الوحدة الثانية

الارتباط والانحدار

Correlation and Regression

مشروع الوحدة: ضغط الدم

١ **مقدمة المشروع:** يعتبر ضغط الدم عند الإنسان من أهم العوامل المؤثرة في حياة كل شخص. إن قياس ضغط الدم لجهة ارتفاعه أو انخفاضه عن معدله العام يساعد على المعالجة المبكرة وبالتالي التخفيف قدر الإمكان من حدوث النوبات القلبية المفاجئة. علمًا أن وزارة الصحة في دولة الكويت قد نبهت إلى عوارض ارتفاع ضغط الدم وخصوصًا لدى المسنين وأصحاب السمنة.

٢ **الهدف:** دراسة العلاقة بين وزن عدد من الأفراد (بالكيلوجرام) ومعدل ضغط الدم لديهم وذلك بتنفيذ ما يلي:

أ زيارة إحدى العيادات الطبية لتكوين جدول يبيّن وزن عدد من الأشخاص (ذكور) ومعدل ضغط الدم المقابل لكل وزن.

ب زيارة إحدى المستشفيات لتكوين جدول يبيّن وزن عدد من الأشخاص (إناث) ومعدل ضغط الدم المقابل لكل وزن.

٣ **اللوازم:** آلة حاسبة – ورق رسم بياني.

٤ **أسئلة حول التطبيق:**

أ كم عدد الأشخاص في العينة التي سوف تختارها في العيادة أو في المستشفى؟ احرص على أن يكون العدد نفسه في الحالتين.

ب مثّل على ورق رسم بياني مخطط انتشار لنتائج جدول العيادة وعلى ورق رسم بياني آخر مخطط انتشار لنتائج جدول المستشفى.

جـ هل يوجد لكل مخطط انتشار علاقة تصاعدية أو تنازلية بين الوزن ومعدل ضغط الدم؟ اشرح.

د من كل جدول لنأخذ ن (عدد الأشخاص)، س (الوزن)، ص (معدل ضغط الدم).

أوجد: $س^{٢}$، $\sum س^{٢}$، $ص^{٢}$، $\sum ص^{٢}$، $س ص$، $\sum س ص$، $\sum س$، $\sum ص$.

هـ لكل جدول استنتج قيمة ما يلي: $\frac{ن \sum س ص - \sum س \sum ص}{\sqrt{ن \sum س^{٢} - (\sum س)^{٢}} \sqrt{ن \sum ص^{٢} - (\sum ص)^{٢}}}$

و ماذا تلاحظ لكل قيمة وجدتها؟ اشرح.

٥ **التقرير:** اكتب تقريرًا مفصّلًا يوضّح النتائج التي توصلت إليها عارضًا اقتراحاتك ونصائحك عن علاقة الوزن بمعدل ضغط الدم. هل ترى أي ترابط بين كل مخطط انتشار والقيمة المقابلة التي وجدتها؟

دروس الوحدة

٢-١ الارتباط	٢-٢ الانحدار
(٢-١-أ) المخطط الانتشاري	
(٢-١-ب) معامل الارتباط الخطي	

الوحدة الثانية

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- التقدير بنقطة.
- التقدير بفترة ثقة.
- الفروض الإحصائية.
- الاختبارات الإحصائية.

ماذا سوف تتعلم؟

- الارتباط.
- مخطط الانتشار.
- مُعامل الارتباط (بيرسون).
- تحليل مُعامل الارتباط.
- الانحدار ومعادلته.
- توقع قيمة أحد المتغيرين.

المصطلحات الأساسية

الارتباط – مخطط الانتشار – مُعامل ارتباط بيرسون – ارتباط طردي (موجب) تام – ارتباط عكسي (سالب) تام – ارتباط منعدم – ارتباط طردي (موجب) قوي – ارتباط طردي (موجب) متوسط – ارتباط طردي (موجب) ضعيف – ارتباط عكسي (سالب) ضعيف – ارتباط عكسي (سالب) متوسط – ارتباط عكسي (سالب) قوي – الانحدار – معادلة خط الانحدار.

أضف إلى معلوماتك

يعتقد بعض الناس أنه بإمكانهم توقع طول العمر ومعرفته بالنظر إلى طول خط الحياة في كف يدهم. لكن إحدى الدراسات الطبّية أثبتت أنه لا وجود لرابط أو علاقة بين طول خط الحياة في كف الإنسان وطول عمره، وأن ما اعتقده ومازال يعتقده البعض عارٍ عن الصحة.

KuwaitMath.com

الارتباط

Correlation

سوف تتعلم

- مفهوم الارتباط.
- رسم مخطط الانتشار.
- إيجاد مُعامل ارتباط بيرسون.
- تحليل قيمة مُعامل الارتباط.
- توقع قيمة أحد المتغيرين.

دعنا نفكر ونتناقش

هل تساءلت يومًا: كيف تحسب العلاقة بين الطول والوزن؟

ما الذي يربط بين التدخين والإصابة بمرض السرطان؟

كيف نجد رابطًا بين وزن سيارة واستهلاكها للوقود؟

كيف يتغيّر سعر الذهب مع تغير قيمة الدولار الأمريكي؟

وما هي أفضل وسيلة للتقدير لنقترب من الحقيقة؟

الارتباط Correlation

من دراستنا السابقة تمّ عرض بعض المقاييس الإحصائية، مثل: مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي – الوسيط – المنوال) ومقاييس التشتت (المدى – التباين – الانحراف المعياري).

نلاحظ أن هذه المقاييس كانت تصف شكل البيانات التي تمّ جمعها من ظاهرة إحصائية واحدة أي من متغير واحد والذي يمكن الحصول عليه من العينة. بينما يقابلنا في حياتنا العملية مواقف كثيرة تتضمن متغيرين (ظاهرتين) أو أكثر ويكون تساؤلنا: هل هناك علاقة بين هذه المتغيرات؟ وما هو شكل هذه العلاقة؟ وأيضًا كيف يمكن التنبؤ بقيمة أحد هذين المتغيرين إذا علم قيمة المتغير الآخر؟ وكثيرًا ما يرى الباحثون ضرورة دراسة العلاقة بين متغيرين (ظاهرتين) كما يتضح من الأمثلة التالية:

- الطول والوزن.
- التدخين والإصابة بمرض السرطان.
- وزن سيارة واستهلاكها للوقود.
- الإنفاق والدخل.
- سعر السلعة والكمية المعروضة منها.
- العمر وضغط الدم.

والأمثلة في هذا المجال كثيرة ومتعددة، ولدراسة العلاقة بين هذه الظواهر ندرس ما يسمى الارتباط.

تعريف: الارتباط

هو العلاقة بين متغيرين.

KuwaitMath.com

سنرمز للمتغير الأول بالرمز «س»، وهو المتغير الذي يتم تحديده من قبل الباحث القائم بالدراسة ويسمى «بالمتغير المستقل».

