الوحدة التاسعة

الأشكال الرباعية

Quadrilaterals

الفنون

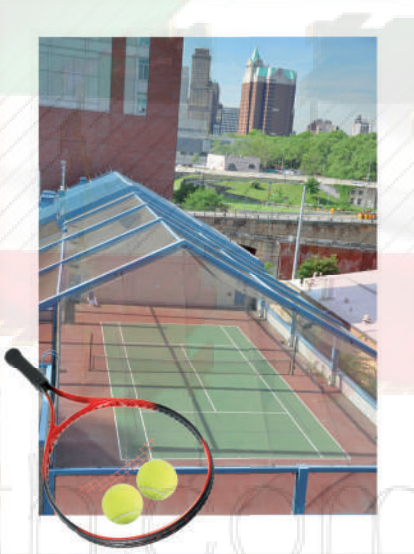
تبيّن هذه الصورة مصباحًا من التراث الإسلامي الخاص بشهر رمضان الكريم، وقد زُيّن بالبلور الملوّن ورسمت عليه أشكال هندسية معظمها مضلعات.

تسلية

يتألف علم دولة الكويت من أشكال مختلفة من الرباعيات الملونة (الأخضر، والأبيض، والأحمر، والأسود). يعبّر كل لون عن معنى سام يدل على شموخ هذه الدولة.

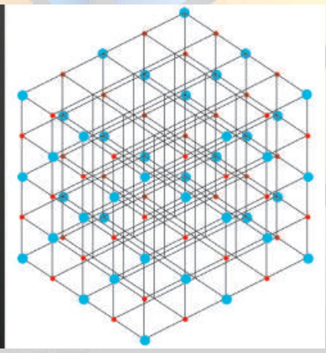
رياضة

ملعب كرة المضرب الأرضي مستطيل الشكل. يبلغ طوله ٢٣,٧٧ مترًا (٢٦ ياردة) وعرضه ٨,٢٣ أمتار (٩ ياردات). تتوسط الملعب شبكة ترتفع ١,٠٧ م عند الطرفين و٠,٩١٤ م في الوسط.
للكرة المعتمدة في المباريات الدولية مواصفات دقيقة: لونها أصفر أو أبيض، يتراوح طول قطرها بين ٦,٣٥٠ سم و٦,٦٨٨ سم، ووزنها بين ٥٦,٧ جرامًا و ٥٨,٥ جرامًا.



علوم

اعتبر الملح عنصرًا أساسيًّا لدى الإنسان منذ آلاف السنين. فكان يأخذه عند ترحاله للحفاظ على جودة طعامه. تبيّن هذه الصورة شكل مركّب الملح وهو على شكل نظام بلوري مكعب.



أفكار رياضية أساسية

الشكل الرباعي هو مضلع له أربعة أضلاع.

شبه المنحرف هو شكل رباعي له زوج واحد فقط من الأضلاع المتوازية.

متوازي الأضلاع هو شكل رباعي، كل زوج من أضلاعه المتقابلة متوازية.

المعين هو شكل رباعي جميع أضلاعه متساوية الطول. أو هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان.

المستطيل هو شكل رباعي، قياس كل زاوية من زواياه ٩٠°، أو هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة.

المربع هو شكل رباعي جميع أضلاعه متساوية الطول وكل زاوية من زواياه قياسها ٩٠°، أو هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان وإحدى زواياه قائمة.

مشروع الوحدة

حل المسائل
افهم
خطط
حل
تحقق

في هذا المشروع، سوف تقوم بصنع طائرة ورقية مستخدمًا بعض الأوراق والمشابك. سوف تستكشف أوّلًا تأثير الوزن والشكل على قدرة هذه الطائرة على الطيران، ومن ثم سوف تقوم بتصميمها وصنعها. سوف ترى كيف أن الهندسة الصحيحة تجعل طائرتك متينة. تحقق الفرق عند نجاح طائرتك في الطيران وعند فشلها.

التركيز على حل المسائل

عرّف أي معلومات إضافيّة تحتاج إليها في كل مسألة. إذا كانت كل المعلومات اللازمة متوفرة، فقم بحل المسألة.

حل المسائل
افهم
خطط
حل
تحقق

التعرف على المعلومات الناقصة

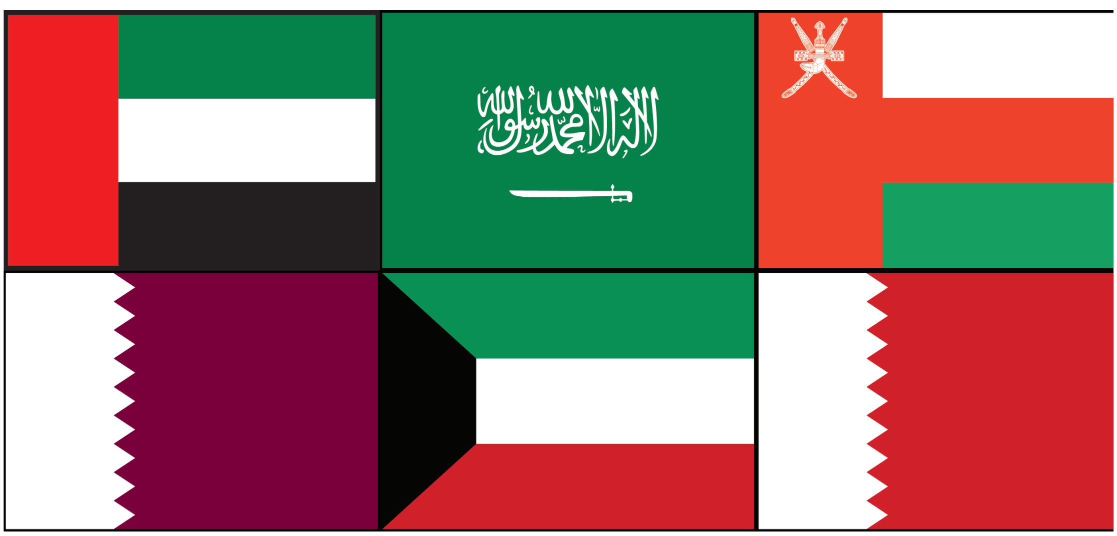
عندما تخطط لحل خطوات المسألة، يجب أن تتأكد من أنك تعرف جميع المعلومات الضرورية لحلها. في بعض الأحيان تفتقد المسألة إلى معلومة (معلومات) هامة.

١ تريد مها شراء بعض الأعلام المستطيلة الشكل وبعض الأشرطة لتزيين حواف هذه الأعلام، حيث يبلغ ثمن العلم الواحد ٤ دنانير وثمن المتر الواحد من الأشرطة ٠,٢٥٠ دينار. إلى كم دينار تحتاج لشراء هذه الأعلام من دون الأشرطة؟

٢ يساوي بعدا العلم المفضل عند مها ١,٥ م × ١٠٠ سم. إلى كم دينار تحتاج مها لشراء هذا العلم مع الأشرطة؟

٣ وجدت مها علمًا أكبر من علمها المفضل وبالثمن نفسه. إلى كم متر من الأشرطة تحتاج إذا قررت شراء العلم الأكبر؟

٤ إذا كان لدى مها ١٠ دنانير، فهل تستطيع شراء علمين؟



الوحدة التاسعة (٩)

الأشـكـال الرباعـية

Quadrilaterals

الأشكال الهندسية من حولك

ألق نظرة من حولك، سوف ترى أشياء عديدة لها أشكال مختلفة.
فباب منزلك مستطيل الشكل، وبعض نوافذه مربعة الشكل، والأضواء فيه دائرية الشكل.
إذا أردت أن تذهب إلى الحديقة أو إلى أحد الملاعب لممارسة رياضتك المفضلة، سوف تصادف أيضًا أشكالًا هندسية متنوعة. لذلك ولكي ترى الأشياء على صورة هذه الأشكال، يجب عليك أولاً أن تتعرف الأشكال الهندسية البسيطة وبعضًا من خصائصها المميزة.

١ اذكر بعض الأشياء وحدّد شكلها الهندسي.

٢ هل من الممكن أن يكون لشيء ما عدة أشكال هندسيّة في الوقت عينه؟ أعط أمثلة.

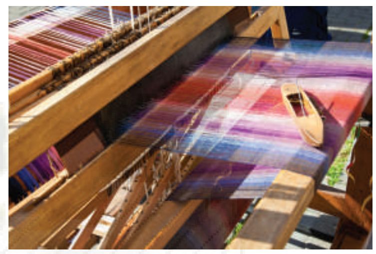
٩ ـ ١ ـ أ

المستقيمات المتوازية
Parallel Lines

سوف تتعلّم
- تتعرف الخطوط المتوازية.

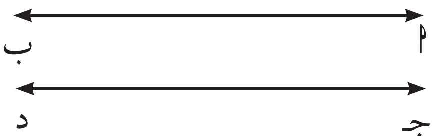
من الاستخدامات
- في صناعة النسيج

تكون الخيوط متوازية ومتعامدة على النول.



صلة الدرس تعلمت سابقًا المستقيم، والشعاع، والقطعة المستقيمة، والآن سوف تتعرف أوضاع المستقيمات لجهة تقاطعها أو عدم تقاطعها.

تسمى الخطوط المستقيمة التي تقع في مستوٍ واحد ولا تتقاطع أبدًا بالخطوط المتوازية.



$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـد}$ هما متوازيان ونكتب $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـد}$.

استكشف — القواطع والمستقيمات المتوازية

الأدوات المستخدمة: برنامج حاسوب هندسي أو أدوات هندسية

١ ارسم مستقيمين موازيين ثم ارسم مستقيمًا ثالثًا مائلًا بحيث يقطع المستقيمين المتوازين، رقّم الزوايا الثماني المبينة في الرسم.

٢ أوجد قياس كل زاوية في الرسم. اذكر الزوايا التي لها القياس نفسه. اكتب لكل زاوية ق ($\hat{...}$) = ...

٣ اذكر جميع أزواج الزوايا المتكاملة.

٤ هل يوجد زوايا متتامة؟

تذكر
تكون زاويتان متكاملتين إذا كان مجموع قياسهما ١٨٠°.
تكون زاويتان متتامتين إذا كان مجموع قياسهما ٩٠°.

تعلّم — القواطع والمستقيمات المتوازية

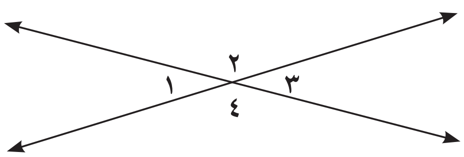
عندما يتقاطع مستقيمان في نقطة واحدة يشكلان زوجين من **الزوايا المتقابلة بالرأس**. وتكون الزاويتان المتقابلتان بالرأس متساويتي القياس.

مجموع قياس الزوايا عند نقطة تقاطع المستقيمين ٣٦٠°

$\hat{١}$ ، $\hat{٣}$ متقابلتان بالرأس ∴ ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٣}$)

$\hat{٢}$ ، $\hat{٤}$ متقابلتان بالرأس ∴ ق ($\hat{٢}$) = ق ($\hat{٤}$)

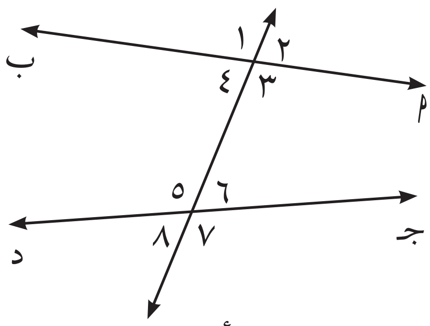
ق ($\hat{١}$) + ق ($\hat{٢}$) + ق ($\hat{٣}$) + ق ($\hat{٤}$) = ٣٦٠°



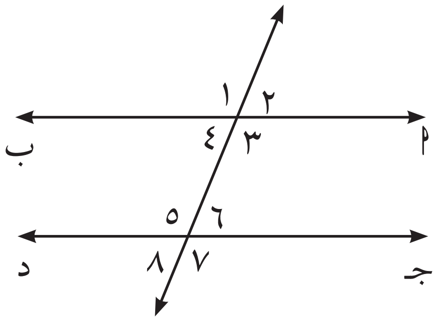
المصطلحات الأساسية
- متواز Parallel
- قاطع Transversal
- زاوية داخلية Interior Angle
- زاوية خارجية Exterior Angle
- زوايا متبادلة Alternate Angles
- زوايا متناظرة Corresponding Angles
- زوايا متقابلة بالرأس Vertically Opposite Angles

القاطع هو مستقيم يتقاطع مع مستقيمين (أو أكثر). وعندما يقطع مستقيمين (متوازيين أم متقاطعين) يتشكل ثماني زوايا.

شكل (١)



شكل (٢)



١ تسمى الزوايا الأربع الموجودة بين المستقيمين **زوايا داخلية** هي $\hat{٣}$، $\hat{٤}$، $\hat{٥}$، $\hat{٦}$.

