الوحدة الثامنة

هندسة المثلث

Geometry of Triangle

شعوب العالم

لدى الصينيين لعبة تسمى "التنغرام"، تعتمد على إنشاء أشكال مختلفة باستخدام المثلثات كما في الصورة أدناه.

علوم

عند الحديث عن الضوء، لا بد أن نذكر المنشور ثلاثي القاعدة. فهو يبدو كمثلث مهمته تفكيك الضوء الأبيض إلى ضوء ملون بألوان قوس قزح.

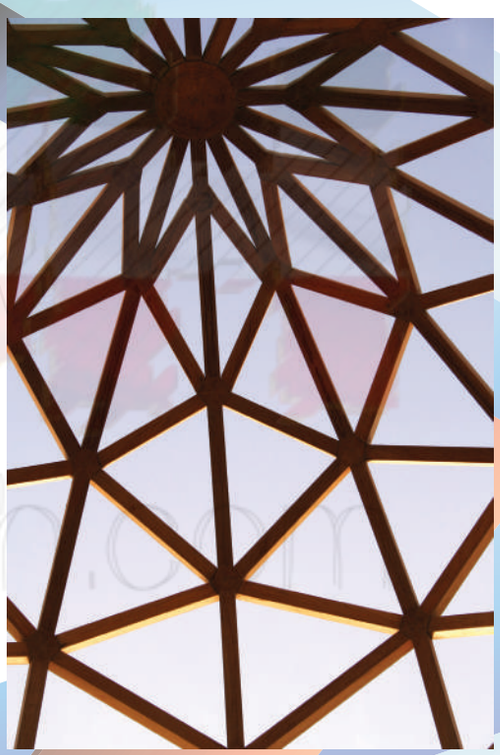
تسلية

يعتبر مثلث سربنسكي من أهم المثلثات الموجودة في العالم. وقد صمم من قطع مثلثات صغيرة داخل مثلث مظلل بطريقة متكررة.

KuwaitMath.com

هندسة

يتألف برج الكويت من ثلاثة أبراج مترابطة تقع في العاصمة الكويت. تبيّن الصورة البرج الأساسي منه الذي يبلغ ارتفاعه ١٨٧ مترًا. وتحيط بطبقاته العليا كرة زجاجية مقطعة على شكل مثلثات متطابقة.



أفكار رياضية أساسية

يتطابق مثلثان إذا:

- تطابقت ثلاثة أضلاع في مثلث مع الأضلاع المناظرة لها في مثلث آخر.
- تطابق ضلعان في مثلث بالضلعين المناظرين لهما في مثلث آخر، وتطابقت الزاوية المحددة بالضلعين في المثلث الأول بالزاوية المناظرة لها في المثلث الثاني.
- تطابقت زاويتان في مثلث بالزاويتين المناظرتين لهما في مثلث آخر، وتطابق الضلع الواصل بين رأسيهما في المثلث الأول بالضلع المناظر له في المثلث الآخر.
- تطابق ضلع ووتر في مثلث قائم الزاوية بالضلع والوتر المناظرين لهما في مثلث آخر قائم الزاوية.

KuwaitMath.com

مشروع الوحدة

حل المسائل
افهم
خطط
حل
تحقق

سوف تنشئ في هذا المشروع جسرًا كرتونيًّا صغيرًا أو جسرًا من عيدان الثقاب مستخدمًا المثلثات.

التركيز على حل المسائل

مراجعة المسألة
راجع خطوات الحل للتأكد من معقولية الإجابة في كل مسألة.

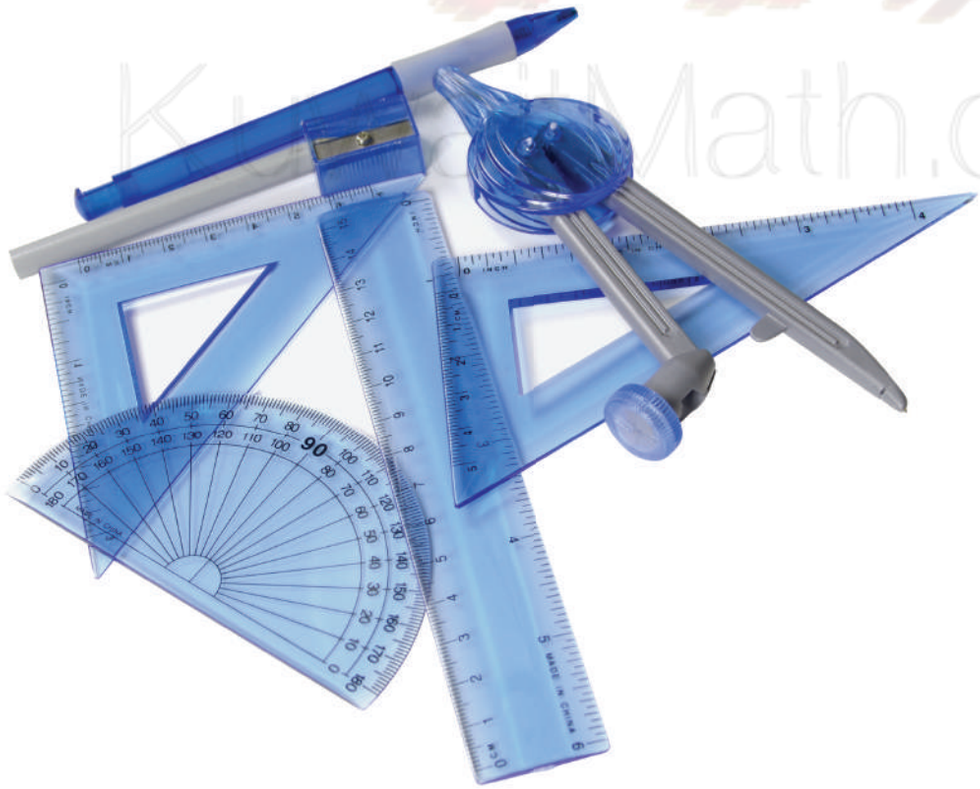
لكل من المسائل التالية إجابة. لكنها ليست بالضرورة إجابة صحيحة. اشرح سبب صحة الإجابة أو خطئها.

١ يريد أحمد أن يرسم مثلثًا متطابق الضلعين. إذا تساوت زاويتان بقياس ٧٠° لكل منهما، أوجد قياس الزاوية الثالثة.
الإجابة: ١١٠°

٢ قاس حمد ضلعي مثلث. فوجد أن طول كل منهما يساوي ١٥ سم. وكان قياس إحدى زواياه ٦٠°. فما هو قياس الضلع الثالث لهذا المثلث؟
الإجابة: ١٥ سم

٣ محيط مثلث يساوي ٦٠ سم. ما نوع هذا المثلث إذا كان طولا ضلعين يساويان ٢٠ سم.
الإجابة: قائم متطابق الضلعين

٤ أوجد مساحة مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين، طول ضلعه ١٠ سم وطول وتره $١٠\sqrt{٢}$ سم.
الإجابة: ٥٠ سم^٢



KuwaitMath.com

الوحدة الثامنة (٢)

تطابق المثلثات

Congruence of Triangles

تمت تكملة بناء جسر أكاشي (جسر اللؤلؤة) في اليابان عام ١٩٩٨. وهو مقسم إلى ثلاثة أجزاء. يبلغ طول الجزء الأساسي ١٩٩١ مترا، وكل من الجزئين الآخرين ٩٦٠ مترًا. وبفعل الهزة الأرضية التي حدثت عام ١٩٩٥ تمدد الجزء الأساسي لمتر واحد. بالنظر عن قرب إلى الجسر، نرى سلسلة من المثلثات المتراصة، تستخدم هذه المثلثات في بناء الجسور لما لها من مميزات بين الأشكال الهندسية الأخرى.

١ ما أنواع المثلثات التي تراها في الجسر؟

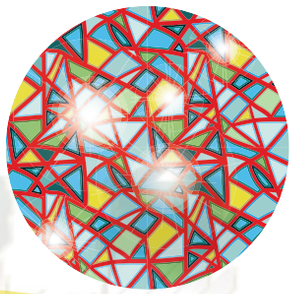
٢ ما هو تأثير الهزات الأرضية على المنشآت؟

١-٨

تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع
Congruent Triangles with SSS

سوف تتعلّم
- تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع.

من الاستخدامات
- يستخدم مصممو الواجهات الزجاجية الملونة المثلثات المتطابقة في الإنشاءات.



صلة الدرس سبق أن تعرّفت إلى المضلعات المتطابقة ومنها المثلثات المتطابقة، والآن سوف تتعلم حالة تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع.

