الوحدة الثالثة

السلاسل الزمنيّة

Time Series

مشروع الوحدة: المياه واستهلاكها

١ مقدمة المشروع: تعتبر المياه وطريقة استهلاكها من أهم المشاكل في دولة الكويت وأكثرها تعقيدًا، نظرًا لمحدوديّة مواردها والمصادر المتجددة، ونظرًا لارتفاع معدلات استهلاكها مع مرور الوقت.

٢ الهدف: تحديد مصادر المياه ومحاولة توقع الكميات المطلوبة خلال الـ ٢٠ سنة القادمة بناء على عدة عوامل.

٣ اللوازم: شبكة الإنترنت، ورق رسم بياني، حاسوب.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ كيف كانت تؤمن دولة الكويت حاجاتها من المياه قبل تدفق عائدات النفط؟

ب ما كلفة إنتاج المياه العذبة المقطرة المحلاة؟ قارنها بكلفة الإنتاج في السنوات الماضية أي منذ ستينيات القرن الماضي. ارسم المضلع التكراري لكلفة تحلية المتر المكعب الواحد خلال الخمسين سنة الماضية آخذين بالاعتبار معدل الكلفة كل ٥ سنوات.

جـ ما المعدل اليومي لاستهلاك الفرد من المياه خلال الخمسين سنة الماضية. ارسم مضلعًا تكراريًّا يحدّد معدل الاستهلاك مع مرور الوقت آخذين بالاعتبار معدل الاستهلاك اليومي للفرد كل ٥ سنوات.

د قارن معدلات الاستهلاك بين عدة بلدان كقطر، والسعودية، وسلطنة عُمان في الفترات الزمنية ذاتها.

هـ ما معدل الزيادة السكانية في الكويت؟ وما تأثيره في السنوات القادمة على كمية المياه المستهلكة؟

٥ التقرير: قدّم تقريرًا مفصلًا عن هذا المشروع محاولًا توقع كميات الاستهلاك المطلوبة خلال الـ ٢٠ سنة القادمة، ومحددًا الموارد والمصادر التي يمكن اعتمادها لتأمين الحاجات مراعيًا الزيادة السكانية ليكون التقرير أكثر دقة وموضوعيّة.

دروس الوحدة

٣-١ السلسلة الزمنية	٣-٢ عناصر السلسلة الزمنية	٣-٣ تحليل السلاسل الزمنية
		معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية

الوحدة الثالثة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- مخطط الانتشار.
- الارتباط وتطبيقاته.
- مُعامل ارتباط بيرسون.
- الانحدار وتطبيقاته.
- التقدير بمعادلة الانحدار.

ماذا سوف تتعلم؟

- السلسلة الزمنية.
- عناصر السلسلة الزمنية.
- تحليل السلاسل الزمنية.

المصطلحات الأساسية

السلسلة الزمنية – عناصر السلسلة الزمنية – المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية – الاتجاه العام – التغيرات الموسمية – التغيرات الدورية – التغيرات العرضية (الفجائية).

أضف إلى معلوماتك

تطور عمر الإنسان وزادت معدلاته، وذلك يعود إلى عدة عوامل أبرزها نوعية التغذية والرعاية الطبيّة، بحيث كان معدل عمر الإنسان عام ١٩٠٠ في الولايات المتحدة الأميركية حوالى ٤٧,٣ سنة ليصبح عام ٢٠٠٧ ٧٧,٩ سنة.

أما بالنسبة إلى الدول التي تعتبر فيها معدلات عمر الإنسان الأعلى في العالم، فتحل اليابان في المركز الثاني حيث إن معدل العمر فيها هو ٨٢ سنة، ودولة أندورة، التي تقع في جبال البيرينه بين فرنسا وإسبانيا، فتحل في المركز الأول حيث يبلغ عدد سكانها ٧٢ ٠٠٠ نسمة ومعدل أعمار أبنائها ٨٣,٥ سنة. وبالتالي، فإن معدل عمر الإنسان في ارتفاع دائم مع مرور الزمن.

السلسلة الزمنيّة

Time Series

سوف تتعلم

- السلسلة الزمنية.
- المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية.

دعنا نفكر ونتناقش

تعلّمت سابقًا كيف ترسم مخطط الانتشار لمتغيرين وكيفية إيجاد نوع العلاقة بينهما. في الجدول التالي:

س تمثّل السنوات ، ص تمثّل معدل النمو

س	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠
ص	٢,٧	٢,٧	٢,٧	٢,٧	٢,٦	٢,٧	٢,٧	٢,٤	٢,٣	٢,٢	٢,١

أ) مثّل البيانات بالخط المنكسر.

ب) كيف كان معدّل النمو بين سنة ٢٠٠٠ وسنة ٢٠٠٦؟ وبعد سنة ٢٠٠٦؟

جـ) ما نوع العلاقة بين الزمن ومعدّل النمو في هذه الفترات (ثابتة، متناقصة، متزايدة)؟

سبق لنا أن درسنا في الوحدة السابقة العلاقة بين ظاهرتين (متغيرين) من خلال موضوع الارتباط وفي هذه الوحدة سنتعرض لحالة خاصة من الارتباط بتثبيت قيم إحدى الظاهرتين (المتغيرين) وهو الزمن باعتباره المتغيّر المستقل ودراسة قيم الظاهرة الأخرى عبر الزمن وهو ما يسمى **بالسلسلة الزمنية**.

تعريف: السلسلة الزمنية

هي مجموعة القيم التي تأخذها ظاهرة ما في فترات زمنية غالبًا ما تكون متساوية ومتعاقبة.

أي أنها علاقة تربط بين متغيرين أحدهما هو قيم الظاهرة المطلوب دراستها والآخر هو الزمن. أي أننا نتتبع سلوك الظاهرة في أزمنة متعاقبة (سنة – نصف سنة – ربع سنة – شهر – يوم ...) ويسمى التتبع لقيم الظاهرة خلال هذه الأزمنة **بالسلسلة الزمنية**.

السلسلة الزمنية تحتوي على متغيرين أحدهما هو الزمن (المتغير المستقل) وسوف نرمز له بالرمز (س)، والآخر هو قيمة الظاهرة (المتغيّر التابع) وسنرمز له بالرمز (ص).

وتقاس قيم هذه الظواهر بنفس الوحدات ونفس طريقة القياس حتى يمكن المقارنة بين قيم الظاهرة خلال فترة الدراسة. وبعض السلاسل الزمنية تكون تصاعدية بصورة مطردة، وفي هذا النوع تزداد قيم الظاهرة محل الدراسة بمرور الزمن مثل إنتاج تحلية المياه في دولة الكويت، وبعض السلاسل الزمنية تكون تنازلية حيث تكون قيم مشاهداتها تتناقص بمرور الزمن مثل عدد الإصابات بشلل الأطفال في السنوات الأخيرة، والبعض الآخر من السلاسل الزمنية لا تخضع لنظام ثابت فهي متذبذبة بين التصاعدية والتنازلية وتكون قيم الظاهرة موزعة بين الصعود والنزول مثل إنتاج المشروبات الغازية على مدار السنة.

KuwaitMath.com

سوف يتم تمثيل السلسلة الزمنية بيانيًّا **بخط منكسر** ويسمى **بالمنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية**، حيث يتم تمثيل الزمن على المحور الأفقي والظاهرة على المحور الرأسي.

مثال (١)

يبيّن الجدول التالي متوسط العمر (ص) في إحدى الدول خلال السنوات (س) من سنة ٢٠٠٤ إلى سنة ٢٠١١.

