأخطاء في صفحة كتاب ما.

الحل:

أ متغير عشوائي متقطع.

ب متغير عشوائي متصل.

جـ متغير عشوائي متصل.

د متغير عشوائي متقطع.

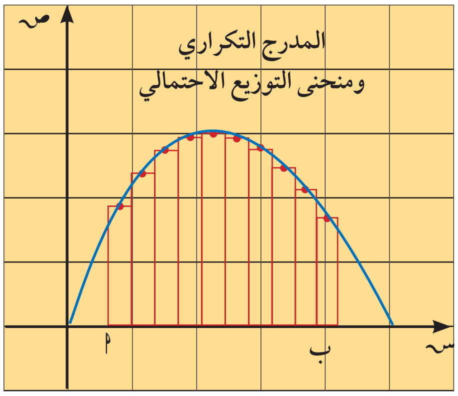
حاول أن تحل

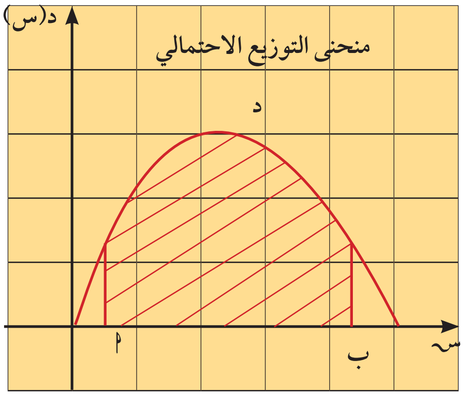
٢٣ أعطِ مثالين آخرين عن متغيّرات عشوائية متصلة ومثالين عن متغيرات عشوائية متقطعة.

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل (المستمر)

Probability Distribution for a Continuous Random Variable

يمكن تمثيل بيانات المتغير العشوائي الكمي المستمر على شكل مدرج تكراري نسبي. فنجد أن شكل هذا المدرج هو أقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل. وكلما صغر طول الفئة حصلنا على رسم أدق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المستمر كما في الشكل التالي:





والمساحة تحت منحنى التوزيع الاحتمالي هي عبارة عن مجموع الاحتمالات الكلية للمتغير العشوائي المتصل س، ولذلك فإن هذه المساحة **تساوي الواحد الصحيح**.

نسمي الدالة د(س) **بدالة كثافة الاحتمال** للمتغير العشوائي المتصل (المستمر).

خواص دالة كثافة الاحتمال د(س):

1. د(س) هي دالة متصلة على مجالها.
2. د(س) $\geq$ ٠ لكل قيم س التي تنتمي لمجال الدالة.
3. قيمة المساحة المحددة بمنحنى الدالة د(س) ومحور السينات تساوي الواحد الصحيح.
4. يمكن إيجاد الاحتمال ل(أ < سـ $\leq$ ب) بحساب المساحة تحت المنحنى ل بين القيمة أ، ب من الشكل السابق.
5. تنعدم المساحة المظللة في الشكل السابق إذا كان أ = ب

أي أنه لأي متغير عشوائي متصل فإن ل(سـ = أ) = صفر

مثال (٢٤)

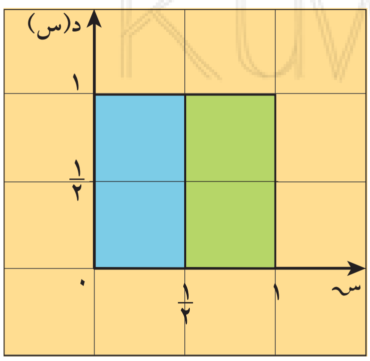
إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} ١ & \text{عندما } ٠ \leq \text{س} \leq ١ \\ \text{صفر} & \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد:

أ ل$\left(\frac{١}{٢} \leq \text{سـ} \leq ١\right)$ ب ل$\left(\text{سـ} \leq \frac{١}{٢}\right)$

الحل:



أ ل$\left(\frac{١}{٢} \leq \text{سـ} \leq ١\right)$ = مساحة المنطقة المظلّلة بالأخضر

$= \frac{١}{٢} \times ١ = \frac{١}{٢}$

ب ل$\left(\text{سـ} \leq \frac{١}{٢}\right)$ = مساحة المنطقة المظلّلة بالأزرق

$= \frac{١}{٢} \times ١ = \frac{١}{٢}$

حاول أن تحل

٢٤ إذا كان سـ متغيرًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{١}{٢} & \text{عندما } ٠ \leq \text{س} \leq ٢ \\ \text{صفر} & \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد:

أ ل$\left(\text{سـ} \leq \frac{٣}{٢}\right)$ ب ل$\left(\text{سـ} \geq \frac{٣}{٢}\right)$

مثال (٢٥)

إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٤} & : \text{عندما } ١ \le س \le ٥ \\ \text{صفر} & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

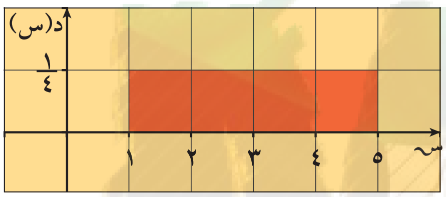
أوجد:

أ ل(١ < سـ ≤ ٥)　　ب ل(سـ < ٣)

جـ ل(سـ ≥ ١,٥)　　د ل(سـ = ٢)

الحل:

أ نرسم بيان الدالة د(س)

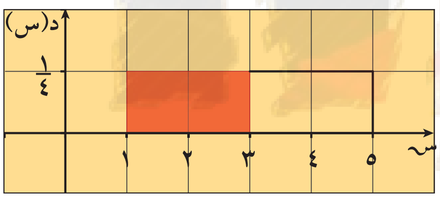


ل(١ < سـ ≤ ٥) = مساحة المنطقة المظللة

(المنطقة المستطيلة)

$= ٤ \times \frac{١}{٤} = ١$

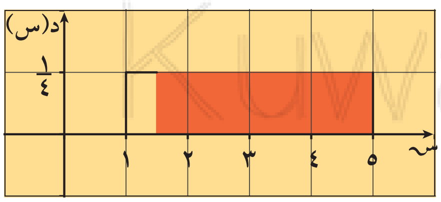
ب ل(سـ < ٣) = مساحة المنطقة المظللة



$= (٣ - ١) \times \frac{١}{٤}$

$= ٢ \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$

جـ ل(سـ ≥ ١,٥) = مساحة المنطقة المظللة



$= (٥ - ١,٥) \times \frac{١}{٤}$

$= \frac{٧}{٢} \times \frac{١}{٤} = \frac{٧}{٨}$

د ل(سـ = ٢) = صفر

حاول أن تحل

٢٥ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا، فدالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٦} & : -٣ \le س \le ٣ \\ \text{صفر} & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد:

أ ل(سـ < ٢)　　ب ل(-١ < سـ < ١)　　جـ ل(سـ = صفر)

مثال (٢٦)

إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{١}{٨}\,\text{س} & : \quad ٠ \leq \text{س} \leq ٤ \\ \text{صفر} & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

أ ل(٠ ≤ سـ ≤ ٤) ب ل(سـ ≤ ٢) جـ ل(سـ > ٢)

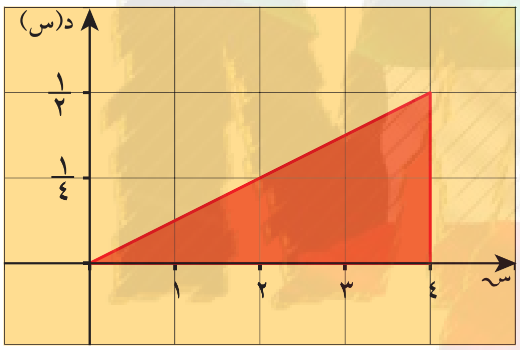
الحل:

أ ل(٠ ≤ سـ ≤ ٤) = مساحة المنطقة المظللة

= مساحة المنطقة المثلثة

$= \frac{١}{٢} \times ٤ \times \frac{١}{٢}$

= ١



ب ل(سـ ≤ ٢) = مساحة المنطقة المظللة

= مساحة المنطقة المثلثة

$= ٢ \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢}$

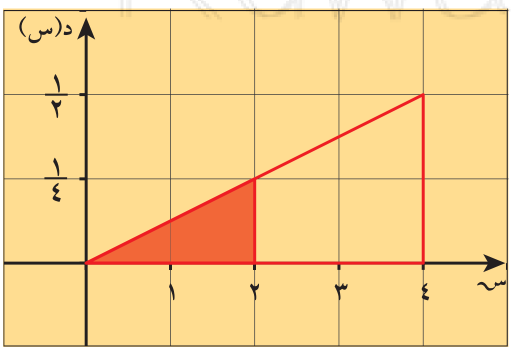
$= \frac{١}{٤}$

جـ ل(سـ > ٢) = ١ − ل(سـ ≤ ٢)

= مساحة المنطقة غير المظللة من المثلث

$= ١ - \frac{١}{٤}$

$= \frac{٣}{٤}$



حاول أن تحل

٢٦ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{١}{٢}\,\text{س} & : \quad ٠ \leq \text{س} \leq ٢ \\ \text{صفر} & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد:

أ ل(سـ < ١) ب ل(سـ ≥ ١) جـ ل(سـ = ١)

التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتغير عشوائي متصل (مستمر)

Regular Probability Distribution for a Random Continuous Variable

يعرّف التوزيع الاحتمالي المنتظم على [أ، ب] بأنه توزيع احتمالي دالة كثافة الاحتمال له

هي: $د(س) = \begin{cases} \dfrac{١}{ب - أ} & : \quad أ \le س \le ب \\ صفر & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

– التوقع (الوسط) للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو $\mu = \dfrac{أ + ب}{٢}$

– التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو $\sigma^٢ = \dfrac{(ب - أ)^٢}{١٢}$

مثال (٢٧)

لتكن الدالة د:

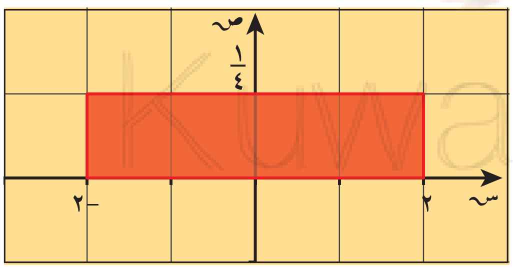
$د(س) = \begin{cases} \dfrac{١}{٤} & : \quad -٢ \le س \le ٢ \\ صفر & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

أ) أثبت أن الدالة هي دالة كثافة احتمال.

ب) أثبت أن الدالة د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

جـ) أوجد ل(−١ > س ≥ ٢).

د) أوجد التوقع والتباين للدالة د.



الحل:

أ) لإثبات أن الدالة د هي دالة كثافة احتمال

يجب إثبات أن

المساحة تحت المنحنى تساوي ١.

المساحة تحت المنحنى من الشكل هي مساحة

المنطقة المستطيلة = الطول × العرض

$= ٤ \times \dfrac{١}{٤} = ١$

∴ الدالة د هي دالة كثافة احتمال.

ب) لإثبات أن الدالة د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون الدالة على الصورة:

$د(س) = \begin{cases} \dfrac{١}{ب - أ} & : \quad أ \le س \le ب \\ صفر & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

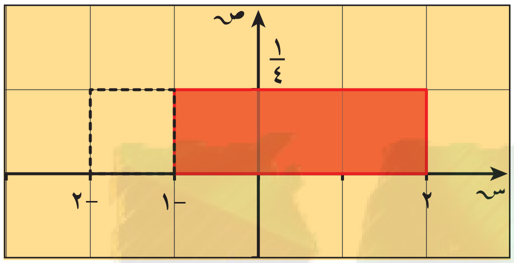
∵ ب = ٢ ، أ = −٢ ⇐ ب − أ = ٤

$\therefore \frac{١}{ب - ﺃ} = \frac{١}{٤}$ $\therefore$ الدالة د(س) = $\begin{cases} \frac{١}{٤} & : \quad -٢ \leq س \leq ٢ \\ \text{صفر} & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

يمكن وضعها على الصورة:

د(س) = $\begin{cases} \frac{١}{ب - ﺃ} & : \quad ﺃ \leq س \leq ب \\ \text{صفر} & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

$\therefore$ الدالة د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.