استكشف — تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع

الأدوات المستخدمة: مسطرة، فرجار، ورق، مقص ، منقلة

١ يرسم كل طالب مثلثًا أطوال أضلاعه ٣ سم، ٤ سم، ٦ سم مستخدمًا المسطرة والفرجار.

٢ يقص كل طالب المثلث الذي رسمه.

٣ هل تتطابق المثلثات التي رسمها الطلاب؟

تعلّم — تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع

عند كتابة رموز مثلثين متطابقين يراعى الترتيب في كتابة الرؤوس المتناظرة.

إذا كان مثلثان متطابقين، فإن الأضلاع المتناظرة تكون متطابقة، كذلك تنطبق الرؤوس المتناظرة على بعضها بعضًا، أي أن الزوايا المتناظرة لها القياس نفسه.

المصطلحات الأساسية
- رمز التطابق هو: ≅
  Congruence Symbol: ≅
- ضلع: ض Side: S
- زاوية: ز Angle: A
- تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع
  Congruent Triangles with 3 Corresponding Sides

مثال (١)

المثلثان أ ب جـ، د هـ ز متطابقان. اكتب أزواج العناصر المتناظرة والمتطابقة.

الحل:

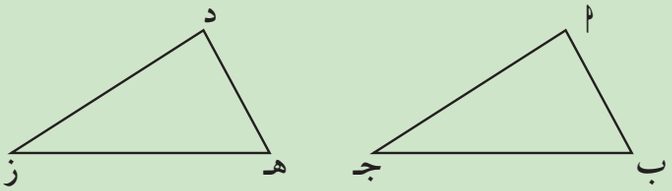
العناصر المتناظرة والمتطابقة:

$\angle أ \cong \angle د$ $\angle ب \cong \angle هـ$ $\angle جـ \cong \angle ز$

$\overline{أ ب} \cong \overline{د هـ}$

$\overline{ب جـ} \cong \overline{هـ ز}$

$\overline{أ جـ} \cong \overline{د ز}$



تذكر
للمثلث ستة عناصر: ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا.

حاولْ أن تحلّ

١ ارسم مثلثين متطابقين، واكتب أزواج الأضلاع المتطابقة.

٢ Δ س هـ م $\cong \Delta$ ل ع ب. دون رسم المثلثين، نظم قائمة بالعناصر المتناظرة والمتطابقة.

معلومة مفيدة
الحالة (ض.ض.ض) تعني أن طول كل ضلع في المثلث الأول يساوي طول الضلع المناظر له في المثلث الثاني.

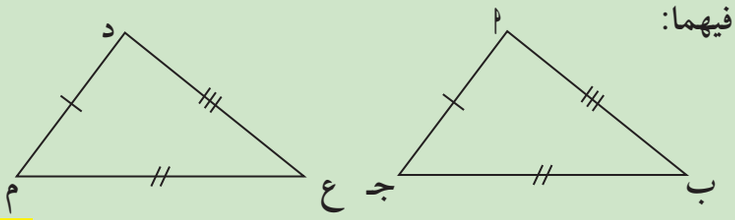
يتطابق المثلثان إذا تساوى طول كل ضلع في المثلث الأول مع طول نظيره في المثلث الثاني. يعبّر عن ذلك بحالة (ضلع، ضلع، ضلع) (ض. ض. ض).

KuwaitMath.com

مثال (٢)

اكتب أزواج الزوايا متساوية القياس.

الحل: Δ أ ب جـ ، Δ د ع م فيهما:



$\overline{أب} \cong \overline{دع}$

$\overline{أجـ} \cong \overline{دم}$

$\overline{ب جـ} \cong \overline{ع م}$

نستنتج أن Δ أ ب جـ ≅ Δ د ع م (ض. ض. ض.)

ومنه: $\hat{أ} \cong \hat{د}$ ، $\hat{ب} \cong \hat{ع}$ ، $\hat{جـ} \cong \hat{م}$

معلومة مفيدة

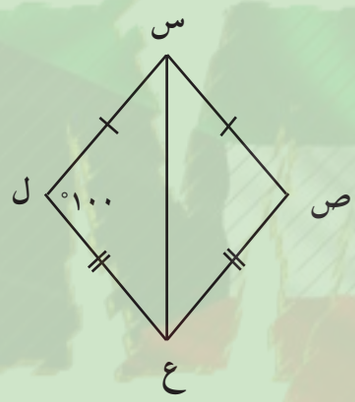
عند حل مسألة الهندسة نبدأ بكتابة المعطيات، ثم نحدد المطلوب ونستفيد منها في كتابة البرهان.

مثال (٣)

س ص ع ل شكل رباعي فيه:

س ص = س ل، ص ع = ل ع ، ق(س $\hat{ل}$ ع) = ١٠٠°.

أثبت أن ق(س $\hat{ص}$ ع) = ١٠٠°.



المعطيات: س ص ع ل شكل رباعي فيه

س ص = س ل ، ص ع = ل ع ، ق(س $\hat{ل}$ ع) = ١٠٠°

المطلوب: إثبات أن ق(س $\hat{ص}$ ع) = ١٠٠°

البرهان:

Δ س ص ع، Δ س ل ع فيهما:

س ص = س ل فرضًا

ص ع = ل ع فرضًا

س ع ضلع مشترك

∴ Δ س ص ع ≅ Δ س ل ع (ض.ض.ض)

وينتج من التطابق أن $\hat{ص} \cong \hat{ل}$

∴ ق(س $\hat{ص}$ ع) = ١٠٠°

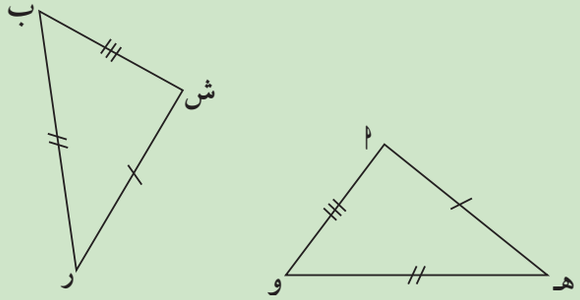
معلومة مفيدة

∵ يقرأ (بما أن)

∴ يقرأ (إذًا)

حاولْ أن تحلّ

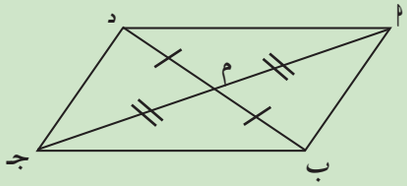
٣ أكمل مستخدمًا الشكلين المقابلين:



$\overline{أو} \cong$ ...

... $\cong \overline{ب ر}$ ... $\cong \overline{ش ر}$ Δ أ هـ و ≅ Δ ...

٤ في الشكل المقابل: أ ب جـ د متوازي أضلاع، حدّد مثلثين متطابقين.
اكتب أزواج العناصر المتناظرة والمتطابقة.



KuwaitMath.com

تحقّق من فهمك

١ لديك مثلثان كلًّا منهما متطابق الضلعين، متى يصبح هذين المثلثين متطابقين؟

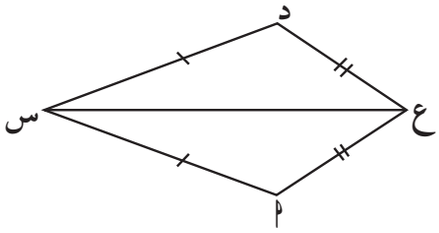
٢ لديك مثلثان كلًّا منهما متطابق الأضلاع، متى يصبح هذين المثلثين متطابقين؟

حلّ المسائل والتفكير المنطقي

١ في الشكل المقابل: $\overline{أ ع} \cong \overline{د ع}$

$\overline{س أ} \cong \overline{س د}$

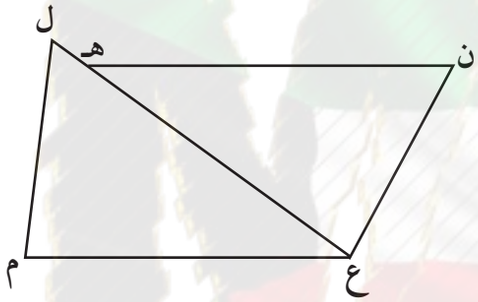
أثبت أن $\overleftrightarrow{س ع}$ منصف $\angle د س أ$.



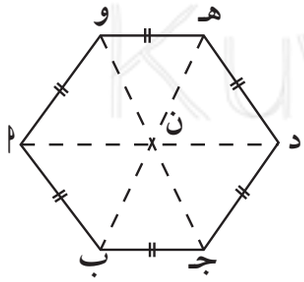
٢ في الشكل المقابل:

$\overline{ل م} \cong \overline{ن ع}$، $\overline{ع هـ} \cong \overline{ع م}$، $\overline{ع ل} \cong \overline{ن هـ}$

أوجد أزواج الزوايا متساوية القياس.