٢ تسمى الزوايا الأربع الموجودة خارج المستقيمين **زوايا خارجية** هي $\hat{١}$، $\hat{٢}$، $\hat{٧}$، $\hat{٨}$

٣ **الزوايا المتبادلة** هي الزوايا التي تقع على جهتين متقابلتين من القاطع وتكونان إما داخليتين غير متجاورتين مثل $\hat{٣}$، $\hat{٥}$ وإما خارجيتين مثل $\hat{٢}$، $\hat{٨}$

٤ **الزوايا المتناظرة** هي الزوايا التي تقع في الجهة نفسها من القاطع ويتشكل كل زوج زوايا متناظرة من زاوية داخلية وزاوية خارجية وليستا متجاورتين مثل $\hat{٢}$، $\hat{٦}$ متناظرة، $\hat{٣}$، $\hat{٧}$ متناظرة

٥ **الزوايا المتحالفة**: تكون زاويتان متحالفتين إذا كانتا داخليتان وتقعان من ناحية واحدة بالنسبة إلى القاطع مثل $\hat{٣}$، $\hat{٦}$ هما زاويتان متحالفتين.

نتيجة: يتوازى مستقيمان في المستوى إذا تحقق أحد الشروط التالية:

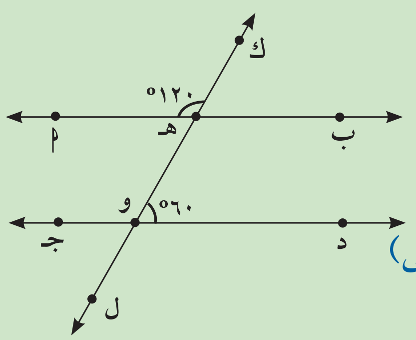
أ إذا قطعهما ثالث وشكل زاويتين متبادلتين لهما القياس نفسه.

ب إذا قطعهما ثالث وشكل زاويتين متناظرتين لهما القياس نفسه.

جـ إذا قطعهما ثالث وشكل زاويتين متحالفتين متكاملتين.

أمثلة

١ في الشكل المقابل:



أثبت أن: $\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{جـد}$

الحل:

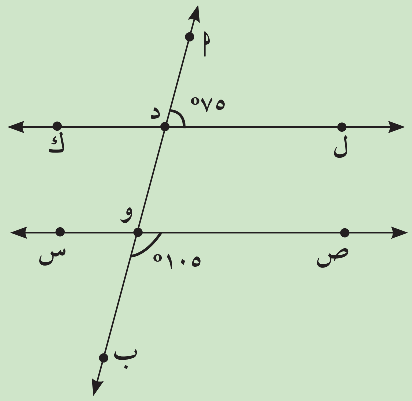
من الشكل: ق (ك $\hat{هـ}$ ب) = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠° (زاويتان متكاملتان)

∴ ق (ك $\hat{هـ}$ ب) = ق (هـ $\hat{و}$ د) = ٦٠° ق (هـ $\hat{و}$ د) = ٦٠°(معطى)

∵ ق (ك $\hat{هـ}$ ب) = ق (هـ $\hat{و}$ د) وهما في وضع تناظر ∴ $\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{جـد}$

حاولْ أن تحلّ

١ في الشكل المقابل أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{ك ل}}$ // $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$.



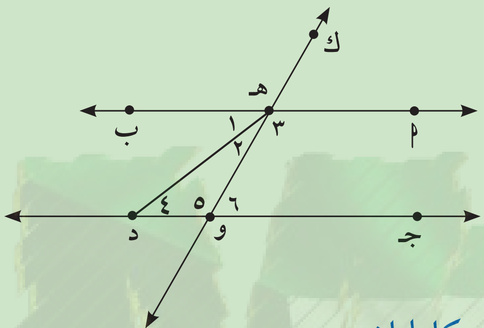
٢ في الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

ق (٢̂) = ٢٥°

ق (٦̂) = ٦٠°

أوجد قياس الزوايا المرقمة في الشكل.



الحل:

- ق (٣̂) + ق (٦̂) = ١٨٠° زاويتان متحالفتان متكاملتان

ق (٣̂) + ٦٠° = ١٨٠° بالتعويض

∴ ق (٣̂) = ١٨٠° − ٦٠°

ق (٣̂) = ١٢٠° بالتبسيط

- ق (١̂) + ق (٢̂) + ق (٣̂) = ١٨٠° زوايا متجاورة على مستقيم

ق (١̂) + ٢٥° + ١٢٠° = ١٨٠° بالتعويض

ق (١̂) = ١٨٠° − (١٢٠° + ٢٥°)

∴ ق (١̂) = ٣٥° بالتبسيط

- ق (٥̂) = ق (٣̂) = ١٢٠° بالتبادل والتوازي
- ق (١̂) = ق (٤̂) = ٣٥° بالتبادل والتوازي

حاولْ أن تحلّ

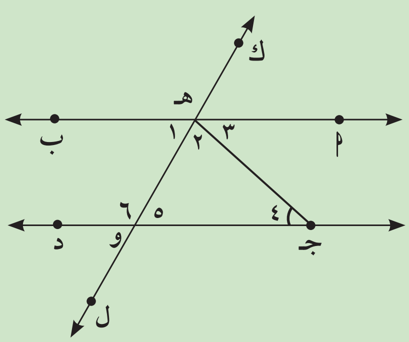
٢ في الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

ق (١̂) = ٥٥°

ق (٤̂) = ٥٠°

أوجد قياس الزوايا المرقمة في الشكل.



٩-١- ب

خواص الأشكال الرباعية
Properties of Quadrilaterals

صلة الدرس سبق أن تعلمت الأشكال الرباعية، والآن سوف تتعلم تصنيفها.

سوف تتعلّم
- تصنيف الأشكال الرباعية.

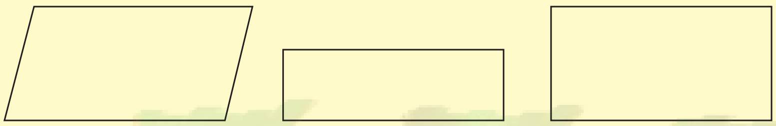
من الاستخدامات
- يستخدم المهندسون المدنيون الأشكال الرباعية عند رسم مخططات الأبنية.

المصطلحات الأساسية
- شبه المنحرف Trapezoid
- متوازي الأضلاع Parallelogram
- معين Rhombus
- مستطيل Rectangle
- مربع Square
- طائرة ورقية Kite

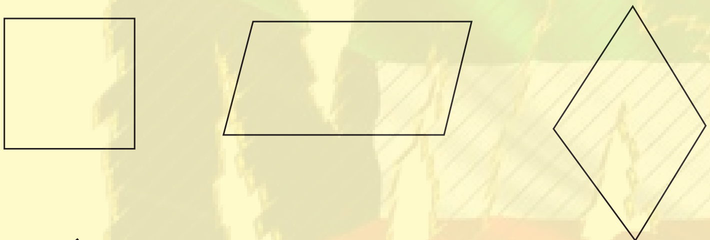
استكشف الأشكال الرباعية

في كل من المجموعات أدناه هناك شكل رباعي لا ينتمي إلى المجموعة بخاصّيّة معينة. حدّد هذا الشكل وفسّر سبب اختيارك.

المجموعة ١:

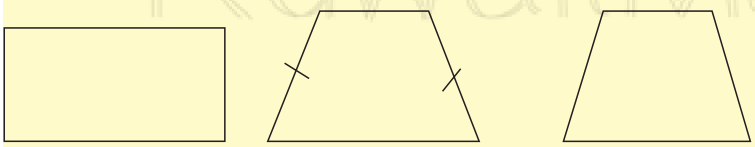


المجموعة ٢:



المجموعة ٣:

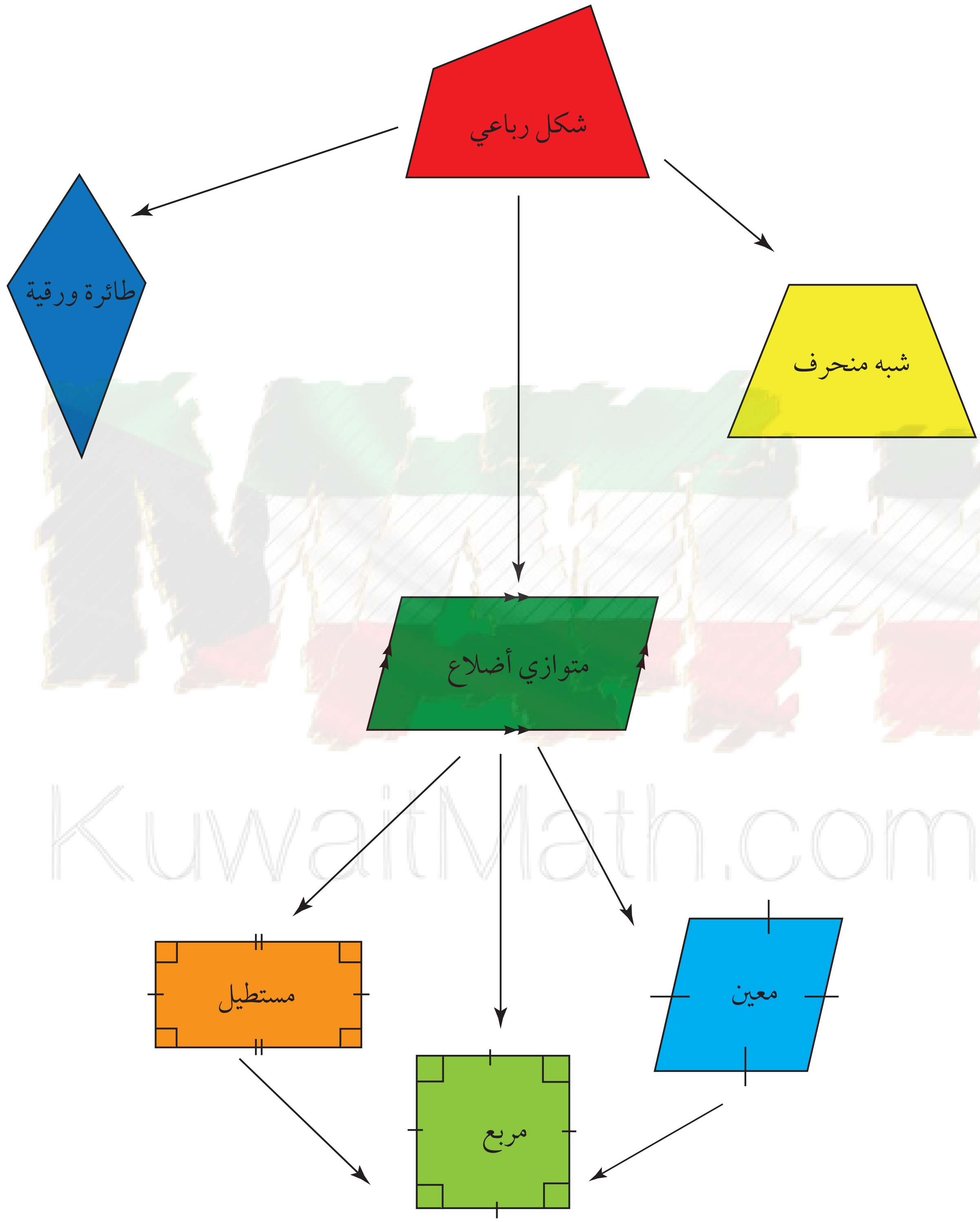
المجموعة ٤:



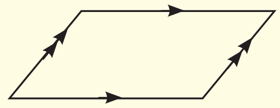
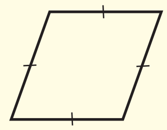
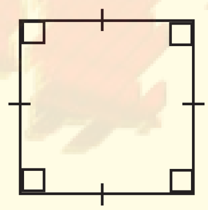
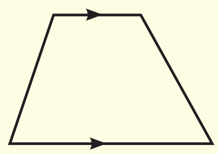
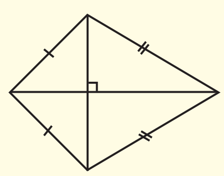
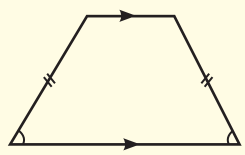
تعلّم الأشكال الرباعية

الشكل الرباعي هو مضلع له أربعة أضلاع. توجد عدة أنواع خاصة من الأشكال الرباعية منها: شبه المنحرف، متوازي الأضلاع، المعين، المستطيل، المربع. ولكل منها مجموعة مختلفة من الخصائص يمكن تصنيفها بأكثر من طريقة.