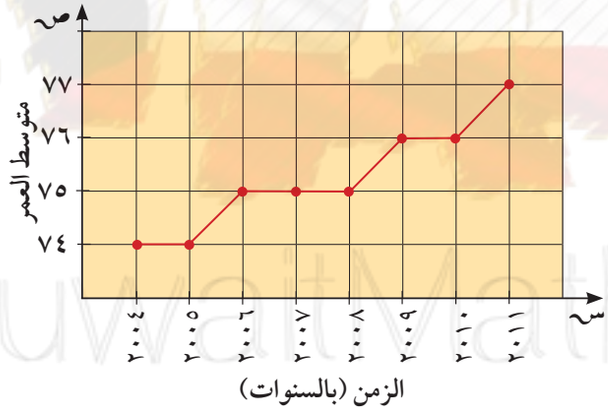
الزمن (س)	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١
العمر (ص)	٧٤	٧٤	٧٥	٧٥	٧٥	٧٦	٧٦	٧٧

أ **مثّل بيانيًّا السلسلة الزمنية للبيانات الموجودة في الجدول أعلاه.**

ب **ما نوع العلاقة بين متوسط العمر والزمن؟**

الحل:

أ مثّل الزمن على المحور الأفقي، ومتوسّط العمر على المحور الرأسي.



ب نلاحظ أن متوسط العمر في تزايد مع الزمن.

حاول أن تحل

١ **في الجدول التالي متغيرين: الزمن (س) بالسنوات ، وعدد الولادات (ص) بالآلاف.**

الزمن (س)	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨
عدد الولادات بالآلاف (ص)	٤٢	٤٢	٤٣	٤٥	٤٧	٥١	٥٣	٥٥	٥٥

أ **مثّل بيانيًّا السلسلة الزمنية للبيانات الموجودة في الجدول أعلاه.**

ب **ما نوع العلاقة بين عدد الولادات والزمن؟**

KuwaitMath.com

مثال (٢)

يبيّن الجدول التالي عدد الإصابات بشلل الأطفال (ص) بالآلاف في إحدى الدول خلال السنوات (س) من سنة ١٩٦٠ إلى سنة ١٩٦٧

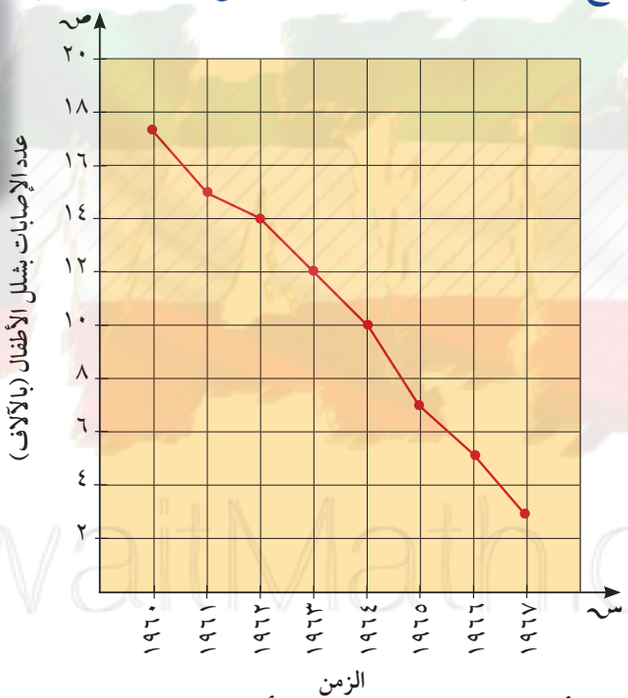
الزمن (س)	١٩٦٠	١٩٦١	١٩٦٢	١٩٦٣	١٩٦٤	١٩٦٥	١٩٦٦	١٩٦٧
عدد الولادات بالآلاف (ص)	١٧	١٥	١٤	١٢	١٠	٧	٥	٣

أ مثّل بيانيًّا السلسلة الزمنية للبيانات الموجودة في الجدول أعلاه.

ب ما نوع العلاقة بين عدد الإصابات بشلل الأطفال والزمن؟

الحل:

أ



ب نلاحظ أن عدد الإصابات بشلل الأطفال في تناقص مع الزمن.

حاول أن تحل

٢ تهتم الدول بتنمية شعوبها من خلال القضاء على الأمّية باستخدام الحاسوب وذلك بإعداد برامج بهذا الخصوص، والجدول التالي يوضّح عدد الأميين بالمئات في محافظة ما من خلال الفترات الزمنية الموضّحة:

الزمن (س)	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠
عدد الأميين بالمئات (ص)	٣١	٢٧	٢٥	٢٥	٢٤	٢٥	٢٣	٢١	١٩

أ مثّل بيانيًّا السلسلة الزمنية للبيانات الموجودة في الجدول أعلاه.

ب ما نوع العلاقة بين عدد الأميين في استخدام الحاسوب والزمن؟

KuwaitMath.com

عناصر السلسلة الزمنيّة

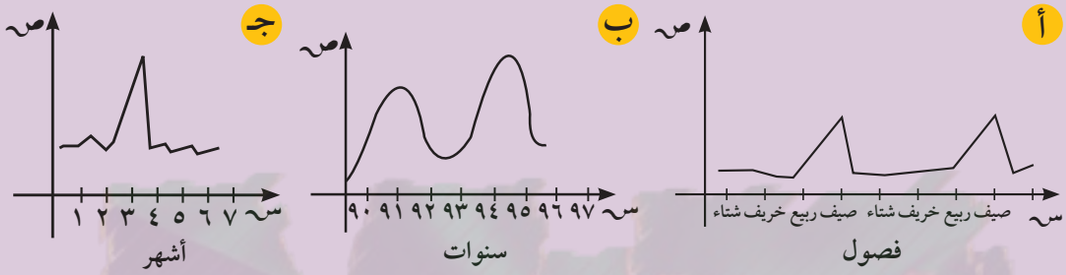
Time Series Elements

سوف تتعلم

- الاتجاه العام.
- التغيرات الموسمية.
- التغيرات الدورية.
- التغيرات العرضية.

دعنا نفكر ونتناقش

انظر إلى السلاسل الزمنية التالية:



١ قارن فيما بينها.

٢ اقترح أمثلة حياتية تتطابق مع السلسلة الزمنية في الشكل أ.

٣ أي سلسلة من السلاسل الزمنية الثلاث تبيّن تغيرًا فجائيًا؟

درسنا فيما سبق أن السلسلة الزمنية هي علاقة بين متغيّرين أحدهما يسمى المتغيّر المستقل وهو الزمن (س)، والآخر يسمى المتغيّر التابع (ص)، ويوجد عدد من المؤثرات المشتركة في كل سلسلة زمنية ولكنها تؤثر بدرجات مختلفة من ظاهرة لأخرى طبقًا لطبيعة الظاهرة محل الدراسة.

والهدف من الدراسة الإحصائية للسلسلة الزمنية هو اكتشاف التغيرات التي تطرأ على قيم الظاهرة من زيادة أو نقصان في زمن محدد وتسمى هذه التغيرات التي تؤثر على السلسلة الزمنية سواء كانت مجتمعة أم منفردة **بعناصر السلسلة الزمنية**.

عناصر السلسلة الزمنية هي:

١ المؤثرات الاتجاهية (الاتجاه العام للسلسلة الزمنية).

٢ التغيرات الموسمية.

٣ التغيرات الدورية.