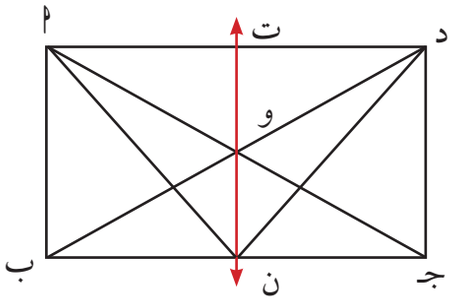


٣ في المضلع السداسي المنتظم المقابل، أثبت تطابق المثلثين أ ن و، ن د هـ.



٤ أ ب جـ د مستطيل و نقطة تقاطع قُطرَيه، ن منتصف $\overline{جـ ب}$، $\overleftrightarrow{ت ن}$ خط تناظر للمستطيل.

أثبت أن المثلثين أ ن جـ، د ن ب متطابقان.



إستراتيجيّات حلّ المسائل

- اختر نمطًا.
- نظّم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمّن وتحقّق.
- اعمل بطريقة عكسيّة.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حلّ مسألة أبسط.

KuwaitMath.com

٨-٢

تطابق مثلثين بضلعين والزاوية المحددة بهما
Congruent Triangles with SAS

سوف تتعلّم
- تطابق مثلثين بضلعين والزاوية المحددة بهما.

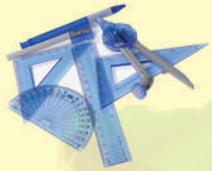
من الاستخدامات
- يستخدم النجارون الكثير من المثلثات المتطابقة في تنفيذ الديكور.

صلة الدرس سبق أن تعرّفت إلى تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع، والآن سوف تتعلم تطابق مثلثين بضلعين والزاوية المحددة بهما.

استكشف تطابق مثلثين بضلعين والزاوية المحددة بهما

الأدوات المستخدمة: مسطرة، ورق، مقص، منقلة

١ يرسم كل طالب مثلثًا طولا ضلعين فيه ٤ سم، ٥ سم وقياس إحدى زواياه ٦٠°. يختار كل طالب زاوية مختلفة عن زملائه.

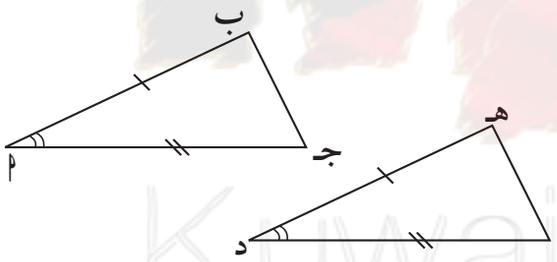


٢ يقص كل طالب المثلث الذي رسمه.

٣ هل تتطابق المثلثات التي رسمها الطلاب؟

تعلّم تطابق مثلثين بضلعين والزاوية المحددة بهما

يتطابق المثلثان إذا تطابق ضلعان والزاوية المحددة بهما في أحد المثلثين مع نظائرها في المثلث الآخر. ونعبر عن ذلك بحالة (ضلع، زاوية، ضلع) (ض. ز. ض).



فمثلًا في الشكل المقابل:

$\overline{أب} \cong \overline{دهـ}$

$\overline{أجـ} \cong \overline{دو}$

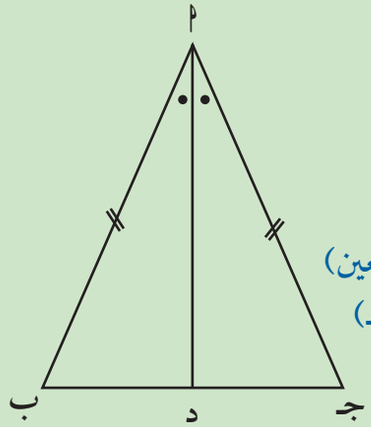
$\angle بأجـ \cong \angle هدو$

المثلثان أ ب جـ، د هـ و متطابقان.

نكتب: Δ أ ب جـ $\cong \Delta$ د هـ و.

مثال (١)

أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين. $\overline{أد}$ منصف زاوية الرأس ب أ جـ . أثبت أن المثلثين أ ب د، أ جـ د متطابقان.



المعطيات: أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين.

$\overline{أد}$ منصف زاوية الرأس ب أجـ.

المطلوب: إثبات أن Δ أ جـ د $\cong \Delta$ أ ب د.

البرهان: Δ أ جـ د، Δ أ ب د فيهما:

أجـ = أب (Δ أ ب جـ متطابق الضلعين)

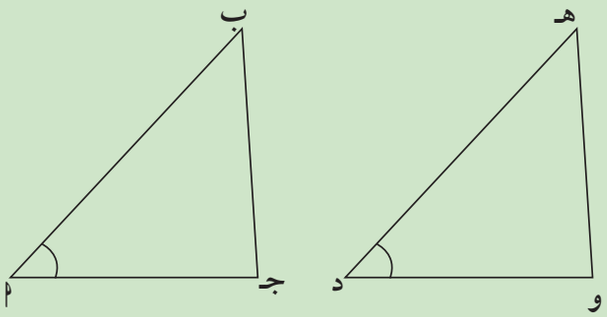
ق(∠جـأد) = ق(∠بأد) ($\overline{أد}$ منصف الزاوية ب أجـ)

$\overline{أد}$ ضلع مشترك

∴ Δ أجـ د $\cong \Delta$ أ ب د. (ض. ز. ض.)

KuwaitMath.com

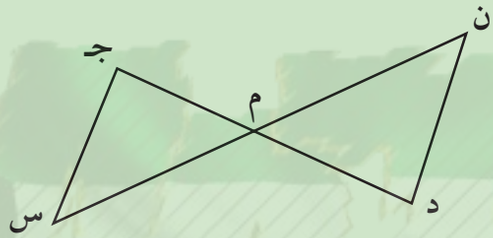
حاولْ أن تحلّ



١ في الشكل المقابل: أ ب = ٢,٥ سم، أ جـ = ٢ سم
ق(ب أ̂ جـ) = ٥٢°
د هـ = ٢,٥ سم د و = ٢ سم ق (هـ د̂ و) = ٥٢°
أثبت أن المثلثين متطابقان، ثم اكتب أزواج الزوايا المتطابقة الأخرى.

مثال (٢)

في الشكل المقابل إذا كان: $\overline{\text{ن س}}$ ، $\overline{\text{د جـ}}$ متقاطعتان في م،



$\overline{\text{م ن}} \cong \overline{\text{م س}}$

$\overline{\text{م د}} \cong \overline{\text{م جـ}}$

أثبت أن $\overline{\text{ن د}} \cong \overline{\text{س جـ}}$

المعطيات: م ن = م س

م د = م جـ

المطلوب: إثبات $\overline{\text{ن د}} \cong \overline{\text{س جـ}}$

البرهان: المثلثان م ن د، م س جـ فيهما:

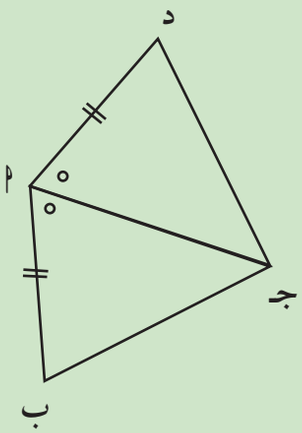
م ن = م س فرضًا

م د = م جـ فرضًا

ق(ن م̂ د) = ق(س م̂ جـ) زاويتان متقابلتان بالرأس

∴ Δ م ن د ≅ Δ م س جـ بحالة (ض.ز.ض)

ونستنتج أن $\overline{\text{ن د}} \cong \overline{\text{س جـ}}$



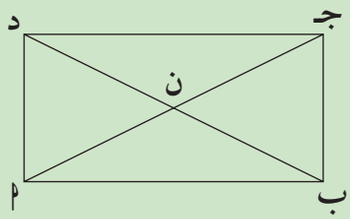
حاولْ أن تحلّ

٢ في الرسم المقابل، أثبت أن $\overline{\text{د جـ}} \cong \overline{\text{ب جـ}}$.

KuwaitMath.com

مثال (٣)

أ ب جـ د مستطيل، ن نقطة تقاطع قطريه.
أثبت أن المثلثين ن د أ، ن ب جـ متطابقان.