يحدّد المخطط أدناه العلاقة بين الأشكال الرباعيّة:

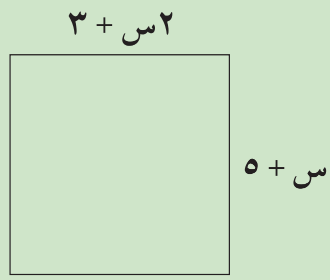


الأشكال الرباعية

اسم الشكل	رسم الشكل	تعريف الشكل	خواص الشكل
متوازي الأضلاع		هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين.	– الأضلاع المتقابلة متطابقة. – يتقاطع القطران في منتصفهما. – نقطة تقاطع قطريه هي مركز تناظر له. – كل زاويتين متقابلتين متساويتان في القياس. – كل زاويتين متتاليتين متكاملتان.
المعيّن		هو متوازي أضلاع له ضلعان متجاوران متطابقان.	– أضلاعه الأربعة متطابقة. – القطران متعامدان وينصف كل منهما الآخر. – كل قطر ينصف زاويتين متقابلتين فيه.
المستطيل		هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة.	– زواياه الأربع قائمة. – قطراه متطابقان ويتقاطعان في منتصفهما.
المربع		هو متوازي أضلاع له ضلعان متجاوران متطابقان وزاوية قائمة. هو معيّن له زاوية قائمة. هو مستطيل له ضلعان متجاوران متطابقان.	– قطراه متطابقان ومتعامدان ويتقاطعان في منتصفهما. – زواياه الأربع قائمة وأضلاعه متطابقة. – قطر المربع يصنع مع كل ضلع من أضلاع المربع زاوية قياسها ٤٥°.
شبه المنحرف		هو شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان فقط .	
الطائرة الورقية		هو شكل رباعي فيه زوجان من الأضلاع المتجاورة المتطابقة.	– القطران متعامدان. – أحد القطرين ينصف الآخر.
شبه المنحرف متطابق الضلعين			– قطرا شبه المنحرف متطابق الضلعين متطابقان. – زاويتا قاعدة شبه المنحرف متطابق الضلعين متطابقان.

مثال (١)

أوجد قيمة المتغير في المربع المقابل، ثم أوجد طول ضلعه.



الحل:

٢س + ٣ = س + ٥ خاصّيّة تساوي الأضلاع في المربع.

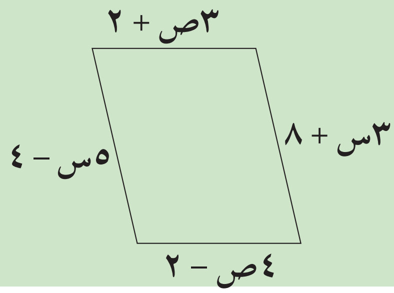
س + ٣ = ٥ إضافة المعكوس الجمعي لـ س.

س = ٢ إضافة المعكوس الجمعي لـ ٣.

إذًا طول ضلع المربع = ٢ + ٥ أو (٢ × ٢ + ٣).

= ٧ وحدة طول

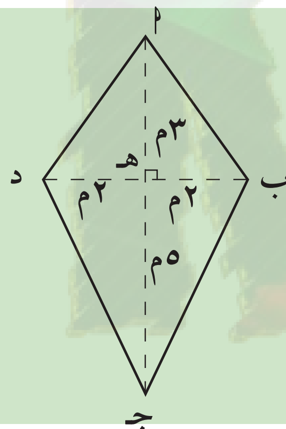
حاولْ أن تحلّ



١ أوجد أطوال أضلاع متوازي الأضلاع في الرسم المقابل.

مثال (٢)

ينظم نادي البيئة في المدرسة «يوم الطائرة الورقية». صمّم عادل طائرته كما هو مبيّن في الشكل المقابل. أوجد مساحة الورق اللازم لصنع الطائرة.



الحل:

يقسم الشكل إلى ٤ مثلثات قائمة الزاوية، فيه زوجان من المثلثات المتطابقة.

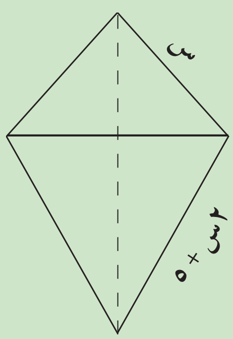
مساحة المثلث أب هـ = $\frac{٣ \times ٢}{٢}$ = ٣ م^٢

مساحة المثلث ب هـ جـ = $\frac{٢ \times ٥}{٢}$ = ٥ م^٢

مساحة الورق = ٣ + ٣ + ٥ + ٥ = ١٦ م^٢.

مثال (٣)

اشترت فاطمة لأخيها الصغير طائرة ورقية. ساعد فاطمة في معرفة أطوال أضلاع الطائرة إذا كان محيطها يساوي ١٩٠ سم. وطول الضلع الأكبر يساوي ضعف طول الضلع الأصغر مضافًا إليه ٥.



الحل: نفرض أن طول الضلع الأصغر = س فيكون طول الضلع الأكبر ٢س+٥

س + س + ٢س + ٥ + ٢س + ٥ = ١٩٠

٦س + ١٠ = ١٩٠

٦س = ١٨٠

س = ٣٠

أطوال أضلاع الطائرة هي ٣٠ سم، ٦٥ سم.

حاولْ أن تحلّ

٢ أوجد أطوال أضلاع طائرة ورقية محيطها ٨٤ سم ويزيد طول الضلع الأكبر ١٢ سم عن طول الضلع الأصغر.

تحقّق من فهمك

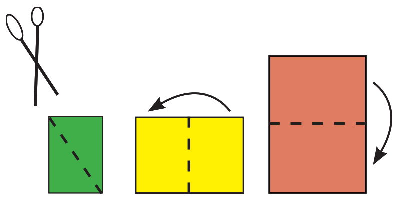
١ ارسم شكلًا رباعيًّا قطراه متطابقان ولا يكون مستطيلًا. فسّر.

٢ هل شبه المنحرف هو متوازي أضلاع؟ فسّر.

حل المسائل
افهم
خطط
حل
تحقق

المرشد لحل المسائل (٩-١)

تناول ورقة مستطيلة الشكل واطوها إلى نصفين أفقيًا ثم عموديًا (انظر الشكل المقابل). قص الورقة بعد طيّها، كما هو في الشكل المقابل. ما الشكل الذي تحصل عليه بعد قص الورقة وعند فتحها؟ اشرح.



افهم

١ ما معطيات المسألة؟ ....

٢ ما المطلوب إليك إيجاده؟ ....

خطِّطْ

٣ ما الشكل الذي تحصل عليه بعد طي الورقة للمرّة الأولى؟ ....

٤ ما الشكل الذي تحصل عليه بعد طي الورقة للمرّة الثانية؟ ....

حلّ

٥ هل الشكل الذي ستحصل عليه هو مثلث؟ ....

٦ هل أضلاع الشكل متطابقة؟ فسّر. ....

٧ ما الشكل الذي تحصل عليه؟ فسّر. ....

٨ هل يتغيّر الشكل إذا تم قص الورقة وفق القطر الآخر؟ فسّر. ....

تحقّق

٩ نفذ الخطوات المطلوبة مستخدمًا ورقة ومقصًّا للتحقق.

....

حلّ مسألة أخرى

١٠ كرّر الخطوات مستخدمًا ورقة مربعة الشكل. ما الشكل الذي تحصل عليه؟ ....

....

....

٩ـ٢

متوازي الأضلاع
Parallelogram

صلة الدرس سبق أن صنفت الأشكال الرباعيّة، والآن سوف تثبت خواص متوازي الأضلاع.

سوف تتعلّم
- التعرف إلى متوازي الأضلاع.

من الاستخدامات
- معظم الأشكال التي تراها في الجسور الحديدية هي على شكل متوازي الأضلاع.

المصطلحات الأساسية
- متوازي الأضلاع Parallelogram
- زاويتان متتاليتان Consecutive Angles
- زاويتان متقابلتان Opposite Angles

معلومة مفيدة
ملاحظة: نستخدم الرمز // بدلًا من موازٍ.

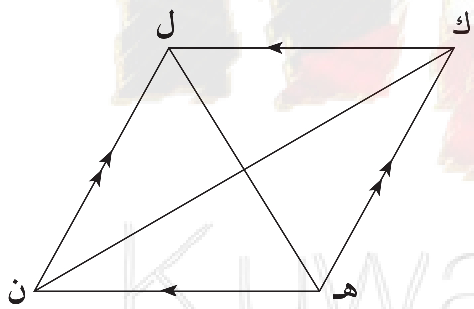
استكشف — استكشاف متوازي الأضلاع

١ ارسم مستقيمين متوازيين مستخدمًا المثلث القائم والمسطرة، ثم اقطعهما بقاطع.
٢ ارسم مستقيمًا موازيًا لهذا القاطع مستخدمًا المثلث القائم والمسطرة.
٣ أي نوع من المضلعات ترى؟
٤ كم زوجًا من المستقيمات المتوازية في هذا المضلع؟
٥ قارن أطوال كل زوج من أزواج الأضلاع المتوازية.
٦ ماذا تستطيع أن تستنتج عن نوع المضلع؟

تعلّم — خواص متوازي الأضلاع

متوازي الأضلاع: هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان.

ك ل ن هـ متوازي أضلاع وعلى ذلك:



$\overline{كل} // \overline{هـن}$ ، $\overline{هـك} // \overline{نل}$.

خواص متوازي الأضلاع:

١ – في متوازي الأضلاع، مجموع قياسي كل زاويتين متتاليتين ١٨٠°.

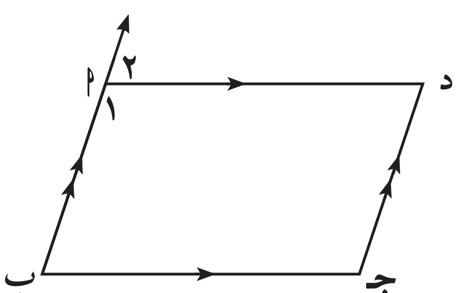
المعطيات: ٱ ب جـ د متوازي أضلاع.

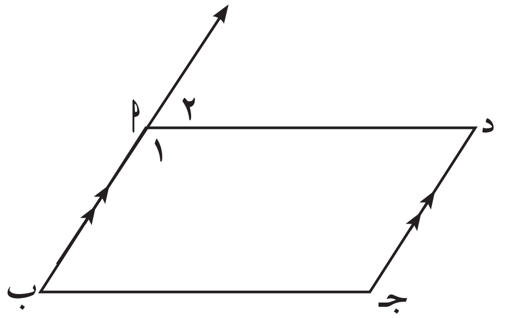
المطلوب: إثبات أن ق $(\hat{ب})$ + ق $(\hat{ٱ})$ = ١٨٠°، ق $(\hat{ب})$ + ق $(\hat{جـ})$ = ١٨٠°، ق $(\hat{جـ})$ + ق $(\hat{د})$ = ١٨٠°، ق $(\hat{د})$ + ق $(\hat{ٱ})$ = ١٨٠°.

البرهان: ∵ ٱ ب جـ د متوازي الأضلاع

∴ $\overleftrightarrow{ٱد} // \overleftrightarrow{بجـ}$

$\overleftrightarrow{ٱب}$ هو قاطع للمستقيمين المتوازيين $\overleftrightarrow{ٱد}$ ، $\overleftrightarrow{بجـ}$





فيكون ق (ب̂) = ق (٢̂) (بالتناظر والتوازي)

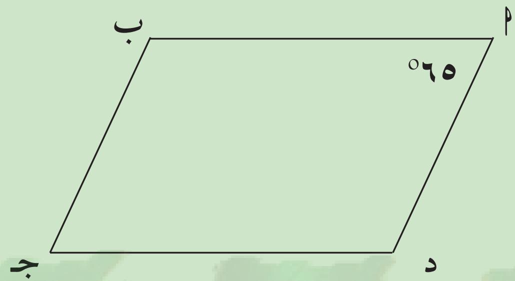
ق (١̂) + ق (٢̂) = ١٨٠° (بالتجاور على مستقيم)

∴ ق (ب̂) + ق (١̂) = ١٨٠°

∴ ق (ب̂) + ق (ا̂) = ١٨٠° (وهو المطلوب)

ملاحظة: يمكن برهان أن ق (ب̂) + ق (جـ̂) = ١٨٠° ، .... وهكذا

مثال (١)



ا ب جـ د متوازي أضلاع. ق(ا̂) = ٦٥°.

أوجد ق(ب̂)، ق(د̂).

المعطيات: ا ب جـ د متوازي أضلاع.

ق(ا̂) = ٦٥°

المطلوب: إيجاد قياس ب̂ ، د̂.

البرهان:

∵ ا ب جـ د متوازي أضلاع فرضًا

∴ ق(ب̂) = ١٨٠° − ٦٥° = ١١٥° خاصّيّة الزوايا المتتالية في متوازي الأضلاع.

وبالمثل ق(د̂) = ١٨٠° − ٦٥° = ١١٥°

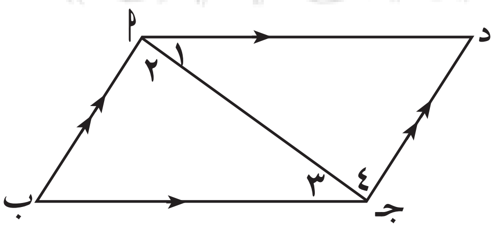
حاولْ أن تحلّ

١ في متوازي الأضلاع ا ب جـ د، ق(ا̂) = س°، ق(ب̂) = ٢س°. أوجد ق(ا̂) ، ق(ب̂) بالدرجات.

٢- في متوازي الأضلاع، كل زاويتين متقابلتين متساويتان في القياس.

المعطيات:

ا ب جـ د متوازي أضلاع.



المطلوب: إثبات أن ق (ب̂) = ق (د̂)؛ ق (ا̂) = ق (جـ̂).