ونرمز للمتغير الثاني بالرمز «ص»، وهذا المتغير غير مستقل بذاته لأن نتيجته مرتبطة بالمتغير المستقل ولذلك يسمى «بالمتغير التابع».

(٢-١-أ) المخطط الانتشاري Scatter Plot

تعريف: المخطط الانتشاري

هو عبارة عن تمثيل بياني لعدد من الأزواج المرتبة (س، ص) تستخدم لوصف العلاقة بين المتغيرين.

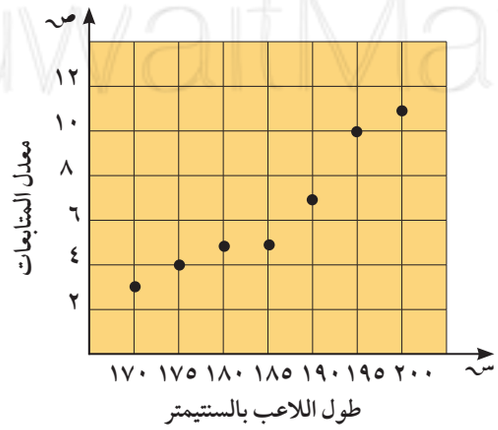
مثال (١)

الجدول التالي يوضح العلاقة بين طول اللاعب (س) ومعدّل المتابعات (ص)، لسبعة لاعبين في مباراة كرة السلة.

طول اللاعب (بالسنتيمتر) (س)	١٧٠	١٧٥	١٨٠	١٨٥	١٩٠	١٩٥	٢٠٠
معدل المتابعات (ص)	٣	٤	٥	٥	٧	١٠	١١

المطلوب: ارسم المخطط الانتشاري.

الحل:



حاول أن تحل

١ ارسم مخطط الانتشار الذي يوضّح البيانات التالية:

س	١٠٠	١١٠	١٢٠	١٣٠	١٤٠	١٦٠	١٧٠	١٨٠	١٩٠
ص	٢٢	٢٠	٢٠	١٩	١٨	١٧	١٥	١٦	١٤

KuwaitMath.com

أنواع الارتباط

١ ارتباط طردي (موجب):

هو علاقة بين متغيرين س، ص بحيث إذا تغير المتغير المستقل (س) فإن المتغير التابع (ص) يتبعه في نفس الاتجاه.

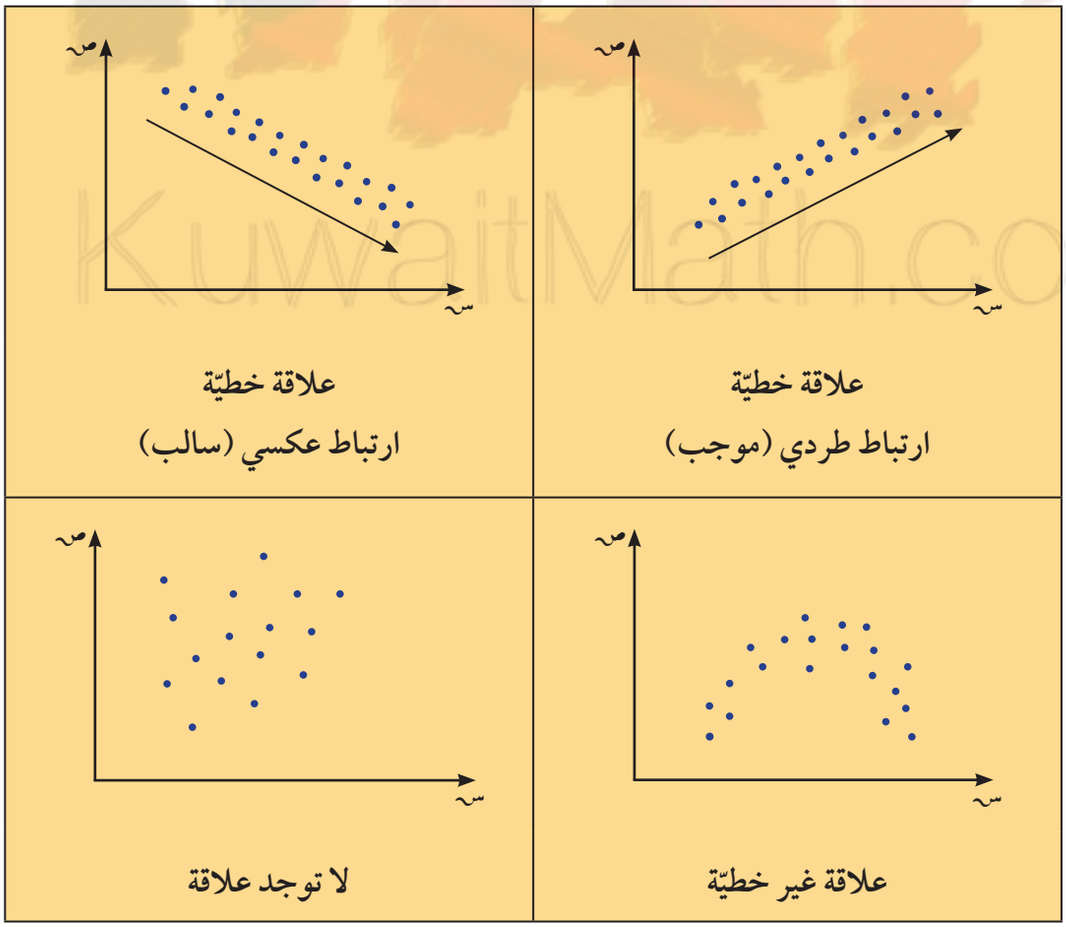
أي أنه كما زادت قيمة س تزداد تبعًا لها قيمة ص.

٢ ارتباط عكسي (سالب):

هو علاقة بين متغيرين س، ص بحيث إذا تغير المتغير المستقل (س) فإن المتغير التابع (ص) يتبعه في الاتجاه المضاد.

أي أنه كما زادت قيمة س تتناقص تبعًا لها قيمة ص.

بعض الأشكال التي توضّح أنواع الارتباط



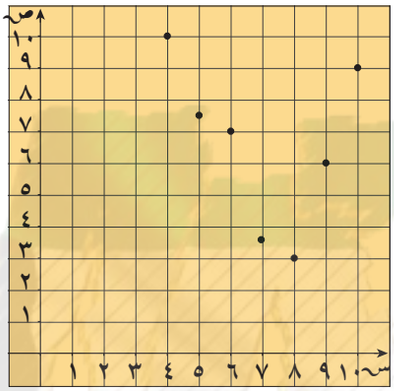
KuwaitMath.com

مثال (٢)

ارسم مخطط الانتشار للبيانات التالية وحدّد نوع العلاقة الّتي تعبّر عنها.

س	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ص	١٠	٧,٥	٧	٣,٥	٣	٦	٩

الحل:



لا توجد علاقة.

حاول أن تحل

٢ ارسم مخطط الانتشار للبيانات التالية وحدّد نوع العلاقة التي تعبّر عنها.

