الوحدة الأولى

التقدير واختبارات الفروض

Estimation and Hypotheses Testing

مشروع الوحدة: ما هي أفضل طريقة لإيجاد وظيفة؟

١ مقدمة المشروع: بعد التخرج يواجه الحاصلون على الإجازات والشهادات الجامعيّة تحدّ جديد هو الانخراط في سوق العمل.

٢ الهدف: هو البحث عن فرص عمل من خلال القيام بعدة خطوات ومحاولات متنوعة واستخدام العديد من الوسائل.

٣ اللوازم: حاسوب - شبكة الإنترنت.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ كيف ستختار عينة عشوائية من الموظفين للاستفسار عن الوسيلة التي استخدموها في إيجاد وظيفتهم؟

ب ما الخيارات التي اكتشفتها؟ نظّمها في استمارة.

(إرشاد):

- من خلال الأصدقاء والمعارف.
- من خلال الإعلانات في الصحف والمجلات.
- من خلال الوكالات المختصة في الربط بين سوق العمل وطالبي الوظائف.
- من خلال البحث عبر شبكة الإنترنت.
- من خلال التقدم مباشرة لطلب وظيفة من الشركة المختصة أو اعتماد وسيلة أخرى (اذكرها...).

ج حدّد النسب المئوية لكل خيار ممّا سبق.

٥ التقرير: اكتب تقريرًا مفصلًا يحدّد النسب التي حصلت عليها من خلال العينة العشوائيّة التي اعتمدتها مكونًا جدولًا بالنسب المئوية عن كل وسيلة تمّ استخدامها لإيجاد وظيفة.

القرار: ضمّن تقريرك بعض الاقتراحات والنصائح والاستنتاجات التي نتجت عن تلك الدراسة.

دروس الوحدة

١-١ التقدير	١-٢ اختبارات الفروض الإحصائية
(١-١-أ) التقدير بنقطة	(١-٢-أ) σ معلومة
(١-١-ب) التقدير بفترة الثقة	(١-٢-ب) σ غير معلومة، ن > ٣٠
	(١-٢-ج) σ غير معلومة، ن ≤ ٣٠

الوحدة الأولى

أضف إلى معلوماتك

في الوسائل الإعلامية المرئية والمسموعة والمكتوبة تطالعك نتائج إحصائية تتحدث عن توقعات أحداث معينة تتناول انتخابات نيابية أو رئاسية أو مبيعات أو مباريات... وأكثر ما يستوقفك هو نسبة مئوية معينة مع هامش خطأ محدد والسؤال المهم هو: كيف يتم التقدير وكيف يحتسب هامش الخطأ؟ توفر دروس هذه الوحدة فرصة أمام الطلاب للتعرّف على التقدير وهامش الخطأ والفروض الإحصائية وكيفية احتسابها.

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت مقاييس النزعة المركزية: المتوسط الحسابي - الوسيط - المنوال.
- تعلمت المجتمع الإحصائي.
- تعلمت العينة واستخداماتها.

ماذا سوف تتعلم؟

- يُعرّف المعلمة والإحصاءة.
- إيجاد التقدير بنقطة.
- إيجاد التقدير بفترة ثقة.
- استكشاف الفروض الإحصائية.
- يُعرّف الاختبارات الإحصائية.
- اتخاذ القرار المناسب.

المصطلحات الأساسية

المعلمة - الإحصاءة - التقدير - التقدير بنقطة - فترة الثقة - الفروض الإحصائية - المقياس الإحصائي - فرض العدم - فرض البديل - القرار - مستوى المعنوية - درجات الحرية.

١ – ١

التقدير

Estimation

سوف تتعلم

- إيجاد التقدير بنقطة.
- إيجاد التقدير بفترة ثقة.

دعنا نفكر ونتناقش

متوسط درجات طلّاب الصف الثاني عشر في مادّة الرياضيات (حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة) في ٥ مدارس بالكويت $\overline{س} = ٨١$

- هل يمكن استخدام هذه العيّنة لتقدير متوسّط الدرجات في كافة مدارس الكويت؟
- ما هي أفضل وسيلة للتقدير لنقترب من الحقيقة؟

سبق لنا في الصف الحادي عشر تعريف المجتمع الإحصائي والعينة العشوائية والأسباب التي تؤدي إلى أخذ العينات لدراسة المجتمع بدلًا من الحصر الشامل، وذلك لتقدير الوسط الحسابي للمجتمع μ أو الانحراف المعياري له σ.

ويعتبر الوسط الحسابي للمجتمع μ والانحراف المعياري للمجتمع σ من معالم المجتمع، وعادة ما تكون هذه المعالم مجهولة.

ولتقدير هذه المعالم نلجأ إلى سحب عينة عشوائية منه، ثم نحسب المتوسط الحسابي للعينة $\overline{س}$ أو الانحراف المعياري $ع$ والذي يعتمد على قيم العينة ولا يعتمد على معالم المجتمع.

ملاحظة:
سنعتبر أن المجتمع الذي أخذت منه العينة يتبع التوزيع الطبيعي المعياري.

المعلمة (Parameter):
هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.

الإحصاءة (Statistic Function):
هو اقتران تتعين قيمته من العينة كالمتوسط الحسابي $\overline{س}$ أو الانحراف المعياري $ع$.

تقدير المعلمة (Parameter Estimate):
هو إحصاءة تعتمد على قيم العينة وتعكس قيمة قريبة لمعلمة المجتمع ككلّ وتوزيعه.

في هذا الدرس سوف تتعرف طريقتين تساعدان على إيجاد قيم تقديرية لبعض معالم مجتمع معين:

- **طريقة أولى:** التقدير بنقطة.
- **طريقة ثانية:** التقدير بفترة الثقة.

(١–١–أ) التقدير بنقطة **Point Estimate**

التقدير بنقطة هي قيمة وحيدة محسوبة من العينة تستخدم لتقدير معلمة مجهولة من معالم المجتمع.

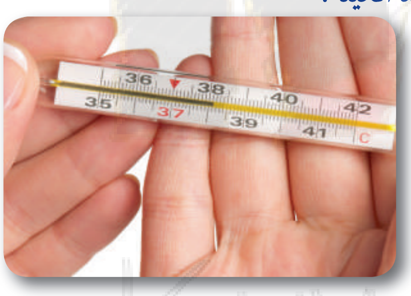
فمثلًا المتوسط الحسابي للعينة العشوائية $\overline{\text{س}}$ يستخدم كتقدير بنقطة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ، وكذلك الانحراف المعياري للعينة ع يستخدم كتقدير بنقطة للانحراف المعياري للمجتمع σ.

مثال (١)

تبيّن البيانات التالية معدّل درجة الحرارة عند ٤٠ شخصًا بحالة صحية جيدة:

٣٧	٣٧	٣٦,٧	٣٦,٧	٣٧,٢	٣٦,٩	٣٦,٩	٣٦,٩	٣٦,٩	٣٧,٤
٣٧,١	٣٧	٣٦,١	٣٦,١	٣٧,١	٣٦,٤	٣٦,٥	٣٧,١	٣٦,٦	٣٦,٦
٣٦,٨	٣٦,٩	٣٦,٤	٣٧	٣٦,٣	٣٧,٢	٣٧	٣٧,٥	٣٦,٤	٣٦,٣
٣٦,٤	٣٦,٨	٣٧,٥	٣٧,١	٣٧,٤	٣٦,٨	٣٦,٧	٣٧	٣٧	٣٦,٢

استخدم هذه العينة لقيم معدل درجة الحرارة لتوجد أفضل تقدير بنقطة للمتوسط الحسابي μ لمعدل درجة حرارة مجتمع أخذت منه هذه العينة.



الحل:

نوجد المتوسط الحسابي $\overline{\text{س}}$ لقيم البيانات في العينة التي تمثل معدل درجة الحرارة عند ٤٠ شخصًا بحالة صحية جيدة.

نوجد المتوسط الحسابي $\overline{\text{س}}$ لقيم البيانات في العينة التي تمثل معدل درجة الحرارة عند ٤٠ شخصًا بحالة صحية جيدة.

$$\overline{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}_{\text{ر}}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{١٤٧٢,٨}{٤٠} = ٣٦,٨٢^\circ$$

$\therefore$ القيمة التقديرية للمتوسط الحسابي μ لمعدل درجة حرارة المجتمع الذي أخذت منه هذه البيانات هي $\mu = ٣٦,٨٢^\circ$

حاول أن تحل

(١) تبيّن البيانات التالية درجات ٤٠ طالبًا في مادة الرياضيات حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة.

١٦، ١٥، ١٤، ١٧، ١٨، ١٩، ١٧، ١٥، ١٤، ١٣، ١٢، ١٣، ٩، ١٠، ١٢، ١٤، ٨، ١٦، ١٩، ٧،
١٤، ١٥، ١٦، ١٨، ١٠، ١١، ٩، ٨، ١٥، ١٢، ١٩، ١٤، ١٠، ١١، ١٥، ١٦، ١٤، ١٧، ١٨، ١٦.

استخدم هذه العينة لقيم الدرجات لتوجد التقدير بنقطة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ الذي أخذت منه هذه العينة.

(١–١–ب) التقدير بفترة الثقة Confidence Interval Estimation

علمنا مما سبق أن لكل مجتمع معالم منها المتوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ، ودرسنا كيفية إيجاد التقدير بنقطة لتلك المعالم. وعلمنا أن التقدير بنقطة لإحدى معالم المجتمع هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة وبالتالي فإن احتمال الخطأ في التقدير بنقطة يكون كبيرًا. ولذلك فإنه من الأفضل إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو باحتمال معين. إن مثل هذه الفترة تسمى **فترة الثقة**.