العمل: نرسم القطر ا جـ

البرهان:

المثلثان ا د جـ، جـ ب ا فيهما:

ا جـ (ضلع مشترك)

ق (١̂) = ق (٣̂) (بالتبادل والتوازي)

ق (٢̂) = ق (٤̂) (بالتبادل والتوازي)

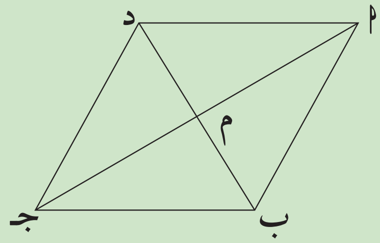
∴ Δ ا د جـ، Δ جـ ب ا متطابقان بحالة (ز. ض. ز) ومنه نستنتج: ق (د̂) = ق (ب̂)

وبالمثل يمكن إثبات أن ق (جـ̂) = ق (ا̂) بأخذ المثلثين ا ب د ، جـ د ب

مثال (٢)

في متوازي الأضلاع المقابل، إذا كان ق (أ ب̂ جـ) = ١٣٠°، ق (جـ د̂ ب) = ٦٠°، أوجد قياس (أ د̂ ب).

المعطيات: أ ب جـ د متوازي أضلاع.



ق (أ ب̂ جـ)= ١٣٠°،

ق (جـ د̂ ب) = ٦٠°،

المطلوب: إيجاد ق (أ د̂ ب).

البرهان:

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع — فرضًا

∴ ق (أ د̂ جـ) = ق (أ ب̂ جـ) = ١٣٠° — خاصية الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع.

∵ ق (أ د̂ ب) + ق (جـ د̂ ب) = ق (أ د̂ جـ)

∴ ق (أ د̂ ب) = ق (أ د̂ جـ) − ق (جـ د̂ ب)

= ١٣٠° − ٦٠°

= ٧٠°

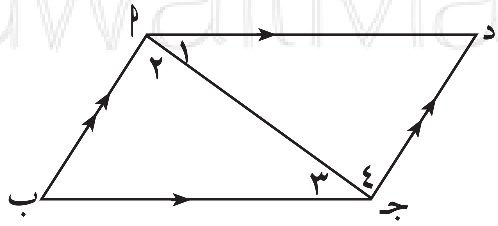
حاولْ أن تحلّ

٢ في المثال (٢) أوجد ق (د ب̂ جـ).

٣- في متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متساويان في الطول.

المعطيات:

أ ب جـ د متوازي أضلاع



المطلوب: إثبات أن أ د = جـ ب؛ أ ب = جـ د.

العمل: نرسم القطر أ جـ

البرهان:

المثلثان: أ د جـ، جـ ب أ فيهما:

$\overline{\text{أ جـ}}$ (ضلع مشترك)

ق (١̂) = ق (٣̂) (بالتبادل والتوازي)

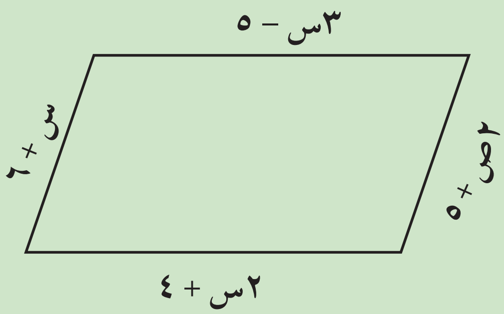
ق (٢̂) = ق (٤̂) (بالتبادل والتوازي)

∴ Δ أ د جـ ، Δ جـ ب أ متطابقان استنادًا بحالة (ز. ض. ز)

ومنه نستنتج: أ د = جـ ب ، أ ب = جـ د (وهو المطلوب)

مثال (٣)

في متوازي الأضلاع المقابل، أوجد قيم المجهولين س، ص.



الحل:

من متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متطابقان

فيكون: ٣س – ٥ = ٢س + ٤

٣س – ٢س = ٤ + ٥

س = ٩

وكذلك ٢ص + ٥ = س + ٦

٢ص + ٥ = ٩ + ٦

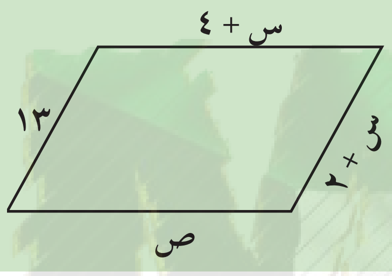
٢ص = ٩ + ٦ – ٥

٢ص = ١٠

ص = ٥

حاولْ أن تحلّ

٣ أوجد أطوال أضلاع متوازي الأضلاع المرسوم في الشكل المقابل.

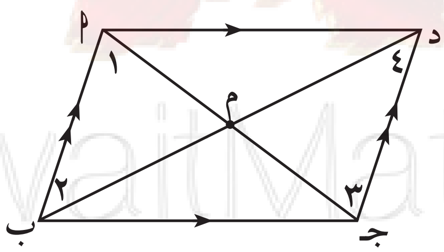


٤ – قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.

المعطيات:

أ ب جـ د متوازي أضلاع

م نقطة تقاطع القطرين



المطلوب: إثبات أن م ب = م د؛ م أ = م جـ.

البرهان:

المثلثان: م د جـ، م ب أ فيهما:

$\overline{\text{د جـ}} \cong \overline{\text{ب أ}}$، كل ضلعان متقابلان متطابقان في متوازي الأضلاع

ق ($\hat{1}$) = ق ($\hat{3}$) (بالتبادل والتوازي)

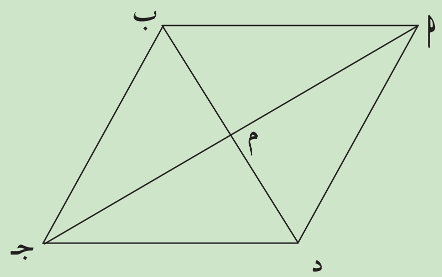
ق ($\hat{2}$) = ق ($\hat{4}$) (بالتبادل والتوازي)

∴ Δ م د جـ ، Δ م ب أ متطابقان استنادًا بحالة (ز. ض. ز)

ومنه نستنتج: م أ = م جـ ، م ب = م د.

مثال (٤)

أب جـ د متوازي أضلاع مركزه م، ل نقطة خارج الشكل.
أكمل رسم متوازي الأضلاع أ ل جـ و.



الحل:

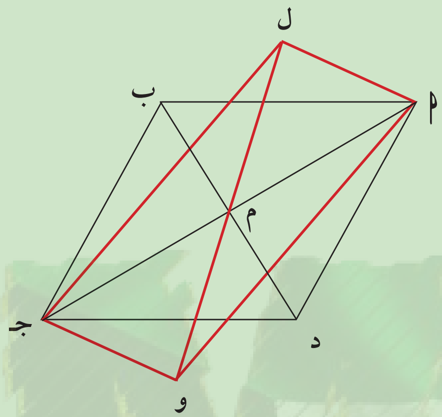
استخدم المسطرة والفرجار لتحديد الرأس الرابع "و" لمتوازي الأضلاع أ ل جـ و ، ضع النقطة و بحيث تكون م منتصف ل و.

ارسم المضلع أ ل جـ و.

م منتصف أجـ (قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر)

م منتصف ل و

إذًا أ ل جـ و متوازي أضلاع.



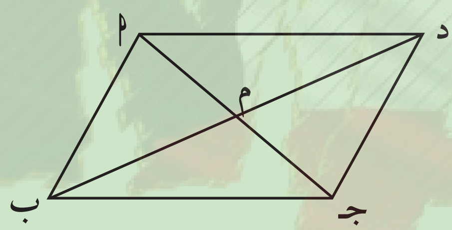
حاولْ أن تحلّ

٤ أب جـ د متوازي أضلاع حيث م نقطة تقاطع قطريه .

أوجد قيم س، ص.

إذا كان: م جـ = ٣س + ١، م أ = ٥س − ٩.

م د = ٤ص + ٣، م ب = ٦ص − ٧.



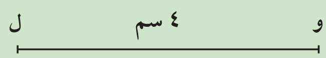
مثال (٥)

ارسم متوازي الأضلاع هـ و ل ع حيث:

ول = ٤ سم، وهـ = ٢ سم، ق(هـ وَ ل) = ٧٠°

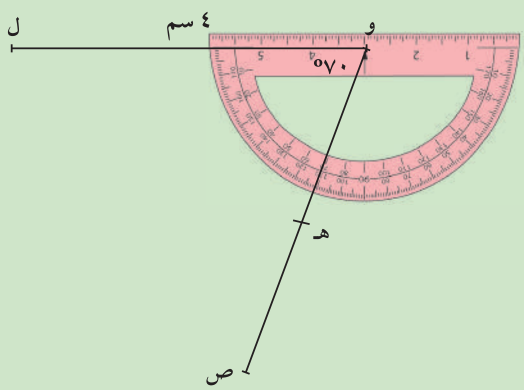
الحل:

الخطوة الأولى:



ارسم قطعة مستقيمة ول طولها ٤ سم بواسطة مسطرة مدرجة.

الخطوة الثانية:



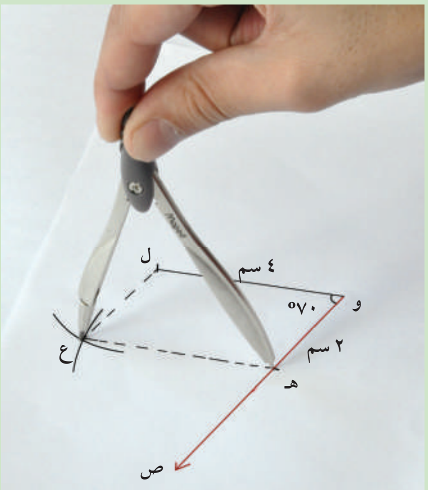
استخدم المنقلة لرسم وص بحيث يكون

ق(ل وَ ص) = ٧٠°.

ضع النقطة هـ على وص بحيث يكون وهـ = ٢ سم.

ركز سن الفرجار عند ل وبفتحة طولها ٢ سم . ارسم قوسًا، ثم ركز سن الفرجار في هـ وبفتحة طولها ٤ سم ارسم قوسًا آخر بحيث يتقاطع القوسان في نقطة ع.

أكمل رسم المضلع هـ و ل ع.



حاولْ أن تحلّ

٥ ارسم متوازي الأضلاع وط ن ي حيث:

وط = ٨ سم، ق(وطٌ ن) = ١٣٠°، ط ن = ٥ سم.

في متوازي الأضلاع:

- كل ضلعين متقابلين متوازيان.
- كل ضلعين متقابلين لهما الطول نفسه.
- كل زاويتين متقابلتين متساويتان في القياس.
- كل زاويتين متتاليتين متكاملتان.
- يتقاطع قطرا متوازي الأضلاع في نقطة منتصفهما.

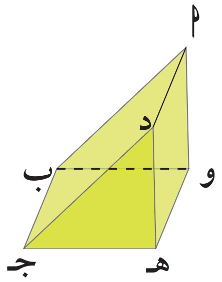
تحقّق من فهمك

١ هل كل شكل رباعي له زاويتان متتاليتان متكاملتان هو متوازي أضلاع؟ اشرح.

٢ إذا تقاطع قطرا شكل رباعي في نقطة منتصفها، فهل يكون هذا الشكل الرباعي متوازي أضلاع؟ اشرح.

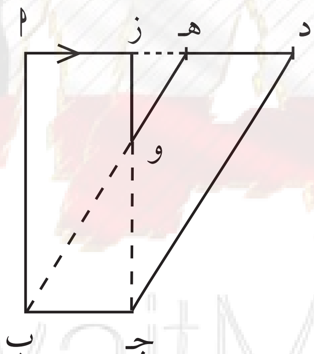
حلّ المسائل والتفكير المنطقي

١ ما عدد متوازيات الأضلاع التي تراها في الرسم؟



٢ **التحدي**: ارسم الشكل الرباعي ﻫ ب جـ د حيث إحداثيات رؤوسه هي كالتالي: ﻫ(−٢، ٠)، ب(٢، ٤)، جـ(٤، ١)، د(٠، −٣) وبين نوعه. اشرح.

٣ **تفكير ناقد**: ورث سالم وأخوه محمد قطعة أرض كما في الشكل المقابل حيث ﻫ، ز، هـ، د على استقامة واحدة.
اقترح سالم أن تقسم القطعة إلى قسمين: القطعة (د هـ و جـ) والقطعة (ز ﻫ ب و)
وتبقى القطعة المثلثة (و جـ ب) مشتركة وتستخدم كحديقة تزرع زهورًا.
هل اقتراح سالم منصف؟



إستراتيجيّات حلّ المسائل
• اختر نمطًا.
• نظّم قائمة.
• اعمل جدولًا.
• خمّن وتحقّق.
• اعمل بطريقة عكسيّة.
• استخدم التفكير المنطقيّ.
• ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
• حلّ مسألة أبسط.

٩ـ٣

الكشف عن متوازي الأضلاع
Exploring a Parallelogram

سوف تعلّم
- كيفية إثبات أن شكلاً رباعيًّا هو متوازي أضلاع.

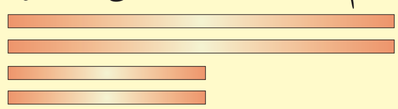
من الاستخدامات
- يستخدم صانعو الدراجات الهوائيّة فكرة متوازي الأضلاع عند دوران السلسلة المعدنية على تروس السرعة.

صلة الدرس تعرفت سابقًا خصائص متوازي الأضلاع، والآن سوف تتعرف كيفية إثبات أن شكلًا رباعيًّا هو متوازي أضلاع.