جـ ل(-١ < س ≤ ٢)

= مساحة المنطقة المظللة

= ٣ × $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$ وحدة مساحة

د التوقع μ = $\frac{ﺃ + ب}{٢}$ = $\frac{-٢ + ٢}{٢}$ = صفر

التباين σ^2 = $\frac{(ب - ﺃ)^2}{١٢}$ = $\frac{١٦}{١٢}$ = $١\frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

٢٧ لتكن الدالة د: د(س) = $\begin{cases} \frac{١}{٥} & : \quad -٢ \leq س \leq ٣ \\ \text{صفر} & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

أ أثبت أن الدالة د هي دالة كثافة احتمال.

ب أثبت أن الدالة د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

جـ أوجد ل(-١ ≤ س ≤ ٢).

د أوجد التوقع والتباين للدالة د.

مثال (٢٨)

الدالة د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم وهي معرّفة كما يلي:

د(س) = $\begin{cases} \frac{١}{٢} & : \quad -٠,٥ \leq س \leq ١,٥ \\ \text{صفر} & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

أ أثبت أن الدالة د هي دالة كثافة احتمال.

ب أوجد ل(-٠,٢ ≤ س ≤ ٠,٣).

جـ أوجد التوقع والتباين للدالة د.

الحل:

أ د هي دالة كثافة احتمال إذا كانت المساحة تحت المنحنى تساوي ١

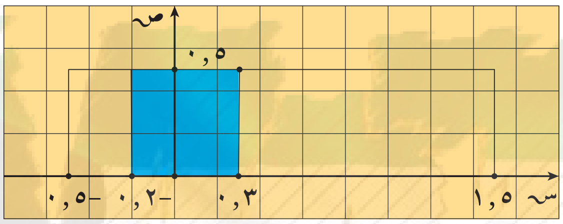
مساحة المنطقة كلّها تساوي $(١,٥ - (-٠,٥)) \times ٠,٥ = ١$

$\therefore$ د هي دالة كثافة احتمال

ب ل$(-٠,٢ \leq$ س $\leq ٠,٣)$ = مساحة المنطقة المظلّلة بالأزرق

$= (٠,٣ - (-٠,٢)) \times ٠,٥$

$= ٠,٢٥$



جـ التوقع: $\mu = \frac{أ + ب}{٢} = \frac{١,٥ + (-٠,٥)}{٢} = \frac{١}{٢}$

التباين: $\sigma^{٢} = \frac{(ب - أ)^{٢}}{١٢} = \frac{[١,٥ - (-٠,٥)]^{٢}}{١٢}$

$= \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

٢٨ الدالة د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٣} & : ٠ \leq س \leq ٣ \\ صفر & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

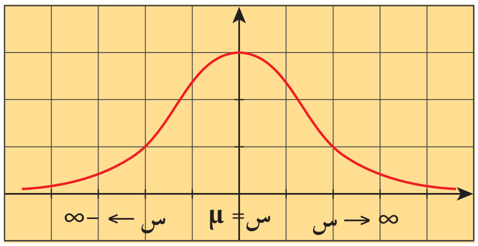
أ أثبت أن هذه الدالة هي دالة كثافة.

ب أوجد ل$(١ \leq$ س $\leq ٢)$.

جـ أوجد التوقع والتباين.

التوزيع الاحتمالي الطبيعي ط(μ، σ^2) Natural Probability Distribution

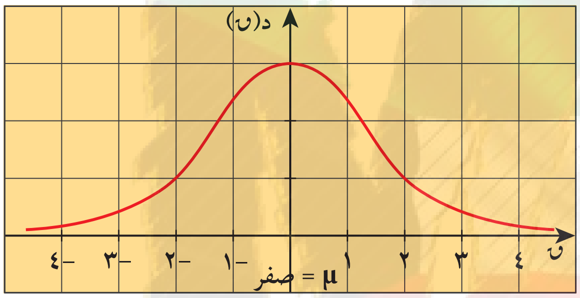
يعتبر التوزيع الاحتمالي الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة وقد سبق أن درسنا منحنى التوزيع الطبيعي وخواصه والتي منها:



منحنى التوزيع الطبيعي ط(μ ، σ^2)

- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.
- يكون بيان المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره (س = μ).
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى +∞ وإلى −∞ (لا يقطع محور السينات).
- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح (وحدة مساحة).
- المستقيم الرأسي س = μ يقسم المساحة تحت المنحنى إلى قطعتين متماثلتين مساحة كل منهما تساوي نصف (نصف وحدة مساحة).

التوزيع الطبيعي المعياري ط(٠، ١)



منحنى التوزيع الطبيعي ط(μ ، σ^2)

إذا كان المتوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي μ = صفر والانحراف المعياري σ = ١ يسمى التوزيع الطبيعي **بالتوزيع الطبيعي المعياري**.

الشكل المرسوم يمثل بيان منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

نعلم أن منحنى التوزيع الطبيعي يتحدد بكل من التوقع μ والتباين لها σ^2 ونظرًا لاختلاف قيم μ، σ^2 من توزيع لآخر فإننا نقوم بتحويل أي توزيع طبيعي إلى توزيع طبيعي معياري وفق التحويل ن = $\frac{س - \mu}{\sigma}$

وتم وضع جداول التوزيع الطبيعي المعياري في نهاية الوحدة للتوزيع الطبيعي ط(μ ، σ^2).

حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي ط(μ، σ^2)

إذا كان للمتغير العشوائي سـ التوزيع الطبيعي ط(μ ، σ^2) أي التوزيع الذي توقعه μ وتباينه σ^2 وأردنا حساب احتمالات تتعلق بالمتغير سـ فإننا نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري المرفق آخر الوحدة باتباع الخطوات الموضحة التالية لإيجاد ل(أ < سـ ≤ ب):

١ نوجد القيمة المعيارية المناظرة للقيمة أ بالتعويض في العلاقة $ن_١ = \frac{أ - \mu}{\sigma}$

والقيمة المعيارية المناظرة للقيمة ب: $ن_٢ = \frac{ب - \mu}{\sigma}$

٢ نستخدم العلاقة: ل(أ < س ≤ ب) = ل ($ن_١$ < ن ≤ $ن_٢$)

٣ نستخدم جدول المساحة تحت المنحنى الطبيعي جدول (٤) وجدول (٥) لحساب الطرف الأيسر من العلاقة السابقة.

لحساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري ل(ن):

- إذا كانت ن ≤ أ أو ن ≥ أ ، حيث أ ≥ صفر نستخدم جدول ن رقم (٤).
- إذا كانت ن ≤ أ أو ن ≥ أ ، حيث أ < صفر نستخدم جدول ن رقم (٥).

مثال (٢٩)

إذا كان ن هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي س فأوجد:

أ ل(ن ≤ ٢,١٨)

ب ل(ن ≥ ٢,٤٣)

جـ ل(١,٤ ≤ ن ≤ ٢,٦)

الحل:

أ لإيجاد ل(ن ≤ ٢,١٨)

∵ ٢,١٨ ≥ ٠

∴ نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري ن رقم (٤) الموجود في نهاية الوحدة.

ل(ن ≤ ٢,١٨) = ٠,٩٨٥٣٧

ب ل(ن ≥ ٢,٤٣) = ١ − ل(ن ≤ ٢,٤٣)

= ١ − ٠,٩٩٢٤٥

= ٠,٠٠٧٥٥

جـ ل(١,٤ ≤ ن ≤ ٢,٦)

= ل(ن ≤ ٢,٦) − ل(ن ≤ ١,٤)

= ٠,٩٩٥٣٥ − ٠,٩١٩٢٤

= ٠,٠٧٦١١

حاول أن تحل

٢٩ إذا كان ن هو التوزيع الطبيعي المعياري فأوجد:

أ ل = (ن ≤ ٠,٩٥)

ب ل = (ن > ٠,٧١)

جـ ل = (١,٤٥ ≤ ن ≤ ٣,٢٦)

مثال (٣٠)

إذا كان ن هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي س فأوجد:

أ ل = (ن ≤ – ٠,٥٥).

ب ل(–٢,٢ ≤ ن ≤ – ١,٦)

جـ ل(–١,٣ ≤ ن ≤ ٠,٢٨)

الحل:

أ لإيجاد ل = (ن ≤ – ٠,٥٥)

∵ –٠,٥٥ < ٠

∴ نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري ن رقم (٥)

∴ ل(ن ≤ – ٠,٥٥) = ٠,٢٩١١٦

ب ل(–٢,٢ ≤ ن ≤ –١,٦) = ل(ن ≤ –١,٦) – ل(ن ≤ –٢,٢)

= ٠,٠٥٣٧ – ٠,٠١٣٩٠

= ٠,٠٣٩٨٠

جـ ل(–١,٣ ≤ ن ≤ ٠,٢٨) = ل(ن ≤ ٠,٢٨) – ل(ن ≤ – ١,٣)

∵ ٠,٢٨ ≥ ٠ ∴ تستخدم جدول ن رقم (٤)

∴ ل(ن ≤ ٠,٢٨) = ٠,٦١٠٢٦

∵ –١,٣ < صفر ∴ نستخدم جدول ن رقم (٥)

∴ ل(ن ≤ – ١,٣) = ٠,٠٩٦٨٠

∴ ل(–١,٣ ≤ ن ≤ ٠,٢٨) = ٠,٦١٠٢٦ – ٠,٠٩٦٨٠

= ٠,٥١٣٤٦

حاول أن تحل

٣٠ اذا كان ن هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي س فأوجد:

أ ل(ن ≤ –٠,١٢)

ب ل(ن ≥ ٠,٢٥)

جـ ل(–٢,٣ ≤ ن ≤ –٠,١)

د ل(–٢٦,٥ ≤ ن ≤ ٠,٦٩)

مثال (٣١)

المتغير س يمثل درجات الطلاب في مادة ما وهو يتبع التوزيع الطبيعي وتوقعه $\mu = ١٦$ وتباينه $\sigma^{٢} = ١٦$. أوجد:

أ $\text{ل}(١٤ < \text{س} < ١٨)$

ب $\text{ل}(١١ < \text{س} < ١٣)$

الحل:

أ $\mu = ١٦$ ، $\sigma^{٢} = ١٦ \Leftarrow \sigma = ٤$

بوضع $\text{س}_{١} = ١٤ \Leftarrow \text{ن}_{١} = \dfrac{\text{س}_{١} - \mu}{\sigma} = \dfrac{١٤ - ١٦}{٤} = -\dfrac{١}{٢}$

$\text{س}_{٢} = ١٨ \Leftarrow \text{ن}_{٢} = \dfrac{\text{س}_{٢} - \mu}{\sigma} = \dfrac{١٨ - ١٦}{٤} = \dfrac{١}{٢}$

$\text{ل}(١٤ < \text{س} < ١٨) = \text{ل}\left(\text{ن} < \dfrac{١}{٢}\right) - \text{ل}\left(\text{ن} < -\dfrac{١}{٢}\right)$

$\text{ل}\left(\text{ن} < \dfrac{١}{٢}\right) = ٠{,}٦٩١٤٦$ من جدول (٤)