المعطيات: أ ب جـ د مستطيل يتقاطع قطراه في ن.
المطلوب: إثبات أن Δ ن د أ ≅ Δ ن ب جـ
البرهان:
في المثلثين ن د أ، ن ب جـ:

ن ب = ن د	قطرا المستطيل ينصف كلّ منهما الآخر
ن جـ = ن أ	قطرا المستطيل ينصف كلّ منهما الآخر
ق(جـ $\hat{ن}$ ب) = ق(أ $\hat{ن}$ د)	زاويتان متقابلتان بالرأس
نستنتج: Δ ن ب جـ ≅ Δ ن د أ	بحالة (ض.ز.ض)

حاولْ أن تحلّ

٣ أ ب جـ د متوازي أضلاع، ن نقطة تلاقي قطريه.
أثبت أن: Δ أ ن ب ≅ Δ جـ ن د.

تحقّق من فهمك

١ هل يتطابق مثلثان قائما الزاوية في حالة (ض.ز.ض)؟

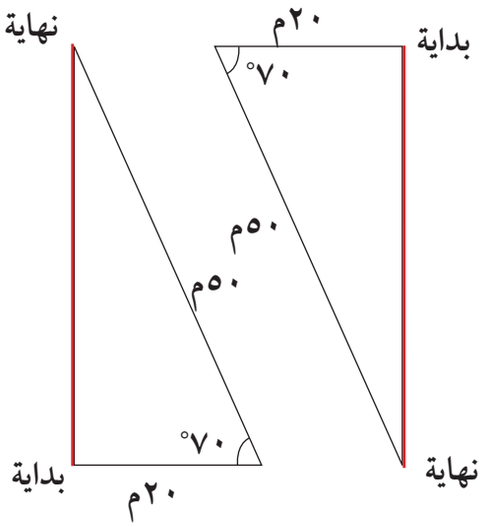
٢ كم زوجًا من المثلثات المتطابقة يمكن الحصول عليها باستخدام رؤوس متوازي أضلاع ونقطة تلاقي قطريه؟

KuwaitMath.com

المرشد لحل المسائل (٨-٢)

حل المسائل
افهم
خطط
حل
تحقق

سلك شخصان طريقين مختلفين حيث يتمثل كل طريق بالخط الأحمر في الرسم المقابل. عند النهاية استنتجا أن لكلا الطريقين المسافة نفسها. أي حالة من حالات تطابق المثلثات تمكنهما من التأكد من صحة هذا الاستنتاج؟



افهم

١ ما هي أطوال أضلاع كل مثلث وقياسات زواياه؟ .....

خطّط

٢ هل الزوايا متطابقة؟ فسّر. .....

٣ هل الأضلاع متطابقة؟ فسّر. .....

٤ أين تقع الزوايا المتطابقة بالنسبة إلى الأضلاع المتطابقة؟ .....

حلّ

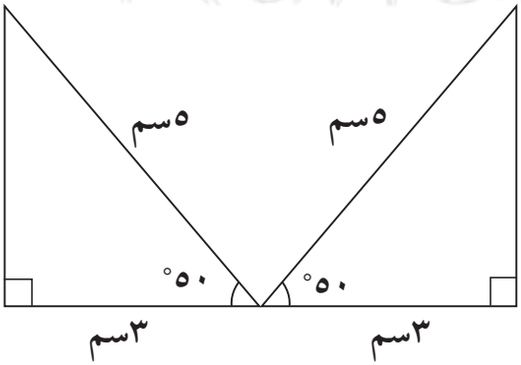
٥ حدّد الحالة التي استخدمتها لتثبت أن المثلثين متطابقان؟ .....

تحقّق

٦ كيف يمكن للشخصين أن يتحققا بطريقة أخرى من أن المسافة هي نفسها؟ .....

حلّ مسألة أخرى

٧ استنتج طالب أن ارتفاع المثلثين المتلاصقين في الرسم المقابل هو نفسه. حدّد الحالة التي استخدمها الطالب في استنتاجه؟



.....

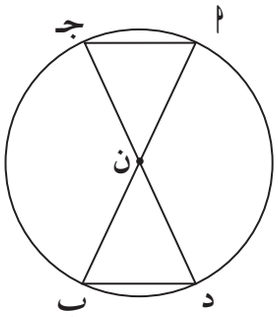
.....

.....

KuwaitMath.com

حلّ المسائل والتفكير المنطقي

١ ن هو مركز الدائرة، $\overline{أب}$، $\overline{جـ د}$ قطران فيها.
أثبت تطابق المثلثين ن أ جـ، ن د ب.

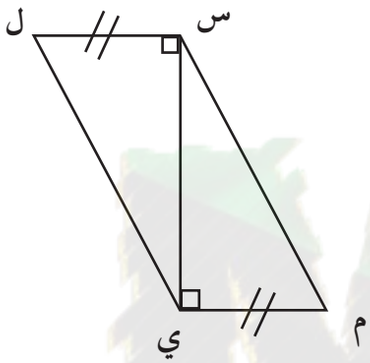


.....

.....

.....

٢ أ أثبت تطابق المثلثين ي س ل، س ي م.



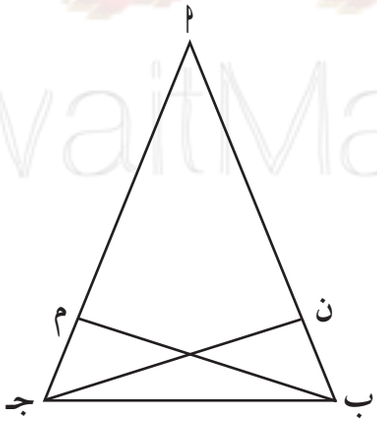
.....

.....

.....

ب أكمل: ق (م̂) = ق (...)

٣ في الشكل المقابل، أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين فيه: أ ب = أ جـ، أن = أ م.
أثبت أن المثلثين أ ب م، أ جـ ن متطابقان.



.....

.....

.....

.....

KuwaitMath.com

إستراتيجيّات حلّ المسائل

- اختر نمطًا.
- نظّم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمّن وتحقّق.
- اعمل بطريقة عكسيّة.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حلّ مسألة أبسط.

٨-٣

تطابق مثلثين بزاويتين وضلع واصل بين رأسيهما
Congruent Triangles with ASA

سوف تتعلّم

- تطابق مثلثين بتطابق زاويتين وضلع واصل بين رأسيهما.

من الاستخدامات

- يستخدم البلاطون المثلثات المتطابقة في تنفيذ الفسيفساء.

تذكر

مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي ١٨٠°.

صلة الدرس سبق أن تعرّفت تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع وتطابق مثلثين بضلعين والزاوية المحددة بهما، والآن سوف تتعلم تطابق مثلثين بزاويتين وضلع واصل بين رأسيهما.

استكشف تطابق مثلثين بتطابق زاويتين والضلع الواصل بين رأسيهما

الأدوات المستخدمة: مسطرة، ورق، مقص، منقلة

١ يرسم كل طالب مثلثًا، مستخدمًا البيانات التالية: طول أحد الأضلاع ٤ سم، وقياس زاويتين من زواياه ٦٠°، ٤٥°.

٢ يقص كل طالب المثلث الذي رسمه.

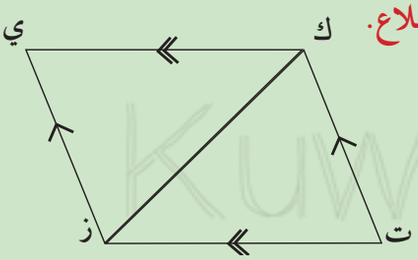
٣ يحاول الطلاب مطابقة المثلثات التي حصلوا عليها. هل تتطابق كل المثلثات؟

تعلّم تطابق مثلثين بتطابق زاويتين والضلع الواصل بين رأسيهما

يتطابق المثلثان إذا تطابقت زاويتان والضلع الواصل بين رأسيهما في أحد المثلثين مع الزاويتين والضلع المناظر لها في المثلث الآخر. ونعبر عن ذلك بحالة (زاوية، ضلع، زاوية) (ز.ض.ز).

أمثلة

١ في الرسم المقابل، ك ت ز ي متوازي الأضلاع.
أثبت أن المثلثين ت ك ز، ي ز ك متطابقان.



المعطيات: ك ت ز ي متوازي أضلاع.

المطلوب: إثبات أن Δت ك ز ≅ Δي ز ك.

البرهان: المثلثان ت ك ز، ي ز ك فيهما:

ق(ت $\hat{ك}$ ز) = ق(ي $\hat{ز}$ ك) بالتبادل والتوازي

ق(ت $\hat{ز}$ ك) = ق(ي $\hat{ك}$ ز) بالتبادل والتوازي

$\overline{ك ز}$ ضلع مشترك

∴ المثلثان ت ك ز، ي ز ك متطابقان بحالة (ز.ض.ز).