استكشف — الكشف عن متوازي الأضلاع

الأدوات المستخدمة: مقص، مشابك ورق، قضبان خشبية

١ استخدم ٤ قضبان خشبية على أن يكون كل زوجين منهما متطابقين.



٢ اربط أطراف هذه القضبان ببعضها كي تمثل شكلًا رباعيًّا أضلاعه المتقابلة متطابقة.

٣ ما الشكل الرباعي الذي حصلت عليه؟

٤ إذا غيّرت قياس الزوايا في هذا الشكل الرباعي، فما الشكل الذي تحصل عليه؟

تعلّم — الكشف عن متوازي الأضلاع

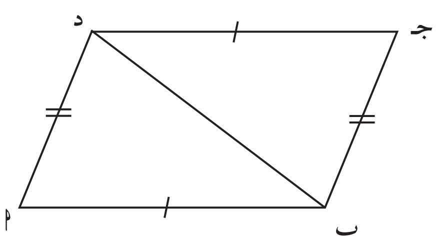
كل شكل رباعي أضلاعه المتقابلة متوازية يكون متوازي أضلاع. يمكن الكشف عن متوازي الأضلاع بإثبات واحدة من خمس خواص في الشكل الرباعي

حالات الكشف عن متوازي الأضلاع

١ - يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا تطابق كل ضلعين متقابلين فيه.

المعطيات: $\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{دجـ}}$

$\overline{\text{أد}} \cong \overline{\text{ب جـ}}$



المطلوب: إثبات أن أ ب جـ د متوازي أضلاع.

البرهان: المثلثان أ د ب ، جـ د ب فيهما:

$\overline{\text{أد}} \cong \overline{\text{ب جـ}}$ (فرضًا)

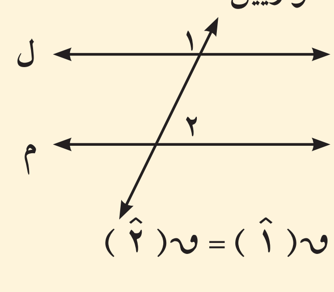
$\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{دجـ}}$ (فرضًا)

$\overline{\text{ب د}}$ ضلع مشترك.

لذا يكون المثلثان متطابقين بحسب حالة (ض. ض. ض.)

هل تعلم؟

إذا قطع مستقيم مستقيمين، وتساوى قياسا زاويتين متبادلتين، فيكون المستقيمان متوازيين.



ق(١) = ق(٢)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // $\overleftrightarrow{\text{م}}$

ومنه نستنتج:

∵ ق($\widehat{أدب}$) = ق($\widehat{دبجـ}$) وهما في وضع تبادل داخلي

∴ $\overline{دأ}$ // $\overline{ب جـ}$

∵ ق($\widehat{دبأ}$) = ق($\widehat{جـدب}$) وهما في وضع تبادل داخلي

∴ $\overline{جـ د}$ // $\overline{ب أ}$

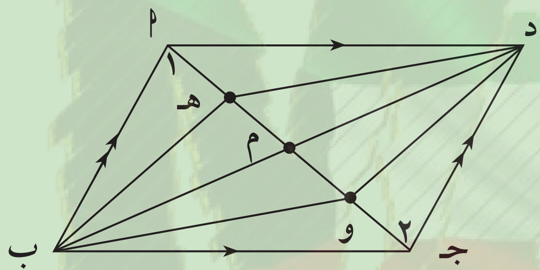
أي كل ضلعين متقابلين متوازيان

فيكون أب جـ د متوازي أضلاع.

مثال (١)

أ ب جـ د متوازي أضلاع يتقاطع قطراه في نقطة م. نأخذ هـ منتصف $\overline{أم}$، ومنتصف $\overline{م جـ}$.

أثبت أن الشكل الرباعي هـ ب و د متوازي أضلاع.



المعطيات:

أ ب جـ د متوازي أضلاع.

هـ منتصف $\overline{أم}$، ومنتصف $\overline{م جـ}$.

المطلوب:

إثبات أن الشكل الرباعي هـ ب و د متوازي أضلاع.

البرهان:

∵ ومنتصف $\overline{م جـ}$، هـ منتصف $\overline{أم}$

∴ م جـ = أ م القطران ينصف كل منهما الآخر من متوازي الأضلاع

∴ وجـ = هـ أ

المثلثان: د جـ و، ب أ هـ فيهما:

د جـ = أ ب (ضلعان متقابلان في متوازي الأضلاع)

و جـ = هـ أ (برهانًا)

ق ($\widehat{١}$) = ق ($\widehat{٢}$) (بالتبادل والتوازي)

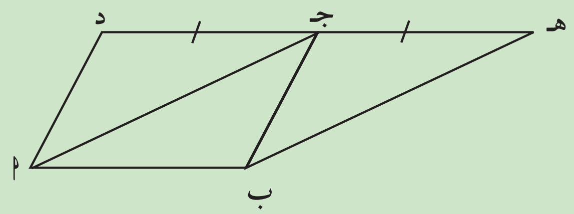
∴ Δ د جـ و، Δ ب أ هـ متطابقان بحالة (ض. ز. ض) ومنه نستنتج:

د و = هـ ب ----- (١)

وبالمثل من تطابق المثلثين ٲ هـ د ، جـ و ب نستنتج: هـ د = و ب----- (٢)

∴ من (١)، (٢) الشكل الرباعي هـ ب و د متوازي أضلاع.

لأن كل زوج من الأضلاع المتقابلة متطابقة



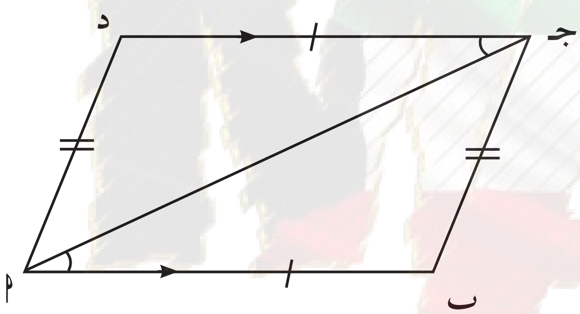
حاولْ أن تحلّ

١ ٲب جـ د متوازي أضلاع. أخذت النقطة هـ على $\overleftarrow{\text{د جـ}}$ بحيث

إن $\overline{\text{جـ هـ}} \cong \overline{\text{جـ د}}$. أثبت أن: Δ ب هـ جـ $\cong$ Δ جـ ٲ ب.

استنتج أن ٲب هـ جـ متوازي أضلاع.

٢- يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا تطابق وتوازى ضلعان متقابلان فيه.



المعطيات: $\overline{\text{ٲب}} // \overline{\text{د جـ}}$

$\overline{\text{ٲب}} \cong \overline{\text{د جـ}}$

المطلوب: إثبات أن ٲب جـ د متوازي أضلاع.

البرهان:

المثلثان ٲ د جـ، ٲب جـ فيهما:

$\overline{\text{ٲب}} \cong \overline{\text{د جـ}}$ (فرضًا)

$\overline{\text{ٲجـ}}$ (ضلع مشترك)

ق($\widehat{\text{ب ٲ جـ}}$) = ق($\widehat{\text{ٲ جـ د}}$) (بالتبادل والتوازي.)

لذا يكون المثلثان متطابقين بحسب حالة (ض. ز. ض).

ومنه نستنتج: ق($\widehat{\text{ٲ جـ ب}}$) = ق($\widehat{\text{د ٲ جـ}}$) (متبادلتان داخليًا)

وبالتالي تكون $\overline{\text{د ٲ}} // \overline{\text{جـ ب}}$.

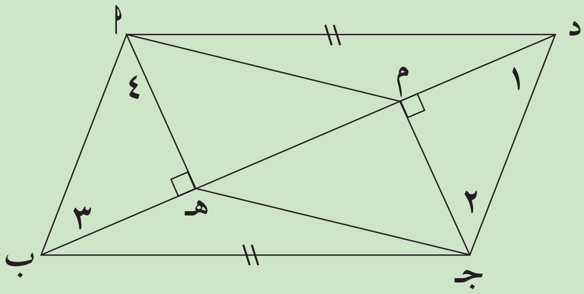
∴ يكون ٲب جـ د متوازي أضلاع لأن كل ضلعين متقابلين متوازيان.

∴ يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا تطابق وتوازى ضلعان متقابلان فيه.

مثال (٢)

$\overline{\text{}}$
أ ب جـ د متوازي أضلاع. إذا كان $\overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{د ب}}$، $\overline{\text{جـ م}} \perp \overline{\text{د ب}}$.

أثبت أن الشكل الرباعي أ هـ جـ م متوازي أضلاع



المعطيات:

أ ب جـ د متوازي أضلاع.

$\overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{د ب}}$، $\overline{\text{جـ م}} \perp \overline{\text{د ب}}$.

المطلوب:

إثبات أن الشكل الرباعي أ هـ جـ م متوازي أضلاع.

البرهان:

المثلثان د م جـ، ب هـ أ فيهما:

د جـ = أ ب (ضلعان متقابلان في متوازي الأضلاع)

ق ($\hat{\text{م}}$) = ق ($\hat{\text{هـ}}$) = ٩٠° (معطيات)

ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٣}$) (بالتبادل والتوازي)

يبقى: ق ($\hat{٢}$) = ق ($\hat{٤}$) (مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°)

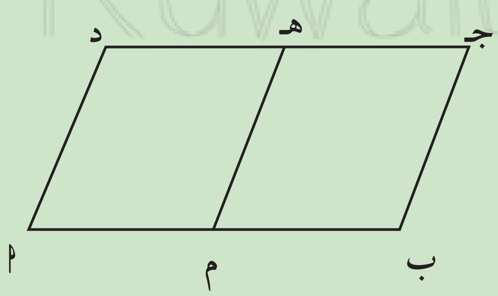
∴ Δ د م جـ ، Δ ب هـ أ متطابقان بحالة (ز، ض، ز) ومنه نستنتج

جـ م = أ هـ

∵ ق(جـ $\hat{\text{م}}$ هـ) = ق(أ $\hat{\text{هـ}}$ م) = ٩٠° (وهما متبادلتان داخليًا)

∴ $\overline{\text{جـ م}}$ // $\overline{\text{أ هـ}}$

فيكون الشكل الرباعي أ هـ جـ م متوازي أضلاع لأن فيه ضلعين متقابلين متوازيين ومتطابقين.



حاولْ أن تحلّ

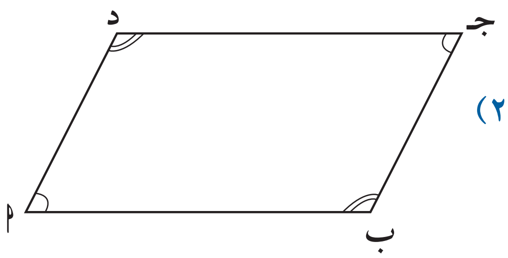
٢ في الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع. هـ منتصف $\overline{\text{د جـ}}$، م منتصف $\overline{\text{أ ب}}$. أثبت أن أ م هـ د متوازي أضلاع.

٣- يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا تطابقت كل زاويتين متقابلتين فيه.

المعطيات: ق(أ̂) = ق(جـ̂)
ق(ب̂) = ق(د̂)

المطلوب: إثبات أن أ ب جـ د متوازي أضلاع.

البرهان:



ق(أ̂) + ق(ب̂) + ق(جـ̂) + ق(د̂) = ٣٦٠° (مجموع قياس زوايا الشكل الرباعي ٣٦٠°)

ولكن: ق(أ̂) = ق(جـ̂) ؛ ق(ب̂) = ق(د̂) (فرضًا)

٢ ق(أ̂) + ٢ ق(ب̂) = ٣٦٠° (بالتعويض)

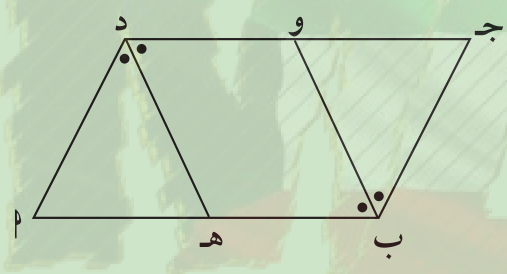
ق(أ̂) + ق(ب̂) = ١٨٠° (بالقسمة على ٢)

∴ أد // ب جـ (أ̂، ب̂ متحالفتان ومن جهة واحدة من القاطع أب)

وبالطريقة نفسها نثبت أن أب // د جـ.

∴ أ ب جـ د متوازي أضلاع لأن الزوايا المتقابلة متساوية القياس.

مثال (٣)



أ ب جـ د متوازي أضلاع.
د هـ منصف الزاوية أ د جـ
ب و منصف الزاوية أ ب جـ
أثبت أن د هـ ب و متوازي أضلاع

المعطيات:
أ ب جـ د متوازي أضلاع.
د هـ منصف (أ د̂ جـ)
ب و منصف (أ ب̂ جـ)

المطلوب:
إثبات أن الشكل الرباعي د هـ ب و متوازي أضلاع.