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
ص	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤

مثال (٣)

البيانات التالية تبيّن العلاقة بين عمر الشخص وعدد ساعات التمرينات الرياضية التي يقوم بها:

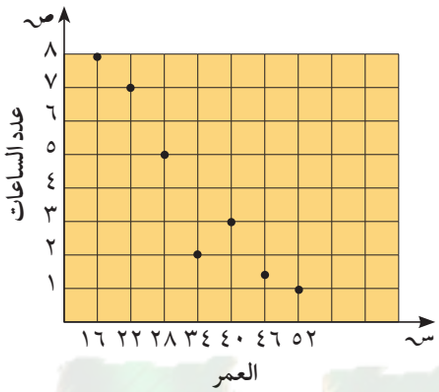
العمر (س)	١٦	٢٢	٢٨	٣٤	٤٠	٤٦	٥٢
عدد ساعات التمرينات (ص)	٨	٧	٥	٢	٣	١,٥	١

أ ارسم مخطط الانتشار.

ب حدّد نوع العلاقة.

الحل:

أ



ب من مخطط الانتشار نلاحظ أنه إذا زادت قيمة س

تتناقص تبعًا لها قيمة ص

∴ الارتباط عكسي (سالب)

العلاقة خطية

حاول أن تحل

٣ ارسم مخطط الانتشار للبيانات التالية وحدّد نوع العلاقة التي تعبر عنها:

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧
ص	٧	٥	٤	٣	٢	١

(٢–١–ب) مُعامل الارتباط الخطي Linear Correlation Coefficient

نعلم أن الاستنتاجات المبنيّة على المعاينات البصريّة لمخطط الانتشار هي نسبيّة بامتياز، لذا فنحن بحاجة إلى قياسات أكثر دقة وموضوعية بالتالي نستخدم مُعامل الارتباط الخطّي (ر).

تعريف: مُعامل الارتباط الخطّي (ر)

هو عبارة عن مقياس عددي لقوّة العلاقة بين متغيّرين يمثّلان بيانات كمّية،

حيث $-١ \leq ر \leq ١$.

خواص مُعامل الارتباط (ر)

١. $-١ \leq ر \leq ١$ أو $ر \in [-١ ، ١]$.

٢. إذا كانت ر = ١ يكون الارتباط طردي (موجب) تام.

٣. إذا كانت ر = -١ يكون الارتباط عكسي (سالب) تام.

٤. إذا كانت ر = ٠ ينعدم الارتباط.

٥. إذا كانت $ر \in [٠,٧ ، ١)$ يكون الارتباط طردي (موجب) قوي.

٦. إذا كانت $ر \in [٠,٥ ، ٠,٧)$ يكون الارتباط طردي (موجب) متوسط.

٧. إذا كانت $ر \in (٠ ، ٠,٥)$ يكون الارتباط طردي (موجب) ضعيف.

٨. إذا كانت $ر \in (-٠,٥ ، ٠)$ يكون الارتباط عكسي (سالب) ضعيف.

٩. إذا كانت $ر \in (-٠,٧ ، -٠,٥]$ يكون الارتباط عكسي (سالب) متوسط.

١٠. إذا كانت $ر \in (-١ ، -٠,٧]$ يكون الارتباط عكسي (سالب) قوي.

مُعامل ارتباط بيرسون Pearson Correlation Coefficient

$$ر = \frac{\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{ن ع_{سـ} ع_{صـ}}$$ حيث:

$$ع_{سـ} = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^{٢}}{ن}}$$ حيث $ع_{سـ}$ (الانحراف المعياري للمتغير سـ)

$$ع_{صـ} = \sqrt{\frac{\sum (ص - \overline{ص})^{٢}}{ن}}$$ حيث $ع_{صـ}$ (الانحراف المعياري للمتغير صـ)

$$ر = \frac{\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{\sqrt{\sum (س - \overline{س})^{٢}} \sqrt{\sum (ص - \overline{ص})^{٢}}}$$

KuwaitMath.com

مثال (٤)

من الجدول المقابل:

س	٧	٤	٢	١	١
ص	٢٣	١٥	٨	٥	٤

أ أوجد مُعامل الارتباط ر.

ب حدّد نوع وقوة الارتباط.

الحل:

أ مُعامل الارتباط:

$$ر = \frac{\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{\sqrt{\sum (س - \overline{س})^{٢}} \sqrt{\sum (ص - \overline{ص})^{٢}}}$$

س	ص	س − $\overline{س}$	ص − $\overline{ص}$	(س − $\overline{س}$)^{٢}	(ص − $\overline{ص}$)^{٢}	(س − $\overline{س}$)(ص − $\overline{ص}$)
٧	٢٣	٤	١٢	١٦	١٤٤	٤٨
٤	١٥	١	٤	١	١٦	٤
٢	٨	−١	−٣	١	٩	٣
١	٥	−٢	−٦	٤	٣٦	١٢
١	٤	−٢	−٧	٤	٤٩	١٤
المجموع	$\sum$ س = ١٥	$\sum$ ص = ٥٥		$\sum$(س − $\overline{س}$)^{٢} = ٢٦	$\sum$(ص − $\overline{ص}$)^{٢} = ٢٥٤	$\sum$(س − $\overline{س}$)(ص − $\overline{ص}$) = ٨١

$$\because \overline{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{١٥}{٥} = ٣ \quad ، \quad \overline{ص} = \frac{\sum ص}{ن} = \frac{٥٥}{٥} = ١١$$

$$\therefore \text{مُعامل الارتباط} = \frac{٨١}{\sqrt{٢٦} \times \sqrt{٢٥٤}} \approx ٠,٩٩٦٨$$

ب نوع الارتباط: طردي موجب قوي.

حاول أن تحل

٤ يبيّن الجدول التالي العلاقة بين وزن مولود جديد وطوله خلال فترة محددة من الزمن.

الوزن (كجم)	٢,١	٢,٩	٣,٢	٣,٨	٤,١
الطول (سم)	٥٨	٦٥	٦٨	٧١	٧٥

أ أوجد مُعامل الارتباط ر.

ب حدّد نوع وقوة الارتباط.

KuwaitMath.com

مثال (٥)

أوجد مُعامل الارتباط ر وحدّد نوعه وقوته للمتغيرين س ، ص حيث :

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١	−١	−٤	−٦	−٥

الحل:

$$\text{مُعامل الارتباط: } ر = \frac{\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{\sqrt{\sum (س - \overline{س})^{٢}} \sqrt{\sum (ص - \overline{ص})^{٢}}}$$

س	ص	س − $\overline{س}$	ص − $\overline{ص}$	(س − $\overline{س}$)^{٢}	(ص − $\overline{ص}$)^{٢}	(س − $\overline{س}$)(ص − $\overline{ص}$)
١	١	−٢	٤	٤	١٦	−٨
٢	−١	−١	٢	١	٤	−٢
٣	−٤	٠	−١	٠	١	٠
٤	−٦	١	−٣	١	٩	−٣
٥	−٥	٢	−٢	٤	٤	−٤
المجموع	$\sum$ س = ١٥	$\sum$ ص = −١٥		$\sum$(س − $\overline{س}$)^{٢} = ١٠	$\sum$(ص − $\overline{ص}$)^{٢} = ٣٤	$\sum$(س − $\overline{س}$)(ص − $\overline{ص}$) = −١٧

$$\because \overline{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{١٥}{٥} = ٣ \ ، \ \overline{ص} = \frac{\sum ص}{ن} = \frac{-١٥}{٥} = -٣$$

$$\therefore \text{ مُعامل الارتباط: } ر = \frac{-١٧}{\sqrt{١٠} \times \sqrt{٣٤}} \approx -٠,٩٢٢٠$$

نوع الارتباط: عكسي سالب قوي.