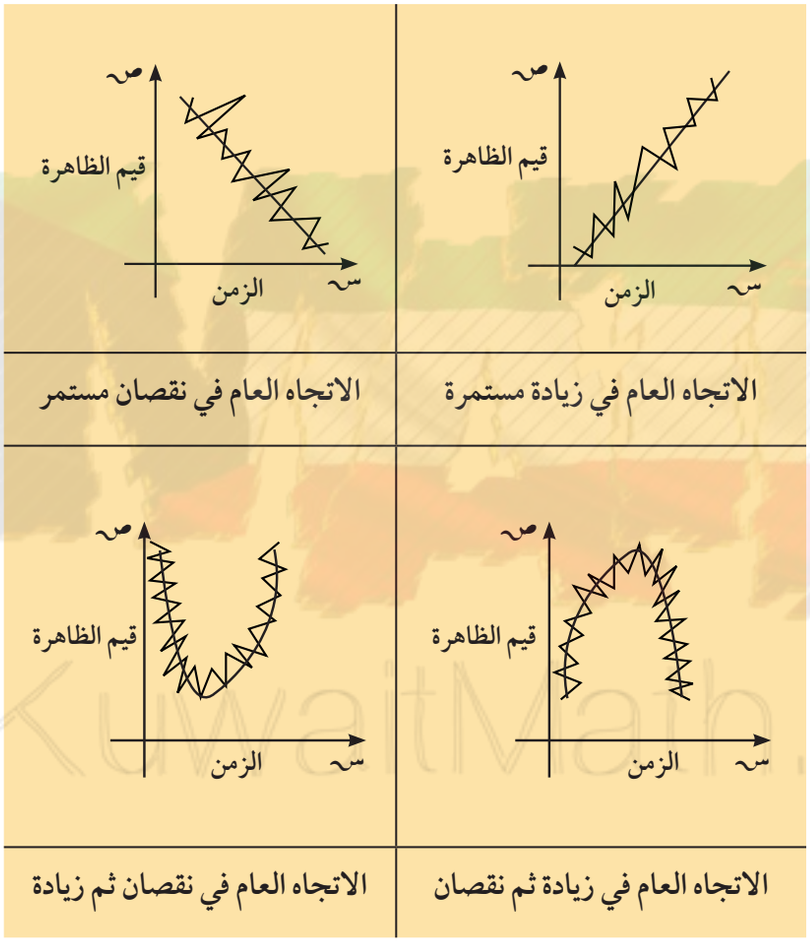
٤ التغيرات العرضية (الفجائية).

وسنتناول هذه العناصر بشيء من التفصيل.

١ – الاتجاه العام للسلسلة الزمنية Secular Trend

الاتجاه العام للسلسلة الزمنية هو الاتجاه الذي تأخذه السلسلة الزمنية لحدث ما خلال فترة طويلة من الزمن.

هناك العديد من الأمثلة التي تبيّن ذلك منها: عدد سكان بلد ما، الفئات العمريّة للمجتمع، ...

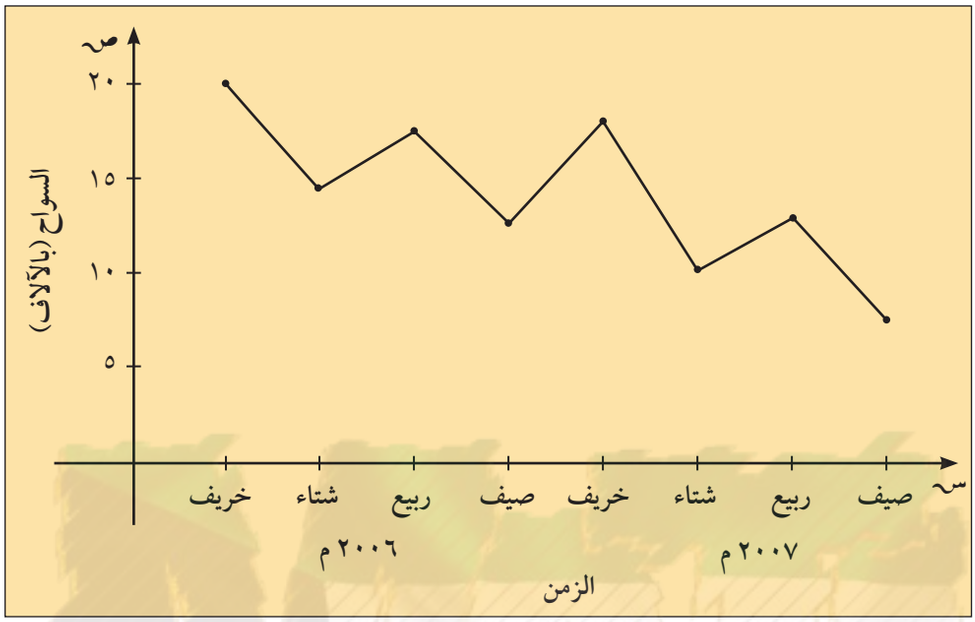


٢ – التغيرات الموسمية Seasonal Variations

هي التغيرات التي تتكرر بانتظام خلال فترات زمنية أقل من سنة كأن تكون نصف سنوية أو ربع سنوية أو شهرية أو أسبوعية أو... .

والأمثلة على ذلك متعددة منها سقوط الأمطار بشكل موسمي، وكذلك مبيعات المشروبات الغازية تزداد خلال فصل الصيف، واستهلاك الكهرباء والماء يزداد أيضًا في فصل الصيف، وزيادة حركة المواصلات وازدحام الطرق في فترتي الصباح والظهيرة من كل يوم، والشكل التالي يبيّن التغيرات الموسمية لأعداد السواح بالآلاف للعامين ٢٠٠٦ م، ٢٠٠٧ م على الترتيب.

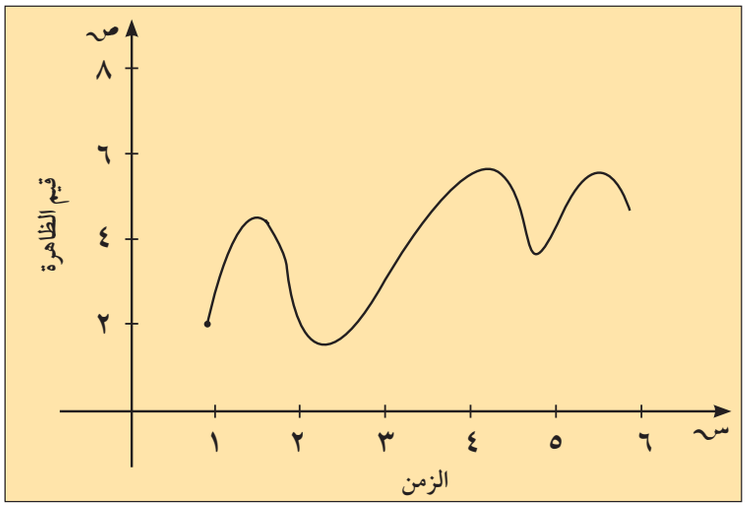
KuwaitMath.com



لاحظ أن الاتجاه العام للسلسلة الزمنية في نقصان.