فترة الثقة Confidence Interval

تعريف: فترة الثقة

هي فترة طرفاها متغيران عشوائيان (أي أنها فترة عشوائية) تستخدم لتقدير إحدى معالم المجتمع.

وهذه الفترة تحوي إحدى معالم المجتمع بنسبة معينة تسمى مستوى الثقة، فمثلًا إذا كان مستوى الثقة ٩٥٪ فإن نسبة الخطأ في التقدير تكون ٥٪

يرمز لمستوى الثقة بالرمز ١٠٠٪ $(1 - \alpha)$ حيث $(1 - \alpha)$ هو معامل مستوى الثقة و α هي نسبة الخطأ في التقدير.

وعلى سبيل المثال:

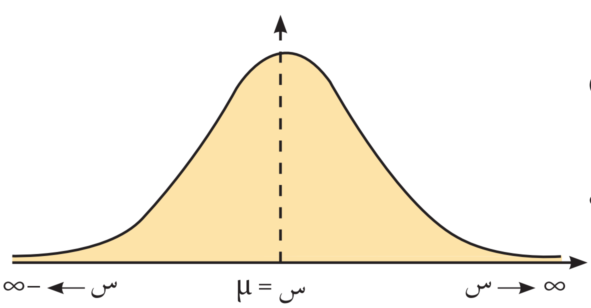
- إذا كان مستوى الثقة ٩٠٪ فإن مستوى المعنوية α = ٠,١٠
- وإذا كان مستوى الثقة ٩٥٪ فإن مستوى المعنوية α = ٠,٠٥
- أيضًا إذا كان مستوى الثقة ٩٩٪ فإن مستوى المعنوية α = ٠,٠١

ومن هذه الخيارات الثلاثة، يعتبر مستوى الثقة ٩٥٪ هو الأكثر انتشارًا لأنه يؤمن التوازن الأنسب بين الدقة الموضحة من خلال طول فترة الثقة والدقة الموضحة من خلال مستوى الثقة.

منحنى التوزيع الطبيعي Curve of Normal Distribution

تعرفنا فيما سبق على بيان منحنى التوزيع الطبيعي، وعلمنا من خواص التوزيع الطبيعي ما يلي:

- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.
- يكون بيان المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره (س = μ).
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى +∞ وإلى −∞ (لا يقطع المحور الأفقي).
- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح (وحدة مساحة).



المستقيم الرأسي س = μ يقسم المساحة تحت المنحنى إلى منطقتين متماثلتين مساحة كل منهما تساوي نصف وحدة مساحة كما في الشكل.

منحنى التوزيع الطبيعي المعياري

Curve of Standard Normal Distribution

إذا كان المتوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي μ = صفر والانحراف المعياري σ = ١

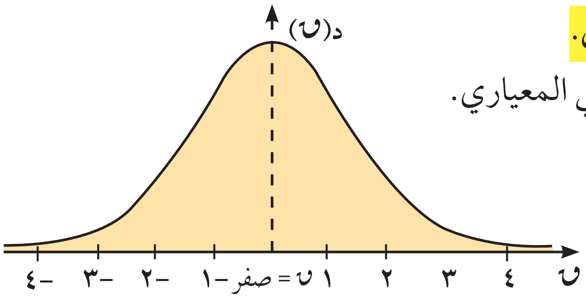
يسمى التوزيع الطبيعي **بالتوزيع الطبيعي المعياري**.

الشكل المرسوم يمثّل بيان منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

المستقيم ى = صفر هو محور التماثل للمنحنى.

تأخذ ى قيم موجبة وتزداد جهة اليمين بينما

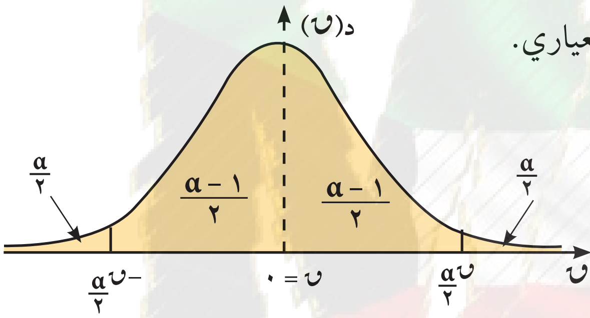
تأخذ ى قيمًا سالبة وتنقص جهة اليسار.



القيمة الحرجة

Critical Value

الشكل المرسوم يبيّن منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.



- نعلم أن المساحة تحت المنحنى الطبيعي تساوي الواحد (وحدة المساحة) ولتمثيل $(١-\alpha)$ من المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري نحصر هذه المساحة بين حدين رأسيين متساويي البعد عن المحور الرأسي كما هو موضّح في الشكل.

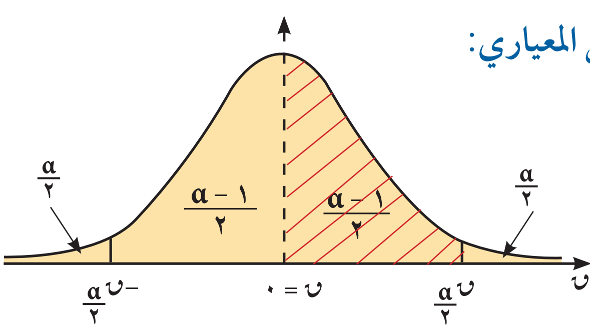
نلاحظ أن المحور الرأسي يقسم المساحة $(١ - \alpha)$ إلى نصفين كل منهما يساوي $\frac{١ - \alpha}{٢}$.

تكون المساحة المتبقية من المساحة الكلية هي α موزعة على طرفي المنحنى بالتساوي كل منها يساوي $\frac{\alpha}{٢}$.

- نعبّر عن الحدين الرأسيين بالرمز $ى_{\frac{\alpha}{٢}} = ى_{\frac{١-\alpha}{٢}}$ وبالرمز $-ى_{\frac{\alpha}{٢}} = -ى_{\frac{١-\alpha}{٢}}$، حيث $ى_{\frac{\alpha}{٢}}$ يفصل مساحة $\frac{\alpha}{٢}$ من ذيل الطرف الأيمن ومساحة $\frac{١ - \alpha}{٢}$ من المستقيم ى = صفر، بينما $-ى_{\frac{\alpha}{٢}}$ يفصل مساحة $\frac{\alpha}{٢}$ من ذيل الطرف الأيسر ومساحة $\frac{١ - \alpha}{٢}$ من المستقيم ى = صفر.
- تسمى القيمة الموجبة $ى_{\frac{\alpha}{٢}}$ **بالقيمة الحرجة (Critical Value)**.

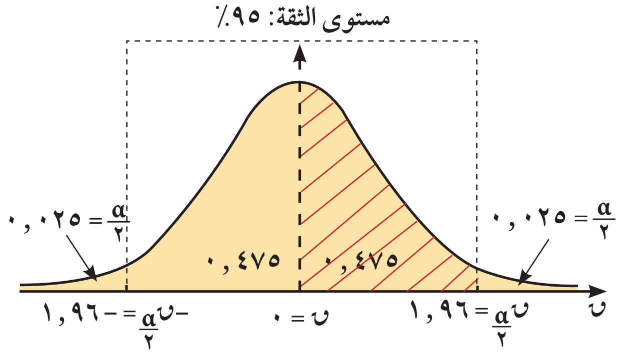
إيجاد القيمة الحرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

لإيجاد قيمة $ى_{\frac{\alpha}{٢}}$ المناظرة للمساحة تحت المنحنى نحسب المساحة $\frac{١ - \alpha}{٢}$ التي تقع على يسار $ى_{\frac{\alpha}{٢}}$ ويمين الصفر أي في الفترة $[٠ ، ى_{\frac{\alpha}{٢}}]$ ثم نكشف عنها في الجدول المرفق في نهاية الوحدة حيث العمود الأول قيم ى ابتداءً من ٠,٠ وحتى ٣,١٠ وأكثر. والصف الأول يمثل الأجزاء من المئة لقيم ى، ومنه يمكن تحديد قيمة $ى_{\frac{\alpha}{٢}}$.



مثال (٢)

أوجد القيمة الحرجة $ن_{\frac{\alpha}{٢}}$ المناظرة لمستوى ثقة ٩٥٪ باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.



الحل:

∵ مستوى الثقة هو ٩٥٪

∴ $١ - \alpha = ٠,٩٥$

∴ $\frac{١ - \alpha}{٢} = \frac{٠,٩٥}{٢} = ٠,٤٧٥$

نبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري

عن قيمة ن المناظرة للعدد ٠,٤٧٥٠

فنجد $ن_{\frac{\alpha}{٢}} = ن_{٠,٤٧٥٠} = ١,٩٦$

حاول أن تحل

٢ أوجد القيمة الحرجة $ن_{\frac{\alpha}{٢}}$ المناظرة لمستوى ثقة ٩٧٪ باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

مثال (٣)

أوجد القيمة الحرجة $ن_{\frac{\alpha}{٢}}$ المناظرة لمستوى ثقة ٩٠٪ باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

الحل:

∵ مستوى الثقة هو ٩٠٪

∴ $١ - \alpha = ٠,٩٠$

∴ $\frac{١ - \alpha}{٢} = \frac{٠,٩٠}{٢}$

$= ٠,٤٥$

نبحث في الجدول عن القيمة ٠,٤٥٠٠ فنجدها تقع بين القيمتين ٠,٤٤٩٥ ، ٠,٤٥٠٥

أي أن $ن_{\frac{\alpha}{٢}}$ تقع بين ١,٦٤ ، ١,٦٥

لذا نأخذ المتوسط الحسابي للقيمتين ١,٦٤ ، ١,٦٥ كتقدير لقيمة $ن_{\frac{\alpha}{٢}}$

∴ $ن_{\frac{\alpha}{٢}} = \frac{١,٦٤ + ١,٦٥}{٢} = \frac{٣,٢٩}{٢}$

∴ $ن_{\frac{\alpha}{٢}} = ١,٦٤٥$

حاول أن تحل

٣ أوجد القيمة الحرجة $ن_{\frac{\alpha}{٢}}$ المناظرة لمستوى ثقة ٩٩٪، باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

هامش الخطأ — Margin of Error

أوّلًا: الخطأ بالتقدير بنقطة — Point Estimation Error

علمنا فيما سبق أنه يمكن استخدام المتوسط الحسابي للعينة $\overline{س}$ كتقدير بنقطة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ.