البرهان: ∵ الشكل أ ب جـ د متوازي الأضلاع

∴ ق (د̂) = ق (ب̂)

$\frac{1}{2}$ ق (د̂) = $\frac{1}{2}$ ق (ب̂) (بالقسمة على ٢)

∴ ق (هـ د̂ و) = ق (و ب̂ هـ) (د هـ ، ب و منصفات زوايا) (١)

لدينا أيضًا:

ق (هـ د̂ و) + ق (د هـ̂ ب) = ١٨٠° (بالتحالف والتوازي)

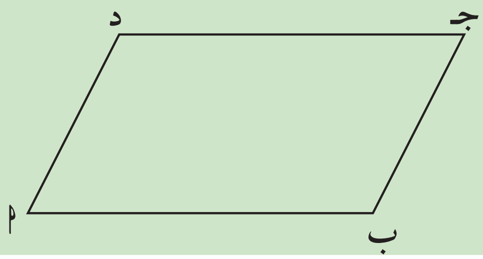
ق (هـ ب̂ و) + ق (ب و̂ د) = ١٨٠° (بالتحالف والتوازي)

نستنتج: ق (هـ د̂ و) + ق (د هـ̂ ب) = ق (هـ ب̂ و) + ق (ب و̂ د)

∴ ق (د هـ̂ ب) = ق (ب و̂ د) من خواص المساواة (٢)

من (١)، (٢) أزواج الزوايا المتقابلة تطابقت في الشكل الرباعي هـ ب و د فهو متوازي أضلاع.

حاولْ أن تحلّ

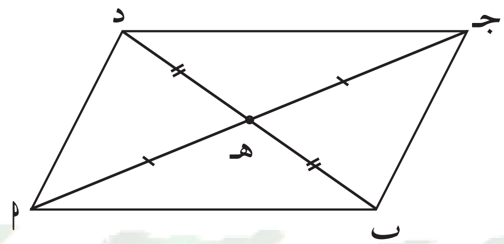


٣ في الشكل المقابل ٲب جـ د متوازي أضلاع أوجد قيم س ، ص حيث:

ق(ٲ̂) = (٢س + ١٠)° ، ق(جـ̂) = (٣س − ١٠)°

ق(ب̂) = (٥ص + ٥)° ، ق(د̂) = (٦ص − ٢٠)°

٤ – يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان قطراه ينصف كل منهما الآخر.



المعطيات:

هـٲ ≅ هـ جـ ، هـ ب ≅ هـ د

المطلوب: إثبات أن ٲب جـ د متوازي أضلاع

البرهان:

المثلثان ب هـ جـ، د هـ ٲ فيهما:

هـٲ ≅ هـ جـ (فرضًا)

ب هـ ≅ د هـ (فرضًا)

ق(ب هـ̂ جـ) = ق(د هـ̂ ٲ) (بالتقابل بالرأس)

فيكون المثلثان متطابقين بحسب الحالة (ض. ز. ض). ∴ ب جـ ≅ ٲد (١)

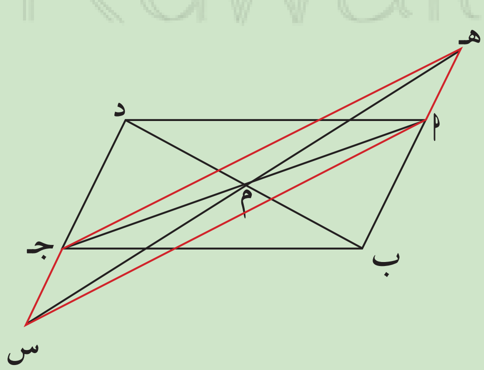
ومنه نستنتج أن ق(هـ جـ̂ ب) = ق(هـ ٲ̂د) وهما متبادلتان داخليًّا.

∴ ب جـ // ٲد (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن ٲب جـ د متوازي أضلاع لأن فيه ضلعين متقابلين متطابقين ومتوازيين.

مثال (٤)

ٲب جـ د متوازي أضلاع. م نقطة تقاطع القطرين،
رسم من النقطة م مستقيمًا بحيث يقطع ب ٲ في هـ ويقطع د جـ في س
أثبت أن الشكل الرباعي ٲ هـ جـ س متوازي أضلاع.



المعطيات:

ٲب جـ د متوازي أضلاع

م نقطة تقاطع قطرية

المطلوب:

إثبات أن الشكل الرباعي ٲ هـ جـ س متوازي أضلاع.

البرهان:

$\because$ ⁄ب جـ د متوازي الأضلاع

م⁄ = م جـ (١) (القطران ينصف كل منهما الآخر في متوازي أضلاع)

المثلثان م⁄ هـ، م جـ س فيهما:

م⁄ = م جـ (برهانًا)

ق (⁄م̂ هـ) = ق (س م̂ جـ) (زاويتان متقابلتان بالرأس)

ق (م⁄̂ هـ) = ق (م جـ̂ س) (بالتبادل والتوازي)

$\therefore$ Δ م⁄ هـ ، Δ م جـ س متطابقان بحالة (ز. ض. ز)

ومنه نستنتج: م هـ = م س (٢)

ولدينا أيضًا م⁄ = م جـ (١)

من (١) ، (٢) ينتج أن الشكل الرباعي ⁄ هـ جـ س متوازي أضلاع.

حاولْ أن تحلّ

٤ ⁄ب جـ د متوازي أضلاع

هـ منتصف $\overline{⁄د}$

م منتصف $\overline{ب جـ}$

أ أثبت أن الشكل الرباعي هـ جـ م ⁄ متوازي أضلاع

ب استنتج أن: $\overline{⁄جـ}$، $\overline{ب د}$ ، $\overline{م هـ}$ ينصف كل واحد الآخر في نقطة واحدة.

تحقّق من فهمك

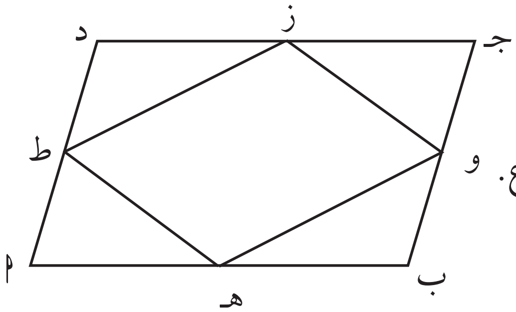
١ هل توازي ضلعين متقابلين وتطابق الضلعين الآخرين المتقابلين في شكل رباعي يكفي لأن يكون لدينا متوازي أضلاع؟ فسّر.

٢ إذا نصف أحد أقطار الشكل الرباعي القطر الآخر فهل يكون الشكل متوازي أضلاع؟ دعّم إجابتك برسم.

٣ هل تطابق ضلعين متقابلين في شكل رباعي يكفي لأن يكون لدينا متوازي أضلاع؟ فسّر.

المرشد لحل المسائل (٩-٣)

حل المسائل
افهم
خطط
حل
تحقق



م ب جـ د متوازي أضلاع.

هـ، و، ز، ط منتصفات الأضلاع

$\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{جـ د}}$، $\overline{\text{د م}}$ على الترتيب أثبت أن: هـ و ز ط متوازي أضلاع.

افهم

١ ما نوع الشكل الرباعي م ب جـ د؟ ....

٢ ما موقع النقاط هـ، و، ز، ط على القطع المستقيمة $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{جـ د}}$، $\overline{\text{د م}}$؟ ....

خطّط

٣ ما العلاقة بين جـ د، م ب؟ والعلاقة بين م د، ب جـ؟ ....

٤ ما العلاقة بين ق(م̂) ، ق(جـ̂)؟ والعلاقة بين ق(ب̂) ، ق(د̂). ....

حلّ

٥ أثبت تطابق المثلثين م هـ ط، جـ ز و. ماذا تستنتج بالنسبة لـ $\overline{\text{وز}}$، $\overline{\text{ط هـ}}$ ؟ ....

٦ أثبت تطابق المثلثين د ط ز، ب و هـ. ماذا تستنتج بالنسبة لـ $\overline{\text{زط}}$، $\overline{\text{وهـ}}$ ؟ ....

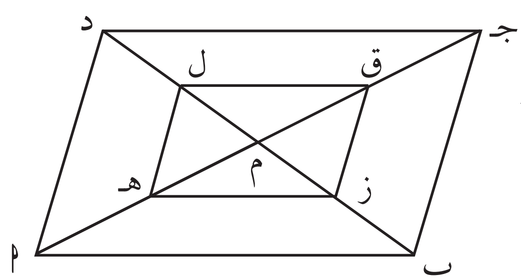
٧ استخدم نتائج ٥ - ٦ لتثبت أن هـ و ز ط متوازي أضلاع. ....

تحقّق

٨ استخدم مسطرة أو فرجارًا لإيجاد أطوال $\overline{\text{هـ و}}$، $\overline{\text{وز}}$، $\overline{\text{زط}}$، $\overline{\text{ط هـ}}$ والتأكد من أن كل ضلعين متقابلين لهما الطول نفسه.

....

حلّ مسألة أخرى



٩ لدينا م ب جـ د متوازي أضلاع حيث م نقطة تقاطع قطريه: نأخذ هـ، ز، ق، ل نقاط منتصفات $\overline{\text{مم}}$، $\overline{\text{ب م}}$، $\overline{\text{جـ م}}$، $\overline{\text{دم}}$ على الترتيب.

أثبت أن هـ ز ق ل متوازي أضلاع.

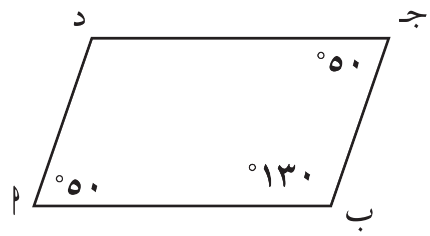
....

....

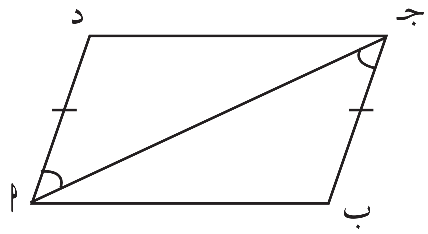
حلّ المسائل والتفكير المنطقي

١ استخدم البيانات في كل شكل لتبين ما إذا كان الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع أم لا. اشرح إجابتك.

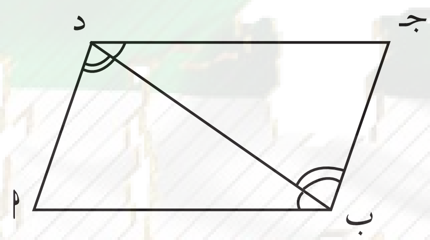
أ



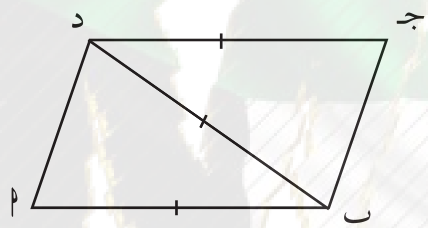
ب



جـ

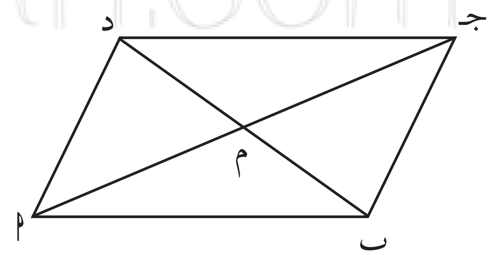


د

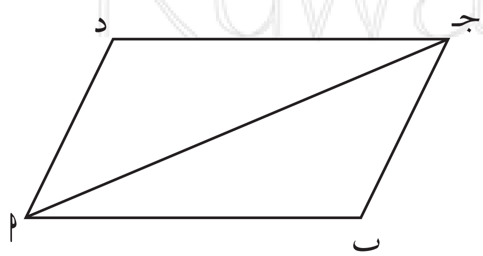


٢ **التحدي**: اشرح كيف يمكنك إثبات أن الشكل الرباعي ﻫب جـ د متوازي أضلاع باستخدام المعطيات.

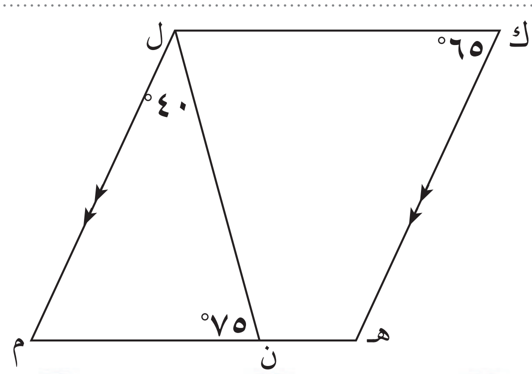
أ المثلثان: د م جـ، ب م ﻫ متطابقان.



ب المثلثان: دﻫجـ، ب جـﻫ متطابقان.



٣ أثبت أن الشكل ك ل م هـ متوازي أضلاع.



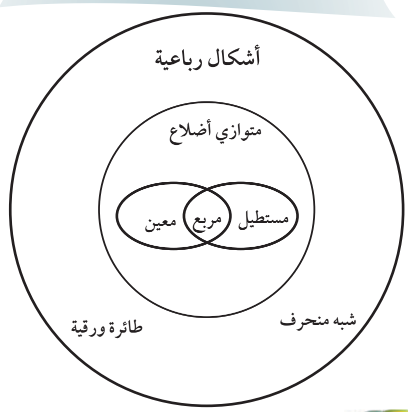
٩ـ٤

الكشف عن متوازي الأضلاع في حالاته الخاصة
Exploring of Parallelogram in his Special Cases

سوف تتعلّم
- الحالات الخاصّة لمتوازي الأضلاع.
- خواص كل من المستطيل، المربع، المعين.