٣– التغيرات الدورية Cyclic Variations

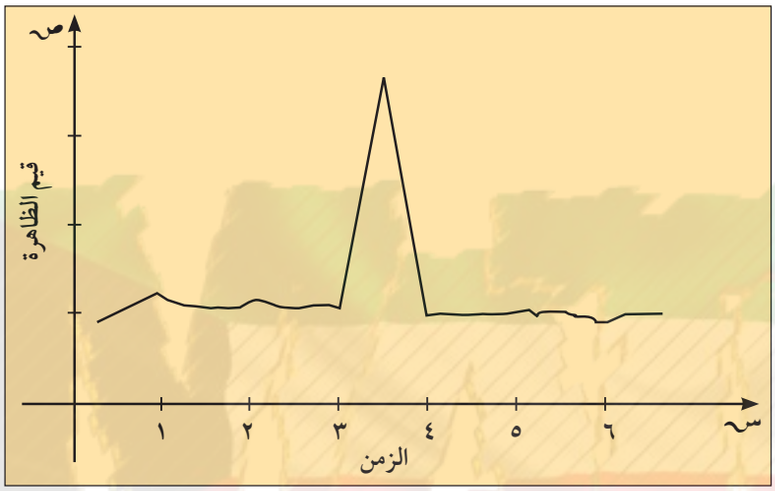
هي تغيرات للسلسلة الزمنية على فترات طويلة المدى نسبيًّا أكثر من سنة، وتختلف التغيرات الدورية عن التغيرات الموسمية في أن التغيرات الموسمية تحدث في فترات زمنية أقل من سنة، ويمكن اعتبار التغيرات الدورية تحركًا لفترة أقل طولًا من فترة الاتجاه العام، ومن الأمثلة المهمة للتغيرات الدورية ما يحدث لشركة ما من فترة رخاء اقتصادي، ثم فترة ركود اقتصادي، ثم فترة كساد، ثم انفراج من الأزمة الاقتصادية كما هو موضح في الشكل.



لاحظ أن الاتجاه العام للسلسلة في تزايد.

٤ – التغيرات العرضية (الفجائية) Irregular Variations

تتأثر كثير من الظواهر من وقت إلى آخر بعوامل مختلفة تعود إلى تغيرات **غير متوقعة** أو إلى **أمور يصعب التنبؤ بها**، فمثلًا في المحلات التجارية تختلف قيم المبيعات من يوم إلى آخر متأثرة بطبيعة الطقس أو وجود حفلات زواج وما إلى ذلك من تغيرات. كما أن التغيرات تحدث نتيجة **عوامل مفاجئة** كالحروب، والفيضانات، والأوبئة، والزلازل. والتغيرات من هذا النوع تعرف بالتغيرات العرضية أو الفجائية، ويمكن توضيح التغيرات العرضية أو الفجائية في المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية بالشكل التالي:



مثال (١)

يمثّل الجدول التالي أرباح إحدى الشركات الكبرى بملايين الدنانير من سنة ١٩٨٥ إلى سنة ٢٠٠٠

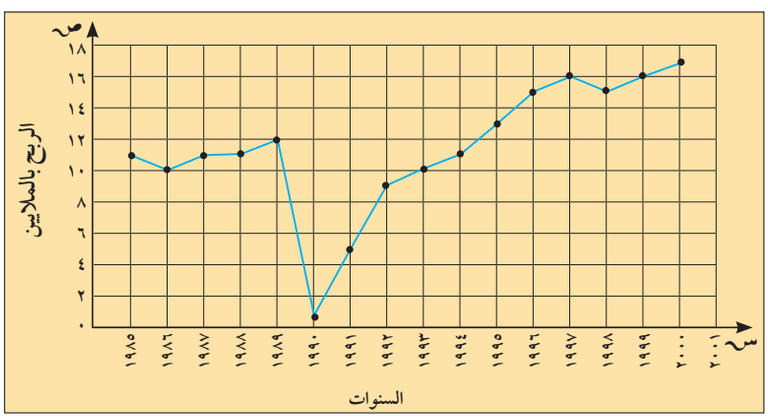
السنة (س)	٨٥	٨٦	٨٧	٨٨	٨٩	٩٠	٩١	٩٢	٩٣	٩٤	٩٥	٩٦	٩٧	٩٨	٩٩	٢٠٠٠
الربح بالملايين (ص)	١١	١٠	١١	١١	١٢	١	٥	٩	١٠	١١	١٣	١٥	١٦	١٥	١٦	١٧

أ مثّل بيانيًّا على شكل خط منكسر بيانات الجدول أعلاه.

ب ما نوع التغيّرات التي طرأت على أرباح هذه الشركة؟ وما السبب الأبرز لهذه التغيّرات؟

الحل:

أ



ب لدينا تغيّر مفاجئ في سنة ١٩٩٠ يمثّل بانخفاض جذري للأرباح.

السبب الأبرز هو العدوان العراقي على الكويت.

حاول أن تحل

١ يبيّن الجدول التالي عدد المنتسبين إلى أحد الأندية الرياضية خلال أشهر سنة ٢٠٠٨

الأشهر (س)	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
عدد المنتسبين (ص)	٣٠	٣٢	٤٠	٤١	٥٠	٥٠	٦٠	٧٠	٧٥	٧١	٦٠	٥٥

أ مثّل بيانيًّا على شكل خط منكسر بيانات الجدول أعلاه.

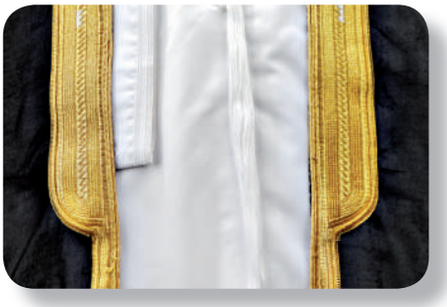
ب ما الذي تلاحظه في الرسم البياني؟

ج برأيك، ما سبّب هذه التغيّرات؟

مثال (٢)

يبيّن الجدول التالي عدد البشوت المباعة في أحد المجمعات التجارية خلال فترة زمنية من أربعة أشهر وعلى امتداد أربع سنوات.

الفترة / السنوات	الأولى	الثانية	الثالثة
٢٠٠٢	١٥٠	٧٠	١٨٠
٢٠٠٣	١٦٥	٨٥	٢١٥
٢٠٠٤	٢٠٥	٩٥	٢٣٠
٢٠٠٥	٢٢٠	١١٠	٢٥٠



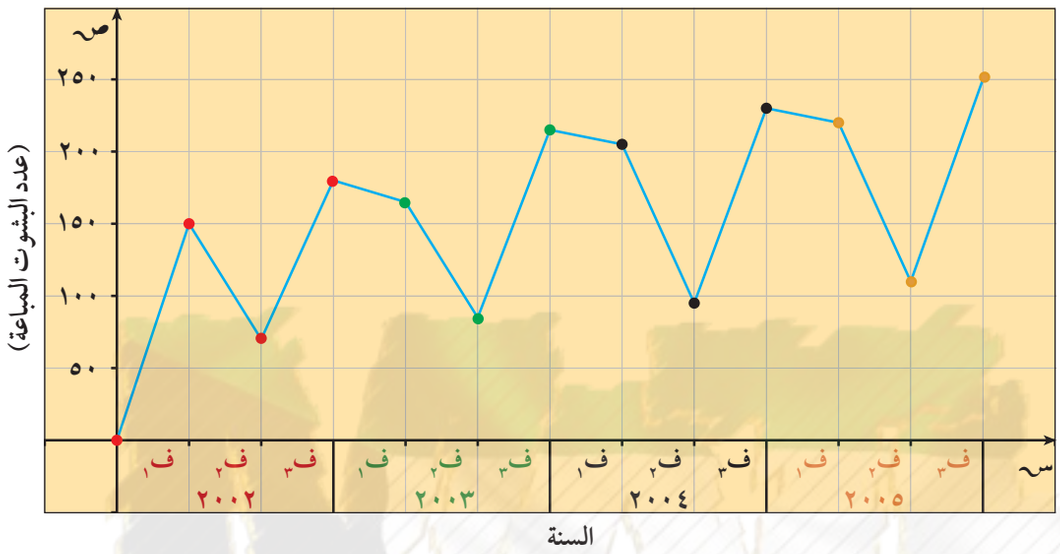
أ مثّل بيانيًّا على شكل خط منكسر بيانات الجدول أعلاه.