ومن المتوقع أن تكون قيمة المتوسط الحسابي للعينة $\overline{س}$ غير مساوية لقيمة المتوسط الحسابي للمجتمع μ.

تسمى **القيمة المطلقة للفرق بين القيمتين السابقتين بالخطأ المعياري**

وتساوي $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$ حيث σ الانحراف المعياري للمجتمع، ن عدد قيم العينة (أو حجم العينة).

ثانيًا: الخطأ بالتقدير بفترة — Interval Estimation Error

والآن نتعرض للخطأ بالتقدير بفترة فعندما نستخدم عينة لتقدير المتوسط الحسابي لمجتمع μ، يكون الخطأ في التقدير هو القيمة المطلقة للفرق بين المتوسط الحسابي للعينة $\overline{س}$، والمتوسط الحسابي للمجتمع μ ويعرف هامش الخطأ هـ :

$هـ = ن_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$ باحتمال $(1 - \alpha)$، حيث α تعبر عن نسبة الخطأ في التقدير.

وحتى يكون هامش الخطأ أقل ما يمكن يجب أن تتحقق المتباينة:

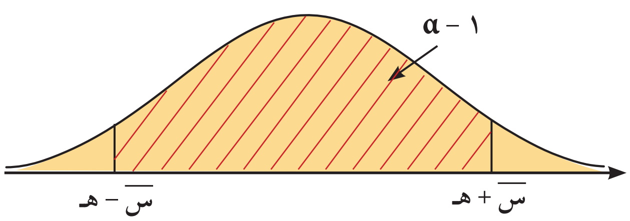
$$|\overline{س} - \mu| < هـ$$

أي أن: $$|\mu - \overline{س}| < هـ$$

$$-هـ < \mu - \overline{س} < هـ$$

$$\overline{س} - هـ < \mu < \overline{س} + هـ$$

وعليه تكون **فترة الثقة هي** $(\overline{س} - هـ \ ،\ \overline{س} + هـ)$



التقدير بفترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ Confidence Interval Estimation for the Mean Value μ of Statistical Population

أوّلًا: إذا كان التباين للمجتمع σ^2 معلوم

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها ن من مجتمع طبيعي ط$(\mu، \sigma^2)$ وتباينه σ^2 معلوم فإن تقدير فترة الثقة ١٠٠٪ $(1 - \alpha)$ للمتوسط الحسابي μ هي: $(\overline{س} - هـ ، \overline{س} + هـ)$

حيث $\overline{س}$ المتوسط الحسابي للعينة، هـ هامش الخطأ.

وتسمى القيمتان $\overline{س} - هـ$ ، $\overline{س} + هـ$ **طرفي فترة الثقة.**

ملاحظة: عند إيجاد فترة الثقة ١٠٠٪ $(1 - \alpha)$ سنكتفي بمستوى الثقة ٩٥٪ والتي تناظرها القيمة الحرجة $ى_{\frac{\alpha}{2}}$ = ١,٩٦ (من جدول التوزيع الطبيعي المعياري).

تفسير فترة الثقة

عند اختيار عينات عشوائية مختلفة متساوية في الحجم (ن) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن ٩٥٪ من فترات الثقة هذه تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع (μ).

فمثلًا عند اختيار ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم نفسه (ن) وفي كل مرة نحسب $\overline{س}$ وفترة الثقة فإننا نتوقع أن ٩٥ فترة تحوي μ الحقيقية و٥ فترات لا تحويها.

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

إذا كانت σ^2 معلومة حيث ن > ٣٠ أو ن ≥ ٣٠

١ نوجد القيمة الحرجة $ى_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة ٩٥٪ وهي ١,٩٦.

٢ نوجد هامش الخطأ هـ = $ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$

٣ نوجد فترة الثقة $(\overline{س} - هـ ، \overline{س} + هـ)$.

مثال (٤)

أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الإناث ن = ٤٠ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث σ = ١٢,٥ والمتوسط الحسابي للعينة $\overline{\text{س}}$ = ٧٦,٣. باستخدام مستوى ثقة ٩٥٪.

١ أوجد هامش الخطأ.

٢ أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

٣ فسّر فترة الثقة.

الحل:

١ ∵ مستوى الثقة ٩٥٪ ∴ القيمة الحرجة $\text{ى}_{\frac{\alpha}{2}}$ = ١,٩٦

بما أن σ معلومة ∴ هامش الخطأ هـ = $\text{ى}_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}}$

∵ ن = ٤٠ ، σ = ١٢,٥ ، $\overline{\text{س}}$ = ٧٦,٣

∴ هـ = ١,٩٦ × $\frac{١٢,٥}{\sqrt{٤٠}}$

هـ ≈ ٣,٨٧٣٨

٢ فترة الثقة هي ($\overline{\text{س}}$ − هـ ، $\overline{\text{س}}$ + هـ)

= (٧٦,٣ − ٣,٨٧٣٨ ، ٧٦,٣ + ٣,٨٧٣٨)

= (٧٢,٤٢٦٢ ، ٨٠,١٧٣٨)

٣ عند اختيار ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم نفسه (ن = ٤٠) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقّع أن ٩٥ فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ.

حاول أن تحل

٤ من المثال (٤)، إذا أجريت الدراسة على عينة أخرى من الإناث حجمها ١٠٠ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث σ = ٣,٦ والمتوسط الحسابي للعينة $\overline{\text{س}}$ = ١٨,٤ باستخدام مستوى ثقة ٩٥٪

١ أوجد هامش الخطأ.

٢ أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

٣ فسّر فترة الثقة.

مثال (٥)

أجريت دراسة لعينة من ١٨ طالبًا حول متوسط عدد ساعات استخدام الألواح الذكية (TABLETS) أسبوعيًّا. فإذا كان الانحراف المعياري σ = ١,٨ والمتوسط الحسابي للعينة $\overline{\text{س}}$ = ١٥، باستخدام مستوى ثقة ٩٥٪

١ أوجد هامش الخطأ.

٢ أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

٣ فسّر فترة الثقة.

الحل:

١ ∵ مستوى الثقة ٩٥٪ ∴ القيمة الحرجة $ك_{\frac{\alpha}{2}}$ = ١,٩٦

∵ σ معلومة ∴ هامش الخطأ هـ = $ك_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$

∵ ن = ١٨ ، σ = ١,٨ ، $\overline{\text{س}}$ = ١٥

∴ هـ = ١,٩٦ × $\frac{١,٨}{\sqrt{١٨}}$

هـ ≈ ٠,٨٣١٦

٢ فترة الثقة هي ($\overline{\text{س}}$ − هـ ، $\overline{\text{س}}$ + هـ)

= (١٥ − ٠,٨٣١٦ ، ١٥ + ٠,٨٣١٦)

= (١٤,١٦٨٤ ، ١٥,٨٣١٦)

٣ عند اختيار ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم نفسه (ن = ١٨) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقّع أن ٩٥ فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ.

حاول أن تحل

٥ أجريت دراسة لعينة من ٢٤ طالبًا حول متوسط عدد ساعات مشاهدة التلفزيون أسبوعيًّا. فإذا كان الانحراف المعياري σ = ٢,٥ والمتوسط الحسابي للعينة $\overline{\text{س}}$ = ٢١، باستخدام مستوى ثقة ٩٥٪

١ أوجد هامش الخطأ.

٢ أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

٣ فسّر فترة الثقة.

ثانيًا: إذا كان التباين للمجتمع $\sigma^٢$ غير معلوم وحجم العينة ن > ٣٠

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

إذا كانت $\sigma^٢$ غير معلومة حيث ن > ٣٠

١ نوجد القيمة الحرجة $ل_{\frac{\alpha}{٢}}$ المناظرة لمستوى ثقة ٩٥٪ وهي ١,٩٦

٢ نوجد هامش الخطأ هـ = $ل_{\frac{\alpha}{٢}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$

٣ نوجد فترة الثقة ($\overline{س}$ − هـ ، $\overline{س}$ + هـ).

مثال (٦)

عينة عشوائية حجمها ٣٦، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة ٦٠ وتباينها ١٦، باستخدام مستوى ثقة ٩٥٪

١ أوجد هامش الخطأ.

٢ أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

٣ فسّر فترة الثقة.

الحل:

١ ∵ مستوى الثقة ٩٥٪ ∴ القيمة الحرجة $ل_{\frac{\alpha}{٢}}$ = ١,٩٦

∵ σ غير معلوم ، ن > ٣٠ ∴ هامش الخطأ هـ = $ل_{\frac{\alpha}{٢}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$

∵ التباين ع^٢ = ١٦

∴ الانحراف المعياري ع = ٤

$\overline{س}$ = ٦٠ ، ن = ٣٦

هـ = ١,٩٦ × $\frac{٤}{\sqrt{٣٦}}$

≈ ١,٣٠٦٦

٢ فترة الثقة هي ($\overline{س}$ − هـ ، $\overline{س}$ + هـ)

= (٦٠ − ١,٣٠٦٦ ، ٦٠ + ١,٣٠٦٦)

= (٥٨,٦٩٤٣ ، ٦١,٣٠٦٦)

٣ عند اختيار ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم نفسه (ن = ٣٦) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقّع أن ٩٥ فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ.