$\text{ل}\left(\text{ن} < -\dfrac{١}{٢}\right) = ٠{,}٣٠٨٥٤$ من جدول (٥)

$\text{ل}(١٤ < \text{س} < ١٨) = \text{ل}\left(-\dfrac{١}{٢} < \text{ن} < \dfrac{١}{٢}\right)$

$= ٠{,}٦٩١٤٦ - ٠{,}٣٠٨٥٤ = ٠{,}٣٨٢٩٢$

ب $\text{س}_{١} = ١١ \Leftarrow \text{ن}_{١} = \dfrac{\text{س}_{١} - \mu}{\sigma} = \dfrac{١١ - ١٦}{٤} = -\dfrac{٥}{٤} = -١{,}٢٥$

$\text{س}_{٢} = ١٣ \Leftarrow \text{ن}_{١} = \dfrac{\text{س}_{٢} - \mu}{\sigma} = \dfrac{١٣ - ١٦}{٤} = -\dfrac{٣}{٤} = -٠{,}٧٥$

$\text{ل}(١١ < \text{س} < ١٣) = \text{ل}\left(\text{ن} < -\dfrac{٣}{٤}\right) - \text{ل}\left(\text{ن} < -\dfrac{٥}{٤}\right)$

$\because \text{ل}\left(\text{ن} < -\dfrac{٣}{٤}\right) = ٠{,}٢٢٦٦٣$ ، $\text{ل}\left(\text{ن} < -\dfrac{٥}{٤}\right) = ٠{,}١٠٥٦٥$

$\therefore \text{ل}(١١ < \text{س} < ١٣) = ٠{,}٢٢٦٦٣ - ٠{,}١٠٥٦٥ = ٠{,}١٢٠٩٨$

حاول أن تحل

٣١ يمثل المتغير العشوائي س الزمن الذي يستغرقه أحد الطلاب للوصول إلى المدرسة، وهو متغير يتبع التوزيع الطبيعي توقعه ١٦ دقيقة وتباينه ٤، احسب احتمال أنه في يوم ما سيستغرقه الطالب للوصول إلى المدرسة.

أ أقل من ٢١ دقيقة.

ب أكثر من ١٢ دقيقة وأقل من ٢١ دقيقة.

المرشد لحل المسائل

يتبع الراتب السنوي لموظفي شركة كبيرة التوزيع الطبيعي ط(٥٠ ٠٠٠، ٤٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠)

أ أوجد التوقع والتباين.

ب ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم أقلّ من ٤٠ ٠٠٠ دينار كويتي؟

جـ ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم بين ٤٥ ٠٠٠ وَ ٦٥ ٠٠٠ دينار كويتي؟

د ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم أكثر من ٧٠ ٠٠٠ دينار كويتي؟

الحل:

أ التوزيع الطبيعي ط(٥٠ ٠٠٠، ٤٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠) ، توقعه μ = ٥٠ ٠٠٠،

تباينه σ^2 = ٤٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠

ب ل(س < ٤٠ ٠٠٠) = ل$\left(ن < \dfrac{٤٠٠٠٠ - ٥٠٠٠٠}{\sqrt{٤٠٠٠٠٠٠٠٠}}\right)$ = ل$\left(ن < -\dfrac{١}{٢}\right)$

باستخدام الجدول (٥):

ل$\left(ن < -\dfrac{١}{٢}\right)$ = ٠,٣٠٨٥٤

∴ ٣٠,٨٥٪ من الموظفين راتبهم أقلّ من ٤٠ ٠٠٠ دينار كويتي

جـ ل(٤٥ ٠٠٠ < س < ٦٥ ٠٠٠) = ل(−٠,٢٥ < ن < ٠,٧٥)

= ل(ن < ٠,٧٥) − ل(ن < −٠,٢٥)

= ٠,٧٧٣٣٥ − ٠,٤٠١٢٩ = ٠,٣٧٢٠٦

∴ ٣٧,٢١٪ من الموظفين راتبهم بين ٦٥ ٠٠٠ وَ ٥٤ ٠٠٠ دينار كويتي.

د ل(س > ٧٠ ٠٠٠) = ١ − ل(س ≤ ٧٠ ٠٠٠)

= ١ − ل(ن < ١) = ١ − ٠,٨٤١٣٤

= ٠,١٥٨٦٦

∴ ١٥,٨٧٪ من الموظفين راتبهم أكثر من ٧٠ ٠٠٠ دينار كويتي.

مسألة إضافية

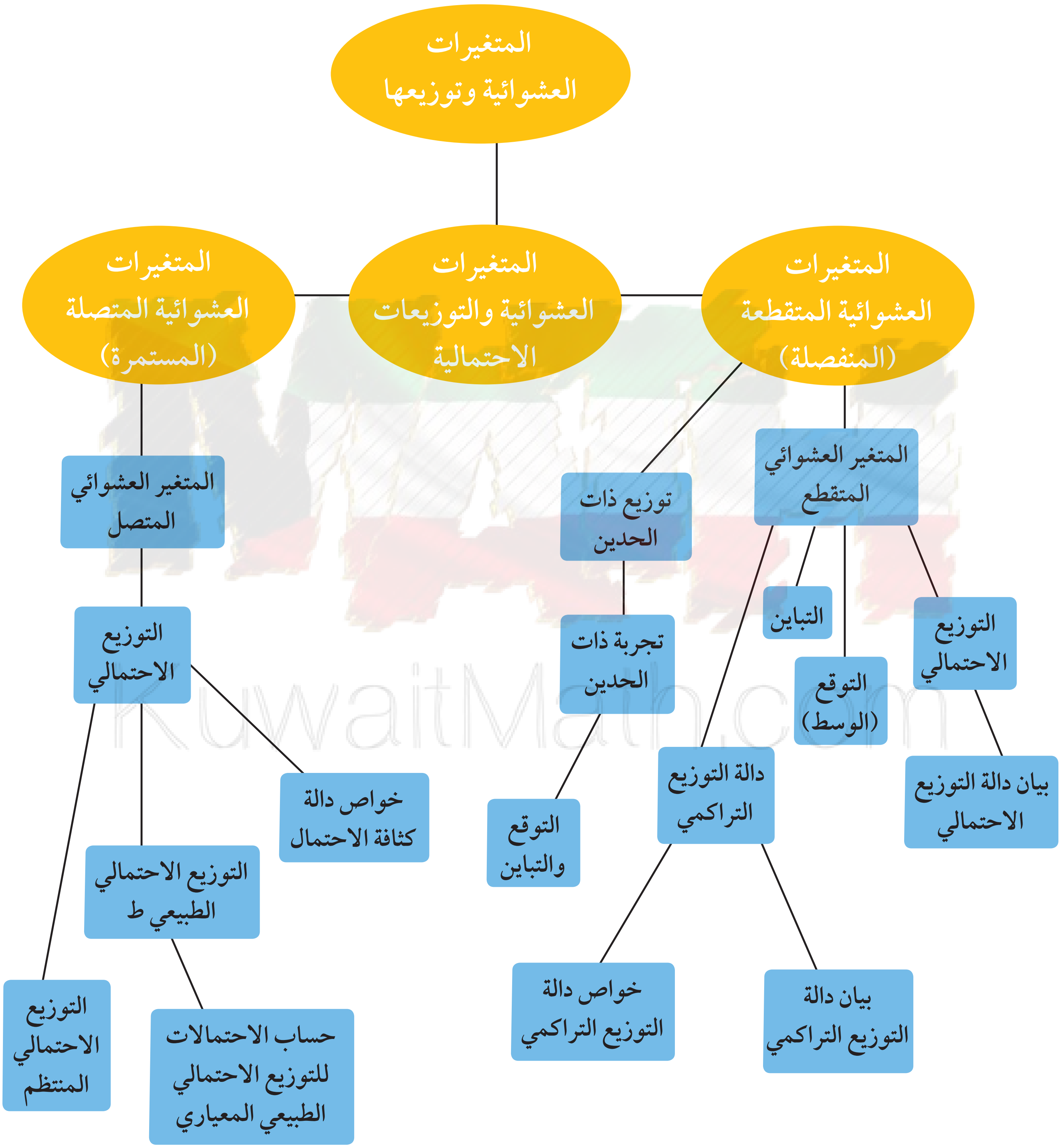
الوقت اللازم لتجميع مكونات سيارة في معمل يتبع التوزيع الطبيعي ط(٢٠، ٤)

أ أوجد التوقع والتباين.

ب ما احتمال أن يتم تجميع السيارة بأقل من ١٩,٥ ساعة؟

جـ ما احتمال أن يتم تجميع السيارة بوقت يتراوح بين ٢٠ وَ٢٢ ساعة؟

مخطط تنظيمي للوحدة الرابعة



ملخص

- المتغيّر العشوائي: هو دالة مجالها فضاء العينة ف ومجالها المقابل هو ح ومداها مجموعة جزئية من ح حيث سـ: ف ⟵ ح
(سـ هو المتغير العشوائي، ف فضاء العينة، ح مجموعة الأعداد الحقيقية).
- يكون المتغير العشوائي سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له (المدى) سـ (ف): هي مجموعة متقطعة أي قابلة للعد، من الأعداد الحقيقية سواء أكانت منتهية أم غير منتهية.
- إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه {$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ...}، فإن دالة التوزيع الاحتمالي د تعرّف كالتالي:

د($س_ر$) = احتمال (سـ = $س_ر$)

أي أن د ($س_ر$) = ل(سـ = $س_ر$) لكل ر = ١، ٢، ٣، ...

دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع سـ تحقق الشرطين:

١ ٠ ≤ د(س) ≤ ١

٢ مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي د تساوي الواحد الصحيح،

أي أن د($س_١$) + د($س_٢$) + د($س_٣$) + ... = ١

- إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي د،

مدى سـ = {$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ...}

فإن التوقع للمتغير العشوائي سـ (يرمز له برمز μ) يكون:

التوقع (μ) = $\sum$ $س_ر$ د($س_ر$)

أي أن: μ = $س_١$ د ($س_١$) + $س_٢$ د($س_٢$) + $س_٣$ د ($س_٣$) + ...

- إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي د فإن التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة:

التباين (σ^2) = $\sum$ $س_ر^٢$ د($س_ر$) − μ^2 حيث μ هو التوقع.

الانحراف المعياري (σ) = $\sqrt{\text{التباين}}$.

- دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة أ

هي احتمال وقوع المتغير العشوائي سـ بحيث يكون سـ أصغر من أو يساوي أ

أي أن: ت(أ) = د(سـ ≤ أ)

١ ل(أ > سـ ≤ ب) = ت(ب) − ت(أ)

٢ ل(سـ > أ) = ١ − ل(سـ ≤ أ) = ١ − ت(أ)

ل(أ > سـ ≥ ب) = ل(أ ≤ سـ > ب) = ل(أ > سـ > ب) = ل(أ ≤ سـ ≤ ب)

- تجربة ذات الحدين هي تجربة عشوائية تحقق الشروط التالية:

١ تتكوّن التجربة من عدد ن من المحاولات المستقلة والمتماثلة.

(المحاولات المستقلة تعني أن نتيجة كل محاولة لا تؤثر ولا تتأثر بنتائج المحاولات الأخرى).

٢ كل محاولة يكون لها ناتجان فقط (نجاح أو فشل).

٣ احتمال الحصول على أحد الناتجين يكون ثابتًا من تجربة إلى أخرى. وسوف نرمز لهذا الاحتمال بالرمز ل.

وتسمى كل محاولة من محاولات التجربة بمحاولة برنولي.