حاول أن تحل

٥ أوجد مُعامل الارتباط ر وحدد نوعه وقوته للمتغيرين س ، ص حيث:

س	٨	١٠	٦	٤	١٥	١٣	٥	١١	٩
ص	١٥٠	١٦٠	١٥٠	١٣٠	١٦٠	١٨٠	١٢٠	١٦٠	١٥٠

KuwaitMath.com

مثال (٦)

احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وحدّد نوعه وقوته.

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	٣	٥	٧	٩	١١

الحل:

مُعامل الارتباط: $ر = \frac{\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{\sqrt{\sum (س - \overline{س})^2} \times \sqrt{\sum (ص - \overline{ص})^2}}$

س	ص	$س - \overline{س}$	$ص - \overline{ص}$	$(س - \overline{س})^2$	$(ص - \overline{ص})^2$	$(س - \overline{س})(ص - \overline{ص})$
١	٣	-٢	-٤	٤	١٦	٨
٢	٥	-١	-٢	١	٤	٢
٣	٧	٠	٠	٠	٠	٠
٤	٩	١	٢	١	٤	٢
٥	١١	٢	٤	٤	١٦	٨
المجموع	$\sum س = ١٥$		$\sum ص = ٣٥$		$\sum (س - \overline{س})^2 = ١٠$	$\sum (ص - \overline{ص})^2 = ٤٠$	$\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص}) = ٢٠$

$\overline{س} = \frac{\sum س}{ن} = ٣$ ، $\overline{ص} = \frac{\sum ص}{ن} = ٧$

$\therefore ر = \frac{٢٠}{\sqrt{١٠} \times \sqrt{٤٠}}$

$= ١$

نوع الارتباط: طردي (موجب) تام.

حاول أن تحل

٦ احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وحدّد نوعه وقوته.

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	٤	٣	٢	١	٠

KuwaitMath.com

صيغة أخرى لمعامل ارتباط بيرسون

$$ر = \frac{ن\,(\sum س\,ص) - (\sum س)(\sum ص)}{\sqrt{ن\,(\sum س^{٢}) - (\sum س)^{٢}}\ \sqrt{ن\,(\sum ص^{٢}) - (\sum ص)^{٢}}}$$

مثال (٧)

يبيّن الجدول التالي العلاقة بين أطوال عدد من الدببة وأوزانها، وذلك ضمن فترة محددة من أعمارها.

الطول (سم)	١٣٥	١٧٠	١٨٠	١٨٢	١٨٧	١٧٤	١٨٥	٩٤
الوزن (كجم)	٣٦	١٥٦	١٨٨	١٥٨	١١٩	١٦٣	١٥٠	١٥

استخدم الجدول أعلاه لإيجاد مُعامل الارتباط الخطي ر والذي يحدّد العلاقة بين أطوال الدببة وأوزانها ثم بيّن نوعه وقوته.

الحل:

$$ر = \frac{ن\,(\sum س\,ص) - (\sum س)(\sum ص)}{\sqrt{ن\,(\sum س^{٢}) - (\sum س)^{٢}}\ \sqrt{ن\,(\sum ص^{٢}) - (\sum ص)^{٢}}}$$

	س (الطول)	ص (الوزن)	س ص	س^{٢}	ص^{٢}
	١٣٥	٣٦	٤ ٨٦٠	١٨ ٢٢٥	١ ٢٩٦
	١٧٠	١٥٦	٢٦ ٥٢٠	٢٨ ٩٠٠	٢٤ ٣٣٦
	١٨٠	١٨٨	٣٣ ٨٤٠	٣٢ ٤٠٠	٣٥ ٣٤٤
	١٨٢	١٥٨	٢٨ ٧٥٦	٣٣ ١٢٤	٢٤ ٩٦٤
	١٨٧	١١٩	٢٢ ٢٥٣	٣٤ ٩٦٩	١٤ ١٦١
	١٧٤	١٦٣	٢٨ ٣٦٢	٣٠ ٢٧٦	٢٦ ٥٦٩
	١٨٥	١٥٠	٢٧ ٧٥٠	٣٤ ٢٢٥	٢٢ ٥٠٠
	٩٤	١٥	١ ٤١٠	٨ ٨٣٦	٢٢٥
المجموع	∑ س = ١٣٠٧	∑ ص = ٩٨٥	∑ س ص = ١٧٣ ٧٥١	∑ س^{٢} = ٢٢٠ ٩٥٥	∑ ص^{٢} = ١٤٩٣٩٥

$$ر = \frac{٨\,(١٧٣٧٥١) - (١٣٠٧)\,(٩٨٥)}{\sqrt{٨\,(٢٢٠٩٥٥) - (١٣٠٧)^{٢}}\ \sqrt{٨\,(١٤٩٣٩٥) - (٩٨٥)^{٢}}}$$

$$ر = \frac{١٠٢\,٦١٣}{١١٥\,٥٨٢}$$

$$ر \approx ٠,٨٨٧٨$$

نوع الارتباط: طردي (موجب) قوي.

حاول أن تحل

٧ من الجدول التالي احسب مُعامل الارتباط الخطي وبيّن نوعه وقوته.

س	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص	٥٩	٦٥	٧٠	٧٢	٨٠	٥٢

مثال (٨)

احسب مُعامل الارتباط الخطي للمتغيرين التاليين وبيّن نوعه وقوته.

س	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص	٤	٧	٨	٣	٥	٥

الحل:

$$ر = \frac{ن\,(\sum س ص) - (\sum س)\,(\sum ص)}{\sqrt{ن\,(\sum س^{٢}) - (\sum س)^{٢}}\ \sqrt{ن\,(\sum ص^{٢}) - (\sum ص)^{٢}}}$$

	س	ص	س ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$
	١	٤	٤	١	١٦
	٢	٧	١٤	٤	٤٩
	٣	٨	٢٤	٩	٦٤
	٤	٣	١٢	١٦	٩
	٥	٥	٢٥	٢٥	٢٥
	٦	٥	٣٠	٣٦	٢٥
المجموع	$\sum س = ٢١$	$\sum ص = ٣٢$	$\sum س ص = ١٠٩$	$\sum س^{٢} = ٩١$	$\sum ص^{٢} = ١٨٨$

KuwaitMath.com

$$ر = \frac{٦ \times ١٠٩ - ٢١ \times ٣٢}{\sqrt{٦ \times ٩١ - (٢١)^{٢}} \sqrt{٦ \times ١٨٨ - (٣٢)^{٢}}}$$

$$ر = \frac{-١٨}{\sqrt{١٠٥} \times \sqrt{١٠٤}}$$

$$ر \approx -٠,١٧٢٣$$

نوع الارتباط: عكسي (سالب) ضعيف.