حاول أن تحل

٦ **أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها ن = ٨١ ومتوسطها الحسابي $\overline{س}$ = ٥٠، وانحرافها المعياري ع = ٩، باستخدام مستوى ثقة ٩٥٪**

١ **أوجد هامش الخطأ.**

٢ **أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.**

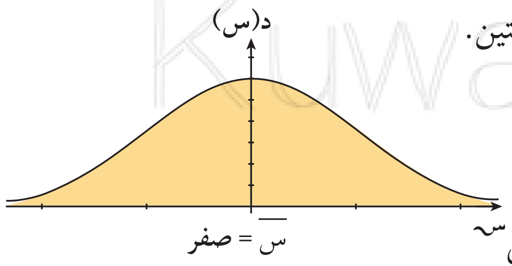
٣ **فسّر فترة الثقة.**

ثالثًا: إذا كان التباين للمجتمع $\sigma^{٢}$ غير معلوم وحجم العينة ن ≤ ٣٠.

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها ن من مجتمع طبيعي تباينه $\sigma^{٢}$ غير معلوم وحجم العينة ن ≤ ٣٠ فإن توزيع العينة لا يؤول إلى التوزيع الطبيعي وفي هذه الحالة يلزمنا استخدام توزيع آخر هو توزيع ت للعينات الصغيرة التي حجمها ن ≤ ٣٠ ويكون تقدير فترة الثقة ١٠٠٪ (١ − α) للمتوسط الحسابي μ هي ($\overline{س}$ − هـ ، $\overline{س}$ + هـ) حيث $\overline{س}$ المتوسط الحسابي للعينة، هـ هامش الخطأ.

خواص التوزيع ت Properties of t Distribution

١ توزيع متماثل حول متوسطه الحسابي والذي يساوي صفرًا، ويمتد إلى ∞ من جهة اليمين وإلى −∞ من جهة اليسار ويزداد قربًا من الصفر في الجهتين.



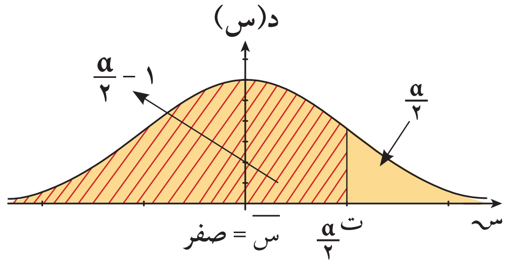
٢ انحرافه المعياري أكبر من الواحد.

٣ يعتمد هذا التوزيع على درجات الحرية والتي تساوي (حجم العينة − ١) أي (ن − ١).

٤ التوزيع ت يشبه التوزيع الطبيعي إلّا أن قمته أكثر انخفاضًا من التوزيع الطبيعي.

٥ كلما زادت درجات الحرية اقترب هذا التوزيع من التوزيع الطبيعي ويقترب انحرافه المعياري إلى الواحد الصحيح.

إيجاد القيمة الحرجة من جدول توزيع ت.



- لإيجاد القيمة الحرجة من جدول توزيع ت حيث يبيّن العمود الأول قيم درجات الحرية (ن − ١) وتبدأ من ١ إلى ٣٠ وأكثر والصف الأول يمثّل قيم $\frac{\alpha}{2}$ ومنه يمكن تحديد $ت_{\frac{\alpha}{2}} = ت_{١ - \frac{\alpha}{2}}$.

مثال (٧)

أخذت عينة عشوائية بسيطة حجمها ن = ٢٣ من مجتمع طبيعي.

أوجد القيمة الحرجة $ت_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى الثقة ٩٥٪ باستخدام جدول التوزيع ت.

الحل:

∵ ن = ٢٣

∴ درجات الحرية (ن − ١) = ٢٣ − ١

= ٢٢

∵ مستوى الثقة هو ٩٥٪

∴ ١ − α = ٠,٩٥

α = ٠,٠٥

$\frac{\alpha}{2}$ = ٠,٠٢٥

ومن جدول التوزيع ت

تكون قيمة $ت_{\frac{\alpha}{2}} = ت_{٠,٠٢٥}$ = ٢,٠٧٤

حاول أن تحل

٧ أخذت عينة عشوائية بسيطة حجمها ن = ٢٠ من مجتمع طبيعي.

أوجد القيمة الحرجة $ت_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى الثقة ٩٥٪ باستخدام جدول التوزيع ت.

والآن، بعد أن علمنا كيف نوجد القيم الحرجة ت$_{\frac{\alpha}{2}}$، يمكننا أن نوجد هامش الخطأ هـ وفترة الثقة.

هامش الخطأ للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ (في حالة $\sigma^{٢}$ غير معلوم، ن ≥ ٣٠)

Margin of Error for Mean Value of Statistical Population Where σ^2 is not known and $n \geq 30$

هـ = ت$_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$ حيث ع الانحراف المعياري للعينة

فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ (في حالة $\sigma^{٢}$ غير معلوم، ن ≥ ٣٠)

Confidence Interval for Mean Value of Statistical Population where σ^2 is not known and $n \leq 30$

($\overline{س}$ − هـ ، $\overline{س}$ + هـ)

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

إذا كانت $\sigma^{٢}$ غير معلومة، ن ≥ ٣٠

١ نوجد درجات الحرية (ن − ١).

٢ نوجد القيمة الحرجة ت$_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة ٩٥٪ من جدول توزيع ت.

٣ نوجد هامش الخطأ هـ = ت$_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$

٤ نوجد فترة الثقة ($\overline{س}$ − هـ ، $\overline{س}$ + هـ).

مثال (٨)

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها ن = ٢٥، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة ($ع_م$) يساوي ١٠ ومتوسطها الحسابي ($\overline{س}$) يساوي ١٥، استخدم مستوى ثقة ٩٥٪ لإيجاد:

١ هامش الخطأ.

٢ فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

الحل:

١ ∵ σ^2 غير معلوم، ن ≤ ٣٠

∴ نستخدم توزيع ت.

∵ ن = ٢٥

∴ درجات الحرية (ن − ١) = ٢٥ − ١ = ٢٤

∵ مستوى الثقة ١ − α = ٩٥٪

∴ ١ − α = ٠,٩٥ ⇐ α = ٠,٠٥٠

∴ $\frac{\alpha}{2}$ = ٠,٠٢٥

من جدول توزيع ت تكون قيمة $ت_{\frac{\alpha}{2}}$ = $ت_{٠,٠٢٥}$ = ٢,٠٦٤

هامش الخطأ هـ = $ت_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{ع_م}{\sqrt{ن}}$

هـ = ٢,٠٦٤ × $\frac{١٠}{\sqrt{٢٥}}$

= ٤,١٢٨

٢ فترة الثقة = ($\overline{س}$ − هـ ، $\overline{س}$ + هـ)

= (١٥ − ٤,١٢٨ ، ١٥ + ٤,١٢٨)

= (١٠,٨٧٢ ، ١٩,١٢٨)

حاول أن تحل

٨ أوجد فترة ثقة ٩٥٪ للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ علمًا أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.

إذا كان لدينا $\overline{س}$ = ٨,٤ ، $ع_م$ = ٢,٣ ، ن = ١٣

ويمكن تلخيص الحالات الثلاث السابقة كما في الجدول التالي:

الانحراف المعياري (σ)	حجم العينة (ن)	هامش الخطأ (هـ)	فترة الثقة ($\overline{س}$ − هـ ، $\overline{س}$ + هـ)
معلوم	ن > ٣٠ أو ن ≤ ٣٠	هـ = $ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$	($\overline{س} - ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$ ، $\overline{س} + ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$)
غير معلوم (نستبدل σ بـ ـع)	ن > ٣٠	هـ = $ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$	($\overline{س} - ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$ ، $\overline{س} + ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$)
	ن ≤ ٣٠	هـ = $ت_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$	($\overline{س} - ت_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$ ، $\overline{س} + ت_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$)

مثال (٩)

أخذت عينة عشوائية حجمها ن = ٦٠، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة (ـع) يساوي ١٨ ومتوسطها الحسابي ($\overline{س}$) يساوي ٣٦، استخدم مستوى ثقة ٩٥٪ لإيجاد:

١ هامش الخطأ.

٢ فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

الحل:

١ ∵ σ^2 غير معلوم، ن ≥ ٣٠

∴ القيمة الحرجة $ى_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة ٩٥٪ = ١,٩٦ .

∵ ـع = ١٨، ن = ٦٠

∴ هـ = $ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$

هـ = $١,٩٦ \times \frac{١٨}{\sqrt{٦٠}}$

≈ ٤,٥٥٤٦

٢ فترة الثقة = ($\overline{س}$ − هـ ، $\overline{س}$ + هـ)

= (٣٦ − ٤,٥٥٤٦ ، ٣٦ + ٤,٥٥٤٦)

= (٣١,٤٤٥٤ ، ٤٠,٥٥٤٦)

حاول أن تحل

٩ أخذت عينة عشوائية من ٢٠ نبتة لدراسة نموها. فإذا كان متوسط النمو = ٣٦ سم خلال عام والانحراف المعياري للعينة ٤,٦ سم، استخدم مستوى ثقة ٩٥٪ لإيجاد:

١ هامش الخطأ.

٢ فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

١ ــ ٢

اختبارات الفروض الإحصائية

Satistical Hypotheses Testing

سوف تتعلم

- القيمة الحرجة.
- مستوى المعنوية.
- درجة المعنوية.
- الفروض.
- اختبار الفروض.
- فرض العدم.
- الفرض البديل.