ل(سـ = س) = د(س) = ^{ن}ق$_{ر}$ ل^{س} (١ − ل)$^{ن − س}$ ، ن ∈ صـ$^{+}$

حيث:

- ن عدد المحاولات
- مجموع القيم الممكنة للمتغير العشوائي سـ = {٠، ١، ٢، ... ن}
- س عدد مرات النجاح من ن في المحاولات
- ل احتمال النجاح
- (١ − ل) احتمال الفشل
- يسمى توزيع المتغير العشوائي سـ بتوزيع ذات الحدين للمعلمتين ل، ن.

التوقع والتباين لتوزيع ذو الحدين:

درسنا كيفية إيجاد التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتقطع والآن نتعرّض لإيجاد التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين.

أولًا: التوقع μ = ن ل

ثانيًا: التباين σ^{2} = ن ل(١ − ل)

ثالثًا: الانحراف المعياري σ = $\sqrt{\text{ن ل(١ − ل)}}$

خواص دالة كثافة الاحتمال

- المتغير التي تكون مجموعة القيم الممكنة له عبارة عن فترة من الأعداد الحقيقية أي أن مدى المتغير العشوائي المتصل سـ = {س: أ ≤ س ≤ ب} وهي مجموعة غير قابلة للعد.

١ د(س) هي دالة متصلة على مجالها.

٢ د(س) ≥ ٠ لكل قيم س التي تنتمي لمجال الدالة.

٣ قيمة المساحة المحددة بمنحنى الدالة د(س) ومحور السينات تساوي الواحد الصحيح.

٤ يمكن إيجاد الاحتمال ل(أ > سـ ≥ ب) بحساب المساحة تحت المنحنى ل بين القيمة أ، ب.

٥ تنعدم المساحة المظللة إذا كان أ = ب

أي أنه لأي متغير عشوائي متصل فإن ل(أ = أ) = صفر

يعرّف التوزيع الاحتمالي المنتظم على [أ، ب] بأنه توزيع احتمالي دالة كثافة الاحتمال له

هي: $د(س) = \begin{cases} \dfrac{١}{ب - أ} & : \quad أ \leq س \leq ب \\ صفر & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

– التوقع (الوسط) للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو: $\mu = \dfrac{أ + ب}{٢}$

– التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو: $\sigma^{٢} = \dfrac{(ب - أ)^{٢}}{١٢}$

التوزيع الاحتمالي الطبيعي (ط، $\sigma^{٢}$)

- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.
- يكون بيان المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره (س = μ).
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى +∞ وإلى –∞ (لا يقطع محور السينات).
- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح (وحدة مساحة).
- المستقيم الرأسي س = μ يقسم المساحة تحت المنحنى إلى قطعتين متماثلتين مساحة كل منها تساوي نصف (نصف وحدة مساحة).

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: د(س)

ن	س	ل: ٠,٠٥	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٩	٠,٩٥
٢	٠	٠,٩٠٢	٠,٨١٠	٠,٦٤٠	٠,٤٩٠	٠,٣٦٠	٠,٢٥٠	٠,١٦٠	٠,٠٩٠	٠,٠٤٠	٠,٠١٠	٠,٠٠٢
	١	٠,٠٩٥	٠,١٨٠	٠,٣٢٠	٠,٤٢٠	٠,٤٨٠	٠,٥٠٠	٠,٤٨٠	٠,٤٢٠	٠,٣٢٠	٠,١٨٠	٠,٠٩٥
	٢	٠,٠٠٢	٠,٠١٠	٠,٠٤٠	٠,٠٩٠	٠,١٦٠	٠,٢٥٠	٠,٣٦٠	٠,٠٤٩٠	٠,٠٦٤٠	٠,٠٨١٠	٠,٠٩٠٢
٣	٠	٠,٨٥٧	٠,٧٢٩	٠,٥١٢	٠,٣٤٣	٠,٢١٦	٠,١٢٥	٠,٠٦٤	٠,٠٢٧	٠,٠٠٨	٠,٠٠١	
	١	٠,١٣٥	٠,٢٤٣	٠,٣٨٤	٠,٤٤١	٠,٤٣٢	٠,٣٧٥	٠,٢٨٨	٠,١٨٩	٠,٠٩٦	٠,٠٢٧	٠,٠٠٧
	٢	٠,٠٠٧	٠,٠٢٧	٠,٠٩٦	٠,١٨٩	٠,٢٨٨	٠,٣٧٥	٠,٤٣٢	٠,٤٤١	٠,٣٨٤	٠,٢٤٣	٠,١٣٥
	٣		٠,٠٠١	٠,٠٠٨	٠,٠٢٧	٠,٠٦٤	٠,١٢٥	٠,٢١٦	٠,٣٤٣	٠,٥١٢	٠,٧٢٩	٠,٨٥٧
٤	٠	٠,٨١٥	٠,٦٥٦	٠,٤١٠	٠,٢٤٠	٠,١٣٠	٠,٠٦٢	٠,٠٢٦	٠,٠٠٨	٠,٠٠٢		
	١	٠,١٧١	٠,٢٩٢	٠,٤١٠	٠,٤١٢	٠,٣٤٦	٠,٢٥٠	٠,١٥٤	٠,٠٧٦	٠,٠٢٦	٠,٠٠٤	
	٢	٠,٠١٤	٠,٠٤٩	٠,١٥٤	٠,٢٦٥	٠,٣٤٦	٠,٣٧٥	٠,٣٤٦	٠,٢٦٥	٠,١٥٤	٠,٠٤٩	٠,٠١٤
	٣		٠,٠٠٤	٠,٠٢٦	٠,٠٧٦	٠,١٥٤	٠,٢٥٠	٠,٣٤٦	٠,٤١٢	٠,٤١٠	٠,٢٩٢	٠,١٧١
	٤			٠,٠٠٢	٠,٠٠٨	٠,٠٢٦	٠,٠٦٢	٠,١٣٠	٠,٢٤٠	٠,٤١٠	٠,٦٥٦	٠,٨١٥
٥	٠	٠,٧٧٤	٠,٥٩٠	٠,٣٢٨	٠,١٦٨	٠,٠٧٨	٠,٠٣١	٠,٠١٠	٠,٠٠٢			
	١	٠,٢٠٤	٠,٣٢٨	٠,٤١٠	٠,٣٦٠	٠,٢٥٩	٠,١٥٦	٠,٠٧٧	٠,٠٢٨	٠,٠٠٦		
	٢	٠,٠٢١	٠,٠٧٣	٠,٢٠٥	٠,٣٠٩	٠,٣٤٦	٠,٣١٢	٠,٢٣٠	٠,١٣٢	٠,٠٥١	٠,٠٠٨	٠,٠٠١
	٣	٠,٠٠١	٠,٠٠٨	٠,٠٥١	٠,١٣٢	٠,٢٣٠	٠,٣١٢	٠,٣٤٦	٠,٣٠٩	٠,٢٠٥	٠,٠٧٣	٠,٠٢١
	٤			٠,٠٠٦	٠,٠٢٨	٠,٠٧٧	٠,١٥٦	٠,٢٥٩	٠,٣٦٠	٠,٤١٠	٠,٣٢٨	٠,٢٠٤
	٥				٠,٠٠٢	٠,٠١٠	٠,٠٣١	٠,٠٧٨	٠,١٦٨	٠,٣٢٨	٠,٥٩٠	٠,٧٧٤
٦	٠	٠,٧٣٥	٠,٥٣١	٠,٢٦٢	٠,١١٨	٠,٠٤٧	٠,٠١٦	٠,٠٠٤	٠,٠٠١			
	١	٠,٢٣٢	٠,٣٥٤	٠,٣٩٣	٠,٣٠٣	٠,١٨٧	٠,٠٩٤	٠,٠٣٧	٠,٠١٠	٠,٠٠٢		
	٢	٠,٠٣١	٠,٠٩٨	٠,٢٤٦	٠,٣٢٤	٠,٣١١	٠,٢٣٤	٠,١٣٨	٠,٠٦٠	٠,٠١٥	٠,٠٠١	
	٣	٠,٠٠٢	٠,٠١٥	٠,٠٨٢	٠,١٨٥	٠,٢٧٦	٠,٣١٢	٠,٢٧٦	٠,١٨٥	٠,٠٨٢	٠,٠١٥	٠,٠٠٢
	٤		٠,٠٠١	٠,٠١٥	٠,٠٦٠	٠,١٣٨	٠,٢٣٤	٠,٣١١	٠,٣٢٤	٠,٢٤٦	٠,٠٩٨	٠,٠٣١
	٥			٠,٠٠٢	٠,٠١٠	٠,٠٣٧	٠,٠٩٤	٠,١٨٧	٠,٣٠٣	٠,٣٩٣	٠,٣٥٤	٠,٢٣٢
	٦				٠,٠٠١	٠,٠٠٤	٠,٠١٦	٠,٠٤٧	٠,١١٨	٠,٢٦٢	٠,٥٣١	٠,٧٣٥
٧	٠	٠,٦٩٨	٠,٤٧٨	٠,٢١٠	٠,٠٨٢	٠,٠٢٨	٠,٠٠٨	٠,٠٠٢				
	١	٠,٢٥٧	٠,٣٧٢	٠,٣٦٧	٠,٢٤٧	٠,١٣١	٠,٠٥٥	٠,٠١٧	٠,٠٠٤			
	٢	٠,٠٤١	٠,١٢٤	٠,٢٧٥	٠,٣١٨	٠,٢٦١	٠,١٦٤	٠,٠٧٧	٠,٠٢٥	٠,٠٠٤		
	٣	٠,٠٠٤	٠,٠٢٣	٠,١١٥	٠,٢٢٧	٠,٢٩٠	٠,٢٧٣	٠,١٩٤	٠,٠٩٧	٠,٠٢٩	٠,٠٠٣	
	٤		٠,٠٠٣	٠,٠٢٩	٠,٠٩٧	٠,١٩٤	٠,٢٧٣	٠,٢٩٠	٠,٢٢٧	٠,١١٥	٠,٠٢٣	٠,٠٠٤
	٥			٠,٠٠٤	٠,٠٢٥	٠,٠٧٧	٠,١٦٤	٠,٢٦١	٠,٣١٨	٠,٢٧٥	٠,١٢٤	٠,٠٤١
	٦				٠,٠٠٤	٠,٠١٧	٠,٠٥٥	٠,١٣١	٠,٢٤٧	٠,٣٦٧	٠,٣٧٢	٠,٢٥٧
	٧					٠,٠٠٢	٠,٠٠٨	٠,٠٢٨	٠,٠٨٢	٠,٢١٠	٠,٤٧٨	٠,٦٩٨

جدول (١)

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: د(س)