حاول أن تحل

٨ احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وبيّن نوعه وقوته:

س	٢	٣	٤	٤	٥	٦
ص	٩٨	٩٩	٧٥	٤٠	١٠٠	١٥٠

مثال (٩)

احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وبيّن نوعه وقوته.

س	٨	١٥	١٠	١٤	٩	١٢	١٣	١١
ص	٨	١	٦	٢	٧	٤	٣	٥

الحل:

$$ر = \frac{ن (\sum س ص) - (\sum س)(\sum ص)}{\sqrt{ن (\sum س^{٢}) - (\sum س)^{٢}} \sqrt{ن (\sum ص^{٢}) - (\sum ص)^{٢}}}$$

	س	ص	س ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$
	٨	٨	٦٤	٦٤	٦٤
	١٥	١	١٥	٢٢٥	١
	١٠	٦	٦٠	١٠٠	٣٦
	١٤	٢	٢٨	١٩٦	٤
	٩	٧	٦٣	٨١	٤٩
	١٢	٤	٤٨	١٤٤	١٦
	١٣	٣	٣٩	١٦٩	٩
	١١	٥	٥٥	١٢١	٢٥
المجموع	$\sum س = ٩٢$	$\sum ص = ٣٦$	$\sum س ص = ٣٧٢$	$\sum س^{٢} = ١١٠٠$	$\sum ص^{٢} = ٢٠٤$

Kuwaitone.com

$$ر = \frac{٨ \times ٣٧٢ - ٣٦ \times ٩٢}{\sqrt{٨ \times ١١٠٠ - (٩٢)^{٢}} \times \sqrt{٨ \times ٢٠٤ - (٣٦)^{٢}}}$$

$$ر = \frac{-٣٣٦}{\sqrt{٣٣٦} \times \sqrt{٣٣٦}}$$

$$ر = \frac{-٣٣٦}{٣٣٦}$$

$$ر = -١$$

نوع الارتباط: عكسي (سالب) تام

حاول أن تحل

٩ احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وبيّن نوعه وقوته.

س	٨	٥	١١	٧	٩	١٢	٦
ص	٤	١	٧	٣	٥	٨	٢

مثال (١٠)

في ما يلي درجات عدد من الطلاب في مادتي الإحصاء (س) والتاريخ (ص)

الإحصاء (س)	٥	١٠	٦	١٥	١١	١٣	١٧	١٢
التاريخ (ص)	١٧	١٧	١٥	٩	١٠	١٠	٦	١٢

أ أوجد مُعامل الارتباط ر.

ب حدّد نوع وقوة الارتباط.

الحل:

أ $ر = \frac{ن(\sum س ص) - (\sum س)(\sum ص)}{\sqrt{ن(\sum س^{٢}) - (\sum س)^{٢}} \times \sqrt{ن(\sum ص^{٢}) - (\sum ص)^{٢}}}$

	س	ص	س ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$
	٥	١٧	٨٥	٢٥	٢٨٩
	١٠	١٧	١٧٠	١٠٠	٢٨٩
	٦	١٥	٩٠	٣٦	٢٢٥
	١٥	٩	١٣٥	٢٢٥	٨١
	١١	١٠	١١٠	١٢١	١٠٠
	١٣	١٠	١٣٠	١٦٩	١٠٠
	١٧	٦	١٠٢	٢٨٩	٣٦
	١٢	١٢	١٤٤	١٤٤	١٤٤
المجموع	$\sum س = ٨٩$	$\sum ص = ٩٦$	$\sum س ص = ٩٦٦$	$\sum س^{٢} = ١١٠٩$	$\sum ص^{٢} = ١٢٦٤$

$$ر = \frac{٨(٩٦٦) - (٨٩)(٩٦)}{\sqrt{٨(١١٠٩) - (٨٩)^{٢}} \times \sqrt{٨(١٢٦٤) - (٩٦)^{٢}}}$$

$$ر = \frac{٧٧٢٨ - ٨٥٤٤}{\sqrt{٩٥١} \times \sqrt{٨٩٦}} = \frac{-٨١٦}{\sqrt{٩٥١} \times \sqrt{٨٩٦}}$$

$ر \approx -٠,٨٨٤٠$

ب نوع الارتباط: عكسي (سالب) قوي.

حاول أن تحل

١٠ أوجد مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وحدّد نوعه وقوته.

س	١	٣	٨	٧	٦	٥	٧	٨
ص	١٩	١٦	١٦	١٩	١٨	١٧	١١	٩

KuwaitMath.com

الانحدار

Regression

سوف تتعلم

- إيجاد معادلة خط الانحدار.
- التقدير باستخدام معادلة خط الانحدار.
- إيجاد مقدار الخطأ.

دعنا نفكر ونتناقش

في الجدول التالي قيم لمتغيّرين: طول الأم (س)
وطول ابنتها (ص) بالسنتيمتر.

طول الأم (س)	١٦٠	١٦٨	١٦٩	١٦٤	١٧٤	١٦١	١٦٦	١٥٨
طول الابنة (ص)	١٥٨	١٦٧	١٧٠	١٦٣	١٧١	١٦٥	١٧٢	١٥٧

لدينا ر ≈ ٠,٨٤٤، إذًا يوجد علاقة خطيّة طرديّة قوية بين طول الأم وطول ابنتها.

أضفنا زوج المتغيرين ($\overline{س}$ ، $\overline{ص}$) = (١٦٥، ١٦٥,٣٧٥) إلى الجدول حيث $\overline{س}$ = ١٦٥ هو المتوسط الحسابي لأطوال الأمهات، $\overline{ص}$ = ١٦٥,٣٧٥ هو المتوسط الحسابي لأطوال البنات فلاحظنا أن قيمة ر لم تتغير.

نريد أن نقدّر طول الابنة من خلال العلاقة مع طول أمها، لذا افترضنا زوج المتغيرين (١٥٠، ١٧٠) وأضفناه إلى الجدول.

- هل يتوافق زوج المتغيرين الذي أضفناه مع الجدول علمًا أنّ قيمة ر تصبح ٠,٢١٦؟
- هل يمكن التنبؤ بقيمة إحدى الظاهرتين إذا علمت قيمة الظاهرة الأخرى؟ وكيف؟

الانحدار Regression

لقد تعلمنا في الدرس السابق مفهوم الارتباط والارتباط الخطي، وعرفنا كيف يمكن حساب قيمة مُعامل الارتباط الخطي بين متغيرين، وعليه تمّ تحديد قوة العلاقة الخطية بين المتغيرين ونوع هذه العلاقة فيما إذا كانت طردية أم عكسية.