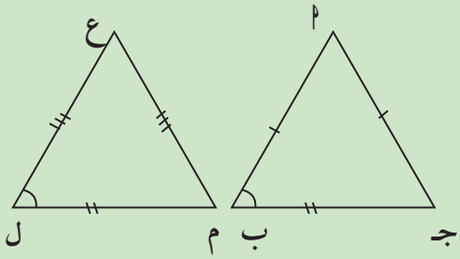
حاولْ أن تحلّ

١ في الشكل كل من المثلثين أ ب جـ، ع ل م متطابق الضلعين.

ق($\hat{ل}$) = ق($\hat{ب}$)

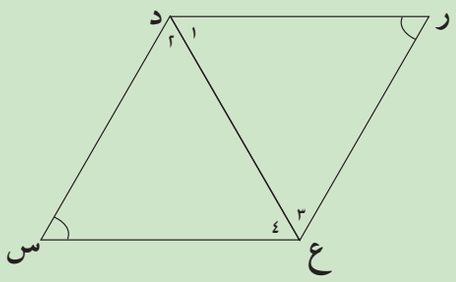
م ل = جـ ب

أثبت أن ق($\hat{أ}$) = ق($\hat{ع}$).



❷ في الشكل إذا كان: ق (ر̂) = ق (س̂)، ق (١̂) = ق (٢̂)

أثبت تطابق Δ ر د ع، Δ س د ع



المعطيات: ق (ر̂) = ق (س̂)، ق (١̂) = ق (٢̂).

المطلوب: إثبات أن Δ ر د ع ≅ Δ س د ع.

البرهان: في الشكل المثلثان ر د ع، س د ع فيهما:

د ع ضلع مشترك (١)

ق(١̂) = ق(٢̂) معطى (٢)

ق(ر̂) = ق(س̂) معطى

ق(١̂) + ق(ر̂) + ق(٣̂) = ق(٢̂) + ق(س̂)

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي ١٨٠°

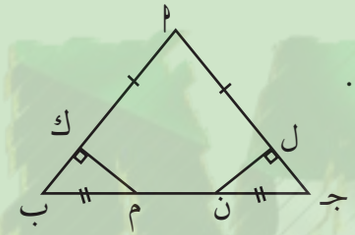
يكون ق(٣̂) = ١٨٠° − [ق(١̂) + ق(ر̂)]

ق(٤̂) = ١٨٠° − [ق(٢̂) + ق(س̂)]

وعليه تكون ق(٣̂) = ق(٤̂) (٣)

من (١)، (٢)، (٣) المثلثان ر د ع ، س د ع متطابقان بحالة (ز.ض.ز).

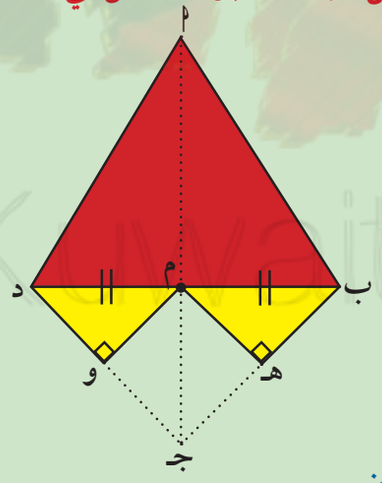
حاولْ أن تحلّ



❷ مستخدمًا الشكل المقابل، أثبت تطابق المثلثين جـ ن ل، ب م ك.

❸ التوازن شرط أساسي لارتفاع الطائرة الورقية. صنع فيصل طائرته وأراد إعطاءها شكلًا مختلفًا فاقتطع قسمًا منها لتصبح كما هو مبيّن في الشكل. إذا كان المثلثان م ب د، جـ ب د كل منهما متطابق الضلعين في م، جـ على الترتيب، م منتصف $\overline{ب د}$.

فأثبت تطابق المثلثين ب م هـ ، د م و للتحقق من توازن الطائرة.



المعطيات: م منتصف $\overline{ب د}$.

Δ جـ ب د متطابق الضلعين في جـ.

ق (هـ̂) = ق (و̂) = ٩٠°

المطلوب: إثبات أن Δ ب م هـ ≅ Δ د م و

البرهان: في الشكل المثلثان ب م هـ، د م و فيهما:

ب م = م د م منتصف $\overline{ب د}$ (١)

ق (هـ̂) = ق (و̂) = ٩٠° فرضًا (٢)

ق (هـ ب̂ م) = ق (و د̂ م) خاصية المثلث متطابق الضلعين

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي ١٨٠°، ق (هـ̂) + ق (هـ ب̂ م) = ق (و̂) + ق (و د̂ م)

يكون ق (ب م̂ هـ) = ١٨٠° − [ق (هـ̂) + ق (هـ ب̂ م)]

ق (د م̂ و) = ١٨٠° − [ق (و̂) + ق (و د̂ م)]

وعليه يكون ق (ب م̂ هـ) = ق (د م̂ و) (٣)

من (١)، (٢)، (٣) المثلثان ب م هـ، د م و متطابقان بحالة (ز.ض.ز)، إذًا فالطائرة متوازنة.

تحقّق من فهمك

❶ إذا تطابقت ثلاث زوايا في أحد المثلثين مع نظائرها في المثلث الآخر، فهل يتطابق المثلثان؟ ارسم مثلثين لدعم إجابتك.

KuwaitMath.com

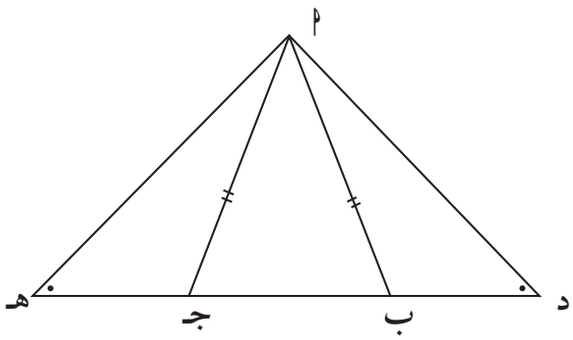
المرشد لحل المسائل (٨-٣)

حل المسائل
افهم
خطط
حل
تحقق

في الشكل المقابل :

أ ب = أ جـ ، ق (أ د̂ ب) = ق (أ هـ̂ جـ).

أثبت أن المثلثين أ ب د ، أ جـ هـ متطابقان.



افهم

١ المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين إذًا ق (.....̂) = ق (.....̂).

٢ ما عليك تبيانه لإثبات تطابق المثلثين؟ .....

خطّط

٣ ماذا تعرف عن الزوايا الخارجة في المثلث أ ب جـ؟ أثبت ذلك. .....

.....

.....

٤ هل هناك معطيات أخرى تساعد في الحل؟ .....

حلّ

٥ أثبت أن ق (أ ب̂ د) = ق (أ جـ̂ هـ). .....

٦ استنتج أن ق (ب أ̂ د) = ق (جـ أ̂ هـ). .....

٧ ما الحالة التي تسمح لك بتأكيد تطابق المثلثين أ ب د، أ جـ هـ؟ (ض.ض.ض)، (ض.ز.ض)، (ز.ض.ز)؟

.....

تحقّق

٨ أثبت أن أ د = أ هـ. .....

٩ بما أن ق (ب أ̂ د) = ق (جـ أ̂ هـ) (سؤال رقم ٦) إذًا الحالة ..... تسمح بتأكيد تطابق المثلثين أ ب د، أ جـ هـ.

حلّ مسألة أخرى

١٠ أثبت تطابق المثلثين أ جـ د، أ ب هـ في الرسم أعلاه.

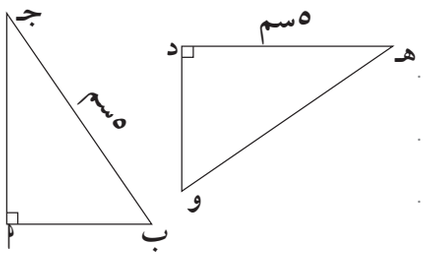
.....

.....

KuwaitMath.com

حلّ المسائل والتفكير المنطقي

١ في الشكل المقابل لماذا لا يمكن أن يتطابق المثلثان أ ب جـ، د و هـ؟

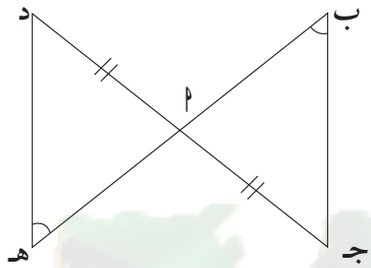


.....

.....

.....

٢ أثبت تطابق المثلثين أ ب جـ، أ هـ د في الشكل المقابل.