ن	س	ل ٠,٠٥	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٩	٠,٩٥
٨	٠	٠,٦٦٣	٠,٤٣٠	٠,١٦٨	٠,٠٥٨	٠,٠١٧	٠,٠٠٤	٠,٠٠١				
	١	٠,٢٧٩	٠,٣٨٣	٠,٣٣٦	٠,١٩٨	٠,٠٩٠	٠,٠٣١	٠,٠٠٨	٠,٠٠١			
	٢	٠,٠٥١	٠,١٤٩	٠,٢٩٤	٠,٢٩٦	٠,٢٠٩	٠,١٠٩	٠,٠٤١	٠,٠١٠	٠,٠٠١		
	٣	٠,٠٠٥	٠,٠٣٣	٠,١٤٧	٠,٢٥٤	٠,٢٧٩	٠,٢١٩	٠,١٢٤	٠,٠٤٧	٠,٠٠٩		
	٤		٠,٠٠٥	٠,٠٤٦	٠,١٣٦	٠,٢٣٢	٠,٢٧٣	٠,٢٣٢	٠,١٣٦	٠,٠٤٦	٠,٠٠٥	
	٥			٠,٠٠٩	٠,٠٤٧	٠,١٢٤	٠,٢١٩	٠,٢٧٩	٠,٢٥٤	٠,١٤٧	٠,٠٣٣	٠,٠٠٥
	٦			٠,٠٠١	٠,٠١٠	٠,٠٤١	٠,١٠٩	٠,٢٠٩	٠,٢٩٦	٠,٢٩٤	٠,١٤٩	٠,٠٥١
	٧				٠,٠٠١	٠,٠٠٨	٠,٠٣١	٠,٠٩٠	٠,١٩٨	٠,٣٣٦	٠,٣٨٣	٠,٢٧٩
	٨					٠,٠٠١	٠,٠٠٤	٠,٠١٧	٠,٠٥٨	٠,١٦٨	٠,٤٣٠	٠,٦٦٣
٩	٠	٠,٦٣٠	٠,٣٨٧	٠,١٣٤	٠,٠٤٠	٠,٠١٠	٠,٠٠٢					
	١	٠,٢٩٩	٠,٣٨٧	٠,٣٠٢	٠,١٥٦	٠,٠٦٠	٠,٠١٨	٠,٠٠٤				
	٢	٠,٠٦٣	٠,١٧٢	٠,٣٠٢	٠,٢٦٧	٠,١٦١	٠,٠٧٠	٠,٠٢١	٠,٠٠٤			
	٣	٠,٠٠٨	٠,٠٤٥	٠,١٧٦	٠,٢٦٧	٠,٢٥١	٠,١٦٤	٠,٠٧٤	٠,٠٢١	٠,٠٠٣		
	٤	٠,٠٠١	٠,٠٠٧	٠,٠٦٥	٠,١٧٢	٠,٢٥١	٠,٢٤٦	٠,١٦٧	٠,٠٧٤	٠,٠١٧	٠,٠٠١	
	٥		٠,٠٠١	٠,٠١٧	٠,٠٧٤	٠,١٦٧	٠,٢٤٦	٠,٢٥١	٠,١٧٢	٠,٠٦٦	٠,٠٠٧	٠,٠٠١
	٦			٠,٠٠٣	٠,٠٢١	٠,٠٧٤	٠,١٦٤	٠,٢٥١	٠,٢٦٧	٠,١٧٦	٠,٠٤٥	٠,٠٠٨
	٧				٠,٠٠٤	٠,٠٢١	٠,٠٧٠	٠,١٦١	٠,٢٦٧	٠,٣٠٢	٠,١٧٢	٠,٠٦٣
	٨					٠,٠٠٤	٠,٠١٨	٠,٠٦٠	٠,١٥٦	٠,٣٠٢	٠,٣٨٧	٠,٢٩٩
	٩						٠,٠٠٢	٠,٠١٠	٠,٠٤٠	٠,١٣٤	٠,٣٨٧	٠,٦٣٠
١٠	٠	٠,٥٩٩	٠,٣٤٩	٠,١٠٧	٠,٠٢٨	٠,٠٠٦	٠,٠٠١					
	١	٠,٣١٥	٠,٣٨٧	٠,٢٦٨	٠,١٢١	٠,٠٤٠	٠,٠١٠	٠,٠٠٢				
	٢	٠,٠٧٥	٠,١٩٤	٠,٣٠٢	٠,٢٣٣	٠,١٢١	٠,٠٤٤	٠,٠١١	٠,٠٠١			
	٣	٠,٠١٠	٠,٠٥٧	٠,٢٠١	٠,٢٦٧	٠,٢١٥	٠,١١٧	٠,٠٤٢	٠,٠٠٩	٠,٠٠١		
	٤	٠,٠٠١	٠,٠١١	٠,٠٨٨	٠,٢٠٠	٠,٢٥١	٠,٢٠٥	٠,١١١	٠,٠٣٧	٠,٠٠٦		
	٥		٠,٠٠١	٠,٠٢٦	٠,١٠٣	٠,٢٠١	٠,٢٤٦	٠,٢٠١	٠,١٠٣	٠,٠٢٦	٠,٠٠١	
	٦			٠,٠٠٦	٠,٠٣٧	٠,١١١	٠,٢٠٥	٠,٢٥١	٠,٢٠٠	٠,٠٨٨	٠,٠١١	٠,٠٠١
	٧			٠,٠٠١	٠,٠٠٩	٠,٠٤٢	٠,١١٧	٠,٢١٥	٠,٢٦٧	٠,٢٠١	٠,٠٥٧	٠,٠١٠
	٨				٠,٠٠١	٠,٠١١	٠,٠٤٤	٠,١٢١	٠,٢٣٣	٠,٣٠٢	٠,١٩٤	٠,٠٧٥
	٩					٠,٠٠٢	٠,٠١٠	٠,٠٤٠	٠,١٢١	٠,٢٦٨	٠,٣٨٧	٠,٣١٥
	١٠						٠,٠٠١	٠,٠٠٦	٠,٠٢٨	٠,١٠٧	٠,٣٤٩	٠,٥٩٩

جدول (٢)

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: د(س)

ن	س	ل										
		٠,٠٥	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٩	٠,٩٥
١١	٠	٠,٥٦٩	٠,٣١٤	٠,٠٨٦	٠,٠٢٠	٠,٠٠٤						
	١	٠,٣٢٩	٠,٣٨٤	٠,٢٣٦	٠,٠٩٣	٠,٠٢٧	٠,٠٠٥	٠,٠٠١				
	٢	٠,٠٨٧	٠,٢١٣	٠,٢٩٥	٠,٢٠٠	٠,٠٨٩	٠,٠٢٧	٠,٠٠٥	٠,٠٠١			
	٣	٠,٠١٤	٠,٠٧١	٠,٢٢١	٠,٢٥٧	٠,١٧٧	٠,٠٨١	٠,٠٢٣	٠,٠٠٤			
	٤	٠,٠٠١	٠,٠١٦	٠,١١١	٠,٢٢٠	٠,٢٣٦	٠,١٦١	٠,٠٧٠	٠,٠١٧	٠,٠٠٢		
	٥		٠,٠٠٢	٠,٠٣٩	٠,١٣٢	٠,٢٢١	٠,٢٢٦	٠,١٤٧	٠,٠٥٧	٠,٠١٠		
	٦			٠,٠١٠	٠,٠٥٧	٠,١٤٧	٠,٢٢٦	٠,٢٢١	٠,١٣٢	٠,٠٣٩	٠,٠٠٢	
	٧			٠,٠٠٢	٠,٠١٧	٠,٠٧٠	٠,١٦١	٠,٢٣٦	٠,٢٢٠	٠,١١١	٠,٠١٦	٠,٠٠١
	٨				٠,٠٠٤	٠,٠٢٣	٠,٠٨١	٠,١٧٧	٠,٢٥٧	٠,٢٢١	٠,٠٧١	٠,٠١٤
	٩				٠,٠٠١	٠,٠٠٥	٠,٠٢٧	٠,٠٨٩	٠,٢٠٠	٠,٢٩٥	٠,٢١٣	٠,٠٨٧
	١٠					٠,٠٠١	٠,٠٠٥	٠,٠٢٧	٠,٠٩٣	٠,٢٣٦	٠,٣٨٤	٠,٣٢٩
	١١							٠,٠٠٤	٠,٠٢٠	٠,٠٨٦	٠,٣١٤	٠,٥٦٩
١٢	٠	٠,٥٤٠	٠,٢٨٢	٠,٠٦٩	٠,٠١٤	٠,٠٠٢						
	١	٠,٣٤١	٠,٣٧٧	٠,٢٠٦	٠,٠٧١	٠,٠١٧	٠,٠٠٣					
	٢	٠,٠٩٩	٠,٢٣٠	٠,٢٨٣	٠,١٦٨	٠,٠٦٤	٠,٠١٦	٠,٠٠٢				
	٣	٠,٠١٧	٠,٠٨٥	٠,٢٣٦	٠,٢٤٠	٠,١٤٢	٠,٠٥٤	٠,٠١٢	٠,٠٠١			
	٤	٠,٠٠٢	٠,٠٢١	٠,١٣٣	٠,٢٣١	٠,٢١٣	٠,١٢١	٠,٠٤٢	٠,٠٠٨	٠,٠٠١		
	٥		٠,٠٠٤	٠,٠٥٣	٠,١٥٨	٠,٢٢٧	٠,١٩٣	٠,١٠١	٠,٠٢٩	٠,٠٠٣		
	٦			٠,٠١٦	٠,٠٧٩	٠,١٧٧	٠,٢٢٦	٠,١٧٧	٠,٠٧٩	٠,٠١٦		
	٧			٠,٠٠٣	٠,٠٢٩	٠,١٠١	٠,١٩٣	٠,٢٢٧	٠,١٥٨	٠,٠٥٣	٠,٠٠٤	
	٨			٠,٠٠١	٠,٠٠٨	٠,٠٤٢	٠,١٢١	٠,٢١٣	٠,٢٣١	٠,١٣٣	٠,٠٢١	٠,٠٠٢
	٩				٠,٠٠١	٠,٠١٢	٠,٠٥٤	٠,١٤٢	٠,٢٤٠	٠,٢٣٦	٠,٠٨٥	٠,٠١٧
	١٠					٠,٠٠٢	٠,٠١٠	٠,٠٦٤	٠,١٦٨	٠,٢٨٣	٠,٢٣٠	٠,٠٩٩
	١١						٠,٠٠٣	٠,٠١٧	٠,٠٧١	٠,٢٠٦	٠,٣٧٧	٠,٣٤١
	١٢							٠,٠٠٢	٠,٠١٤	٠,٠٦٩	٠,٢٨٢	٠,٥٤٠

جدول (٣)

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: د(س)