وفي هذا الدرس سوف نتعلّم وصف العلاقة بين متغيّرين بإيجاد معادلة الخط المستقيم الممثّل لهذه العلاقة.

يسمّى هذا الخط المستقيم بخط الانحدار، وتسمّى معادلته بمعادلة خط الانحدار.

تعريف: الانحدار

هو وصف العلاقة بين متغيرين.

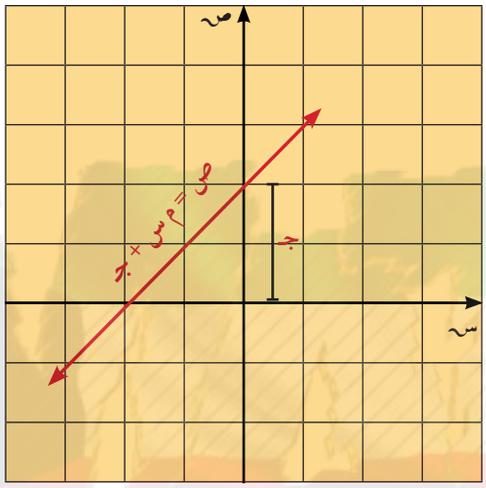
KuwaitMath.com

معادلة خط الانحدار Equation of Linear Regression

تعريف: معادلة خط الانحدار

هي المعادلة الخطية التي يمكن من خلالها التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين إذا علمت قيمة المتغير الآخر.

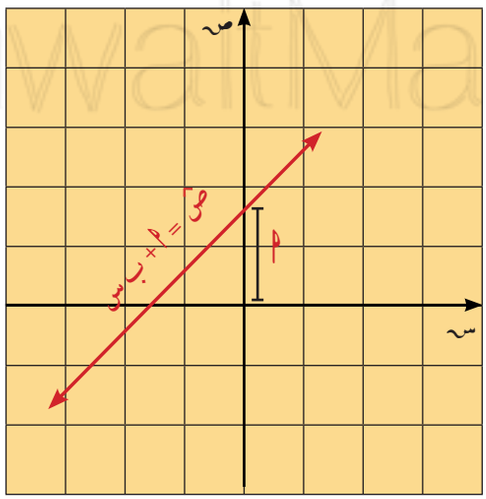
سبق لنا دراسة معادلة الخط المستقيم على الصورة: ص = م س + جـ، حيث م ترمز إلى ميل هذا المستقيم، |جـ| ترمز إلى طول الجزء المقطوع من محور الصادات.



شكل (١)

أما في الإحصاء معادلة خط انحدار مستقيم تكتب على الصورة:

$\hat{ص} = أ + ب س$، حيث |أ| ترمز إلى طول الجزء المقطوع من محور الصادات، ب ترمز إلى ميل المستقيم.



شكل (٢)

حيث: $ب = \frac{ن(\sum س ص) - (\sum س)(\sum ص)}{ن(\sum س^{٢}) - (\sum س)^{٢}}$

$أ = \overline{ص} - ب\,\overline{س}$

حيث: $\overline{ص} = \frac{\sum ص}{ن}$ ، $\overline{س} = \frac{\sum س}{ن}$

KuwaitMath.com

خطوات إيجاد معادلة خط الانحدار: $\hat{ص} = أ + ب\ س$

١ تعيين قيمة ب

٢ تعيين قيمة أ

٣ نكتب معادلة خط الانحدار: $\hat{ص} = أ + ب\ س$

٤ التنبؤ بقيمة ص إذا علمت قيمة س

٥ تحديد مقدار الخطأ في التنبؤ.

مقدار الخطأ = |القيمة الجدولية – القيمة التي تحقق معادلة الانحدار|

$= |ص_س - \hat{ص}_س|$

مثال (١)

سقطت كرة من ارتفاع ٥٠ مترًا، وتمّ تسجيل المسافات (بالمتر) التي قطعتها هذه الكرة كل ٠,٥ ثانية لمدة ثلاث ثوان.

فأتت النتائج كما يوضح الجدول التالي:

الوقت (س)	٠	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥	٣
المسافة (ص)	٠	١,٢	٤,٩	١١	١٩,٥	٣٠,٥	٤٤

أ أوجد معادلة خط الانحدار.

ب قدّر قيمة المسافة ص عندما س = ٤

جـ أوجد مقدار الخطأ في المسافة عندما س = ٢,٥ ثانية.

الحل:

$$ب = \frac{ن\ (\sum س ص) - (\sum س)(\sum ص)}{ن\ (\sum س^{٢}) - (\sum س)^{٢}}$$

أ

س	ص	س ص	$س^{٢}$
٠	٠	٠	٠
٠,٥	١,٢	٠,٦	٠,٢٥
١	٤,٩	٤,٩	١
١,٥	١١	١٦,٥	٢,٢٥
٢	١٩,٥	٣٩	٤
٢,٥	٣٠,٥	٧٦,٢٥	٦,٢٥
٣	٤٤	١٣٢	٩
المجموع	$\sum س = ١٠,٥$	$\sum ص = ١١١,١$	$\sum س ص = ٢٦٩,٢٥$	$\sum س^{٢} = ٢٢,٧٥$

$$ن = ٧ ،\ \overline{س} = \frac{١٠,٥}{٧} = ١,٥ ،\ \overline{ص} = \frac{١١١,١}{٧} = ١٥,٨٧١٤$$

$$ب = \frac{٧ \times ٢٦٩,٢٥ - ١٠,٥ \times ١١١,١}{٧ \times ٢٢,٧٥ - (١٠,٥)^{٢}}$$

$$ب = \frac{٧١٨,٢}{٤٩}$$

$$ب \approx ١٤,٦٥٧١$$

$$أ = \overline{ص} - ب\ \overline{س}$$

$$= ١٥,٨٧١٤ - ١٤,٦٥٧١ \times ١,٥$$

$$\approx -٦,١١٤٣$$

معادلة خط الانحدار هي: $\hat{ص} = -٦,١١٤٣ + ١٤,٦٥٧١$ س

ب ∵ $\hat{ص} = -٦,١١٤٣ + ١٤,٦٥٧١$ س

∴ المسافة ص عندما س = ٤ هي:

$\hat{ص}_{٤} = -٦,١١٤٣ + ١٤,٦٥٧١ \times ٤$

$\approx ٥٢,٥١٤١$ مترًا.

KuwaitMath.com

جـ عند س = ٢,٥ ثانية من المعادلة $\hat{ص}$ = −٦,١١٤٣ + ١٤,٦٥٧١ س

نجد أن $\hat{ص}_{س=٢,٥}$ = −٦,١١٤٣ + ١٤,٦٥٧١ × ٢,٥

≈ ٣٠,٥٢٨٥

من الجدول عند س = ٢,٥ ثانية نجد أن ص = ٣٠,٥

∴ مقدار الخطأ = $|ص_{س} - \hat{ص}_{س}|$

= |٣٠,٥ − ٣٠,٥٢٨٥|

= ٠,٠٢٨٥

حاول أن تحل

١ في الجدول التالي: المتغير س هو تكلفة إنتاج فيلم سينمائي (بملايين الدولارات) والمتغيّر ص هو مردود هذا الفيلم.