من الاستخدامات
- استخدمت أنواع مختلفة من متوازيات الأضلاع عند تصميم القلاع والقصور القديمة.

المصطلحات الأساسية
- مستطيل Rectangle
- معين Rhombus
- مربع Square



صلة الدرس سبق أن تعرفت خواص متوازي الأضلاع، والآن سوف تتعرف الحالات الخاصّة لمتوازي الأضلاع.

استكشف: الحالات الخاصة لمتوازي الأضلاع

الأدوات المستخدمة: شبكة مربعات، مقصات، منقلة، مسطرة

اعمل ضمن مجموعة مع اثنين من رفاقك لاستكشاف خصائص كل من المستطيل والمعين والمربع.

١ يختار كل طالب من المجموعة شكلًا من هذه الأشكال الثلاثة ويرسمه على ورقة شبكة مربعات.

٢ باستخدام طي الورقة أو باستخدام المنقلة والمسطرة، يقيس كل طالب أطوال أضلاع الشكل ويقارن ما بينها، كذلك يقيس الزوايا ويقارن ما بينها.

٣ استخدموا النتائج التي حصلتم عليها لإكمال الجدول أدناه:

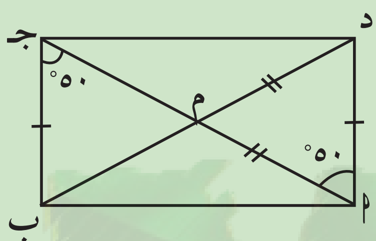
الخصائص	متوازي الأضلاع	المستطيل	المعين	المربع
كل الأضلاع متطابقة				
الأضلاع المتقابلة متطابقة	✔			
الأضلاع المتقابلة متوازية	✔			
قياسات الزوايا المتقابلة متساوية	✔			
كل الزوايا قائمة				
تتقاطع الأقطار في منتصفها	✔			
القطران متطابقان				
القطران متعامدان				
كل قطر ينصف الزاويتين المتقابلتين				

أولًا : المستطيل.

يكون متوازي الأضلاع مستطيلًا إذا كانت إحدى زواياه قائمة.

يكون متوازي الأضلاع مستطيلًا إذا تطابق قطراه.

مثال (١)



أ ب جـ د شكل رباعي يتقاطع قطراه في م.
أ د = ب جـ ، أ م = م د
ں (د أ جـ) = ں (أ جـ ب) = ٥٠°.
أثبت أن أ ب جـ د مستطيل، ثم أوجد ں (ب أ جـ).

المعطيات:
أ ب جـ د شكل رباعي حيث م نقطة تقاطع قطريه.
أ د = ب جـ ، أ م = م د.
ں (د أ جـ) = ں (أ جـ ب) = ٥٠°.

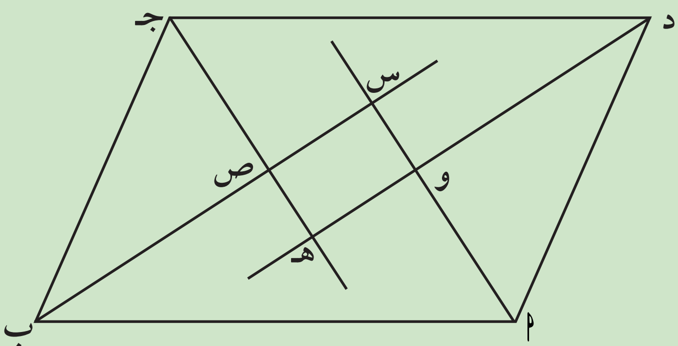
المطلوب:
إثبات أن الشكل الرباعي أ ب جـ د مستطيل أولًا، إيجاد ں (ب أ جـ) ثانيًا.

البرهان:
$\overline{\text{أ د}} \cong \overline{\text{ب جـ}}$ (فرضًا) (١)
ں (د أ جـ) = ں (ب جـ أ) = ٥٠° (وهما متبادلتان داخليًّا)
نستنتج: $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (٢)
من (١)، (٢) الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع لأن فيه ضلعين متقابلين متطابقين ومتوازيين
∵ أ م = م جـ ، م د = م ب (في متوازي الأضلاع ينصف كل قطر الآخر)
ولكن: م أ = م د (فرضًا)
∴ أ م = م د = م ب = م جـ
فيكون: أ جـ = د ب أي $\overline{\text{أ جـ}} \cong \overline{\text{ب د}}$
∵ القطرين يتطابقان في متوازي الأضلاع ∴ الشكل أ ب جـ د يكون مستطيل،
وبالتالي ں (ب أ جـ) = ٩٠° − ٥٠° = ٤٠°.

حاولْ أن تحلّ

١ أ ب جـ د متوازي أضلاع تتقاطع منصفات زواياه في النقاط: هـ، و، س، ص.

أثبت أن الشكل الرباعي هـ وس ص مستطيل.



ثانيًا : المعين.

يكون متوازي الأضلاع معينًا إذا تطابق ضلعان متجاوران فيه.

يكون متوازي الأضلاع معينًا إذا تعامد قطراه.

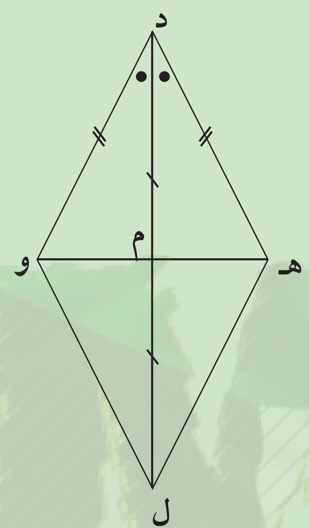
مثال (٢)

د هـ و مثلث فيه د هـ = د و

$\overleftarrow{دم}$ منصف (هـ $\hat{د}$ و) يقطع $\overline{هـ و}$ بالنقطة م.

ل تنتمي إلى $\overleftarrow{دم}$ بحيث يكون د م = م ل.

أثبت أن د هـ ل و معين.



المعطيات:

د هـ و مثلث متطابق الضلعين

د هـ = د و

$\overleftarrow{دم}$ منصف (هـ $\hat{د}$ و)

د م = م ل.

المطلوب :

إثبات أن د هـ ل و معين.

البرهان:

المثلثان د م هـ ، د م و فيهما:

$\overline{دم}$ (ضلع مشترك)

$\overline{دهـ} \cong \overline{دو}$ (فرضًا)

ق (هـ $\hat{د}$ م) = ق (و $\hat{د}$ م) ($\overleftarrow{دم}$ ينصف (هـ $\hat{د}$ و))

$\therefore \Delta$ د م هـ ، Δ د م و متطابقان بحالة (ض. ز. ض) ونحصل على:

م هـ = م و (١) ، ق (د $\hat{م}$ هـ) = ق (د $\hat{م}$ و) = ٩٠° (٢)

في الشكل د هـ ل و

$\because$ د م = م ل (فرضًا) (٣)

من (١) ، (٣) $\therefore$ الشكل د هـ ل و متوازي الأضلاع (القطران ينصف كل منهما الآخر)

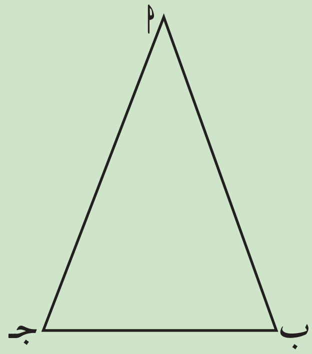
و من (٢) $\therefore$ الشكل د هـ ل و معين (القطران متعامدان)

حل آخر

$\because$ د هـ = د و (فرضًا) $\therefore$ الشكل د هـ ل و معين (متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان)

حاولْ أن تحلّ

٢ أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث: أ ب = أ جـ.
رسم من جـ مستقيماً موازيًا للضلع $\overline{\text{ب أ}}$،
ورسم من ب مستقيماً موازيًا للضلع $\overline{\text{أ جـ}}$،
يتقاطع المستقيمان في نقطة د.
أثبت أن الشكل الرباعي أ ب د جـ معين.



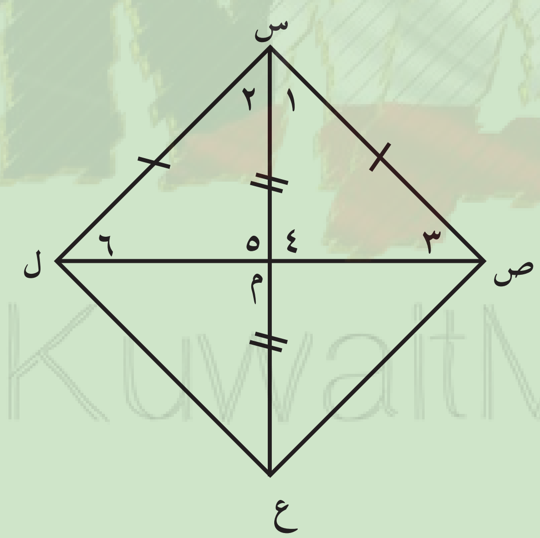
ثالثًا : المربع.

يكون متوازي الأضلاع مربعًا إذا تطابق ضلعان متجاوران فيه وكانت إحدى زواياه قائمة.

يكون متوازي الأضلاع مربعًا إذا تطابق قطراه وتعامدا.

مثال (٣)

س ص ع ل شكل رباعي فيه:
س ص = س ل ، س م = ع م.
ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) = ق ($\hat{٣}$).
أثبت أن س ص ع ل مربع.



المعطيات:

س ص ع ل شكل رباعي
س ص = س ل
س م = ع م
ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) = ق ($\hat{٣}$).

المطلوب:

إثبات أن س ص ع ل مربع.

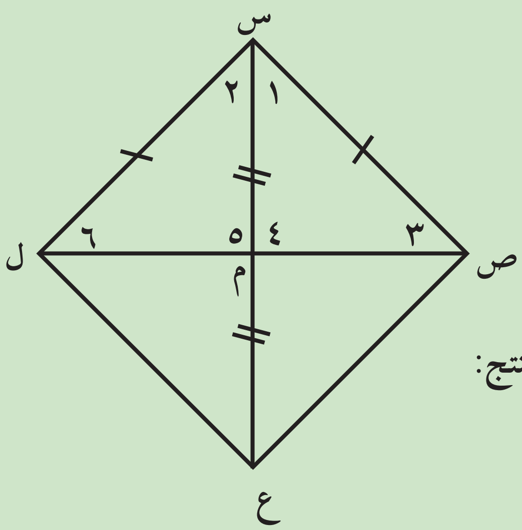
البرهان:

المثلثان س م ص، س م ل فيهما:

$\overline{\text{س م}}$ (ضلع مشترك)

$\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{س ل}}$ (١) (فرضًا)

ق ($\hat{1}$) = ق ($\hat{2}$) (فرضًا)



∴ Δ م س ص، Δ م س ل متطابقان بحالة (ض. ز. ض) ومنه نستنتج:

ق ($\hat{4}$) = ق ($\hat{5}$) = ٩٠° (بالتجاور على مستقيم)

م ص = م ل (٢)

∵ م س = م ع (فرضًا) (٣)

من (٢) ، (٣) يكون الشكل س ص ع ل متوازي الأضلاع (٤) (لأن القطرين ينصف كل منهما الآخر)

∵ ق ($\hat{4}$) = ٩٠°

ق ($\hat{1}$) + ق ($\hat{3}$) = ٩٠°

ق ($\hat{2}$) = ق ($\hat{3}$) (فرضًا)

∴ ق ($\hat{1}$) + ق ($\hat{2}$) = ٩٠°

أي أن ق (ص $\hat{\text{س}}$ ل) = ٩٠° (٥)

من (١) ، (٤) ، (٥) الشكل س ص ع ل مربع. (متوازي أضلاع تطابق فيه ضلعان متجاوران وإحدى زواياه قائمة)

حاولْ أن تحلّ

٣ في متوازي الأضلاع المقابل:

ب د = ١٤.

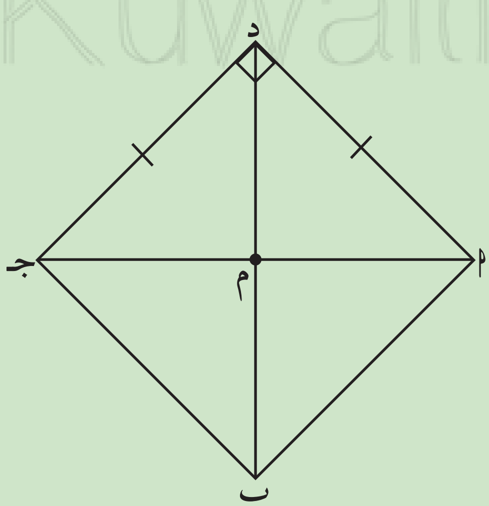
أ د = د جـ

ب م = ٣ص + ٤

جـ م = ٢س − ١

ق ($\hat{\text{د}}$) = ٩٠°

أوجد قيم س، ص.