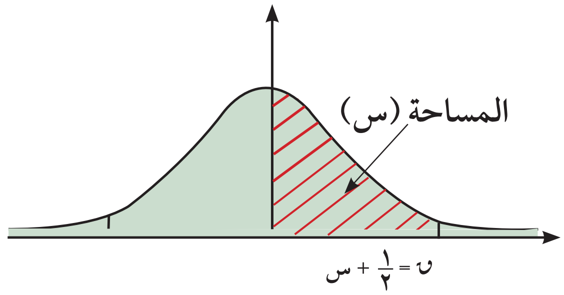
ن	س	ل: ٠,٠٥	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٩	٠,٩٥
١٣	٠	٠,٥١٣	٠,٢٥٤	٠,٠٥٥	٠,٠١٠	٠,٠٠١						
	١	٠,٣٥١	٠,٣٦٧	٠,١٧٩	٠,٠٥٤	٠,٠١١	٠,٠٠٢					
	٢	٠,١١١	٠,٢٤٥	٠,٢٦٨	٠,١٣٩	٠,٠٤٥	٠,٠١٠	٠,٠٠١				
	٣	٠,٠٢١	٠,١٠٠	٠,٢٤٦	٠,٢١٨	٠,١١١	٠,٠٣٥	٠,٠٠٥	٠,٠٠١			
	٤	٠,٠٠٣	٠,٠٢٨	٠,١٥٤	٠,٢٣٤	٠,١٨٤	٠,٠٨٧	٠,٠٢٤	٠,٠٠٣			
	٥		٠,٠٠٦	٠,٠٦٩	٠,١٨٠	٠,٢٢١	٠,١٥٧	٠,٠٦٦	٠,٠١٤	٠,٠٠١		
	٦		٠,٠٠١	٠,٠٢٣	٠,١٠٣	٠,١٩٧	٠,٢٠٩	٠,١٣١	٠,٠٤٤	٠,٠٠٦		
	٧			٠,٠٠٦	٠,٠٤٤	٠,١٣١	٠,٢٠٩	٠,١٩٧	٠,١٠٣	٠,٠٢٣	٠,٠٠١	
	٨			٠,٠٠١	٠,٠١٤	٠,٠٦٦	٠,١٥٧	٠,٢٢١	٠,١٨٠	٠,٠٦٩	٠,٠٠٦	
	٩				٠,٠٠٣	٠,٠٢٤	٠,٠٨٧	٠,١٨٤	٠,٢٣٤	٠,١٥٤	٠,٠٢٨	٠,٠٠٣
	١٠				٠,٠٠١	٠,٠٠٦	٠,٠٣٥	٠,١١١	٠,٢١٨	٠,٢٤٦	٠,١٠٠	٠,٠٢١
	١١					٠,٠٠١	٠,٠١٠	٠,٠٤٥	٠,١٣٩	٠,٢٦٨	٠,٢٤٥	٠,١١١
	١٢						٠,٠٠٢	٠,٠١١	٠,٠٥٤	٠,١٧٩	٠,٣٦٧	٠,٣٥١
	١٣							٠,٠٠١	٠,٠١٠	٠,٠٥٥	٠,٢٥٤	٠,٥١٣
١٤	٠	٠,٤٨٨	٠,٢٢٩	٠,٠٤٤	٠,٠٠٧	٠,٠٠١						
	١	٠,٣٥٩	٠,٣٥٦	٠,١٥٤	٠,٠٤١	٠,٠٠٧	٠,٠٠١					
	٢	٠,١٢٣	٠,٢٥٧	٠,٢٥٠	٠,١١٣	٠,٠٣٢	٠,٠٠٦	٠,٠٠١				
	٣	٠,٠٢٦	٠,١١٤	٠,٢٥٠	٠,١٩٤	٠,٠٨٥	٠,٠٢٢	٠,٠٠٣				
	٤	٠,٠٠٤	٠,٠٣٥	٠,١٧٢	٠,٢٢٩	٠,١٥٥	٠,٠٦١	٠,٠١٤	٠,٠٠١			
	٥		٠,٠٠٨	٠,٠٨٦	٠,١٩٦	٠,٢٠٧	٠,١٢٢	٠,٠٤١	٠,٠٠٧			
	٦		٠,٠٠١	٠,٠٣٢	٠,١٢٦	٠,٢٠٧	٠,١٨٣	٠,٠٩٢	٠,٠٢٣	٠,٠٠٢		
	٧			٠,٠٠٩	٠,٠٦٢	٠,١٥٧	٠,٢٠٩	٠,١٥٧	٠,٠٦٢	٠,٠٠٠٩		
	٨			٠,٠٠٢	٠,٠٢٣	٠,٠٩٢	٠,١٨٣	٠,٢٠٧	٠,١٢٦	٠,٠٣٢	٠,٠٠١	
	٩				٠,٠٠٧	٠,٠٤١	٠,١٢٢	٠,٢٠٧	٠,١٩٦	٠,٠٨٦	٠,٠٠٨	
	١٠				٠,٠٠١	٠,٠١٤	٠,٠٦١	٠,١٥٥	٠,٢٢٩	٠,١٧٢	٠,٠٣٥	٠,٠٠٤
	١١					٠,٠٠٣	٠,٠٢٢	٠,٠٨٥	٠,١٩٤	٠,٢٥٠	٠,١١٤	٠,٠٢٦
	١٢					٠,٠٠١	٠,٠٠٦	٠,٠٣٢	٠,١١٣	٠,٢٥٠	٠,٢٥٧	٠,١٢٣
	١٣						٠,٠٠١	٠,٠٠٧	٠,٠٤١	٠,١٥٤	٠,٣٥٦	٠,٣٥٩
	١٤							٠,٠٠١	٠,٠٠٧	٠,٠٤٤	٠,٢٢٩	٠,٤٨٨

تابع - جدول (٣)

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: د(س)

ن	س	ل: ٠,٠٥	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٩	٠,٩٥
١٥	٠	٠,٤٦٣	٠,٢٠٦	٠,٠٣٥	٠,٠٠٥							
	١	٠,٣٦٦	٠,٣٤٣	٠,١٣٢	٠,٠٣١	٠,٠٠٥						
	٢	٠,١٣٥	٠,٢٦٧	٠,٢٣١	٠,٠٩٢	٠,٠٢٢	٠,٠٠٣					
	٣	٠,٠٣١	٠,١٢٩	٠,٢٥٠	٠,١٧٠	٠,٠٦٣	٠,٠١٤	٠,٠٠٢				
	٤	٠,٠٠٥	٠,٠٤٣	٠,١٨٨	٠,٢١٩	٠,١٢٧	٠,٠٤٢	٠,٠٠٧	٠,٠٠١			
	٥	٠,٠٠١	٠,٠١٠	٠,١٠٣	٠,٢٠٦	٠,١٨٦	٠,٠٩٢	٠,٠٢٤	٠,٠٠٣			
	٦		٠,٠٠٢	٠,٠٤٣	٠,١٤٧	٠,٢٠٧	٠,١٥٣	٠,٠٦١	٠,٠١٢	٠,٠٠١		
	٧			٠,٠١٤	٠,٠٨١	٠,١٧٧	٠,١٩٦	٠,١١٨	٠,٠٣٥	٠,٠٠٣		
	٨			٠,٠٠٣	٠,٠٣٥	٠,١١٨	٠,١٩٦	٠,١٧٧	٠,٠٨١	٠,٠١٤		
	٩			٠,٠٠١	٠,٠١٢	٠,٠٦١	٠,١٥٣	٠,٢٠٧	٠,١٤٧	٠,٠٤٣	٠,٠٠٢	
	١٠				٠,٠٠٣	٠,٠٢٤	٠,٠٩٢	٠,١٨٦	٠,٢٠٦	٠,١٠٣	٠,٠١٠	٠,٠٠١
	١١				٠,٠٠١	٠,٠٠٧	٠,٠٤٢	٠,١٢٧	٠,٢١٠	٠,١٨٨	٠,٠٤٣	٠,٠٠٥
	١٢					٠,٠٠٢	٠,٠١٤	٠,٠٦٣	٠,١٧٠	٠,٢٥٠	٠,١٢٩	٠,٠٣١
	١٣						٠,٠٠٣	٠,٠٢٢	٠,٠٩٢	٠,٢٣١	٠,٢٦٧	٠,١٣٥
	١٤							٠,٠٠٥	٠,٠٣١	٠,١٣٢	٠,٣٤٣	٠,٣٦٦
	١٥								٠,٠٠٥	٠,٠٣٥	٠,٢٠٦	٠,٤٦٣

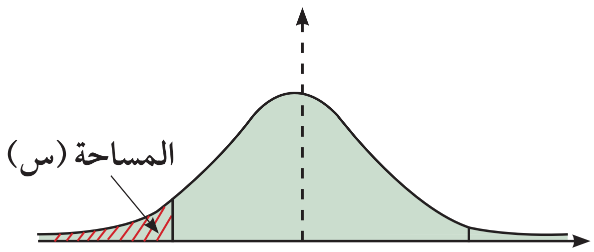
تابع -جدول (٣)



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (ن) لحساب قيم المساحات من اليسار