التكلفة (س)	٦٢	٩٠	٥٠	٣٥	٢٠٠	١٠٠	٩٥
المردود (ص)	٦٥	٦٤	٤٨	٥٧	٦٠١	١٤٦	٤٧

أ أوجد معادلة خط الانحدار.

ب قدّر مردود فيلم بلغت تكلفته ٥٥ مليون دولار.

جـ أوجد مقدار الخطأ لفيلم بلغت تكلفته ٩٠ مليون دولار.

مثال (٢)

من الجدول التالي:

س	٤٣	٤٨	٥٦	٦١	٦٧	٧٠
ص	١٢٨	١٢٠	١٣٥	١٤٣	١٤١	١٥٢

أوجد:

أ معادلة خط الانحدار.

ب قيمة ص عندما س = ٥٢

جـ مقدار الخطأ عندما س = ٦٧

KuwaitMath.com

الحل:

$$ب = \frac{ن(\sum س ص) - (\sum س)(\sum ص)}{ن(\sum س^{٢}) - (\sum س)^{٢}}$$

أ

س	ص	س ص	$س^{٢}$
٤٣	١٢٨	٥٥٠٤	١٨٤٩
٤٨	١٢٠	٥٧٦٠	٢٣٠٤
٥٦	١٣٥	٧٥٦٠	٣١٣٦
٦١	١٤٣	٨٧٢٣	٣٧٢١
٦٧	١٤١	٩٤٤٧	٤٤٨٩
٧٠	١٥٢	١٠٦٤٠	٤٩٠٠
المجموع	$\sum س = ٣٤٥$	$\sum ص = ٨١٩$	$\sum س ص = ٤٧٦٣٤$	$\sum س^{٢} = ٢٠٣٩٩$

$ن = ٦$ ، $\overline{س} = \frac{٣٤٥}{٦} = ٥٧,٥$ ، $\overline{ص} = \frac{٨١٩}{٦} = ١٣٦,٥$

$$ب = \frac{٦ \times ٤٧٦٣٤ - ٨١٩ \times ٣٤٥}{٦ \times ٢٠٣٩٩ - (٣٤٥)^{٢}}$$

$\approx ٠,٩٦٤٤$

$أ = \overline{ص} - ب\overline{س}$

$= ١٣٦,٥ - ٠,٩٦٤٤ \times ٥٧,٥$

$= ٨١,٠٤٧٠$

∴ معادلة خط الانحدار هي: $\hat{ص} = ٨١,٠٤٧٠ + ٠,٩٦٤٤ س$

ب عندما س = ٥٢

$\hat{ص} = ٨١,٠٤٧٠ + ٠,٩٦٤٤ \times ٥٢$

$\approx ١٣١,١٩٥٨$

جـ من الجدول عند س = ٦٧ نوجد ص = ١٤١

$\hat{ص}_{٦٧} = ٨١,٠٤٧٠ + ٠,٩٦٤٤ \times ٦٧$

$\approx ١٤٥,٦٦١٨$

KuwaitMath.com

∴ مقدار الخطأ = $|ص_س - \hat{ص}_س|$

$= |١٤١ - ١٤٥,٦٦١٨| = ٤,٦٦١٨$

حاول أن تحل

٢ من الجدول التالي:

س	١٨٠	٢٠٥	١٩٧	١٩٢	١٨٩	٢٠٣	١٩٧	١٨٤
ص	٨٥	١١٧	٨٢	٩٧	٩٢	٨٠	١١٠	١٢٢

أوجد:

أ معادلة خط الانحدار.

ب قيمة ص عندما س = ٢٠٠

جـ مقدار الخطأ عندما س = ١٩٢

مثال (٣)

باستخدام البيانات التالية لقيم س ، ص.

س	١	٣	٥	٧	٩
ص	٢	٥	٩	١٠	١٤

أوجد:

أ معادلة خط الانحدار.

ب قيمة ص عندما س = ١٠

جـ مقدار الخطأ عندما س = ٥

الحل: $ب = \frac{ن(\sum س ص) - (\sum س)(\sum ص)}{ن(\sum س^٢) - (\sum س)^٢}$

أ

	س	ص	س ص	$س^٢$
	١	٢	٢	١
	٣	٥	١٥	٩
	٥	٩	٤٥	٢٥
	٧	١٠	٧٠	٤٩
	٩	١٤	١٢٦	٨١
المجموع	$\sum س = ٢٥$	$\sum ص = ٤٠$	$\sum س ص = ٢٥٦$	$\sum س^٢ = ١٦٥$

ن = ٥ ، $\overline{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$ ، $\overline{ص} = \frac{\sum ص}{ن} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$

$ب = \frac{٥ \times ٢٥٦ - ٤٠ \times ٢٥}{٥ \times ١٦٥ - ٢٥ \times ٢٥} = ١,٤$

$أ = \overline{ص} - ب \overline{س}$

$= ٨ - ١,٤ \times ٥$

$= ١$

∴ معادلة خط الانحدار هي: $\hat{ص} = أ + ب س$

$\hat{ص} = ١ + ١,٤ س$

ب عندما س = ١٠ فإن:

ص = ١ + ١,٤ × ١٠ = ١٥

جـ من الجدول ص = ٩

من المعادلة $\hat{ص} = ١ + ١,٤ \times ٥ = ٨$

∴ مقدار الخطأ = $|ص_٥ - \hat{ص}_٥|$

$= |٩ - ٨| = ١$

حاول أن تحل

٣ من الجدول التالي:

س	٤	٥	٨	٩	١٠	١٢
ص	٢	٤	٥	٨	٦	١١

أوجد:

أ معادلة خط الانحدار.

ب قيمة ص عندما س = ١٠

جـ أوجد مقدار الخطأ عندما س = ١٠

KuwaitMath.com

المرشد لحل المسائل

في متجر للأدوات الكهربائية، تختلف أسعار آلات التصوير الرقميّة بحسب نقاوة صورتها التي تقاس بالميغابيكسل.
يوضّح الجدول التالي أسعار إحدى هذه الآلات ومدى نقاوة صورتها:

(س) نقاوة الصورة بالميغابيكسل	٥	٨	١٠	١٤	١٦	١٨
(ص) السعر بالدينار الكويتي	٢٥	٣٥	٥٠	٨٥	١٢٠	١٤٠

أراد جاسم تقدير سعر آلة نقاوتها ٢٠ ميغابيكسل، علمًا أنّه سمع من صاحب المتجر أنّه يوجد علاقة بين السعر والنقاوة.

فكّر جاسم:

إذا رسمت مخطط الانتشار للأسعار والنقاوة، أتعرّف على طبيعة هذه العلاقة.