ب ما الذي تلاحظه؟

KuwaitMath.com

الحل:

أ



ب تتكرر التغيرات بانتظام خلال الفترات الزمنية من ٤ أشهر. تزداد المبيعات في الفترتين الأولى والثالثة من كل سنة مع ازدياد خفيف خلال السنوات.

حاول أن تحل

٢ يبيّن الجدول التالي مبيعات إحدى المؤسسات التجارية (بآلاف الدنانير) خلال كل فصل من فصول السنة الأربعة وعلى امتداد ثلاث سنوات.

الفصل / السنة	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
٢٠٠٣	٢٠٢	١٥٠	٥٠	١٠٠
٢٠٠٤	٢١٠	١٧٠	٦٠	١١٠
٢٠٠٥	٢٣٠	١٩٠	٧٥	١٣٠

أ مثّل بيانيًّا على شكل خط منكسر بيانات الجدول.

ب ما الذي تلاحظه؟

مثال (٣)

يبيّن الجدول التالي مبيعات إحدى الشركات (بمئات آلاف الدنانير) خلال فترة ثماني سنوات موزعة على كل نصف سنة كما في الجدول التالي:

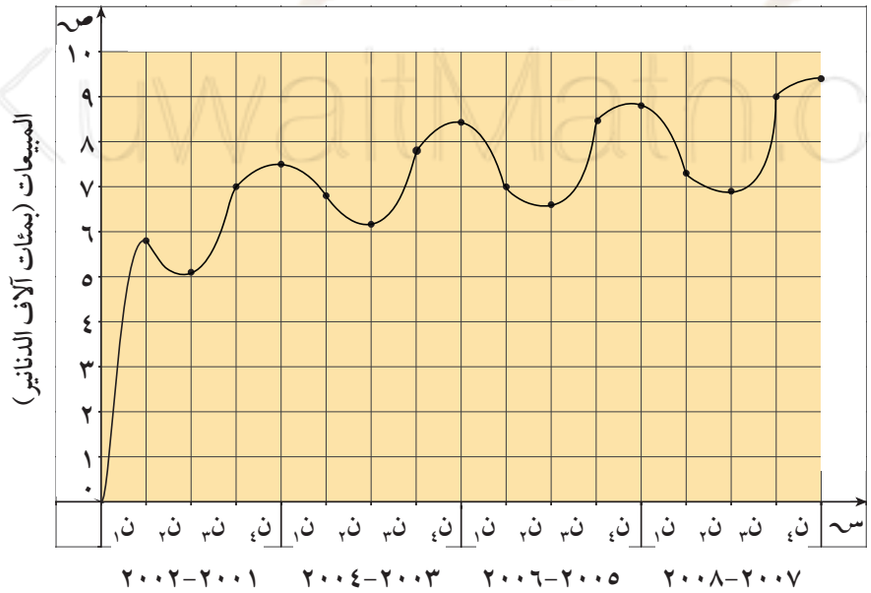
نصف السنة / السنوات	النصف الأول	النصف الثاني	النصف الثالث	النصف الرابع
٢٠٠١ - ٢٠٠٢	٥,٨	٥,١	٧,٠	٧,٥
٢٠٠٣ - ٢٠٠٤	٦,٨	٦,٢	٧,٨	٨,٤
٢٠٠٥ - ٢٠٠٦	٧,٠	٦,٦	٨,٥	٨,٨
٢٠٠٧ - ٢٠٠٨	٧,٣	٦,٩	٩,٠	٩,٤

أ ارسم بيانيًّا على شكل منحنى بيانات الجدول أعلاه.

ب ما الذي تلاحظه بالنسبة إلى الاتجاه العام للسلسلة؟

الحل:

أ



ب الاتجاه العام للسلسلة في تزايد.

KuwaitMath.com

حاول أن تحل

٣ يبيّن الجدول التالي المسافات التي يركضها (بعشرات الأمتار) أحد لاعبي كرة القدم خلال ١٤ دقيقة.

الزمن	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
المسافة (بعشرات الأمتار)	١٥	٧	٩	٨	٢	٦	١٤	١٥	٧	٩	٨	٢	٦	١٤

أ ارسم بيانيًّا على شكل منحنى بيانات الجدول أعلاه.

ب ما الذي تلاحظه بالنسبة إلى الاتجاه العام للسلسلة؟

KuwaitMath.com

تحليل السلاسل الزمنية

Analysing Time Series

سوف تتعلم

- معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية.
- حساب مقدار الخطأ

دعنا نفكر ونتناقش

أخذت أوزان عشرة أطفال عند الولادة في أحد المستشفيات الغربية بهدف دراسة العلاقة بين وزن الطفل عند الولادة وعدد السجائر التي تدخنها الأم يوميًّا خلال أول شهرين من فترة الحمل.

عدد السجائر في اليوم (س)	١٥	١٠	٥	٨	٩	٧	١١	٦	٣	٢
الوزن بالجرام (ص)	١٤٤٧	١٥٠٠	١٧٠١	١٧١٢	١٨٥٧	٢٠٣١	٢١٤٥	٢٢١٤	٢٢١٠	٢٥٣٧

أ هل يوجد علاقة بين المتغيرين س، ص؟

(إرشاد: أوجد مُعامل الارتباط (ر))

ب أوجد معادلة خط الانحدار.

جـ إذا كان وزن الطفل عند الولادة ١٩٥٠ جرامًا،

فما تقريبًا عدد السجائر التي تدخنها الأم يوميًّا؟

معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية Equation of Time Series

الاتجاه العام للسلسلة الزمنية هو أهم عنصر من عناصر السلسلة، لأنه يساعد الباحثين وذوي الاختصاص على تقدير أو توقع قيمة مستقبلية لزمن قادم.

تعلّمنا سابقًا كيفية إيجاد معادلة خطّ الانحدار.

وفي هذا الدرس، سوف نستخدم الطريقة ذاتها لإيجاد معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية مع فرق بسيط وهو استخدام المتغيّر (س) لتمثيل الزمن، بفرض أن العلاقة بين الزمن (س) وقيم الظاهرة (ص) هي علاقة خطيّة.

KuwaitMath.com

الخطوات المتبعة لإيجاد معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية

١ نفرض قيم الزمن (س) باعتباره الفترة الأولى (سنة الأساس) ونعبر عنه بالعدد صفر، الفترة الثانية بالعدد ١، ثم الفترة الثالثة بالعدد ٢، وهكذا ...

٢ نعيّن قيم الثوابت أ، ب كما سبق شرحه حيث:

$$ب = \frac{ن (\sum س ص) - (\sum س)(\sum ص)}{ن (\sum س^{٢}) - (\sum س)^{٢}}$$

$$أ = \overline{ص} - ب \overline{س} \quad \text{حيث:} \quad \overline{ص} = \frac{\sum ص}{ن} \ ، \ \overline{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

٣ معادلة الاتجاه العام تكتب على الشكل التالي: $\hat{ص} = أ + ب س$

٤ يمكننا التنبؤ بقيمة ص إذا علمت قيمة س.

٥ نحسب مقدار الخطأ:

مقدار الخطأ = |القيمة الجدولية – القيمة التي تحقق معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية|

ونعبر عنه بـ: $|ص_{١} - ص_{٢}|$.