.....

.....

.....

٣ أ ب جـ د متوازي أضلاع مركزه ن. أوجد أزواجًا من المثلثات المتطابقة.

.....

.....

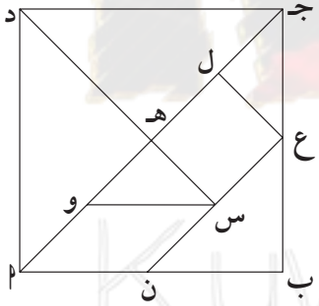
.....

٤ التنغرام شكل هندسي مربع مقسم إلى مضلعات. تقطع المضلعات ويعاد تجميعها لتشكل رسومًا جميلة، حدد أزواج المثلثات المتطابقة في الشكل المقابل علمًا بأن:

هـ مركز المربع.

ع منتصف $\overline{ب جـ}$، ن منتصف $\overline{ب أ}$

ل منتصف $\overline{جـ هـ}$، و منتصف $\overline{هـ أ}$



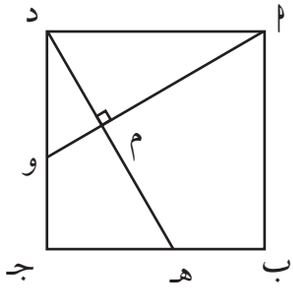
.....

.....

.....

٥ أ ب جـ د مربع $\overline{د هـ}$ ، $\overline{أ و}$ قطعتان مستقيمتان تتقاطعان بزاوية قائمة عند النقطة م.

أثبت أن: Δ أ د و $\cong \Delta$ د جـ هـ



.....

.....

.....

إستراتيجيّات حلّ المسائل

- اختر نمطًا.
- نظّم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمّن وتحقّق.
- اعمل بطريقة عكسيّة.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حلّ مسألة أبسط.

KuwaitMath.com

٨–٤

تطابق مثلثين قائمي الزاوية
Congruency of Right Triangles

صلة الدرس سبق أن تعرّفت حالات تطابق المثلثين، والآن سوف تتعرف حالة تطابق مثلثين قائمي الزاوية.

سوف تتعلّم
- تطابق مثلثين قائمي الزاوية.

من الاستخدامات
- يستخدم الكشافة تطابق المثلثات القائمة الزاوية عند نصب خيمهم.

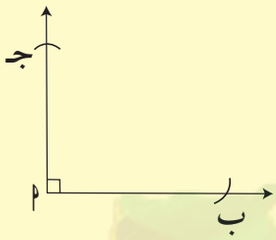
المصطلحات الأساسية
- زاوية قائمة
Right Angle
- مثلث قائم الزاوية
Right Triangle

استكشف تطابق مثلثين قائمي الزاوية

الأدوات المستخدمة: ورق، مسطرة، فرجار، مقص، منقلة

١ يرسم كل طالب زاوية قائمة.

٢ يعيّن الطالب بواسطة الفرجار النقطة جـ التي تنتمي إلى أحد الضلعين بحيث يكون طول $\overline{أجـ}$ يساوي ٥ سم.



٣ يرسم قوسًا يقطع الضلع الآخر للزاوية في ب، بواسطة الفرجار أيضًا انطلاقًا من النقطة جـ وبفتحة قياسها ٧ سم.

٤ يصل بين النقطتين ب ، جـ. ثم يقص المثلث الناتج.

٥ هل تتطابق المثلثات التي تمّ رسمها؟

تعلّم تطابق مثلثين قائمي الزاوية

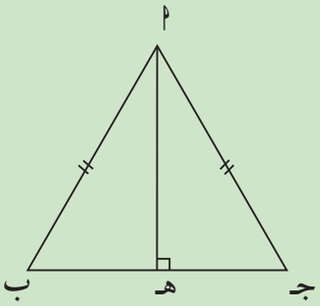
تتطابق المثلثات قائمة الزاوية التي رسمها الطلاب، لكن هذا التطابق لا يتماشى مع الحالات الثلاث لتطابق المثلثات التي تم التعرف إليها سابقًا.

يتطابق مثلثان قائما الزاوية إذا تطابق وتر وضلع في أحدهما مع وتر وضلع في المثلث الثاني(∡. و.ض).

أمثلة

١ أب جـ مثلث متطابق الضلعين ($\overline{أجـ} \cong \overline{أب}$) ، $\overline{أهـ} \perp \overline{جـ ب}$.

أثبت تطابق المثلثين أ هـ جـ، أ هـ ب.



المعطيات: $\overline{أجـ} \cong \overline{أب}$؛
$\overline{أهـ} \perp \overline{جـ ب}$

المطلوب: إثبات تطابق المثلثين أهـ جـ، أهـ ب.

البرهان: المثلثان أهـ جـ، أهـ ب فيهما:

$\overline{أجـ} \cong \overline{أب}$ معطى

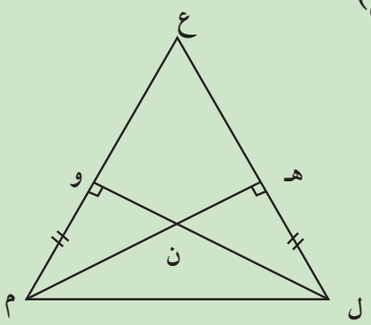
KuwaitMath.com

∵ $\overline{أهـ} \perp \overline{جـ ب}$

∴ ق(∠أهـ جـ) = ق(∠أهـ ب) = ٩٠°.

$\overline{أهـ}$ ضلع مشترك

نستنتج أن Δ أهـ جـ ≅ Δ أهـ ب. (تطابق مثلثين قائمي الزاوية) بحالة (∠. و.ض)

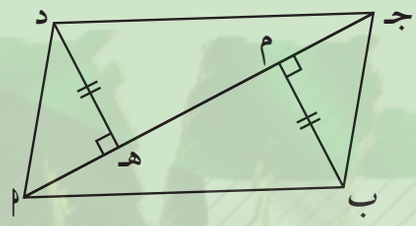


حاولْ أن تحلّ

١ أثبت تطابق المثلثين ل و م، م هـ ل في الشكل المقابل.

٢ في الشكل أب جـ د متوازي أضلاع.

مستخدمًا معطيات الشكل، أثبت أن جـ م = أهـ.



المعطيات: أب جـ د متوازي أضلاع.

$\overline{ب م} \cong \overline{د هـ}$

ق(∠ب م جـ) = ق(∠د هـ أ) = ٩٠°

المطلوب: إثبات أن جـ م = أهـ.

البرهان:

في الشكل، المثلثان ب م جـ، د هـ أ فيهما:

ب م = د هـ	معطى	(١)
ق(∠ب م جـ) = ق(∠د هـ أ) = ٩٠°	معطى	(٢)
ب جـ = أ د	خاصية الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع	(٣)

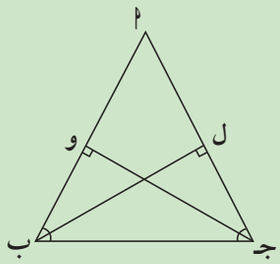
من (١)، (٢)، (٣) المثلثان ب م جـ ، د هـ أ متطابقان بحالة (∠. و. ض)

ومنه جـ م = أهـ

حاولْ أن تحلّ

٢ المثلث أب جـ متطابق الضلعين (أب = أجـ).

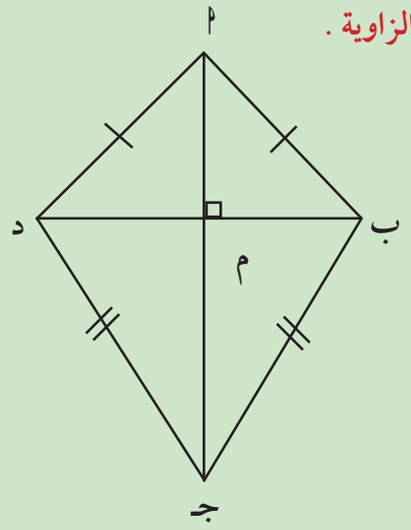
أثبت تطابق المثلثين ب ل جـ، جـ و ب في الشكل المقابل.



KuwaitMath.com

مثال (٣)

في شكل الطائرة الورقية المقابل، أوجد زوجين متطابقين من المثلثات قائمة الزاوية .



المعطيات:

أب = أد

ب جـ = د جـ

$\overline{\text{أجـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$

المطلوب: إيجاد زوجين متطابقين من المثلثات قائمة الزاوية.