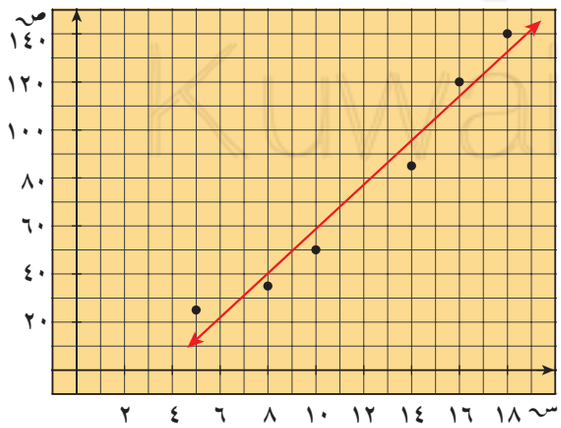
فلاحظ أن هذه العلاقة هي خطيّة طرديّة، لذا أراد إيجاد قيمة مُعامل الارتباط الخطي ومعادلة خط الانحدار.

أوجد القيم التالية التي ستساعده على ذلك:

ن = ٦ ، $\sum$ س = ٧١ ، $\sum$ ص = ٤٥٥ ، $\sum$ س ص = ٦٥٣٥ ،

$\sum$ س^{٢} = ٩٦٥ ، $\sum$ ص^{٢} = ٤٥٥٧٥ ، ($\sum$ س)^{٢} = ٥٠٤١ ، ($\sum$ ص)^{٢} = ٢٠٧٠٢٥ ،

$\overline{س}$ = ٨,١١ ، $\overline{ص}$ = ٨,٧٥



قيمة مُعامل الارتباط الخطي ر ≈ ٠,٩٧٨٨، وهذا يدلّ على علاقة خطيّة قويّة بين السعر والنقاوة.

معادلة خط الانحدار: $\hat{ص}$ = −٣٣ + ٩,٢٢ س

لتقدير سعر آلة مع ٢٠ ميغابيكسل، نعوّض س = ٢٠

ونحصل على $\hat{ص}$ ≈ ١٥١ دينارًا كويتيًّا.

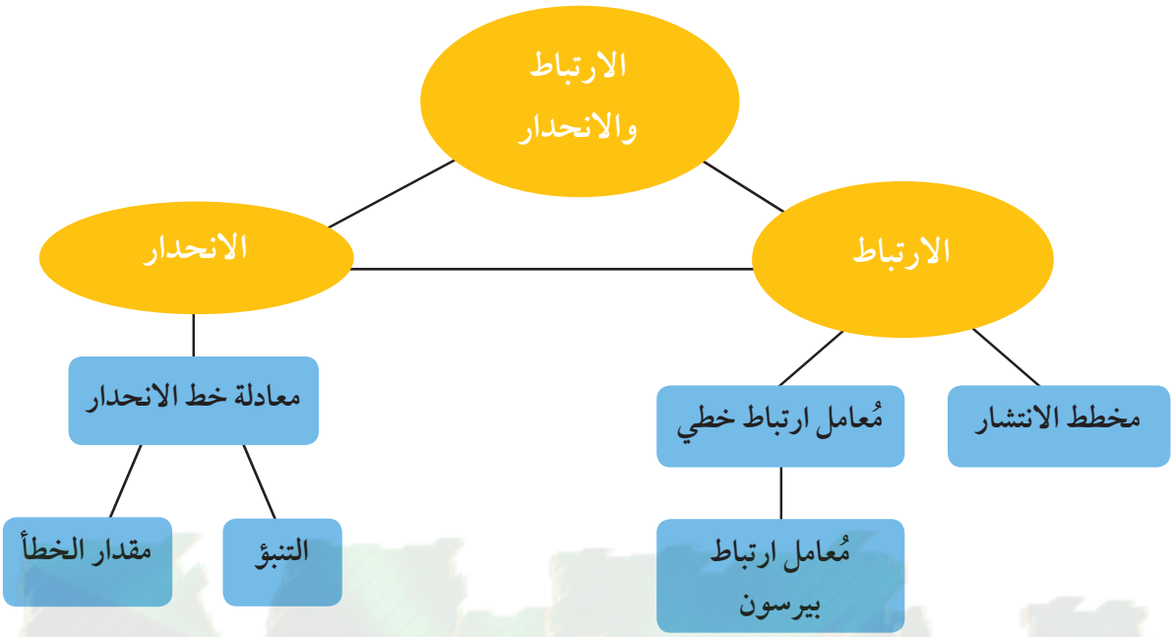
مسألة إضافية

أجري في المتجر نفسه تخفيض على الأسعار بنسبة ١٥٪.

برأيك، كيف يتغير تقدير جاسم؟ أعد الحل مستخدمًا السعر المخفّض للتأكّد من إجابتك.

(**ملاحظة**: استخدم الجدول نفسه من المسألة السابقة إنّما بتخفيض قدره ١٥٪ على الأسعار)

مخطط تنظيمي للوحدة الثانية



ملخص

- الارتباط هو طريقة إحصائية يمكن من خلالها تحديد العلاقة بين متغيرين.
- مخطط الانتشار هو شكل بياني لعدد من الأزواج المرتبة (س، ص) يستخدم لوصف العلاقة الموجودة بين متغيرين.
- العلاقة بين متغيّرين تكون:
  - علاقة خطيّة طردية: تنتشر النقاط على جانبي خط مستقيم تصاعديّ.
  - علاقة خطيّة عكسيّة: تنتشر النقاط على جانبي خط مستقيم تنازليّ.
  - علاقة غير خطيّة: تنتشر النقاط على جانبي خط منحن.
  - لا توجد علاقة: لا يوجد نمط محدد لانتشار النقاط في الشكل البياني.
- مُعامل الارتباط الخطي يقيس قوة العلاقة الخطيّة بين متغيرين متصلين ونوعها،

$$ر = \frac{ن \Sigma س ص - \Sigma س \Sigma ص}{\sqrt{ن \Sigma س^{٢} - (\Sigma س)^{٢}} \sqrt{ن \Sigma ص^{٢} - (\Sigma ص)^{٢}}} \quad \text{أو} \quad ر = \frac{\Sigma (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{\sqrt{\Sigma (س - \overline{س})^{٢}} \sqrt{\Sigma (ص - \overline{ص})^{٢}}}$$

- الانحدار هو طريقة إحصائية تستخدم لوصف طبيعة العلاقة بين متغيرين س ، ص من حيث كونها خطيّة أو غير خطيّة.
- معادلة خط الانحدار $\hat{ص} = أ + ب س$، حيث:

$$ب = \frac{ن (\Sigma س ص) - (\Sigma س)(\Sigma ص)}{ن (\Sigma س^{٢}) - (\Sigma س)^{٢}}$$

$$أ = \overline{ص} - ب \overline{س}$$

- التقدير يتم بالتعويض لقيمة س في معادلة خط الانحدار.
- مقدار الخطأ = |القيمة الجدولية – القيمة من معادلة الانحدار| = $|ص_{س} - \hat{ص}_{س}|$

KuwaitMath.com