مثال (١)

يبيّن الجدول التالي عدد الخبراء الأجانب بالآلاف في دولة ما، بين سنة ٢٠٠٧ وسنة ٢٠١٤

السنوات (س)	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣	٢٠١٤
عدد الخبراء بالآلاف (ص)	٠,٥	٠,٧	٠,٨٣	١,٢	١,٥	١,٨	١,٣	١

أ أوجد معادلة الاتجاه العام لعدد الخبراء الأجانب في الفترة المذكورة أعلاه.

ب قدّر كم سيصبح عدد الخبراء سنة ٢٠١٧

جـ احسب مقدار الخطأ في عدد الخبراء سنة ٢٠١٢

الحل:

أ نعتبر سنة ٢٠٠٧ هي السنة الأساس ونعبّر عنها بالعدد صفر، وسنة ٢٠٠٨ بالعدد ١

وهكذا دواليك حتى سنة ٢٠١٤ فنعبّر عنها بالعدد ٧

KuwaitMath.com

السنوات	س	ص	س ص	س^{٢}
٢٠٠٧	٠	٠,٥	٠	٠
٢٠٠٨	١	٠,٧	٠,٧	١
٢٠٠٩	٢	٠,٨٣	١,٦٦	٤
٢٠١٠	٣	١,٢	٣,٦	٩
٢٠١١	٤	١,٥	٦	١٦
٢٠١٢	٥	١,٨	٩	٢٥
٢٠١٣	٦	١,٣	٧,٨	٣٦
٢٠١٤	٧	١	٧	٤٩
المجموع	$\sum$ س = ٢٨	$\sum$ ص = ٨,٨٣	$\sum$ س ص = ٣٥,٧٦	$\sum$ س^{٢} = ١٤٠

$$ب = \frac{ن(\sum س ص) - (\sum س)(\sum ص)}{ن(\sum س^{٢}) - (\sum س)^{٢}}$$

$$ب = \frac{٨(٣٥,٧٦) - (٢٨)(٨,٨٣)}{٨(١٤٠) - ٧٨٤}$$

$ب \approx ٠,١١٥٦$

$أ = \overline{ص} - ب \overline{س}$

$$\overline{ص} = \frac{\sum ص}{ن} = ١,١٠٣٨ \quad ، \quad \overline{س} = \frac{\sum س}{ن} = ٣,٥$$

$أ = ١,١٠٣٨ - ٠,١١٥٦ \times ٣,٥$

$أ = ٠,٦٩٩٢$

∴ معادلة الاتجاه العام هي:

$\hat{ص} = أ + ب س$

$\hat{ص} = ٠,٦٩٩٢ + ٠,١١٥٦ س$

ب نريد تقدير عدد الخبراء الأجانب سنة ٢٠١٧، أي عند س = ١٠

$\hat{ص} = ٠,٦٩٩٢ + ٠,١١٥٦ \times ١٠$

$\hat{ص} = ١,٨٥٥٢$

تقدير سنة ٢٠١٧ هو ١ ٨٥٥ خبيرًا أجنبيًّا (١,٨٥٥٢ × ١٠٠٠ = ١٨٥٥,٢)

KuwaitMath.com

جـ $\hat{ص} = \hat{أ} + \hat{ب} س$

$\hat{ص}_{٢٠١٢} = ٠,٦٩٩٢ + ٠,١١٥٦ \times ٥ = ١,٢٧٧٢$

مقدار الخطأ $= |١,٨ - ١,٢٧٧٢| = ٠,٥٢٢٨$

أي أن مقدار الخطأ في عدد الخبراء $٠,٥٢٢٨ \times ١٠٠٠ = ٥٢٢,٨ \approx ٥٢٣$ خبيرًا

حاول أن تحل

١ يبيّن الجدول التالي عدد مستخدمي شبكة الإنترنت بالآلاف في دولة ما من سنة ٢٠٠٠ حتى سنة ٢٠٠٨

السنوات (س)	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨
عدد المستخدمين (بالآلاف) (ص)	١٠٠	١٥٠	٢٠٠	٧٦٧	٦٣٣	٧٠٠	٨٠٠	٩٠٠	١٠٠٠

أ أوجد معادلة الاتجاه العام.

ب قدّر عدد مستخدمي شبكة الإنترنت سنة ٢٠١٢

جـ أوجد مقدار الخطأ سنة ٢٠٠٦

مثال (٢)

يبيّن الجدول التالي التكلفة لإنتاج إحدى السلع بالألف دينار كويتي من سنة ٢٠٠٦ حتى سنة ٢٠١٣

السنة (س)	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣
التكلفة (بالألف دينار)(ص)	١٥	١٦	١٨	١٨	٢٠	٢٢	٢٤	٢٨

أ أوجد معادلة الاتجاه العام لتكلفة إنتاج السلعة.

ب قدّر قيمة التكلفة عام ٢٠١٧

جـ احسب مقدار الخطأ سنة ٢٠١١

KuwaitMath.com

الحل:

أ نعتبر سنة ٢٠٠٦ هي السنة الأساس.

السنوات	س	ص	س ص	س^{٢}
٢٠٠٦	٠	١٥	٠	٠
٢٠٠٧	١	١٦	١٦	١
٢٠٠٨	٢	١٨	٣٦	٤
٢٠٠٩	٣	١٨	٥٤	٩
٢٠١٠	٤	٢٠	٨٠	١٦
٢٠١١	٥	٢٢	١١٠	٢٥
٢٠١٢	٦	٢٤	١٤٤	٣٦
٢٠١٣	٧	٢٨	١٩٦	٤٩
المجموع	$\sum$ س = ٢٨	$\sum$ ص = ١٦١	$\sum$ س ص = ٦٣٦	$\sum$ س^{٢} = ١٤٠

$$\text{ن} = ٨ \text{ ، } \overline{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} = \frac{٢٨}{٨} = ٣,٥ \text{ ، } \overline{\text{ص}} = \frac{\sum \text{ص}}{\text{ن}} = \frac{١٦١}{٨} = ٢٠,١٢٥$$

$$\text{ب} = \frac{\text{ن}(\sum \text{س ص}) - (\sum \text{س})(\sum \text{ص})}{\text{ن}(\sum \text{س}^{٢}) - (\sum \text{س})^{٢}} = \frac{٨ \times ٦٣٦ - ٢٨ \times ١٦١}{٨ \times ١٤٠ - (٢٨)^{٢}}$$

$$= \frac{٥٨٠}{٣٣٦} \approx ١,٧٢٦٢$$

$$\text{أ} = \overline{\text{ص}} - \text{ب}\,\overline{\text{س}} \leftarrow \text{أ} = ٢٠,١٢٥ - (١,٧٢٦٢) \times ٣,٥ = ١٤,٠٨٣٣$$

∴ معادلة الاتجاه العام هي:

$$\hat{\text{ص}} = ١٤,٠٨٣٣ + ١,٧٢٦٢ \text{ س}$$

ب قيمة التكلفة سنة ٢٠١٧ عند س = ١١

$$\therefore \hat{\text{ص}}_{٢٠١٧} = ١٤,٠٨٣٣ + ١,٧٢٦٢ \times ١١$$

$$= ٣٣,٠٧١٥ \text{ ألف دينار}$$

جـ سنة ٢٠١١ ← $\text{ص}_{٢٠١١} = ٢٢$

$$\hat{\text{ص}}_{٢٠١١} = ١٤,٠٨٣٣ + ١,٧٢٦٢ \times ٥$$

$$= ٢٢,٧١٤٣$$

KuwaitMath.com

∴ مقدار الخطأ = $|\hat{ص}_{٢٠١١} - ص_{٢٠١١}|$

$= |٢٢,٧١٤٣ - ٢٢|$

$= ٠,٧١٤٣$

∴ مقدار الخطأ = ٣,٧١٤ ديناراً

حاول أن تحل

٢ الجدول التالي يبيّن قيم ظاهرة معينة خلال ٧ سنوات.