البرهان:

في المثلثين أم ب، أم د:

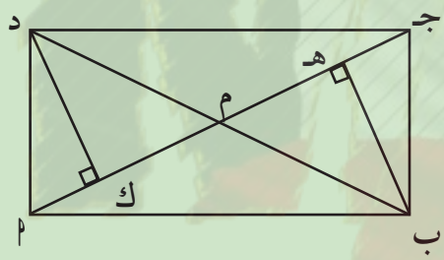
ق (أم$\hat{}$ ب) = ق (أم$\hat{}$ د) = ٩٠°

أب = أد فرضًا

أم ضلع مشترك

∴ المثلثان أم ب، أم د قائما الزاوية ومتطابقان.

ونبرهن بالطريقة نفسها أن المثلثين ب م جـ، د م جـ متطابقان.



حاولْ أن تحلّ

٣ في الشكل المقابل، أب جـ د مستطيل م نقطة تقاطع قطريه.

أثبت أن ب هـ = دك.

تحقّق من فهمك

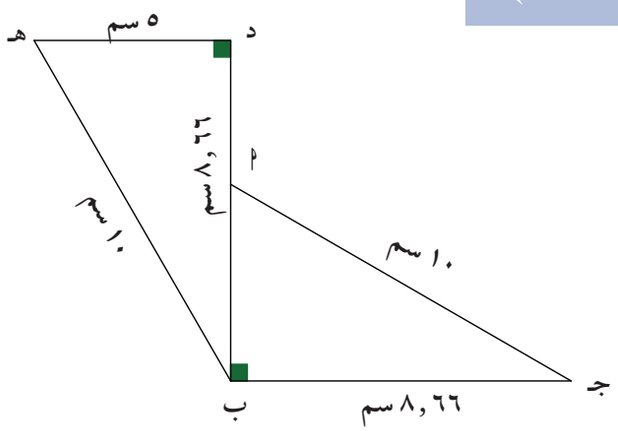
١ هل يمكن تطبيق حالات تطابق المثلثين إذا كان المثلثان قائمي الزاوية؟

٢ إذا اختلف طولا الوترين في مثلثين قائمي الزاوية، فهل يمكن أن يتطابقا؟

KuwaitMath.com

المرشد لحل المسائل (٨-٤)

حل المسائل
افهم
خطط
حل
تحقق



كم تبعد النقطة أ عن النقطة ب؟

أجب عن السؤال أعلاه مستخدمًا الرسم المقابل.

افهم

١ ما المطلوب إليك إيجاده؟ .....

خطّط

٢ ما الخاصية المشتركة بين المثلثين أ ب جـ، هـ د ب؟ .....

٣ ما أطوال أضلاع كل مثلث؟ .....

٤ هل الوتران متطابقان في كلا المثلثين؟ فسّر. .....

٥ هل للمثلثين ضلعان آخران متطابقان؟ ما هما؟ .....

٦ هل المثلثان أ ب جـ، ب د هـ متطابقان؟ حدد أي حالة استخدمت. .....

حلّ

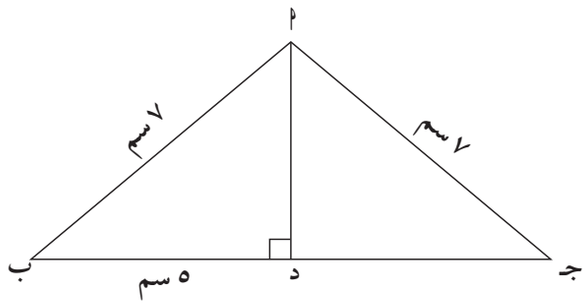
٧ ما هو الضلع المتطابق مع $\overline{أب}$؟ أوجد طوله. .....

تحقّق

٨ تحقق من طول $\overline{أب}$ مستخدمًا نظرية فيثاغورث. .....

حلّ مسألة أخرى

٩ مستخدمًا معطيات الشكل أدناه، أوجد طول $\overline{جـ د}$. .....



KuwaitMath.com

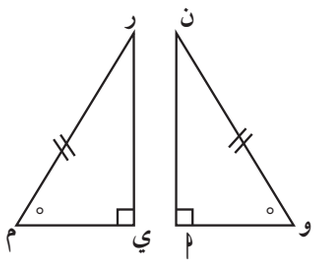
حلّ المسائل والتفكير المنطقي

١ المثلثان ن أ و، ر ي م قائما الزاوية

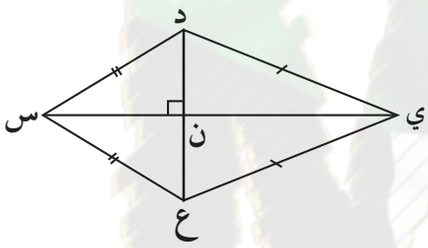
$\overline{\text{و ن}} \cong \overline{\text{م ر}}$

ق (ن و أ) = ق (ر م ي)

أثبت أن Δ ن أ و ≅ Δ ر ي م.



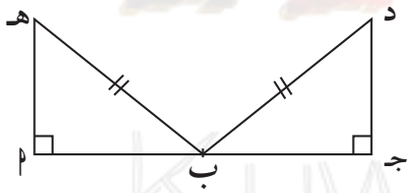
٢ **التفكير الناقد:** يمثل الشكل الرباعي المقابل شكل طائرة ورقية. اذكر جميع أزواج المثلثات قائمة الزاوية المتطابقة في الشكل، وبيّن حالة التطابق.



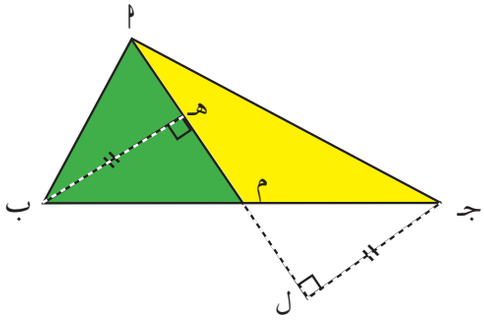
٣ في الشكل المقابل $\overline{\text{هـ ب}} \cong \overline{\text{د ب}}$.

جـ، أ قائمتان ، ب منتصف $\overline{\text{جـ أ}}$.

أثبت أن Δ أ ب هـ ≅ Δ جـ ب د.



٤ يبيّن الشكل المقابل مخططًا لقطعتي أرض متلاصقتين: أ ب م، أ جـ م. حيث م ب = م جـ. مستخدمًا معطيات الشكل هل قطعتا الأرض متطابقتين، أوجد مساحتي القطعتين وقارن بينهما.



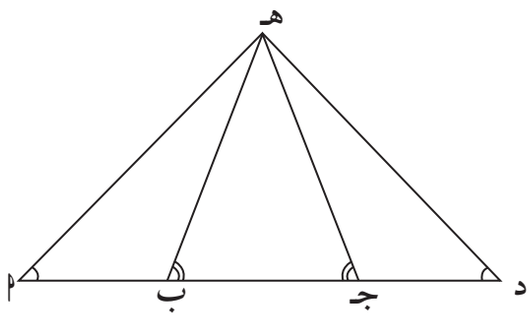
إستراتيجيّات حلّ المسائل

- اختر نمطًا.
- نظّم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمّن وتحقّق.
- اعمل بطريقة عكسيّة.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حلّ مسألة أبسط.

KuwaitMath.com

اختبار الوحدة الثامنة

١ مستخدمًا الرسم المقابل، أي من الجمل التالية صحيحة؟ فسّر.



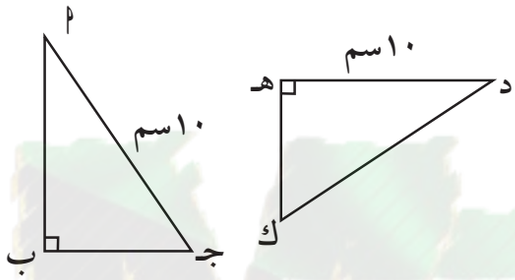
(أ) Δ م د هـ متطابق الضلعين.

(ب) Δ ب هـ جـ متطابق الضلعين.

(جـ) Δ م ب هـ ≅ Δ د جـ هـ.

(د) Δ هـ ب د ≅ Δ هـ جـ م.

٢ هل يتطابق المثلثان م ب جـ، هـ د ك؟ فسّر.

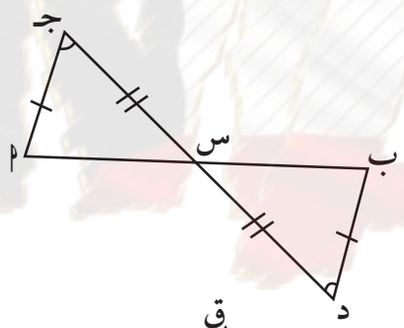


٣ في الرسم المقابل: إذا كان $\overline{م جـ} \cong \overline{ب د}$

$\overline{د س} \cong \overline{جـ س}$

ق (جـ̂) = ق (د̂)

أثبت أن النقطة س تنصف $\overline{م ب}$.