ن	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠٠	٠,٥٠٣٩٩	٠,٥٠٧٩٨	٠,٥١١٩٧	٠,٥١٥٩٥	٠,٥١٩٩٤	٠,٥٢٣٩٢	٠,٥٢٧٩٠	٠,٥٣١٨٨	٠,٥٣٥٨٦
٠,١	٠,٥٣٩٨٣	٠,٥٤٣٨٠	٠,٥٤٧٧٦	٠,٥٥١٧٢	٠,٥٥٥٦٧	٠,٥٥٩٦٢	٠,٥٦٣٥٦	٠,٥٦٧٤٩	٠,٥٧١٤٢	٠,٥٧٥٣٥
٠,٢	٠,٥٧٩٢٦	٠,٥٨٣١٧	٠,٥٨٧٠٦	٠,٥٩٠٩٥	٠,٥٩٤٨٣	٠,٥٩٨٧١	٠,٦٠٢٥٧	٠,٦٠٦٤٢	٠,٦١٠٢٦	٠,٦١٤٠٩
٠,٣	٠,٦١٧٩١	٠,٦٢١٧٢	٠,٦٢٥٥٢	٠,٦٢٩٣٠	٠,٦٣٣٠٧	٠,٦٣٦٨٣	٠,٦٤٠٥٨	٠,٦٤٤٣١	٠,٦٤٨٠٣	٠,٦٥١٧٣
٠,٤	٠,٦٥٥٤٢	٠,٦٥٩١٠	٠,٦٦٢٧٦	٠,٦٦٦٤٠	٠,٦٧٠٠٣	٠,٦٧٣٦٤	٠,٦٧٧٢٤	٠,٦٨٠٨٢	٠,٦٨٤٣٩	٠,٦٨٧٩٣
٠,٥	٠,٦٩١٤٦	٠,٦٩٤٩٧	٠,٦٩٨٤٧	٠,٧٠١٩٤	٠,٧٠٥٤٠	٠,٧٠٨٨٤	٠,٧١٢٢٦	٠,٧١٥٦٦	٠,٧١٩٠٤	٠,٧٢٢٤٠
٠,٦	٠,٧٢٥٧٥	٠,٧٢٩٠٧	٠,٧٣٢٣٧	٠,٧٣٥٦٥	٠,٧٣٨٩١	٠,٧٤٢١٥	٠,٧٤٥٣٧	٠,٧٤٨٥٧	٠,٧٥١٧٥	٠,٧٥٤٩٠
٠,٧	٠,٧٥٨٠٤	٠,٧٦١١٥	٠,٧٦٤٢٤	٠,٧٦٧٣٠	٠,٧٧٠٣٥	٠,٧٧٣٣٧	٠,٧٧٦٣٧	٠,٧٧٩٣٥	٠,٧٨٢٣٠	٠,٧٨٥٢٤
٠,٨	٠,٧٨٨١٤	٠,٧٩١٠٣	٠,٧٩٣٨٩	٠,٧٩٦٧٣	٠,٧٩٩٥٥	٠,٨٠٢٣٤	٠,٨٠٥١١	٠,٨٠٧٨٥	٠,٨١٠٥٧	٠,٨١٣٢٧
٠,٩	٠,٨١٥٩٤	٠,٨١٨٥٩	٠,٨٢١٢١	٠,٨٢٣٨١	٠,٨٢٦٣٩	٠,٨٢٨٩٤	٠,٨٣١٤٧	٠,٨٣٣٩٨	٠,٨٣٦٤٦	٠,٨٣٨٩١
١,٠	٠,٨٤١٣٤	٠,٨٤٣٧٥	٠,٨٤٦١٤	٠,٨٤٨٤٩	٠,٨٥٠٨٣	٠,٨٥٣١٤	٠,٨٥٥٤٣	٠,٨٥٧٦٩	٠,٨٥٩٩٣	٠,٨٦٢١٤
١,١	٠,٨٦٤٣٣	٠,٨٦٦٥٠	٠,٨٦٨٦٤	٠,٨٧٠٧٦	٠,٨٧٢٨٦	٠,٨٧٤٩٣	٠,٨٧٦٩٨	٠,٨٧٩٠٠	٠,٨٨١٠٠	٠,٨٨٢٩٨
١,٢	٠,٨٨٤٩٣	٠,٨٨٦٨٦	٠,٨٨٨٧٧	٠,٨٩٠٦٥	٠,٨٩٢٥١	٠,٨٩٤٣٥	٠,٨٩٦١٧	٠,٨٩٧٩٦	٠,٨٩٩٧٣	٠,٩٠١٤٧
١,٣	٠,٩٠٣٢٠	٠,٩٠٤٩٠	٠,٩٠٦٥٨	٠,٩٠٨٢٤	٠,٩٠٩٨٨	٠,٩١١٤٩	٠,٩١٣٠٩	٠,٩١٤٦٦	٠,٩١٦٢١	٠,٩١٧٧٤
١,٤	٠,٩١٩٢٤	٠,٩٢٠٧٣	٠,٩٢٢٢٠	٠,٩٢٣٦٤	٠,٩٢٥٠٧	٠,٩٢٦٤٧	٠,٩٢٧٨٥	٠,٩٢٩٢٢	٠,٩٣٠٥٦	٠,٩٣١٨٩
١,٥	٠,٩٣٣١٩	٠,٩٣٤٤٨	٠,٩٣٥٧٤	٠,٩٣٦٩٩	٠,٩٣٨٢٢	٠,٩٣٩٤٣	٠,٩٤٠٦٢	٠,٩٤١٧٩	٠,٩٤٢٩٥	٠,٩٤٤٠٨
١,٦	٠,٩٤٥٢٠	٠,٩٤٦٣٠	٠,٩٤٧٣٨	٠,٩٤٨٤٥	٠,٩٤٩٥٠	٠,٩٥٠٥٣	٠,٩٥١٥٤	٠,٩٥٢٥٤	٠,٩٥٣٥٢	٠,٩٥٤٤٩
١,٧	٠,٩٥٥٤٣	٠,٩٥٦٣٧	٠,٩٥٧٢٨	٠,٩٥٨١٨	٠,٩٥٩٠٧	٠,٩٥٩٩٤	٠,٩٦٠٨٠	٠,٩٦١٦٤	٠,٩٦٢٤٦	٠,٩٦٣٢٧
١,٨	٠,٩٦٤٠٧	٠,٩٦٤٨٥	٠,٩٦٥٦٢	٠,٩٦٦٣٨	٠,٩٦٧١٢	٠,٩٦٧٨٤	٠,٩٦٨٥٦	٠,٩٦٩٢٦	٠,٩٦٩٩٥	٠,٩٧٠٦٢
١,٩	٠,٩٧١٢٨	٠,٩٧١٩٣	٠,٩٧٢٥٧	٠,٩٧٣٢٠	٠,٩٧٣٨١	٠,٩٧٤٤١	٠,٩٧٥٠٠	٠,٩٧٥٥٨	٠,٩٧٦١٥	٠,٩٧٦٧٠
٢,٠	٠,٩٧٧٢٥	٠,٩٧٧٧٨	٠,٩٧٨٣١	٠,٩٧٨٨٢	٠,٩٧٩٣٢	٠,٩٧٩٨٢	٠,٩٨٠٣٠	٠,٩٨٠٧٧	٠,٩٨١٢٤	٠,٩٨١٦٩
٢,١	٠,٩٨٢١٤	٠,٩٨٢٥٧	٠,٩٨٣٠٠	٠,٩٨٣٤١	٠,٩٨٣٨٢	٠,٩٨٤٢٢	٠,٩٨٤٦١	٠,٩٨٥٠٠	٠,٩٨٥٣٧	٠,٩٨٥٧٤
٢,٢	٠,٩٨٦١٠	٠,٩٨٦٤٥	٠,٩٨٦٧٩	٠,٩٨٧١٣	٠,٩٨٧٤٥	٠,٩٨٧٧٨	٠,٩٨٨٠٩	٠,٩٨٨٤٠	٠,٩٨٨٧٠	٠,٩٨٨٩٩
٢,٣	٠,٩٨٩٢٨	٠,٩٨٩٥٦	٠,٩٨٩٨٣	٠,٩٩٠١٠	٠,٩٩٠٣٦	٠,٩٩٠٦١	٠,٩٩٠٨٦	٠,٩٩١١١	٠,٩٩١٣٤	٠,٩٩١٥٨
٢,٤	٠,٩٩١٨٠	٠,٩٩٢٠٢	٠,٩٩٢٢٤	٠,٩٩٢٤٥	٠,٩٩٢٦٦	٠,٩٩٢٨٦	٠,٩٩٣٠٥	٠,٩٩٣٢٤	٠,٩٩٣٤٣	٠,٩٩٣٦١
٢,٥	٠,٩٩٣٧٩	٠,٩٩٣٩٦	٠,٩٩٤١٣	٠,٩٩٤٣٠	٠,٩٩٤٤٦	٠,٩٩٤٦١	٠,٩٩٤٧٧	٠,٩٩٤٩٢	٠,٩٩٥٠٦	٠,٩٩٥٢٠
٢,٦	٠,٩٩٥٣٤	٠,٩٩٥٤٧	٠,٩٩٥٦٠	٠,٩٩٥٧٣	٠,٩٩٥٨٥	٠,٩٩٥٩٨	٠,٩٩٦٠٩	٠,٩٩٦٢١	٠,٩٩٦٣٢	٠,٩٩٦٤٣
٢,٧	٠,٩٩٦٥٣	٠,٩٩٦٦٤	٠,٩٩٦٧٤	٠,٩٩٦٨٣	٠,٩٩٦٩٣	٠,٩٩٧٠٢	٠,٩٩٧١١	٠,٩٩٧٢٠	٠,٩٩٧٢٨	٠,٩٩٧٣٦
٢,٨	٠,٩٩٧٤٤	٠,٩٩٧٥٢	٠,٩٩٧٦٠	٠,٩٩٧٦٧	٠,٩٩٧٧٤	٠,٩٩٧٨١	٠,٩٩٧٨٨	٠,٩٩٧٩٥	٠,٩٩٨٠١	٠,٩٩٨٠٧
٢,٩	٠,٩٩٨١٣	٠,٩٩٨١٩	٠,٩٩٨٢٥	٠,٩٩٨٣١	٠,٩٩٨٣٦	٠,٩٩٨٤١	٠,٩٩٨٤٦	٠,٩٩٨٥١	٠,٩٩٨٥٦	٠,٩٩٨٦١
٣,٠	٠,٩٩٨٦٥	٠,٩٩٨٦٩	٠,٩٩٨٧٤	٠,٩٩٨٧٨	٠,٩٩٨٨٢	٠,٩٩٨٨٦	٠,٩٩٨٨٩	٠,٩٩٨٩٣	٠,٩٩٨٩٦	٠,٩٩٩٠٠
٣,١	٠,٩٩٩٠٣	٠,٩٩٩٠٦	٠,٩٩٩١٠	٠,٩٩٩١٣	٠,٩٩٩١٦	٠,٩٩٩١٨	٠,٩٩٩٢١	٠,٩٩٩٢٤	٠,٩٩٩٢٦	٠,٩٩٩٢٩
٣,٢	٠,٩٩٩٣١	٠,٩٩٩٣٤	٠,٩٩٩٣٦	٠,٩٩٩٣٨	٠,٩٩٩٤٠	٠,٩٩٩٤٢	٠,٩٩٩٤٤	٠,٩٩٩٤٦	٠,٩٩٩٤٨	٠,٩٩٩٥٠
٣,٣	٠,٩٩٩٥٢	٠,٩٩٩٥٣	٠,٩٩٩٥٥	٠,٩٩٩٥٧	٠,٩٩٩٥٨	٠,٩٩٩٦٠	٠,٩٩٩٦١	٠,٩٩٩٦٢	٠,٩٩٩٦٤	٠,٩٩٩٦٥
٣,٤	٠,٩٩٩٦٦	٠,٩٩٩٦٨	٠,٩٩٩٦٩	٠,٩٩٩٧٠	٠,٩٩٩٧١	٠,٩٩٩٧٢	٠,٩٩٩٧٣	٠,٩٩٩٧٤	٠,٩٩٩٧٥	٠,٩٩٩٧٦
٣,٥	٠,٩٩٩٧٧	٠,٩٩٩٧٨	٠,٩٩٩٧٨	٠,٩٩٩٧٩	٠,٩٩٩٨٠	٠,٩٩٩٨١	٠,٩٩٩٨١	٠,٩٩٩٨٢	٠,٩٩٩٨٣	٠,٩٩٩٨٣
٣,٦	٠,٩٩٩٨٤	٠,٩٩٩٨٥	٠,٩٩٩٨٥	٠,٩٩٩٨٦	٠,٩٩٩٨٦	٠,٩٩٩٨٧	٠,٩٩٩٨٧	٠,٩٩٩٨٨	٠,٩٩٩٨٨	٠,٩٩٩٨٩
٣,٧	٠,٩٩٩٨٩	٠,٩٩٩٩٠	٠,٩٩٩٩٠	٠,٩٩٩٩٠	٠,٩٩٩٩١	٠,٩٩٩٩١	٠,٩٩٩٩٢	٠,٩٩٩٩٢	٠,٩٩٩٩٢	٠,٩٩٩٩٢
٣,٨	٠,٩٩٩٩٣	٠,٩٩٩٩٣	٠,٩٩٩٩٣	٠,٩٩٩٩٤	٠,٩٩٩٩٤	٠,٩٩٩٩٤	٠,٩٩٩٩٤	٠,٩٩٩٩٥	٠,٩٩٩٩٥	٠,٩٩٩٩٥
٣,٩	٠,٩٩٩٩٥	٠,٩٩٩٩٥	٠,٩٩٩٩٦	٠,٩٩٩٩٦	٠,٩٩٩٩٦	٠,٩٩٩٩٦	٠,٩٩٩٩٦	٠,٩٩٩٩٦	٠,٩٩٩٩٧	٠,٩٩٩٩٧

جدول (٤)



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (ى) لحساب قيم المساحات من اليسار