السنة	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤
قيم الظاهرة	٣	٥	٨	١٠	١٤	١٦	١٨

أ أوجد معادلة الاتجاه العام لقيم الظاهرة.

ب تنبأ بالقيمة المتوقعة للظاهرة سنة ٢٠٠٧

جـ احسب مقدار الخطأ سنة ٢٠٠٣

KuwaitMath.com

مثال (٣)

الجدول التالي يبيّن إنتاج إحدى شركات السيارات بالألف سيارة ما بين سنة ٢٠٠٧ وسنة ٢٠١٣

السنة (س)	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣
عدد السيارات بالألف (ص)	٤٠	٦٠	٧٠	٩٠	١٠٠	١٥٠	١٨٠

أ أوجد معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية

ب قدّر عدد السيارات المنتجة سنة ٢٠١٦

جـ احسب مقدار الخطأ سنة ٢٠١١

الحل:

أ نعتبر سنة ٢٠٠٧ هي السنة الأساس.

السنوات	س	ص	س ص	$س^{٢}$
٢٠٠٧	٠	٤٠	٠	٠
٢٠٠٨	١	٦٠	٦٠	١
٢٠٠٩	٢	٧٠	١٤٠	٤
٢٠١٠	٣	٩٠	٢٧٠	٩
٢٠١١	٤	١٠٠	٤٠٠	١٦
٢٠١٢	٥	١٥٠	٧٥٠	٢٥
٢٠١٣	٦	١٨٠	١٠٨٠	٣٦
المجموع	٢١	٦٩٠	٢٧٠٠	٩١

$$ن = ٧ ، \overline{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{٢١}{٧} = ٣ ، \overline{ص} = \frac{\sum ص}{ن} = \frac{٦٩٠}{٧} \approx ٩٨,٥٧١٤$$

$$ب = \frac{ن(\sum س ص) - (\sum س)(\sum ص)}{ن(\sum س^{٢}) - (\sum س)^{٢}} = \frac{٧ \times ٢٧٠٠ - ٢١ \times ٦٩٠}{٧ \times ٩١ - (٢١)^{٢}}$$

$$= ٢٢,٥$$

$\because أ = \overline{ص} - ب \overline{س} \leftarrow أ = ٩٨,٥٧١٤ - ٢٢,٥ \times ٣$

$$= ٣١,٠٧١٤$$

$\because$ معادلة الاتجاه العام هي: $\hat{ص} = أ + ب س$

$\hat{ص} = ٣١,٠٧١٤ + ٢٢,٥ س$

ب تقدير عدد السيارات المنتجة سنة ٢٠١٦ أي عند س = ٩

$\hat{ص} = ٣١,٠٧١٤ + ٢٢,٥ \times ٩$

$\hat{ص} = ٢٣٣,٥٧١٤$

تقدير عدد السيارات المنتجة سنة ٢٠١٦ هو حوالى ٢٣٤ ألف سيارة.

جـ $ص_{٢٠١١} = ١٠٠ ، \hat{ص}_{٢٠١١} = ٣١,٠٧١٤ + ٢٢,٥ \times ٤$

$$= ١٢١,٠٧١٤$$

مقدار الخطأ $= |\hat{ص} - ص| = |١٢١,٠٧١٤ - ١٠٠|$

$$= ٢١,٠٧١٤$$

حوالى ٢١ ألف سيارة.

KuwaitMath.com

حاول أن تحل

٣ الجدول التالي يوضّح مبيعات إحدى الشركات بالألف دينار في الفترة من سنة ٢٠٠١ وحتى سنة ٢٠٠٧

السنة (س)	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧
المبيعات بالألف (ص)	٨٧	٩١	٩٦	١٠٩	١١٩	١٢٩	١٣٥

أوجد:

أ معادلة خط الاتجاه العام للمبيعات خلال الفترة المذكورة.

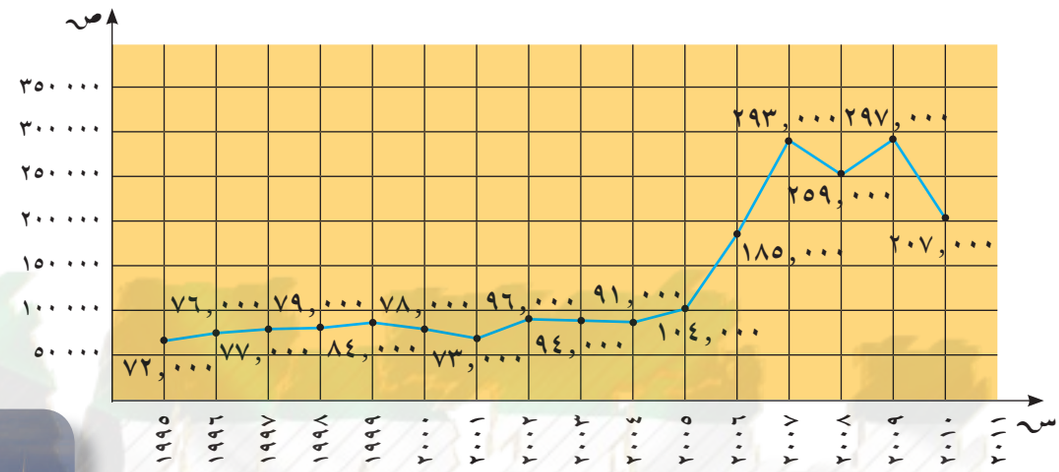
ب القيمة المتوقعة للمبيعات عام ٢٠١٠

جـ مقدار الخطأ سنة ٢٠٠٥

KuwaitMath.com

المرشد لحل المسائل

يبيّن الخط المنكسر التالي أعداد السواح الذين قاموا بزيارة دولة الكويت من سنة ١٩٩٥ حتى سنة ٢٠١٠



أ كوّن جدولًا مستخدمًا المعطيات من الرسم البياني للخط المنكسر.

ب أوجد معادلة الاتجاه العام.

جـ قدّر عدد السواح لسنة ٢٠١٥

د أوجد مقدار الخطأ سنة ٢٠١٠

الحل:

يهتم المعنيّون بتقديرات عدد السواح للأعوام القادمة، وبإيجاد مقدار الخطأ لسنة ٢٠١٠

أ نستخرج المعلومات من الخط المنكسر ونضعها في جدول على الشكل التالي:

السنوات	س	ص	س ص	$س^{٢}$
١٩٩٥	٠	٧٢ ٠٠٠	٠	٠
١٩٩٦	١	٧٦ ٠٠٠	٧٦ ٠٠٠	١
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
٢٠١٠	١٥	٢٠٧ ٠٠٠	٣١٠ ٥٠٠	٢٢٥
	$\sum$ س = ١٢٠	$\sum$ ص = ٢ ١٦٥ ٠٠٠	$\sum$ س ص = ٢١ ٠٩٥ ٠٠٠	$\sum س^{٢}$ = ١ ٢٤٠

معادلة الاتجاه العام:

ب أ = ٢٨ ١٦١,٨ ، ب = ١٤ ٢٨٦,٨ ص̂ = ٢٨ ١٦١,٨ + ١٤ ٢٨٦,٨ س

جـ نقدّر سنة ٢٠١٥ ، س = ٢٠ ، بالتعويض بـ «$\hat{ص}$»:

$\hat{ص}_{٢٠١٥} \approx ٣١٣٨٩٧$

د نوجد مقدار الخطأ لسنة ٢٠١٠:

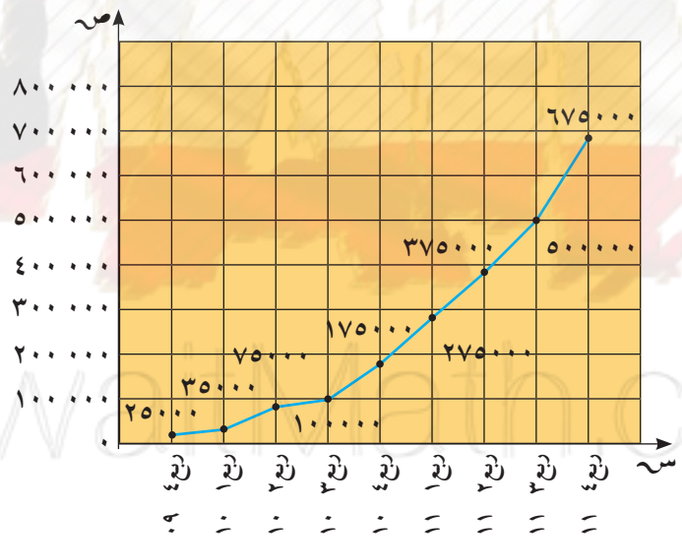
مقدار الخطأ = $|\hat{ص}_{٢٠١٠} - ص_{٢٠١٠}| = ٣٥\ ٤٦٣,٨$

$\approx ٣٥\ ٤٦٤$

مقدار الخطأ تقريبًا ٣٥ ٤٦٤ سائحًا.

مسألة إضافية

يمثّل الخط المنكسر التالي تطور عدد تطبيقات الهواتف الذكية التي تعمل بحسب أحد أنظمة التشغيل وذلك خلال الأرباع التالية من الربع الرابع من سنة ٢٠٠٩ إلى الربع الرابع من سنة ٢٠١١



يهتم المعنيّون بمعرفة تطور أعداد التطبيقات في الربع الرابع من سنة ٢٠١٥ لما يترتب على ذلك من ارتفاع في المداخيل من جراء تحميل هذه التطبيقات في الهواتف الذكية.

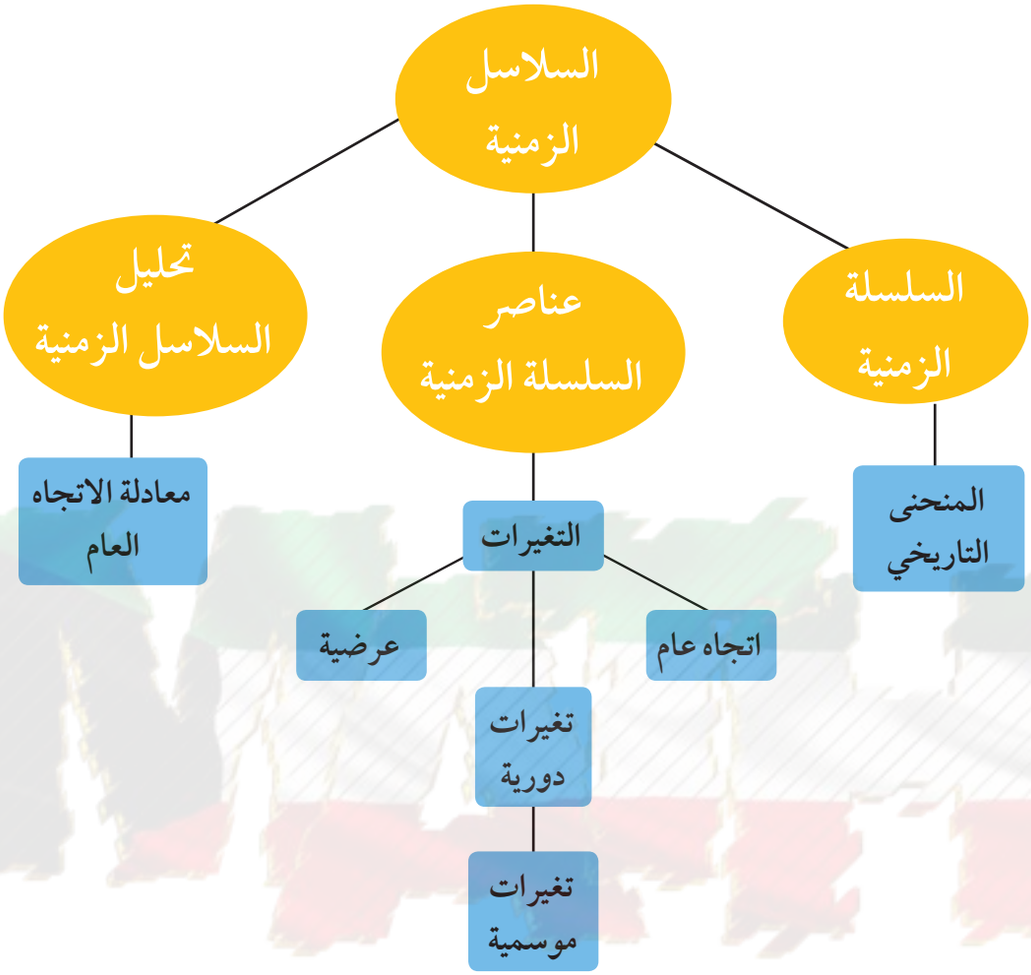
أ كوّن جدولًا كما في «المرشد لحل المسائل» مستخرجًا المعطيات من الرسم البياني للخط المنكسر.

ب ما هو العدد المتوقع للتطبيقات في الربع الرابع من سنة ٢٠١٥؟

جـ ما هو مقدار الخطأ في الربع الرابع من سنة ٢٠١٠؟

Kuwaitedu.com

مخطط تنظيمي للوحدة الثالثة



KuwaitMath.com

ملخص

- السلسلة الزمنية هي مجموعة قيم تأخذها ظاهرة ما في فترات زمنيّة مختلفة.
- المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية هو الخط المنكسر الذي يربط النقاط الممثلة للبيانات.
- الاتجاه العام هو الاتجاه الذي تأخذه السلسلة على مدّة طويلة من الزمن.
- الاتجاه العام للسلسلة يمكن أن يكون تصاعديًّا أو تنازليًّا أو كليهما معًا.
- التغيرات الموسمية هي تغيرات تتكرّر بانتظام خلال فترات معيّنة من الزمن تكون مدّتها أقل من سنة.
- التغيرات الدورية هي تغيرات على فترة طويلة المدى أي أكثر من سنة.
- التغيرات العرضية هي تغيرات فجائية تعود إلى الصدفة البحتة أو إلى أمور يصعب تكهنها.
- معادلة الاتجاه العام تستخدم في عملية التكهن بقيم الظاهرة لفترات زمنية مستقبليّة. وتعطى بالقاعدة:

$$\hat{ص} = أ + ب\ س$$

حيث: $ب = \dfrac{ن\left(\sum س\ ص\right) - \left(\sum س\right)\left(\sum ص\right)}{ن\left(\sum س^{٢}\right) - \left(\sum س\right)^{٢}}$ ، $أ = \overline{ص} - ب\ \overline{س}$

KuwaitMath.com