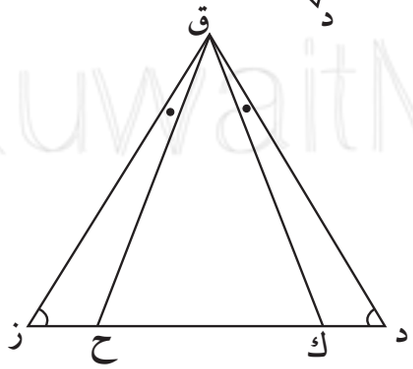


٤ إذا كان ق (ق د̂ ك) = ق (ق ز̂ ح)

ق (د ق̂ ك) = ق (ز ق̂ ح)

(أ) أثبت أن المثلث ك ق ح متطابق الضلعين في ق.

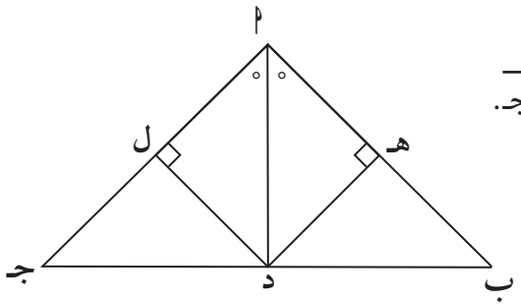
(ب) أثبت أن: د ح = ك ز.



٥ في الشكل المقابل:

(أ) أثبت أن د هـ = د ل.

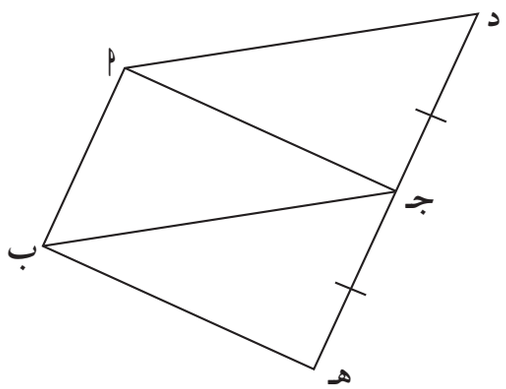
(ب) ضع النقطة م تنتمي إلى $\overline{م د}$. أثبت تساوي البعد بين م والقطعتين $\overline{م ب}$، $\overline{م جـ}$.



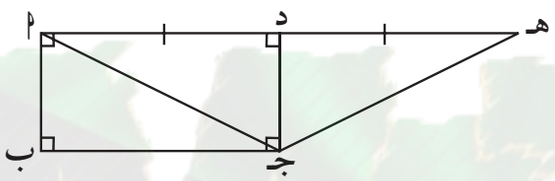
KuwaitMath.com

اختبار الوحدة الثامنة

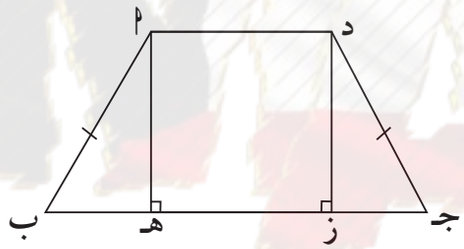
٦ ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع.
نأخذ هـ تنتمي إلى $\overleftarrow{د جـ}$ بحيث $\overline{جـ هـ} \cong \overline{د جـ}$.
أثبت أن: Δ ب هـ جـ ≅ Δ ﺃ جـ د.



٧ ﺃ ب جـ د مستطيل.
نأخذ هـ تنتمي إلى $\overleftarrow{ﺃ د}$ بحيث د هـ = ﺃ د.
أثبت أن: Δ د جـ هـ ≅ Δ ب ﺃ جـ.

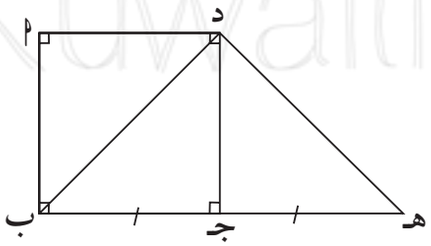


٨ ﺃ ب جـ د شبه منحرف متطابق الضلعين.
أثبت أن: $\overline{ﺃ هـ} \cong \overline{د ز}$.

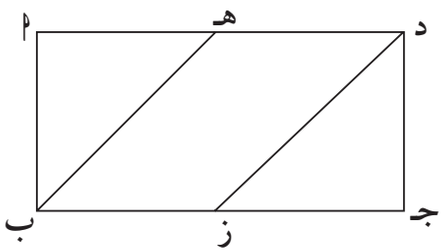


KuwaitMath.com

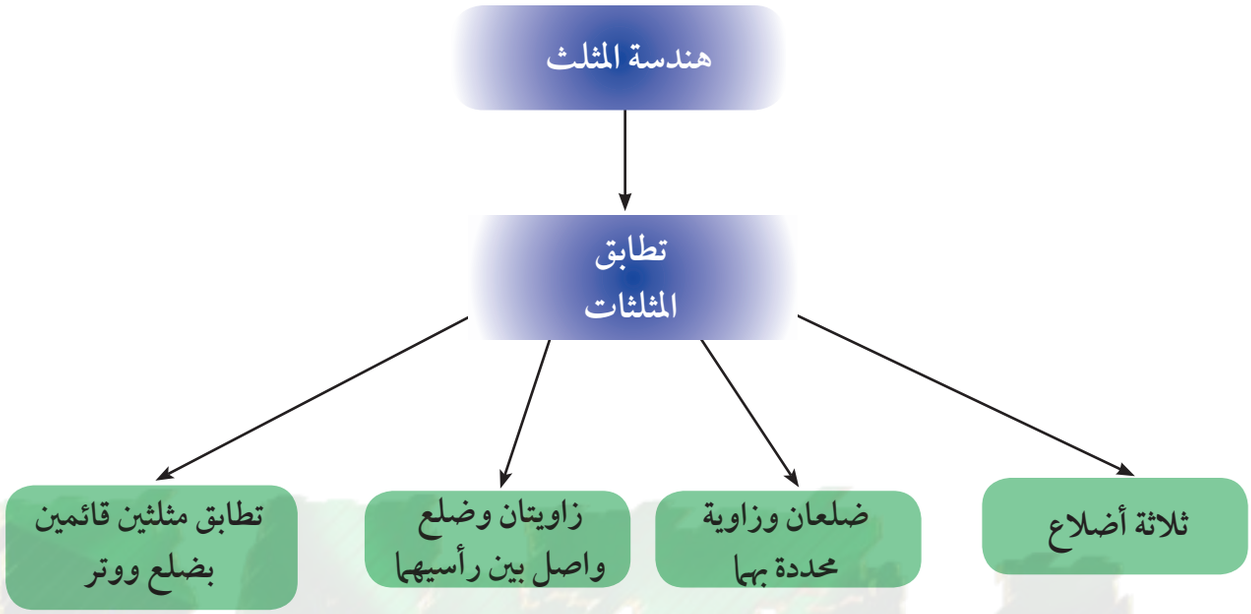
٩ ﺃ ب جـ د مربع.
النقاط ب، جـ، هـ على استقامة واحدة بحيث جـ هـ = جـ ب.
أثبت أن: Δ جـ هـ د ≅ Δ ﺃ ب د.



١٠ ﺃ ب جـ د مستطيل.
هـ منتصف $\overline{ﺃ د}$.
ز منتصف $\overline{جـ ب}$.
أثبت أن: Δجـ د ز ≅ Δ ﺃ ب هـ.

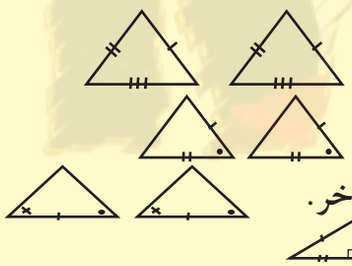


مخطط تنظيمي للوحدة الثامنة

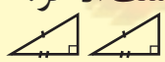


الوحدة الثامنة (٢): تطابق المثلثات

يتطابق مثلثان عندما:



- يتطابق ثلاثة أضلاع في مثلث مع الأضلاع المناظرة لها في المثلث الآخر.
- يتطابق ضلعان والزاوية المحددة بهما في مثلث مع نظائرها في المثلث الآخر.
- تتطابق زاويتان والضلع الواصل بين رأسيهما في مثلث مع نظائرها في المثلث الآخر.



- يتطابق ضلع ووتر في مثلث قائم الزاوية مع نظائرها في مثلث آخر.

KuwaitMath.com