دعنا نفكر ونتناقش

ينتج مصنع نوعًا معينًا من المعلبات مسجّل على العلبة أن الوزن الصافي ٢٠٠ جرام.

فإذا تمّ أخذ عينة حجمها ١٠٠ علبة وتمّ حساب المتوسط الحسابي لأوزان هذه العينة فوجد أنه ١٩٧,٣ جرامًا،

فهل يمكن الحكم على هذا المصنع بأنه يقوم بغش تجاري؟

ما هي حيثيات هذا الحكم؟

نحن نعلم أنه في كثير من الأحيان وفي مواقف معينة نحتاج إلى اتخاذ قرار بناء على معلومات محددة وحيثيات معقولة لها مبررها، لذلك دعت الضرورة إلى دراسة ما يسمى بالفرض الإحصائي واختبارات الفروض الإحصائية.

تعريف: الفرض الإحصائي **Statistic Hypothesis**

هو ادعاء معيّن مبني على حيثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل المتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.

تعريف : المقياس الإحصائي

هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة.

تعريف: اختبارات الفروض الإحصائية (اختبار المعنوية)

هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع.

ملاحظة: سنكتفي في هذا الموضوع بدراسة معلمة واحدة من معالم المجتمع وهي المتوسط الحسابي μ.

إليك بعض الأمثلة عن الفروض التي يمكن اختبارها من خلال الطرق التي سنطوّرها في هذا الدرس.

على سبيل المثال:

- **في إدارة الأعمال:** تدّعي إحدى الصحف في مقال لها أنّ معظم الموظّفين يجدون عملاً عن طريق وكالات التوظيف.
- **في الطب:** يدّعي باحثون في الطبّ أنّ متوسّط درجة حرارة جسم أي بالغ معافى ليست ٣٧° سيليزية.
- **في سلامة الطيران المدنيّ:** تدّعي إدارة الطيران المدني في الكويت أن متوسط وزن المسافر (مع حقائبه) يتعدّى الوزن المسموح منذ عشرين سنة والبالغ ٨٤ كجم.

فرض العدم والفرض البديل Null and Alternative Hypotheses

- فرض العدم ($\text{ف}_{٠}$): يفيد بأنّ قيمة معلمة المجتمع (مثل المتوسّط الحسابي μ) تساوي قيمة مزعومة. نختبر فرض العدم مباشرة أي نفترض بأنّه صحيح ونتوصّل إلى خلاصة برفض أو عدم رفض $\text{ف}_{٠}$.
- الفرض البديل ($\text{ف}_{١}$): يفيد بأن للمعلمة قيمة تختلف نوعًا ما عن فرض العدم ($\text{ف}_{٠}$).
- يضم الشكل الرمزي للفرض البديل أحد هذه الرموز: $<$ أو $>$ أو $\neq$.

وستقتصر دراستنا على الحالة ($\neq$). فمثلًا: $\text{ف}_{٠} : \mu = ٩٨,٦$ ، $\text{ف}_{١} : \mu \neq ٩٨,٦$

الخطوات المتبعة لإجراء اختبار الفروض الإحصائية:

١ صياغة الفروض الإحصائية (فرض العدم $\text{ف}_{٠}$ والفرض البديل $\text{ف}_{١}$).

٢ التحقق من الانحراف المعياري للمجتمع σ (معلوم أم غير معلوم) وتحديد حجم العينة (ن) ومن ثم إيجاد المقياس الإحصائي للاختبار (ں أو ت)، (مسترشدًا بالجدول التالي):

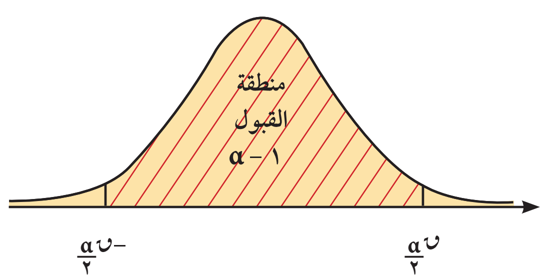
الانحراف المعياري (σ)	المقياس الإحصائي (ں أو ت)	حجم العينة (ن)
معلوم	$\text{ں} = \frac{\bar{\text{س}} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}}}$	لا يشترط حجم معين للعينة
غير معلوم (نستبدل σ بـ ع)	$\text{ں} = \frac{\bar{\text{س}} - \mu}{\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}}$	$\text{ن} > ٣٠$
	$\text{ت} = \frac{\bar{\text{س}} - \mu}{\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}}$	$\text{ن} \leq ٣٠$

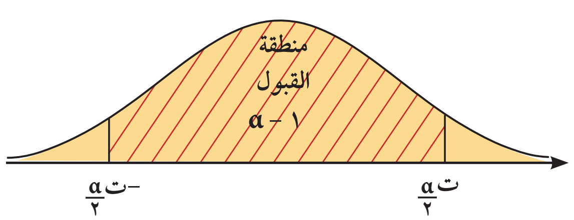
٣ تحديد مستوى المعنوية α وحساب القيمة الجدولية $\text{ں}_{\frac{\alpha}{٢}}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري أو القيمة الجدولية $\text{ت}_{\frac{\alpha}{٢}}$ من جدول ت ذي درجات حرية.

٤ تحديد منطقة القبول: $\left(-\text{ں}_{\frac{\alpha}{٢}} ، \text{ں}_{\frac{\alpha}{٢}}\right)$ أو $\left(-\text{ت}_{\frac{\alpha}{٢}} ، \text{ت}_{\frac{\alpha}{٢}}\right)$ كما هو موضّح بالشكل.

٥ اتخاذ القرار الإحصائي (قبول فرض العدم) أو (رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل).

ملاحظة: ستقتصر دراستنا على مستوى ثقة ٩٥٪





(١–٢–أ) إذا كان الانحراف المعياري لمجتمع σ معلوم

مثال (١)

تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي ٤٠٠٠ دينار كويتي. إذا أخذت عينة من ٢٥ موظفًا، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو ٣٩٥٠ دينارًا كويتيًّا فإذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع σ = ١٢٥ دينارًا، وضّح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى ثقة ٩٥٪

الحل:

١ صياغة الفروض

ف$_0$: μ = ٤٠٠٠ مقابل ف$_1$: $\mu \neq$ ٤٠٠٠

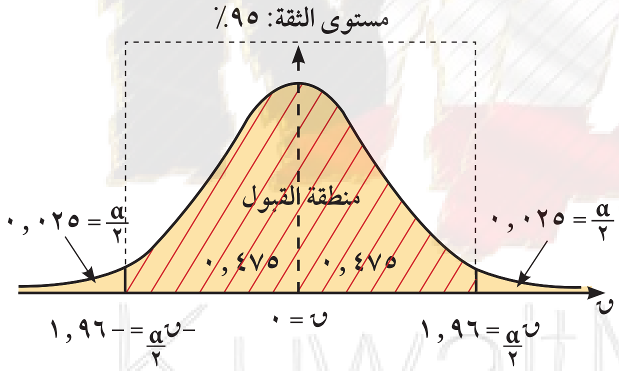
٢ ∵ σ = ١٢٥ (معلومة)

∴ نستخدم المقياس الإحصائي ى : ى = $\dfrac{\bar{س} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}}$

∵ ن = ٢٥ ، $\bar{س}$ = ٣٩٥٠

ى = $\dfrac{\bar{س} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}}$

∴ ى = $\dfrac{٣٩٥٠ - ٤٠٠٠}{\frac{١٢٥}{\sqrt{٢٥}}}$ = −٢



٣ ∵ مستوى الثقة ٩٥٪

∴ α = ٠,٠٥ ⟵ $\frac{\alpha}{2}$ = ٠,٠٢٥

∴ ى$_{\frac{\alpha}{2}}$ = ١,٩٦

٤ منطقة القبول هي (−١,٩٦ ، ١,٩٦)

٥ ∵ −٢ ∉ (−١,٩٦ ، ١,٩٦)

∴ القرار: نرفض فرض العدم μ = ٤٠٠٠ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq$ ٤٠٠٠

حاول أن تحل

١ يزعم صانع إطارات أن متوسط عمر الإطارات التي يصنعها μ = ٢٥٠٠٠ كم.

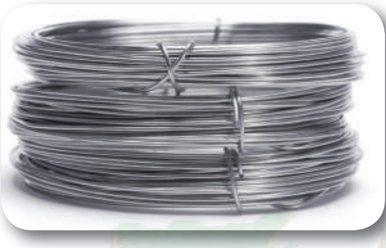
إذا أخذت عينة عشوائية من ١٥ إطارًا وأظهرت أن متوسطها الحسابي $\bar{س}$ = ٢٧٠٠٠ كم.

إذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع = ٥٠٠٠ كم

فوضّح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي لمستوى ثقة ٩٥٪

مثال (٢)

بيّنت الدراسة أن قوة تحمل أسلاك معدنية لها متوسط حسابي μ = ١٨٠٠ كجم مع انحراف معياري σ = ١٥٠ كجم. ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الاسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك، وتأكيدًا على ذلك تمّ اختبار عينة من ٤٠ سلكًا فتبيّن أن متوسط تحمل هذه الأسلاك يساوي ١٨٤٠ كجم.



هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية α = ٠,٠٥؟

الحل:

١ صياغة الفروض:

$ف_{٠}$: μ = ١٨٠٠ مقابل $ف_{١}$: $\mu \neq$ ١٨٠٠

٢ ∵ σ = ١٥٠ (معلومة)

∴ نستخدم المقياس الإحصائي ى : $ى = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}}$

∵ ن = ٤٠ ، $\bar{س}$ = ١٨٤٠

$$ى = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}}$$

∴ $ى = \frac{١٨٤٠ - ١٨٠٠}{\frac{١٥٠}{\sqrt{٤٠}}} \approx ١,٦٨٦٥$

٣ ∴ α = ٠,٠٥ ⟵ $\frac{\alpha}{٢}$ = ٠,٠٢٥

∴ $ى_{\frac{\alpha}{٢}}$ = ١,٩٦

٤ منطقة القبول هي (-١,٩٦، ١,٩٦)

٥ ∵ ١,٦٨٦٥ $\in$ (-١,٩٦، ١,٩٦)

∴ القرار بقبول فرض العدم μ = ١٨٠٠

حاول أن تحل

٢ متوسط العمر لعينة من ١٥٠ مصباحًا كهربائيًا مصنعة في أحد المصانع هو $\bar{س}$ = ١٥٨٠ ساعة بانحراف معياري ع = ١٢٥ ساعة. يقول صاحب المصنع أن متوسط العمر μ = ١٦٢٠ ساعة.

اختبر الفرض μ = ١٦٢٠ ساعة مقابل الفرض $\mu \neq$ ١٦٢٠ ساعة باختيار مستوى معنوية α = ٠,٠٥

(١–٢–ب) إذا كان الانحراف المعياري لمجتمع σ غير معلوم، ن > ٣٠

مثال (٣)

إذا كانت ن = ٨٠ ، $\overline{س}$ = ٣٧,٢ ، $ع_ر$ = ١,٧٩

اختبر الفرض بأن μ = ٣٧ عند مستوى معنوية α = ٠,٠٥

الحل:

١ صياغة الفروض

$ف_٠$: μ = ٣٧ مقابل $ف_١$: $\mu \neq$ ٣٧

٢ ∵ σ غير معلومة ، ن > ٣٠

∴ نستخدم المقياس الإحصائي ت : ت = $\dfrac{\overline{س} - \mu}{\frac{ع_ر}{\sqrt{ن}}}$

∵ ن = ٨٠ ، $\overline{س}$ = ٣٧,٢ ، $ع_ر$ = ١,٧٩

∴ ت = $\dfrac{\overline{س} - \mu}{\frac{ع_ر}{\sqrt{ن}}}$

ت = $\dfrac{٣٧,٢ - ٣٧}{\frac{١,٧٩}{\sqrt{٨٠}}}$ = ٠,٩٩٩

٣ ∵ α = ٠,٠٥ ⟵ $\frac{\alpha}{٢}$ = ٠,٠٢٥

∴ $ت_{\frac{\alpha}{٢}}$ = ١,٩٦

٤ منطقة القبول هي (–١,٩٦ ، ١,٩٦)

٥ ∵ ٠,٩٩٩ ∈ (–١,٩٦ ، ١,٩٦)

∴ القرار بقبول فرض العدم μ = ٣٧

حاول أن تحل

٣ متوسط العمر لعينة من ١٠٠ مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\overline{س}$ = ١ ٥٧٠ ساعة بانحراف معياري $ع_ر$ = ١٢٠ ساعة. يقول صاحب المصنع إنّ متوسط العمر

μ = ١ ٦٠٠ ساعة للمصابيح المصنعة في المصنع.

اختبر صحة الفرض μ = ١ ٦٠٠ ساعة مقابل الفرض $\mu \neq$ ١ ٦٠٠ ساعة وباختيار مستوى معنوية α = ٠,٠٥

(إرشاد: $ف_٠$: μ = ١ ٦٠٠ ، $ف_١$: $\mu \neq$ ١ ٦٠٠).

(١–٢–جـ) إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع σ غير معلوم، ن ≥ ٣٠

مثال (٤)

يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي ٢٩٠ دينارًا كويتيًّا.

فإذا أخذت عينة عشوائية من ١٠ منازل تبيّن أن متوسطها الحسابي $\overline{س}$ = ٢٨٣ دينارًا وانحرافها المعياري عر = ٣٢ دينارًا.

فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟

استخدم مستوى ثقة ٩٥ ٪ (علمًا بأن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًّا).

الحل:

١ صياغة الفروض: ف. : μ = ٢٩٠ مقابل ف١ : $\mu \neq$ ٢٩٠

٢ ∵ σ غير معلومة ، ن = ١٠ (ن ≤ ٣٠)

∴ نستخدم المقياس الإحصائي ت : ت = $\dfrac{\overline{س} - \mu}{\frac{عر}{\sqrt{ن}}}$

∵ ن = ١٠ ، $\overline{س}$ = ٢٨٣ ، عر = ٣٢

ت = $\dfrac{\overline{س} - \mu}{\frac{عر}{\sqrt{ن}}}$

∴ ت = $\dfrac{٢٨٣ - ٢٩٠}{\frac{٣٢}{\sqrt{١٠}}}$ = −٠,٦٩١٧

٣ ∵ مستوى الثقة ٩٥٪ ، درجات الحرية (ن − ١) = ١٠ − ١ = ٩

∴ α = ٠,٠٥ ⟵ $\frac{\alpha}{٢}$ = ٠,٠٢٥

∴ ت$_{\frac{\alpha}{٢}}$ = ٢,٢٦٢

٤ منطقة القبول هي (−٢,٢٦٢ ، ٢,٢٦٢)

٥ ∵ −٠,٦٩١٧ ∈ (−٢,٢٦٢ ، ٢,٢٦٢)

∴ القرار بقبول فرض العدم μ = ٢٩٠

حاول أن تحل

٤ في المثال (٤)، إذا أجريت دراسة إحصائية أخرى على المدينة ذاتها وتبيّن من خلالها أن $\overline{س}$ = ٢٩٦ ، عر = ٥ لعينة من ١٠ منازل مع استخدام درجة الثقة نفسها.
فهل يبقى افتراض المدير عند الشركة صحيحًا أم لا؟ وضّح إجابتك.

المرشد لحل المسائل

نظرًا لأهميّة المياه بالنسبة إلى صحة الإنسان وحياته، قررت مؤسسة تعنى بذلك، القيام بحملة تهدف إلى التأكد من أن كل شخص يستهلك متوسط قدره ٢٠٠٠ ملل يوميًا من مياه الشرب.

في دراسة سابقة لعينة من ١٠٠ شخص، لاحظت المؤسسة أنّ المتوسط الحسابي للاستهلاك: $\bar{س} = ١٨٥٠$ ملل مع انحراف معياري $ع = ٩٠٠$ ملل.

وفي دراسة جديدة لعينة من ١٠٠ شخص، وبعد القيام بحملتها، لاحظت أن المتوسط الحسابي للاستهلاك: $\bar{س} = ١٩٠٠$ ملل مع انحراف معياري $ع = ٣٠٠$ ملل.

اعتقدت المؤسسة أنّ حملتها قد نجحت بما أنّ المتوسط الحسابي للاستهلاك قد ازداد ٥٠ ملل وقد اقترب كثيرًا من هدفها وهو ٢٠٠٠ ملل يوميًا للشخص الواحد. هل المؤسسة على حق؟ اشرح.

الحل:

وضع يوسف جدولًا ليختبر فرضية الشركة من خلال اختبارات إحصائية مع:

$ف_٠ : \mu = ٢٠٠٠$ مقابل $ف_١ : \mu \neq ٢٠٠٠$، ومستوى الثقة ٠,٩٥

	الدراسة السابقة	الدراسة الجديدة
المعايير	$\bar{س} = ١٨٥٠$ ، $ع = ٩٠٠$ ، $ن = ١٠٠$	$\bar{س} = ١٩٠٠$ ، $ع = ٣٠٠$ ، $ن = ١٠٠$
القيمة الجدولية	$ى_{\frac{\alpha}{٢}} = ١,٩٦$	$ى_{\frac{\alpha}{٢}} = ١,٩٦$
قيمة الاختبار الإحصائي	$ى = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}} = \frac{١٨٥٠ - ٢٠٠٠}{\frac{٩٠٠}{\sqrt{١٠٠}}} = -١,٦٦$	$ى = \frac{١٩٠٠ - ٢٠٠٠}{\frac{٣٠٠}{\sqrt{١٠٠}}} = -٣,٣٣$
الفترة	$(-١,٩٦ ، ١,٩٦)$	$(-١,٩٦ ، ١,٩٦)$
القرار	$\because -١,٦٦ \in (-١,٩٦ ، ١,٩٦)$ قبول $ف_٠ : \mu = ٢٠٠٠$ ملل يوميًا	$\because -٣,٣٣ \notin (-١,٩٦٦ ، ١,٩٦٦)$ رفض $ف_٠$ والأخذ بـ $ف_١$: $\mu \neq ٢٠٠٠$ ملل يوميًا

الاستنتاج:

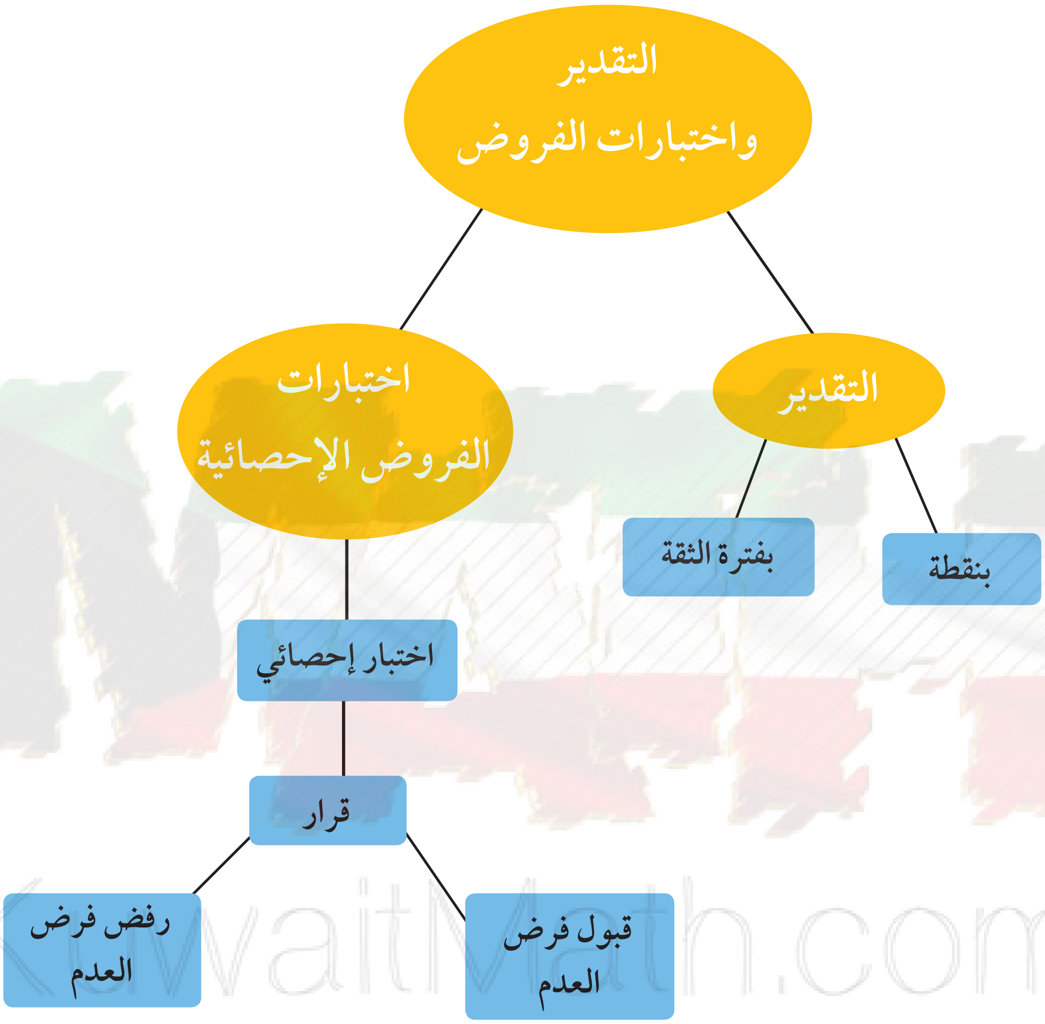
لم تكن الحملة ضرورية، والحصول على قيمة متوسطة أكبر لا يعني الاقتراب من الهدف المنشود.

مسألة إضافية

قامت مؤسسة أخرى بحملة على عينة من ١٠٠ شخص تهدف إلى التأكد من أنّ المتوسط الحسابي لاستهلاك كل شخص لمياه الشرب $\mu = ٢٠٠٠$ ملل يوميًا. فأتت النتائج على الشكل التالي:

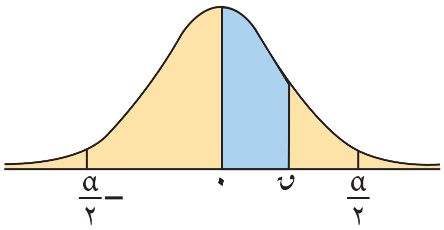
$\bar{س} = ٢١٠٠$ ملل، $ع = ٨٠٠$ ملل. برأيك، هل كانت حملة هذه المؤسسة ناجحة؟

مخطط تنظيمي للوحدة الأولى



ملخص

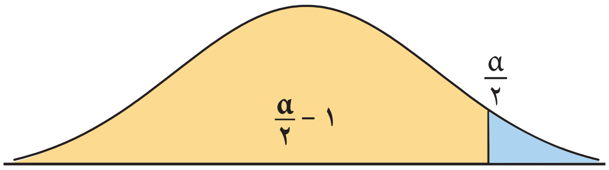
- المعلمة هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.
- الإحصاءة هو اقتران تتعيّن قيمته من العينة كالمتوسط الحسابي $\overline{\text{س}}$ أو الانحراف المعياري ع.
- التقدير بنقطة هي قيمة وحيدة محسوبة من العينة تستخدم لتقدير معلمة مجهولة من معالم المجتمع.
- فترة الثقة هي فترة طرفاها متغيران عشوائيان (أي أنها فترة عشوائية) تحوي إحدى معالم المجتمع بنسبة معينة تسمى درجة الثقة (مستوى الثقة).
- α هي درجة (نسبة) الخطأ في التقدير.
- مستوى الثقة ١٠٠٪ (١ − α) ويسمى (١ − α) عامل مستوى الثقة.
- $\text{ى}_{\frac{\alpha}{٢}}$ هي القيمة الحرجة المستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.
- $\overline{\text{س}}$ هو المتوسط الحسابي للعينة.
- ع هو الانحراف المعياري للعينة.
- $\text{ت}_{\frac{\alpha}{٢}}$ هي القيمة الحرجة المستخرجة من جدول التوزيع ت.
- هامش الخطأ هـ = $\text{ى}_{\frac{\alpha}{٢}} \bullet \frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}}$ في حالة الانحراف المعياري σ معلوم والتوزيع الطبيعي.
- هامش الخطأ هـ = $\text{ى}_{\frac{\alpha}{٢}} \bullet \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}$ في حالة الانحراف المعياري σ غير معلوم ون > ٣٠ والتوزيع الطبيعي.
- هامش الخطأ هـ = $\text{ت}_{\frac{\alpha}{٢}} \bullet \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}$، إذا كانت σ غير معلوم و ن ≤ ٣٠ والتوزيع طبيعي.
- الفرض الإحصائي: هو ادعاء معين مبني على حيثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل المتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.
- المقياس الإحصائي هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة.
- اختبارات الفروض الإحصائية (اختبار المعنوية) هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع.



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (ن)