ى	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
-٣,٩	٠,٠٠٠٠٥	٠,٠٠٠٠٥	٠,٠٠٠٠٤	٠,٠٠٠٠٤	٠,٠٠٠٠٤	٠,٠٠٠٠٤	٠,٠٠٠٠٤	٠,٠٠٠٠٤	٠,٠٠٠٠٣	٠,٠٠٠٠٣
-٣,٨	٠,٠٠٠٠٧	٠,٠٠٠٠٧	٠,٠٠٠٠٧	٠,٠٠٠٠٦	٠,٠٠٠٠٦	٠,٠٠٠٠٦	٠,٠٠٠٠٦	٠,٠٠٠٠٥	٠,٠٠٠٠٥	٠,٠٠٠٠٥
-٣,٧	٠,٠٠٠١١	٠,٠٠٠١٠	٠,٠٠٠١٠	٠,٠٠٠١٠	٠,٠٠٠٠٩	٠,٠٠٠٠٩	٠,٠٠٠٠٨	٠,٠٠٠٠٨	٠,٠٠٠٠٨	٠,٠٠٠٠٨
-٣,٦	٠,٠٠٠١٦	٠,٠٠٠١٥	٠,٠٠٠١٥	٠,٠٠٠١٤	٠,٠٠٠١٤	٠,٠٠٠١٣	٠,٠٠٠١٣	٠,٠٠٠١٢	٠,٠٠٠١٢	٠,٠٠٠١١
-٣,٥	٠,٠٠٠٢٣	٠,٠٠٠٢٢	٠,٠٠٠٢٢	٠,٠٠٠٢١	٠,٠٠٠٢٠	٠,٠٠٠١٩	٠,٠٠٠١٩	٠,٠٠٠١٨	٠,٠٠٠١٧	٠,٠٠٠١٧
-٣,٤	٠,٠٠٠٣٤	٠,٠٠٠٣٢	٠,٠٠٠٣١	٠,٠٠٠٣٠	٠,٠٠٠٢٩	٠,٠٠٠٢٨	٠,٠٠٠٢٧	٠,٠٠٠٢٦	٠,٠٠٠٢٥	٠,٠٠٠٢٤
-٣,٣	٠,٠٠٠٤٨	٠,٠٠٠٤٧	٠,٠٠٠٤٥	٠,٠٠٠٤٣	٠,٠٠٠٤٢	٠,٠٠٠٤٠	٠,٠٠٠٣٩	٠,٠٠٠٣٨	٠,٠٠٠٣٦	٠,٠٠٠٣٥
-٣,٢	٠,٠٠٠٦٩	٠,٠٠٠٦٦	٠,٠٠٠٦٤	٠,٠٠٠٦٢	٠,٠٠٠٦٠	٠,٠٠٠٥٨	٠,٠٠٠٥٦	٠,٠٠٠٥٤	٠,٠٠٠٥٢	٠,٠٠٠٥٠
-٣,١	٠,٠٠٠٩٧	٠,٠٠٠٩٤	٠,٠٠٠٩٠	٠,٠٠٠٨٧	٠,٠٠٠٨٤	٠,٠٠٠٨٢	٠,٠٠٠٧٩	٠,٠٠٠٧٦	٠,٠٠٠٧٤	٠,٠٠٠٧١
-٣,٠	٠,٠٠١٣٥	٠,٠٠١٣١	٠,٠٠١٢٦	٠,٠٠١٢٢	٠,٠٠١١٨	٠,٠٠١١٤	٠,٠٠١١١	٠,٠٠١٠٧	٠,٠٠١٠٤	٠,٠٠١٠٠
-٢,٩	٠,٠٠١٨٧	٠,٠٠١٨١	٠,٠٠١٧٥	٠,٠٠١٦٩	٠,٠٠١٦٤	٠,٠٠١٥٩	٠,٠٠١٥٤	٠,٠٠١٤٩	٠,٠٠١٤٤	٠,٠٠١٣٩
-٢,٨	٠,٠٠٢٥٦	٠,٠٠٢٤٨	٠,٠٠٢٤٠	٠,٠٠٢٣٣	٠,٠٠٢٢٦	٠,٠٠٢١٩	٠,٠٠٢١٢	٠,٠٠٢٠٥	٠,٠٠١٩٩	٠,٠٠١٩٣
-٢,٧	٠,٠٠٣٤٧	٠,٠٠٣٣٦	٠,٠٠٣٢٦	٠,٠٠٣١٧	٠,٠٠٣٠٧	٠,٠٠٢٩٨	٠,٠٠٢٨٩	٠,٠٠٢٨٠	٠,٠٠٢٧٢	٠,٠٠٢٦٤
-٢,٦	٠,٠٠٤٦٦	٠,٠٠٤٥٣	٠,٠٠٤٤٠	٠,٠٠٤٢٧	٠,٠٠٤١٥	٠,٠٠٤٠٢	٠,٠٠٣٩١	٠,٠٠٣٧٩	٠,٠٠٣٦٨	٠,٠٠٣٥٧
-٢,٥	٠,٠٠٦٢١	٠,٠٠٦٠٤	٠,٠٠٥٨٧	٠,٠٠٥٧٠	٠,٠٠٥٥٤	٠,٠٠٥٣٩	٠,٠٠٥٢٣	٠,٠٠٥٠٨	٠,٠٠٤٩٤	٠,٠٠٤٨٠
-٢,٤	٠,٠٠٨٢٠	٠,٠٠٧٩٨	٠,٠٠٧٧٦	٠,٠٠٧٥٥	٠,٠٠٧٣٤	٠,٠٠٧١٤	٠,٠٠٦٩٥	٠,٠٠٦٧٦	٠,٠٠٦٥٧	٠,٠٠٦٣٩
-٢,٣	٠,٠١٠٧٢	٠,٠١٠٤٤	٠,٠١٠١٧	٠,٠٠٩٩٠	٠,٠٠٩٦٤	٠,٠٠٩٣٩	٠,٠٠٩١٤	٠,٠٠٨٨٩	٠,٠٠٨٦٦	٠,٠٠٨٤٢
-٢,٢	٠,٠١٣٩٠	٠,٠١٣٥٥	٠,٠١٣٢١	٠,٠١٢٨٧	٠,٠١٢٥٥	٠,٠١٢٢٢	٠,٠١١٩١	٠,٠١١٦٠	٠,٠١١٣٠	٠,٠١١٠١
-٢,١	٠,٠١٧٨٦	٠,٠١٧٤٣	٠,٠١٧٠٠	٠,٠١٦٥٩	٠,٠١٦١٨	٠,٠١٥٧٨	٠,٠١٥٣٩	٠,٠١٥٠٠	٠,٠١٤٦٣	٠,٠١٤٢٦
-٢,٠	٠,٠٢٢٧٥	٠,٠٢٢٢٢	٠,٠٢١٦٩	٠,٠٢١١٨	٠,٠٢٠٦٨	٠,٠٢٠١٨	٠,٠١٩٧٠	٠,٠١٩٢٣	٠,٠١٨٧٦	٠,٠١٨٣١
-١,٩	٠,٠٢٨٧٢	٠,٠٢٨٠٧	٠,٠٢٧٤٣	٠,٠٢٦٨٠	٠,٠٢٦١٩	٠,٠٢٥٥٩	٠,٠٢٥٠٠	٠,٠٢٤٤٢	٠,٠٢٣٨٥	٠,٠٢٣٣٠
-١,٨	٠,٠٣٥٩٣	٠,٠٣٥١٥	٠,٠٣٤٣٨	٠,٠٣٣٦٢	٠,٠٣٢٨٨	٠,٠٣٢١٦	٠,٠٣١٤٤	٠,٠٣٠٧٤	٠,٠٣٠٠٥	٠,٠٢٩٣٨
-١,٧	٠,٠٤٤٥٧	٠,٠٤٣٦٣	٠,٠٤٢٧٢	٠,٠٤١٨٢	٠,٠٤٠٩٣	٠,٠٤٠٠٦	٠,٠٣٩٢٠	٠,٠٣٨٣٦	٠,٠٣٧٥٤	٠,٠٣٦٧٣
-١,٦	٠,٠٥٤٨٠	٠,٠٥٣٧٠	٠,٠٥٢٦٢	٠,٠٥١٥٥	٠,٠٥٠٥٠	٠,٠٤٩٤٧	٠,٠٤٨٤٦	٠,٠٤٧٤٦	٠,٠٤٦٤٨	٠,٠٤٥٥١
-١,٥	٠,٠٦٦٨١	٠,٠٦٥٥٢	٠,٠٦٤٢٦	٠,٠٦٣٠١	٠,٠٦١٧٨	٠,٠٦٠٥٧	٠,٠٥٩٣٨	٠,٠٥٨٢١	٠,٠٥٧٠٥	٠,٠٥٥٩٢
-١,٤	٠,٠٨٠٧٦	٠,٠٧٩٢٧	٠,٠٧٧٨٠	٠,٠٧٦٣٦	٠,٠٧٤٩٣	٠,٠٧٣٥٣	٠,٠٧٢١٥	٠,٠٧٠٧٨	٠,٠٦٩٤٤	٠,٠٦٨١١
-١,٣	٠,٠٩٦٨٠	٠,٠٩٥١٠	٠,٠٩٣٤٢	٠,٠٩١٧٦	٠,٠٩٠١٢	٠,٠٨٨٥١	٠,٠٨٦٩١	٠,٠٨٥٣٤	٠,٠٨٣٧٩	٠,٠٨٢٢٦
-١,٢	٠,١١٥٠٧	٠,١١٣١٤	٠,١١١٢٣	٠,١٠٩٣٥	٠,١٠٧٤٩	٠,١٠٥٦٥	٠,١٠٣٨٣	٠,١٠٢٠٤	٠,١٠٠٢٧	٠,٠٩٨٥٣
-١,١	٠,١٣٥٦٧	٠,١٣٣٥٠	٠,١٣١٣٦	٠,١٢٩٢٤	٠,١٢٧١٤	٠,١٢٥٠٧	٠,١٢٣٠٢	٠,١٢١٠٠	٠,١١٩٠٠	٠,١١٧٠٢
-١,٠	٠,١٥٨٦٦	٠,١٥٦٢٥	٠,١٥٣٨٦	٠,١٥١٥١	٠,١٤٩١٧	٠,١٤٦٨٦	٠,١٤٤٥٧	٠,١٤٢٣١	٠,١٤٠٠٧	٠,١٣٧٨٦
-٠,٩	٠,١٨٤٠٦	٠,١٨١٤١	٠,١٧٨٧٩	٠,١٧٦١٩	٠,١٧٣٦١	٠,١٧١٠٦	٠,١٦٨٥٣	٠,١٦٦٠٢	٠,١٦٣٥٤	٠,١٦١٠٩
-٠,٨	٠,٢١١٨٦	٠,٢٠٨٩٧	٠,٢٠٦١١	٠,٢٠٣٢٧	٠,٢٠٠٤٥	٠,١٩٧٦٦	٠,١٩٤٨٩	٠,١٩٢١٥	٠,١٨٩٤٣	٠,١٨٦٧٣
-٠,٧	٠,٢٤١٩٦	٠,٢٣٨٨٥	٠,٢٣٥٧٦	٠,٢٣٢٧٠	٠,٢٢٩٦٥	٠,٢٢٦٦٣	٠,٢٢٣٦٣	٠,٢٢٠٦٥	٠,٢١٧٧٠	٠,٢١٤٧٦
-٠,٦	٠,٢٧٤٢٥	٠,٢٧٠٩٣	٠,٢٦٧٦٣	٠,٢٦٤٣٥	٠,٢٦١٠٩	٠,٢٥٧٨٥	٠,٢٥٤٦٣	٠,٢٥١٤٣	٠,٢٤٨٢٥	٠,٢٤٥١٠
-٠,٥	٠,٣٠٨٥٤	٠,٣٠٥٠٣	٠,٣٠١٥٣	٠,٢٩٨٠٦	٠,٢٩٤٦٠	٠,٢٩١١٦	٠,٢٨٧٧٤	٠,٢٨٤٣٤	٠,٢٨٠٩٦	٠,٢٧٧٦٠
-٠,٤	٠,٣٤٤٥٨	٠,٣٤٠٩٠	٠,٣٣٧٢٤	٠,٣٣٣٦٠	٠,٣٢٩٩٧	٠,٣٢٦٣٦	٠,٣٢٢٧٦	٠,٣١٩١٨	٠,٣١٥٦١	٠,٣١٢٠٧
-٠,٣	٠,٣٨٢٠٩	٠,٣٧٨٢٨	٠,٣٧٤٤٨	٠,٣٧٠٧٠	٠,٣٦٦٩٣	٠,٣٦٣١٧	٠,٣٥٩٤٢	٠,٣٥٥٦٩	٠,٣٥١٩٧	٠,٣٤٨٢٧
-٠,٢	٠,٤٢٠٧٤	٠,٤١٦٨٣	٠,٤١٢٩٤	٠,٤٠٩٠٥	٠,٤٠٥١٧	٠,٤٠١٢٩	٠,٣٩٧٤٣	٠,٣٩٣٥٨	٠,٣٨٩٧٤	٠,٣٨٥٩١
-٠,١	٠,٤٦٠١٧	٠,٤٥٦٢٠	٠,٤٥٢٢٤	٠,٤٤٨٢٨	٠,٤٤٤٣٣	٠,٤٤٠٣٨	٠,٤٣٦٤٤	٠,٤٣٢٥١	٠,٤٢٨٥٨	٠,٤٢٤٦٥
-٠,٠	٠,٥٠٠٠٠	٠,٤٩٦٠١	٠,٤٩٢٠٢	٠,٤٨٨٠٣	٠,٤٨٤٠٥	٠,٤٨٠٠٦	٠,٤٧٦٠٨	٠,٤٧٢١٠	٠,٤٦٨١٢	٠,٤٦٤١٤

جدول (٥)