تحقّق من فهمك

بيّن صحّة أو خطأ العبارات التالية:

١ جميع المربعات هي مستطيلات.

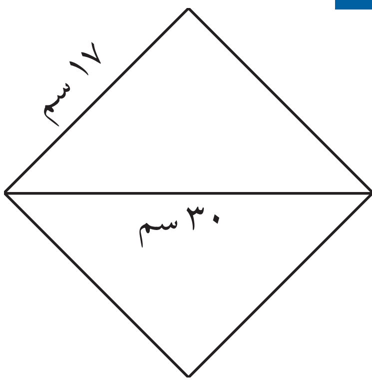
٢ شبه المنحرف هو متوازي أضلاع.

٣ المعين يمكن أن يكون طائرة ورقيّة.

٤ بعض متوازيات الأضلاع هي مربّعات.

٥ الأشكال الرباعيّة هي متوازيات أضلاع.

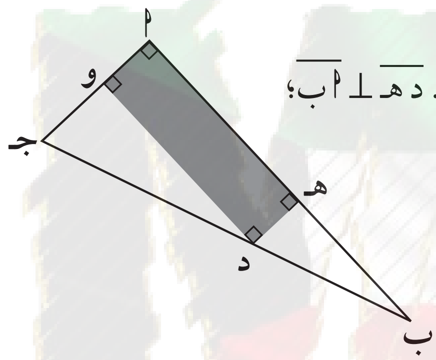
حلّ المسائل والتفكير المنطقي



١ الرافعة التي نستخدمها في الحالات الخاصة على الطرقات لإبدال إطار السيارة تشبه المعين وطول أحد أضلاعها ١٧ سم.
بعد ارتفاع السيارة لإبدال إحدى الإطارات، إذا كانت المسافة الأفقية بين الرأسين المتقابلين ٣٠ سم، فأوجد المسافة بين الرأسين الآخرين.

....

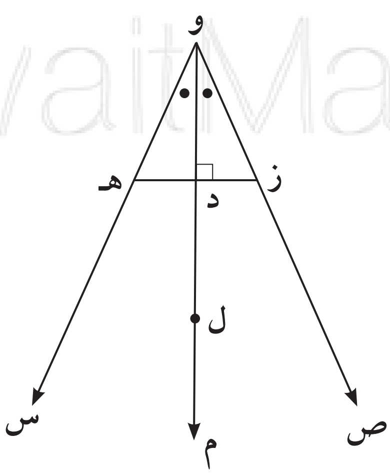
....



٢ **التحدي:** أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ. النقطة د متحركة على الوتر ب جـ. د هـ ⊥ أ ب؛ د و ⊥ أ جـ.
أين يجب أن تقع النقطة د على ب جـ كي يكون المستطيل أ هـ د و مربعًا؟
اشرح إجابتك، ثم أعد رسم الشكل.

....

....



٣ س و ص زاوية معطاة، و م منصف هذه الزاوية.
ل نقطة على و م.
د منتصف و ل.
ز هـ عمودي على و ل.

أ ما نوع الشكل الرباعي و هـ ل ز؟

ب هل يمكن للشكل الرباعي و هـ ل ز أن يكون مربعًا؟ كيف ذلك؟ اشرح إجابتك.

....

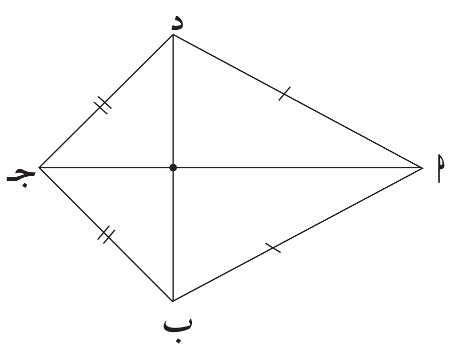
....

إستراتيجيّات حلّ المسائل

- اختر نمطًا.
- نظّم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمّن وتحقّق.
- اعمل بطريقة عكسيّة.
- استخدم التفكير المنطقيّ.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حلّ مسألة أبسط.

اختبار الوحدة التاسعة

١ هل توافق أم لا على صحة كلّ من العبارات التالية:
(أ) إذا توازى ضلعان في مضلع رباعي كان شبه منحرف.
(ب) قطرا متوازي أضلاع متساويا الطول ومتناصفان.
(جـ) إذا كان لمضلع رباعي مركز تناظر كان متوازي أضلاع.
(د) قطرا مستطيل هما محورا تناظر له.



٢ هل الشكل الرباعي أب جـ د المقابل معيّن؟ لماذا؟

٣ أب جـ مثلث متطابق الضلعين، رأسه أ.
(أ) ارسم الشكل، ثم عيّن النقطة أ' صورة النقطة أ بالانعكاس في ب جـ .
(ب) برهن أن أضلاع الشكل الرباعي أب أ' جـ متساوية الطول.
(جـ) ما نوع الشكل الرباعي أب أ' جـ؟ لماذا؟

٤ أنشئ معينًا أب جـ د على أن يكون أجـ = ٥ سم، ب د = ٧ سم، ثم علّل إنشاءك.

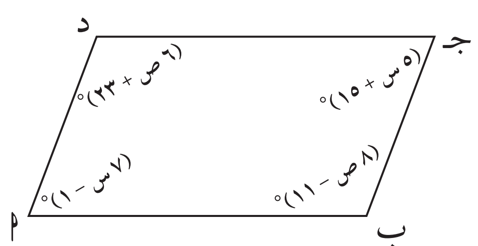
٥ ارسم دائرة مركزها م، ثم ارسم فيها قطرين متعامدين أب، جـ د.
(أ) هل أجـ ب د متوازي أضلاع. لماذا؟
(ب) هل أجـ ب د مستطيل. لماذا؟
(جـ) ما نوع الشكل الرباعي أجـ ب د؟ لماذا؟

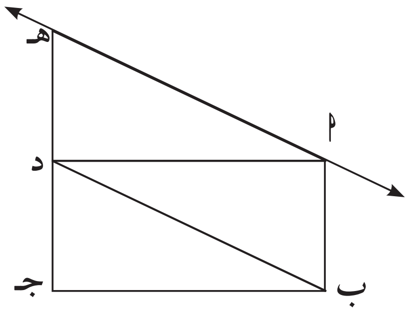
٦ نفّذ الإنشاء التالي:
(أ) ارسم أب بطول ٥ سم.
(ب) عيّن هـ منتصف أب.
(جـ) ارسم جـ د التي منتصفها هـ، بطول ٥ سم، على أن يكون ق(جـ هـ أ) = ٦٠°.
(د) ارسم الشكل الرباعي أجـ ب د.
(هـ) ما نوع الشكل الرباعي أب جـ د؟ لماذا؟

٧ ارسم مستطيلًا أب جـ د مركزه م، ثم عيّن النقطة هـ على أن يكون أم ب هـ متوازي أضلاع.
(أ) ما نوع الشكل الرباعي أم ب هـ؟ علّل إجابتك.
(ب) ماذا يمكنك أن تقول عن أب، م هـ؟ لماذا؟

٨ ارسم المعين أب جـ د.
(أ) عيّن على الرسم النقاط: هـ، و، ز، ط منتصفات جـ د، د أ، ب أ، ب جـ، على الترتيب.
(ب) أثبت أن هـ وزط متوازي أضلاع.

٩ في الشكل، أوجد قيم س، ص إذا كان أب جـ د متوازي أضلاع.





١٠ م ب جـ د مستطيل.

رسم من النقطة م مستقيمًا موازيًا للمستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ يلتقي مع $\overleftarrow{\text{جـ د}}$ في النقطة هـ.

(أ) ما نوع الشكل الرباعي م ب د هـ؟ فسّر.

(ب) أثبت أن د منتصف $\overline{\text{جـ هـ}}$.

(جـ) أثبت أن المثلث م جـ هـ متطابق الضلعين رأسه م.

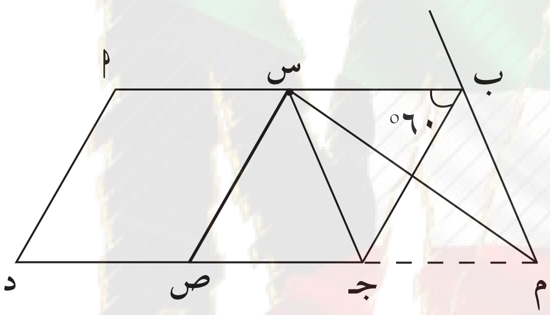
١١ م ب جـ د متوازي أضلاع، حيث:

م ب = ٢ ب جـ.

س منتصف $\overline{\text{م ب}}$.

ق (م $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ٦٠°

رسم من النقطة ب مستقيمًا موازيًا للمستقيم $\overleftrightarrow{\text{س جـ}}$ ويلتقي مع $\overleftarrow{\text{د جـ}}$ في م.



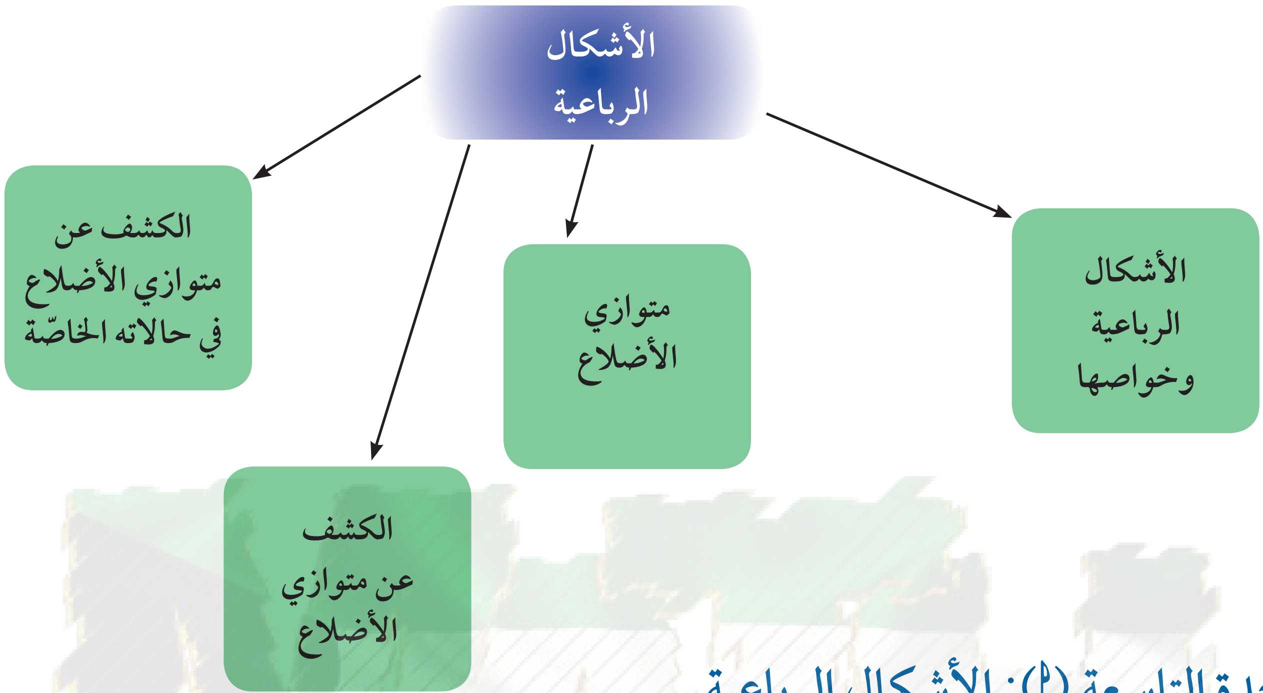
(أ) ما نوع الشكل الرباعي ب م جـ س؟ اشرح إجابتك.

(ب) إذا كانت ص منتصف $\overline{\text{جـ د}}$. ما نوع الشكل الرباعي ب جـ ص س؟

اشرح إجابتك.

(جـ) ما نوع المثلث م س ص من حيث زواياه ؟ فسّر.

مخطط تنظيمي للوحدة التاسعة



الوحدة التاسعة (أ): الأشكال الرباعية

- الشكل الرباعي هو مضلع له أربعة أضلاع.
- توجد ستة أنواع خاصة من الأشكال الرباعيّة: شبه المنحرف - متوازي الأضلاع - المستطيل - المعين - المربّع - الطائرة الورقية.
- متوازي الأضلاع هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان.
- في متوازي الأضلاع مجموع قياس أي زاويتين متتاليتين = ١٨٠°.
- كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متساويتان في القياس.
- كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متساويان في الطول وقطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.
- يكون رباعي متوازي أضلاع إذا توافر فيه أحد الشروط التالية:

(أ) توازي الأضلاع المتقابلة.

(ب) تطابق الأضلاع المتقابلة.

(جـ) توازي ضلعين متقابلين وتطابقهما.

(د) تساوي القياس للزوايا المتقابلة.

(هـ) تقاطع القطرين في منتصف كليهما.

- هناك ثلاث حالات خاصّة من متوازيات الأضلاع وهي:

مستطيل: متوازي أضلاع زواياه قائمة.

المعين: متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان في الطول ويكون القطران متعامدين.

المربّع: متوازي أضلاع زواياه قائمة وأضلاعه متساوية في الطول.