ن	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٠٠٠٠	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٨٠	٠,٠١٢٠	٠,٠١٦٠	٠,٠١٩٩	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٧٩	٠,٠٣١٩	٠,٠٣٥٩
٠,١	٠,٠٣٩٨	٠,٠٤٣٨	٠,٠٤٧٨	٠,٠٥١٧	٠,٠٥٥٧	٠,٠٥٩٦	٠,٠٦٣٦	٠,٠٦٧٥	٠,٠٧١٤	٠,٠٧٥٣
٠,٢	٠,٠٧٩٣	٠,٠٨٣٢	٠,٠٨٧١	٠,٠٩١٠	٠,٠٩٤٨	٠,٠٩٨٧	٠,١٠٢٦	٠,١٠٦٤	٠,١١٠٣	٠,١١٤١
٠,٣	٠,١١٧٩	٠,١٢١٧	٠,١٢٥٥	٠,١٢٩٣	٠,١٣٣١	٠,١٣٦٨	٠,١٤٠٦	٠,١٤٤٣	٠,١٤٨٠	٠,١٥١٧
٠,٤	٠,١٥٥٤	٠,١٥٩١	٠,١٦٢٨	٠,١٦٦٤	٠,١٧٠٠	٠,١٧٣٦	٠,١٧٧٢	٠,١٨٠٨	٠,١٨٤٤	٠,١٨٧٩
٠,٥	٠,١٩١٥	٠,١٩٥٠	٠,١٩٨٥	٠,٢٠١٩	٠,٢٠٥٤	٠,٢٠٨٨	٠,٢١٢٣	٠,٢١٥٧	٠,٢١٩٠	٠,٢٢٢٤
٠,٦	٠,٢٢٥٧	٠,٢٢٩١	٠,٢٣٢٤	٠,٢٣٥٧	٠,٢٣٨٩	٠,٢٤٢٢	٠,٢٤٥٤	٠,٢٤٨٦	٠,٢٥١٧	٠,٢٥٤٩
٠,٧	٠,٢٥٨٠	٠,٢٦١١	٠,٢٦٤٢	٠,٢٦٧٣	٠,٢٧٠٤	٠,٢٧٣٤	٠,٢٧٦٤	٠,٢٧٩٤	٠,٢٨٢٣	٠,٢٨٥٢
٠,٨	٠,٢٨٨١	٠,٢٩١٠	٠,٢٩٣٩	٠,٢٩٦٧	٠,٢٩٩٥	٠,٣٠٢٣	٠,٣٠٥١	٠,٣٠٧٨	٠,٣١٠٦	٠,٣١٣٣
٠,٩	٠,٣١٥٩	٠,٣١٨٦	٠,٣٢١٢	٠,٣٢٣٨	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٨٩	٠,٣٣١٥	٠,٣٣٤٠	٠,٣٣٦٥	٠,٣٣٨٩
١,٠	٠,٣٤١٣	٠,٣٤٣٨	٠,٣٤٦١	٠,٣٤٨٥	٠,٣٥٠٨	٠,٣٥٣١	٠,٣٥٥٤	٠,٣٥٧٧	٠,٣٥٩٩	٠,٣٦٢١
١,١	٠,٣٦٤٣	٠,٣٦٦٥	٠,٣٦٨٦	٠,٣٧٠٨	٠,٣٧٢٩	٠,٣٧٤٩	٠,٣٧٧٠	٠,٣٧٩٠	٠,٣٨١٠	٠,٣٨٣٠
١,٢	٠,٣٨٤٩	٠,٣٨٦٩	٠,٣٨٨٨	٠,٣٩٠٧	٠,٣٩٢٥	٠,٣٩٤٤	٠,٣٩٦٢	٠,٣٩٨٠	٠,٣٩٩٧	٠,٤٠١٥
١,٣	٠,٤٠٣٢	٠,٤٠٤٩	٠,٤٠٦٦	٠,٤٠٨٢	٠,٤٠٩٩	٠,٤١١٥	٠,٤١٣١	٠,٤١٤٧	٠,٤١٦٢	٠,٤١٧٧
١,٤	٠,٤١٩٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤٢٢٢	٠,٤٢٣٦	٠,٤٢٥١	٠,٤٢٦٥	٠,٤٢٧٩	٠,٤٢٩٢	٠,٤٣٠٦	٠,٤٣١٩
١,٥	٠,٤٣٣٢	٠,٤٣٤٥	٠,٤٣٥٧	٠,٤٣٧٠	٠,٤٣٨٢	٠,٤٣٩٤	٠,٤٤٠٦	٠,٤٤١٨	٠,٤٤٢٩	٠,٤٤٤١
١,٦	٠,٤٤٥٢	٠,٤٤٦٣	٠,٤٤٧٤	٠,٤٤٨٤	٠,٤٤٩٥	٠,٤٥٠٥	٠,٤٥١٥	٠,٤٥٢٥	٠,٤٥٣٥	٠,٤٥٤٥
١,٧	٠,٤٥٥٤	٠,٤٥٦٤	٠,٤٥٧٣	٠,٤٥٨٢	٠,٤٥٩١	٠,٤٥٩٩	٠,٤٦٠٨	٠,٤٦١٦	٠,٤٦٢٥	٠,٤٦٣٣
١,٨	٠,٤٦٤١	٠,٤٦٤٩	٠,٤٦٥٦	٠,٤٦٦٤	٠,٤٦٧١	٠,٤٦٧٨	٠,٤٦٨٦	٠,٤٦٩٣	٠,٤٦٩٩	٠,٤٧٠٦
١,٩	٠,٤٧١٣	٠,٤٧١٩	٠,٤٧٢٦	٠,٤٧٣٢	٠,٤٧٣٨	٠,٤٧٤٤	٠,٤٧٥٠	٠,٤٧٥٦	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٦٧
٢,٠	٠,٤٧٧٢	٠,٤٧٧٨	٠,٤٧٨٣	٠,٤٧٨٨	٠,٤٧٩٣	٠,٤٧٩٨	٠,٤٨٠٣	٠,٤٨٠٨	٠,٤٨١٢	٠,٤٨١٧
٢,١	٠,٤٨٢١	٠,٤٨٢٦	٠,٤٨٣٠	٠,٤٨٣٤	٠,٤٨٣٨	٠,٤٨٤٢	٠,٤٨٤٦	٠,٤٨٥٠	٠,٤٨٥٤	٠,٤٨٥٧
٢,٢	٠,٤٨٦١	٠,٤٨٦٤	٠,٤٨٦٨	٠,٤٨٧١	٠,٤٨٧٥	٠,٤٨٧٨	٠,٤٨٨١	٠,٤٨٨٤	٠,٤٨٨٧	٠,٤٨٩٠
٢,٣	٠,٤٨٩٣	٠,٤٨٩٦	٠,٤٨٩٨	٠,٤٩٠١	٠,٤٩٠٤	٠,٤٩٠٦	٠,٤٩٠٩	٠,٤٩١١	٠,٤٩١٣	٠,٤٩١٦
٢,٤	٠,٤٩١٨	٠,٤٩٢٠	٠,٤٩٢٢	٠,٤٩٢٥	٠,٤٩٢٧	٠,٤٩٢٩	٠,٤٩٣١	٠,٤٩٣٢	٠,٤٩٣٤	٠,٤٩٣٦
٢,٥	٠,٤٩٣٨	٠,٤٩٤٠	٠,٤٩٤١	٠,٤٩٤٣	٠,٤٩٤٥	٠,٤٩٤٦	٠,٤٩٤٨	٠,٤٩٤٩	٠,٤٩٥١	٠,٤٩٥٢
٢,٦	٠,٤٩٥٣	٠,٤٩٥٥	٠,٤٩٥٦	٠,٤٩٥٧	٠,٤٩٥٩	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٦١	٠,٤٩٦٢	٠,٤٩٦٣	٠,٤٩٦٤
٢,٧	٠,٤٩٦٥	٠,٤٩٦٦	٠,٤٩٦٧	٠,٤٩٦٨	٠,٤٩٦٩	٠,٤٩٧٠	٠,٤٩٧١	٠,٤٩٧٢	٠,٤٩٧٣	٠,٤٩٧٤
٢,٨	٠,٤٩٧٤	٠,٤٩٧٥	٠,٤٩٧٦	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٨	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٨٠	٠,٤٩٨١
٢,٩	٠,٤٩٨١	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٣	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٦	٠,٤٩٨٦
٣,٠	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩٠
٣,١٠ وأكثر	٠,٤٩٩٩									

ملاحظة: استخدم ٠,٤٩٩٩ عندما تزيد قيمة ن عن ٣,٠٩



جدول التوزيع ت						
	$\frac{\alpha}{٢}$					
درجات الحرية (ن − ١)	٠,٠٠٥	٠,٠١	٠,٠٢٥	٠,٠٥	٠,١٠	٠,٢٥
١	٦٣,٦٥٧	٣١,٨٢١	١٢,٧٠٦	٦,٣١٤	٣,٠٧٨	١,٠٠٠
٢	٩,٩٢٥	٦,٩٦٥	٤,٣٠٣	٢,٩٢٠	١,٨٨٦	٠,٨١٦
٣	٥,٨٤١	٤,٥٤١	٣,١٨٢	٢,٣٥٣	١,٦٣٨	٠,٧٦٥
٤	٤,٦٠٤	٣,٧٤٧	٢,٧٧٦	٢,١٣٢	١,٥٣٣	٠,٧٤١
٥	٤,٠٣٢	٣,٣٦٥	٢,٥٧١	٢,٠١٥	١,٤٧٦	٠,٧٢٧
٦	٣,٧٠٧	٣,١٤٣	٢,٤٤٧	١,٩٤٣	١,٤٤٠	٠,٧١٨
٧	٣,٥٠٠	٢,٩٩٨	٢,٣٦٥	١,٨٩٥	١,٤١٥	٠,٧١١
٨	٣,٣٥٥	٢,٨٩٦	٢,٣٠٦	١,٨٦٠	١,٣٩٧	٠,٧٠٦
٩	٣,٢٥٠	٢,٨٢١	٢,٢٦٢	١,٨٣٣	١,٣٨٣	٠,٧٠٣
١٠	٣,١٦٩	٢,٧٦٤	٢,٢٢٨	١,٨١٢	١,٣٧٢	٠,٧٠٠
١١	٣,١٠٦	٢,٧١٨	٢,٢٠١	١,٧٩٦	١,٣٦٣	٠,٦٩٧
١٢	٣,٠٥٤	٢,٦٨١	٢,١٧٩	١,٧٨٢	١,٣٥٦	٠,٦٩٦
١٣	٣,٠١٢	٢,٦٥٠	٢,١٦٠	١,٧٧١	١,٣٥٠	٠,٦٩٤
١٤	٢,٩٧٧	٢,٦٢٥	٢,١٤٥	١,٧٦١	١,٣٤٥	٠,٦٩٢
١٥	٢,٩٤٧	٢,٦٠٢	٢,١٣٢	١,٧٥٣	١,٣٤١	٠,٦٩١
١٦	٢,٩٢١	٢,٥٨٤	٢,١٢٠	١,٧٤٦	١,٣٣٧	٠,٦٩٠
١٧	٢,٨٩٨	٢,٥٦٧	٢,١١٠	١,٧٤٠	١,٣٣٣	٠,٦٨٩
١٨	٢,٨٧٨	٢,٥٥٢	٢,١٠١	١,٧٣٤	١,٣٣٠	٠,٦٨٨
١٩	٢,٨٦١	٢,٥٤٠	٢,٠٩٣	١,٧٢٩	١,٣٢٨	٠,٦٨٨
٢٠	٢,٨٤٥	٢,٥٢٨	٢,٠٨٦	١,٧٢٥	١,٣٢٥	٠,٦٨٧
٢١	٢,٨٣١	٢,٥١٨	٢,٠٨٠	١,٧٢١	١,٣٢٣	٠,٦٨٦
٢٢	٢,٨١٩	٢,٥٠٨	٢,٠٧٤	١,٧١٧	١,٣٢١	٠,٦٨٦
٢٣	٢,٨٠٧	٢,٥٠٠	٢,٠٦٩	١,٧١٤	١,٣٢٠	٠,٦٨٥
٢٤	٢,٧٩٧	٢,٤٩٢	٢,٠٦٤	١,٧١١	١,٣١٨	٠,٦٨٥
٢٥	٢,٧٨٧	٢,٤٨٥	٢,٠٦٠	١,٧٠٨	١,٣١٦	٠,٦٨٤
٢٦	٢,٧٧٩	٢,٤٧٩	٢,٠٥٦	١,٧٠٦	١,٣١٥	٠,٦٨٤
٢٧	٢,٧٧١	٢,٤٧٣	٢,٠٥٢	١,٧٠٣	١,٣١٤	٠,٦٨٤
٢٨	٢,٧٦٣	٢,٤٦٧	٢,٠٤٨	١,٧٠١	١,٣١٣	٠,٦٨٣
٢٩	٢,٧٥٦	٢,٤٦٢	٢,٠٤٥	١,٦٩٩	١,٣١١	٠,٦٨٣
٣٠ وأكثر	٢,٥٧٥	٢,٣٢٧	١,٩٦٠	١,٦٤٥	١,٢٨٢	٠,٦٧٥